Laboratorio de Microeconomía I

Centro de Investigación y Docencia Económicas
Maestría en Economía
Quiz 1

Matrícula: ____________________

Anote su matrícula con pluma, **no incluya su nombre**. Responda cada inciso de **forma detallada** y con **letra legible**.

Ejercicio 1 (20 puntos) Sea $\succsim$ una relación de preferencias definida sobre un conjunto de consumo X. Para todo $\mathbf{x^0}, \mathbf{x^1} \in X$, demuestre que:

(a) **(10 puntos)** Si $\mathbf{x^0} \nsim \mathbf{x^1}$, entonces

$$\sim(\mathbf{x^0}) \cap \sim(\mathbf{x^1}) = \emptyset.$$

(b) **(10 puntos)** Si $\mathbf{x^1} \in \sim(\mathbf{x^0})$, entonces

$$\sim(\mathbf{x^0}) = \sim(\mathbf{x^1})$$

Donde $\sim(\mathbf{x^0}) = \{\, \mathbf{z} \in X \mid \mathbf{z} \sim \mathbf{x^0} \,\}$ es el conjunto de indiferencia para cada $\mathbf{x^0} \in X$.

Ejercicio 2 (20 puntos) Sea $X \subset \mathbb{R}^2_+$ el conjunto de canastas (x_1, x_2) definidas como:

$$x_1 = \text{cantidad de café en Colombia el 10 de septiembre de 2025 a mediodía,}$$
$$x_2 = \text{cantidad de café en Chiapas el 10 de septiembre de 2025 a mediodía.}$$

Verifique si X satisface las propiedades mínimas requeridas para un conjunto de consumo.

Ejercicio 3 (30 puntos) Sea $X = \mathbb{R}^2_+$. Considere la relación de preferencias $\succsim$ sobre X definida por:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \quad \iff \quad x_1^2 + x_2^2 \leq y_1^2 + y_2^2$$

para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$.

(a) **(10 puntos)** Verifique **formalmente** si $\succsim$ es monótona.

(b) **(10 puntos)** Verifique **formalmente** si $\succsim$ es localmente no saciable.

(c) **(10 puntos)** Considere ahora la relación binaria $\succsim$ sobre X definida por:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, r > 0 \;\text{ tal que }\; x_1^2 + x_2^2 \leq y_1^2 + y_2^2 = r^2$$

Demuestre que $\succsim$ **no** es una relación de preferencias.

Ejercicio 4 (30 puntos) Sea $X = \mathbb{R}^2_+$. Considere la relación binaria $\succsim$ sobre X definida por:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \iff \begin{cases} x_2 > y_2, & \text{ó} \\ x_2 = y_2 \text{ y } x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2, & \text{ó} \\ x_2 = y_2 = 0 \text{ y } x_1 \geq y_1 \end{cases}$$

para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$.

(a) **(15 puntos)** A partir de la definción de $\succsim$, derive formalmente la definición de $\succ$ y $\sim$.

(b) **(15 puntos)** Demuestre que $\succsim$ no es continua.

Ejercicio 1 (20 puntos) Sea $\succsim$ una relación de preferencias definida sobre un conjunto de consumo X. Para todo $\mathbf{x^0}, \mathbf{x^1} \in X$, demuestre que:

(a) **(10 puntos)** Si $\mathbf{x^0} \nsim \mathbf{x^1}$, entonces

$$\sim(\mathbf{x^0}) \cap \sim(\mathbf{x^1}) = \emptyset.$$

(a) Demostración:

Sean $x^0, x^1 \in X$ tal que $x^0 \nsim x^1$.

Procedemos por contradicción. Pensemos que $\exists x^2 \in X$ tal que $x^2 \in \sim(x^0) \cap \sim(x^1)$.

Entonces, $x^2 \sim x^0$ y $x^2 \sim x^1$. Por transitividad de $\sim$, tenemos que $x^1 \sim x^0$, lo cual contradice la hipotesis de que $x^0 \nsim x^1$.

Por lo tanto, $\nexists x^2 \in X$ t.q. $x^2 \in \sim(x^0) \cap \sim(x^1)$, de modo que $\sim(x^0) \cap \sim(x^1) = \emptyset$.

(b) **(10 puntos)** Si $\mathbf{x^1} \in \sim(\mathbf{x^0})$, entonces

$$\sim(\mathbf{x^0}) = \sim(\mathbf{x^1})$$

(b) Demostración:

Sean $x^0, x^1 \in X$ t.q. $x^1 \in \sim(x^0)$.

Queremos demostrar que $\sim(x^0) = \sim(x^1)$.

$\subseteq$) Sea $x^2 \in \sim(x^0)$, entonces $x^2 \sim x^0$. Como $x^1 \in \sim(x^0)$, entonces $x^1 \sim x^0$. Por transitividad de $\sim$, $x^1 \sim x^0$ y $x^2 \sim x^0$ implica que $x^1 \sim x^2$, de modo que $x^2 \in \sim(x^1)$. Por lo tanto, $\sim(x^0) \subseteq \sim(x^1)$.

