Laboratorio de Microeconomía I

Centro de Investigación y Docencia Económicas

Maestría en Economía - 2025

Quiz 2

Matrícula: ______________________________

Anote su matrícula con pluma, **no incluya su nombre**. Responda cada inciso de **forma detallada** y con **letra legible**.

Ejercicio 1 (20 puntos) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2_+$ abierto y convexo y $u : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1$$

Verifique si u es cuasicóncava o cuasiconvexa.

Ejercicio 2 (40 puntos) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2_+$ abierto y convexo y $u : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x_1, x_2) = \left(x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + x_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}$$

donde $\sigma > 0$.

(a) **(20 puntos)** Obtenga las demandas Marshallianas y la función de utilidad indirecta. Muestre que esta es homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, y)$.

(b) **(20 puntos)** Obtenga las demandas Hicksianas y la función de gasto. Muestre que esta es homogénea de grado uno en $\mathbf{p}$.

Ejercicio 3 (40 puntos) Considere la siguiente función de utilidad indirecta

$$v(\mathbf{p}, y) = \theta^{\theta}(1-\theta)^{(1-\theta)} \frac{y}{G(p_1, p_2)}$$

donde $G(p_1, p_2) = p_1^{\theta} p_2^{1-\theta}$ es un índice de precios geométrico.

(a) **(10 puntos)** Obtenga la función de gasto.

(b) **(10 puntos)** Obtenga la demanda Hicksiana del bien 1 vía Lema de Shepard.

(c) **(10 puntos)** Obtenga la demanda Marshalliana del bien 1 vía dualidad.

(d) **(10 puntos)** Obtenga la demanda Marshalliana del bien 2 vía Identidad de Roy.

Ejercicio Extra (10 puntos) Considere la función de utilidad tipo Cobb-Douglas en $\mathbb{R}^2_+$:

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$$

La matriz Hessiana está dada por:

$$H_u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^\beta & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x_1^\alpha x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

Para $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, sus dos menores principales son:

$$\Delta_1 = \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^\beta$$

$$\Delta_2 = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2}$$

¿Para qué valores de α y β la función $u(\cdot)$ es cóncava en $\mathbb{R}^n_{++}$? Justifique su respuesta.

Ejercicio 1 (20 puntos) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2_+$ abierto y convexo y $u : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1$$

Verifique si u es cuasicóncava o cuasiconvexa.

Ej 1. Hessiana Orlada:

$$\mathcal{H}_u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_2+1 & x_1 \\ x_2+1 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Menores principales:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x_2+1 \\ x_2+1 & 0 \end{vmatrix} = -(x_2+1)^2 < 0 \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & x_2+1 & x_1 \\ x_2+1 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_1x_2 + x_1 + x_1x_2 + x_1$$
$$= 2x_1(x_2+1) > 0$$

Para todo $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, $D_1 < 0$ & $D_2 > 0$. Por lo tanto, $u(\cdot)$ es cuasicóncava.

Ejercicio 2 (40 puntos) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2_+$ abierto y convexo y $u : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x_1, x_2) = \left(x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + x_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}$$

donde $\sigma > 0$.

(a) **(20 puntos)** Obtenga las demandas Marshallianas y la función de utilidad indirecta. Muestre que esta es homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, y)$.

(b) **(20 puntos)** Obtenga las demandas Hicksianas y la función de gasto. Muestre que esta es homogénea de grado uno en $\mathbf{p}$.

(a) $$UMP(x) = \max_{x \in \mathbb{R}^2_+} \left\{ \left(x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + x_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/\sigma-1} \mid p_1x_1 + p_2x_2 = y \right\}$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \underbrace{\left(x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + x_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right)}_{S(x)}{}^{\sigma/(\sigma-1)} + \lambda\left[y - p_1x_1 - p_2x_2\right]$$

$$\frac{\sigma}{\sigma-1} - 1 = \frac{\sigma - \sigma + 1}{\sigma - 1} = \frac{1}{\sigma-1}$$

$$\frac{\sigma-1}{\sigma} - 1 = \frac{\sigma - 1 - \sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma}$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \cancel{\frac{\sigma}{\sigma-1}} S(x)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cancel{\frac{(\sigma-1)}{\sigma}} x_1^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda p_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \cancel{\frac{\sigma}{\sigma-1}} S(x)^{\frac{1}{\sigma-1}} \cancel{\frac{(\sigma-1)}{\sigma}} x_2^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda p_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (3)$$

De (1) y (2) tenemos que: $$\frac{\cancel{S(x)^{\frac{1}{\sigma-1}}} x_1^{-\frac{1}{\sigma}}}{p_1} = \frac{\cancel{S(x)^{\frac{1}{\sigma-1}}} x_2^{-\frac{1}{\sigma}}}{p_2}$$

$$\iff \frac{x_2^{\frac{1}{\sigma}}}{p_1} = \frac{x_1^{\frac{1}{\sigma}}}{p_2} \iff \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\sigma} = \frac{x_2}{x_1} \iff x_1^* = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\sigma} x_2 \quad (4)$$