$\supseteq$) Sea $x^2 \in \sim(x^1)$. Entonces, $x^2 \sim x^1$ y como $x^1 \in \sim(x^0)$, $x^1 \sim x^0$ que por transitividad de $\sim$, implica que $x^2 \sim x^0$, luego $x^2 \in \sim(x^0)$.

Por lo tanto, $\sim(x^1) \subseteq \sim(x^0)$.

Así, queda demostrado que si $x^1 \in \sim(x^0)$, entonces $\sim(x^0) = \sim(x^1)$.

Ejercicio 2 (20 puntos) Sea $X \subset \mathbb{R}^2_+$ el conjunto de canastas (x_1, x_2) definidas como:

x_1 = cantidad de café en Colombia el 10 de septiembre de 2025 a mediodía,

x_2 = cantidad de café en Chiapas el 10 de septiembre de 2025 a mediodía.

Verifique si X satisface las propiedades mínimas requeridas para un conjunto de consumo.

Ej 2: Solución.

El conjunto X se define por:

$$X := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_1 x_2 = 0\}$$

El conjunto X no es convexo, de modo que no satisface las propiedades mínimas de un conjunto de consumo.

Demostración:

Sean $(1,0),(0,1) \in X$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$\begin{aligned} x^\lambda &= \tfrac{1}{2}(1,0) + \tfrac{1}{2}(0,1) \\ &= (1/2, 0) + (0, 1/2) \\ &= (1/2, 1/2) \end{aligned}$$

Vemos que $1/2 \cdot 1/2 \neq 0$, de modo que $x^\lambda \notin X$. Por lo tanto, X no es convexo.

Ejercicio 3 (30 puntos) Sea $X = \mathbb{R}^2_+$. Considere la relación de preferencias $\succsim$ sobre X definida por:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \iff x_1^2 + x_2^2 \le y_1^2 + y_2^2$$

para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$.

(a) **(10 puntos)** Verifique **formalmente** si $\succsim$ es monótona.

(a) La relación $\succsim$ no es monótona.

Demostración:

Una relación de preferencias es monótona ssi $\forall x^0, x^1 \in X$, si $x^0 \geq x^1$ entonces $x^0 \succsim x^1$, mientras que si $x^0 \gg x^1$, entonces $x^0 \succ x^1$.

Demostraremos que $\succsim$ no es monótona por medio de un contraejemplo.

Sean $x = (1,1)$ y $y = (2,2)$. Entonces, $(1,1) \succsim (2,2)$ pues:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 2 \\ &\le 4 \\ &= y_1^2 + y_2^2 \end{aligned}$$

Como $\exists\, x, y \in X$ t.q. $x << y$ pero $x \succsim y$, entonces $\succsim$ no es monótona.

(b) **(10 puntos)** Verifique **formalmente** si $\succsim$ es localmente no saciable.

(b) La relación $\succsim$ no es localmente no saciable.

Demostración:

Una relación de preferencias es localmente no saciable ssi $\forall x^\circ \in X$ y $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists\, x \in B_\varepsilon(x^\circ) \cap \mathbb{R}^2_+$ t.q. $x \succ x^\circ$.

Procedemos por contraejemplo.

Sea $x^\circ = (0,0) \in X$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Considera la bola abierta $B_\varepsilon(x^\circ)$, t.q. $\forall x \in B_\varepsilon(x^\circ)$,

se cumple que $\|x - x^\circ\| < \frac{1}{2}$. Como $x^\circ = (0,0)$, entonces: $\|x - x^\circ\| = \|x\| < \frac{1}{2}$.

Notemos que $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Entonces $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{4}$.

Para que $x \succ x^\circ$, necesitaríamos que $x_1^2 + x_2^2 < x_1^\circ + x_2^\circ = 0$.

Sin embargo, $x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{4}$ $\forall (x_1, x_2) \in B_\varepsilon((x_1^\circ, x_2^\circ))$, de modo que no existe

$(x_1, x_2) \in B_\varepsilon((x_1^\circ, x_2^\circ))$ t.q. $(x_1, x_2) \succ (x_1^\circ, x_2^\circ)$.

Es decir, $\exists\, x^\circ \in X$ y $\exists\, \varepsilon > 0$ t.q $\forall x \in B_\varepsilon(x^\circ)$ se cumple que $\neg(x \succ x^\circ)$.

Por lo tanto, $\succsim$ no es localmente no saciable.

(c) **(10 puntos)** Considere ahora la relación binaria $\succsim$ sobre X definida por:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \iff \exists\, r > 0 \text{ tal que } x_1^2 + x_2^2 \leq y_1^2 + y_2^2 = r^2$$

Demuestre que $\succsim$ **no** es una relación de preferencias.