Sustituimos en (3):

$$p_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\sigma} x_2\right] + p_2 x_2 = y \iff p_1^{1-\sigma} p_2^{\sigma} x_2 + p_2 x_2 = y$$

$$\iff x_2\left(p_1^{1-\sigma} p_2^{\sigma} + p_2\right) = y$$

$$\iff \boxed{x_2(p, y) = \frac{y}{\left(p_1^{1-\sigma} p_2^{\sigma} + p_2\right)}}$$

Sustituyendo en (4):

$$x_1^* = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\sigma}\left[\frac{y}{\left(p_1^{1-\sigma} p_2^{\sigma} + p_2\right)}\right] \iff x_1^* = \frac{y\, p_2^{\sigma}}{\left(p_1 p_2^{\sigma} + p_1^{\sigma} p_2\right)}$$

$$\iff \boxed{x_1(p, y) = \frac{y}{\left(p_1 + p_1^{\sigma} p_2^{1-\sigma}\right)}}$$

Simplificamos para tener mismos denominadores:

$$\boxed{x_1(p, y) = \frac{y}{p_1^{\sigma}\left(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}\right)} , \quad x_2(p, y) = \frac{y}{p_2^{\sigma}\left(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}\right)}}$$

• Función de Utilidad Indirecta

$$v(p, y) = u(x(p, y))$$

$$= \left[\left(\frac{y\, p_1^{-\sigma}}{g(p)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \left(\frac{y\, p_2^{-\sigma}}{g(p)}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \qquad \left(g(p) = \left(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}\right)\right)$$

$$= \frac{y}{g(p)}\left(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \qquad \left(\frac{\sigma}{\sigma-1} - 1 = \frac{1}{\sigma-1}\right)$$

$$= y\left(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$\boxed{\therefore \quad v(p,y) = y\left(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}}$$

• Homogenea de grado cero en (p, y).

Sea $t>0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
v(tp, ty) &= ty\left((tp_1)^{1-\sigma} + (tp_2)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\
&= ty\left[t^{1-\sigma}\left(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}\right)\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \\
&= \frac{t}{t}\, y\left(p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\
&= t^0\, v(p, y)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $v(p,y)$ es homogénea de grado cero en (p,y).

(b) $EMP = \min_{x \in \mathbb{R}^2_+} \left\{ p_1 x_1 + p_2 x_2 \;\middle|\; \left(x_1^{\sigma-1/\sigma} + x_2^{\sigma-1/\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = u \right\}$

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda\left[\left(x_1^{\sigma-1/\sigma} + x_2^{\sigma-1/\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - u\right]$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \lambda S(x)^{\frac{1}{\sigma-1}} x_1^{-\frac{1}{\sigma}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda S(x)^{\frac{1}{\sigma-1}} x_1^{-\frac{1}{\sigma}} = 0 \quad (2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1^* = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\sigma} x_2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \left(x_1^{\sigma-1/\sigma} + x_2^{\sigma-1/\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - u = 0 \quad (3)$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$\left[\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\sigma} x_2\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + x_2^{\sigma-1/\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = u \iff x_2\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\sigma-1} + 1\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = u$$

$$\iff x_2\left[\frac{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}}{p_2^{1-\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = u$$

$$\iff x_2\left[\frac{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}}{p_2^{-(\sigma-1)}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = u$$

$$\iff \boxed{x_2^h(p,u) = \frac{u}{p_2^{\sigma}(p_1^{1-\sigma}+p_2^{1-\sigma})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}}$$

Sustituyendo en (4):

$$x_1^* = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\sigma} x_2 \iff \boxed{x_1^h(p,u) = \frac{u}{p_1^{\sigma}(p_1^{1-\sigma}+p_2^{1-\sigma})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}}$$

• Función de gasto

$$e(p,u) = p_1\left[\frac{u}{p_1^{\sigma}\, S(p)}\right] + p_2\left[\frac{u}{p_2^{\sigma}\, S(p)}\right]$$

$$= u\left[\frac{p_1^{1-\sigma}+p_2^{1-\sigma}}{(p_1^{1-\sigma}+p_2^{1-\sigma})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}\right]$$

$$= u\,(p_1^{1-\sigma}+p_2^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$1-\frac{\sigma}{\sigma-1} = \frac{\sigma-1-\sigma}{\sigma-1} = -\frac{1}{\sigma-1} = \frac{1}{1-\sigma}$$

Por lo tanto, $\boxed{e(p,u) = u\,(p_1^{1-\sigma}+p_2^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}}}$

• Homogénea de grado uno en p:

Sea $t>0$. Entonces,

$$e(tp,u) = u\left((tp_1)^{1-\sigma}+(tp_2)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$= u\left(t^{1-\sigma}(p_1^{1-\sigma}+p_2^{1-\sigma})\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$= t\,u\,(p_1^{1-\sigma}+p_2^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$= t\,e(p,u)$$

Por lo tanto, $e(p,u)$ es homogénea de grado uno en p.