(c) Demostración:

Una relación binaria $\succsim$ es una relación de preferencias si es completa y transitiva.

Una relación $\succsim$ es completa si $\forall x, y \in X$, se cumple que $x \succsim y$ ó $y \succsim x$ ó ambas.

Demostraremos que $\succsim$ no es completa.

Sean $x = y = (0,0) \in X$. Entonces, $x_1^2 + x_2^2 = 0 = y_1^2 + y_2^2$

- Si $x \succsim y$, entonces $\exists\, r > 0$ t.q. $x_1^2 + x_2^2 \leq y_1^2 + y_2^2 = r^2$ $\overset{!}{\nabla}$ $r > 0$ pero $y_1^2 + y_2^2 = 0$
- Si $y \succsim x$, entonces $\exists\, r > 0$ t.q. $y_1^2 + y_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 = r^2$ $\overset{!}{\nabla}$ $r > 0$ pero $x_1^2 + x_2^2 = 0$

• Si $x \sim y$, entonces $\exists r > 0$ t.q. $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = r^2$ $\underset{0}{\forall}$ $r > 0$ pero $x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Ejercicio 4 (30 puntos) Sea $X = \mathbb{R}^2_+$. Considere la relación binaria $\succsim$ sobre X definida por:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \iff \begin{cases} x_2 > y_2, & \text{ó} \\ x_2 = y_2 \text{ y } x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2, & \text{ó} \\ x_2 = y_2 = 0 \text{ y } x_1 \geq y_1 \end{cases}$$

$x_2 = y_2 > 0$

para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$.

(a) **(15 puntos)** A partir de la definción de $\succsim$, derive formalmente la definición de $\succ$ y $\sim$.

(b) **(15 puntos)** Demuestre que $\succsim$ no es continua.

(a) Por definición, $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ ssi $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ & $(y_1, y_2) \not\succsim (x_1, x_2)$.

Entonces,

• Si $x_2 > y_2$, entonces no se cumple que $y_2 > x_2$. Esto significa que:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \text{ \& } (y_1, y_2) \not\succsim (x_1, x_2)$$

esto es, $x \succ y$.

• Si $x_2 = y_2 > 0$ & $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$, entonces no se cumple que $y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2$. Esto significa que $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ & $(y_1, y_2) \not\succsim (x_1, x_2)$, por lo que $x \succ y$.

• Si $x_2 = y_2 = 0$ & $x_1 > y_1$, entonces no se cumple que $y_1 \geq x_1$. Esto significa que $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ & $(y_1, y_2) \not\succsim (x_1, x_2)$, por lo que $x \succ y$.

Por lo tanto,

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) \iff \begin{cases} x_2 > y_2, & \text{o} \\ x_2 = y_2 > 0 \text{ \& } x_1 + x_2 > y_1 + y_2, & \text{o} \\ x_1 = y_2 = 0 \text{ \& } x_1 > y_1 \end{cases}$$

(a.2) Por definición, $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ ssi $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ & $(y_1, y_2) \succsim (x_1, x_2)$.

Entonces,

• Si $x_2 > y_2$, entonces no se cumple que $y_2 > x_2$. Esto significa que:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \text{ \& } (y_1, y_2) \not\succsim (x_1, x_2)$$

por lo que $x \nsim y$, de modo que este caso no es posible para $x \sim y$.

- Si $x_2 = y_2 > 0$ y $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, entonces $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$ y $y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2$.

Esto significa que $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ y $(y_1, y_2) \succsim (x_1, x_2)$, por lo que $x \sim y$.

- Si $x_2 = y_2 = 0$ y $x_1 = y_1$, entonces $x_1 \geq y_1$ y $y_1 \geq x_1$.

Esto significa que $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ y $(y_1, y_2) \succsim (x_1, x_2)$, por lo que $x \sim y$.

Por lo tanto,

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff \begin{cases} x_2 = y_2 > 0 \text{ y } x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \text{ o} \\ x_2 = y_2 = 0 \text{ y } x_1 = y_1 \end{cases}$$

(b) Demostración:

Sean $x^n = (1,0)$ y $y^n = (0, \frac{1}{n})$. Entonces $(1,0) \prec (0, \frac{1}{n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pues $y_2^n > x_2^n$.

Sin embargo, cuando $n \to \infty$ $x^n = (1,0) \to x^* = (1,0)$ y $y^n = (0, \frac{1}{n}) \to y^* = (0,0)$.

En el límite, $x_2^* = y_2^* = 0$ y $x_1^* > y_1^*$ por lo que $(1,0) \succ (0,0)$.

Por lo tanto, $x^n \prec y^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pero $x^* \succ y^*$ cuando $n \to \infty$, luego $\succsim$ <u>no</u> es continua.