Ejercicio 3 (40 puntos) Considere la siguiente función de utilidad indirecta

$$v(\mathbf{p}, y) = \theta^{\theta}(1-\theta)^{(1-\theta)} \frac{y}{G(p_1, p_2)}$$

donde $G(p_1, p_2) = p_1^{\theta} p_2^{1-\theta}$ es un índice de precios geométrico.

(a) **(10 puntos)** Obtenga la función de gasto.

(b) **(10 puntos)** Obtenga la demanda Hicksiana del bien 1 vía Lema de Shepard.

(c) **(10 puntos)** Obtenga la demanda Marshalliana del bien 1 vía dualidad.

(d) **(10 puntos)** Obtenga la demanda Marshalliana del bien 2 vía Identidad de Roy.

(a) Función de gasto

Sabemos que $v(p, e(p,u)) = u$. Entonces:

$$v(p, e(p,u)) = \theta^{\theta}(1-\theta)^{1-\theta} \frac{e(p,u)}{G(p_1,p_2)} = u \iff \boxed{e(p,u) = u\, G(p_1,p_2)\, \theta^{-\theta}(1-\theta)^{-(1-\theta)}}$$

(b) Hicksiana de x_1 por Lema de Shepard.

$$x_1^h(p,u) = \frac{\partial e}{\partial p_1}$$

$$= \theta p_1^{\theta-1} p_2^{1-\theta}\, u\, \theta^{-\theta}(1-\theta)^{-(1-\theta)}$$

$$= \frac{u}{p_1} G(p_1,p_2)\, \theta^{1-\theta}(1-\theta)^{-(1-\theta)}$$

$$\boxed{\therefore\ x_1^h(p,u) = \frac{u}{p_1}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{1-\theta} G(p_1,p_2)}$$

(c) Marshalliana de x_1 vía dualidad

Por dualidad, sabemos que $x_1(p,y) = x_1^h(p, v(p,y))$. Entonces:

$$x_1(p,y) = v(p,y)\, \frac{1}{p_1}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{1-\theta} G(p_1,p_2)$$

$$= \theta^{\cancel{\theta}}\cancel{(1-\theta)^{1-\theta}} \frac{y}{\cancel{G(p_1,p_2)}} \cdot \frac{1}{p_1}\left(\frac{\theta}{\cancel{1-\theta}}\right)^{\cancel{1-\theta}} \cancel{G(p_1,p_2)}$$

$$= \theta\, \frac{y}{p_1}$$

$$\boxed{\therefore\ x_1(p,y) = \theta \frac{y}{p_1}}$$

(d) Identidad de Roy para x_2

$$x_2(p,y) = -\frac{\partial v/\partial p_2}{\partial v/\partial y}$$

$$= -\left[\frac{-(1-\theta)\,\cancel{\theta^{\theta}(1-\theta)^{1-\theta}}\,y}{p_1^{\theta}\,p_2^{2-\theta}}\right]\cdot\left[\frac{G(p_1,p_2)}{\cancel{\theta^{\theta}(1-\theta)^{1-\theta}}}\right]$$

$$= \left[\frac{(1-\theta)\,y}{p_2\,\cancel{G(p_1,p_2)}}\right]\cancel{G(p_1,p_2)}$$

$$= (1-\theta)\frac{y}{p_2}$$

$$\boxed{\therefore\; x_2(p,y) = (1-\theta)\frac{y}{p_2}}$$

Ejercicio Extra (10 puntos) Considere la función de utilidad tipo Cobb-Douglas en $\mathbb{R}^2_+$:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

La matriz Hessiana está dada por:

$$H_u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

Para $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, sus dos menores principales son:

$$\Delta_1 = \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}$$

$$\Delta_2 = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2}$$

¿Para qué valores de α y β la función $u(\cdot)$ es cóncava en $\mathbb{R}^n_{++}$? Justifique su respuesta.

Para que $u(x_1, x_2)$ sea cóncava, requerimos que:

$$\Delta_1 = \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} < 0$$

$$\Delta_2 = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2} > 0$$

Esto sucede si y solo si $\alpha - 1 < 0$ & $1 - \alpha - \beta > 0$.

Es decir, para $\boxed{\alpha < 1 \;\&\; \alpha+\beta < 1}$, $u(x_1, x_2)$ es cóncava.