

Laboratorio de Microeconomía I

Centro de Investigación y Docencia Económicas
Maestría en Economía - 2025
Laboratorista: Arturo López
Tarea 12

Exercises

Ex. 3.44 Derive the profit function for a firm with the Cobb–Douglas technology, $y = x_1^\alpha x_2^\beta$.

What restrictions on α and β are required to ensure that the profit function is well-defined?

Explain.

Proof. Consideremos el problema de maximización de beneficios:

$$\pi(p, w_1, w_2) = \max_{x_1, x_2 \geq 0} \{px_1^\alpha x_2^\beta - w_1 x_1 - w_2 x_2\}.$$

C.P.O.:

$$p\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta - w_1 = 0$$

$$p\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} - w_2 = 0$$

Estas dos ecuaciones caracterizan el óptimo interior. Resolviendo para x_2^β de la primera:

$$p\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta = w_1 \quad \Rightarrow \quad x_2^\beta = \frac{w_1}{p\alpha} x_1^{1-\alpha}$$

Lo metemos en la función de producción:

$$\begin{aligned} y &= x_1^\alpha x_2^\beta \\ &= x_1^\alpha \left(\frac{w_1}{p\alpha} x_1^{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{w_1}{p\alpha} x_1 \end{aligned}$$

Despejando:

$$x_1^* = \frac{p\alpha}{w_1} y$$

Hacemos lo mismo con la segunda CPO:

$$p\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} = w_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^\alpha = \frac{w_2}{p\beta} x_2^{1-\beta}$$

Sustituyendo en la producción:

$$\begin{aligned} y &= x_1^\alpha x_2^\beta \\ &= \left(\frac{w_2}{p\beta} x_2^{1-\beta} \right) x_2^\beta \\ &= \frac{w_2}{p\beta} x_2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$x_2^* = \frac{p\beta}{w_2} y$$

Sustituimos en la función de producción:

$$\begin{aligned} y &= (x_1^*)^\alpha (x_2^*)^\beta \\ &= \left(\frac{p\alpha}{w_1} \right)^\alpha y^\alpha \left(\frac{p\beta}{w_2} \right)^\beta y^\beta \end{aligned}$$

Es decir, la función de oferta es:

$$y(p, \mathbf{w}) = \left[\left(\frac{p\alpha}{w_1} \right)^\alpha \left(\frac{p\beta}{w_2} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} p^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

Para que $y(p, \mathbf{w})$ esté bien definida, necesitamos que

$$\alpha + \beta \neq 1$$

Ahora sustituimos en la función de beneficio:

$$\begin{aligned} \pi(p, \mathbf{w}) &= py - w_1 x_1^* - w_2 x_2^* \\ &= p y(p, \mathbf{w}) - w_1 \left(\frac{p\alpha}{w_1} y(p, \mathbf{w}) \right) - w_2 \left(\frac{p\beta}{w_2} y(p, \mathbf{w}) \right) \\ &= p y(p, \mathbf{w}) - p\alpha y(p, \mathbf{w}) - p\beta y(p, \mathbf{w}) \\ &= p(1 - \alpha - \beta) y(p, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Para que π sea finita y exista máximo interior, necesitamos:

$$\alpha + \beta < 1$$

Conclusión:

- Si la función de producción presenta rendimientos decrecientes a escala $\alpha + \beta < 1$: la función de beneficio está bien definida, existe máximo interior.
- Si la función de producción presenta rendimientos constantes a escala $\alpha + \beta = 1$: los beneficios son cero para todo nivel de oferta, de modo que la empresa es indiferente entre producir o no.
- Si $\alpha + \beta > 1$ (rendimientos crecientes): el problema de maximización no tiene solución interior, ya que la empresa puede aumentar escala de producción indefinidamente y hacer crecer beneficios sin cota superior.

□

Ex. 3.47 In deriving the firm's short-run supply function in Example 3.6, we ignored the shutdown condition by supposing an interior solution to the firm's profit-maximisation problem. Give a *complete* description of short-run supply behaviour in that Cobb–Douglas case.

Proof. En el corto plazo, la condición de cierre es:

$$y = \begin{cases} 0 & p < AVC_{min} \\ y^{SR}(p, w_1; \bar{x}_2) & p \geq AVC_{min} \end{cases}$$

Entonces, asumiendo el insumo $x_2 = \bar{x}_2$ fijo:

$$\pi^{SR}(p, w_1, \bar{w}_2; \bar{x}_2) = \max_{x_1 \geq 0} p x_1^\alpha \bar{x}_2^{1-\alpha} - w_1 x_1 - \bar{w}_2 \bar{x}_2$$

C.P.O.

$$\frac{d}{dx_1} \left[p \bar{x}_2^{1-\alpha} x_1^\alpha - w_1 x_1 \right] = p \bar{x}_2^{1-\alpha} \alpha x_1^{\alpha-1} - w_1 = 0$$

Resolviendo para x_1 :

$$\begin{aligned} p\alpha \bar{x}_2^{1-\alpha} x_1^{\alpha-1} &= w_1 \\ x_1^{\alpha-1} &= \frac{w_1}{p\alpha \bar{x}_2^{1-\alpha}} \\ x_1^{1-\alpha} &= \frac{p\alpha \bar{x}_2^{1-\alpha}}{w_1} \\ \Rightarrow x_1^{SR}(p, w_1; \bar{x}_2) &= \left(\frac{p\alpha}{w_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \bar{x}_2 \end{aligned}$$

Función de oferta de corto plazo:

$$y^{SR}(p, w_1; \bar{x}_2) = x_1^{SR}(p, w_1; \bar{x}_2)^\alpha \bar{x}_2^{1-\alpha} = \left(\frac{p\alpha}{w_1}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \bar{x}_2$$

Costo variable:

$$TVC(y) = w_1 x_1(y) = w_1 \left(\frac{y}{\bar{x}_2^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}$$

Costo variable medio:

$$AVC(y) = w_1 y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \bar{x}_2^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

Notemos que dado que $\frac{1-\alpha}{\alpha} > 0$. Entonces,

$$\frac{dAVC(y)}{dy} = 0 \quad \forall y > 0$$

Es decir, $AVC(y)$ es estrictamente creciente en $y > 0$, de modo que su mínimo se alcanza en el límite cuando $y \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} AVC(y) = 0$$

Luego, el **precio de cierre** es:

$$p_{cierra} = 0$$

Oferta de corto plazo completa:

$$y^{SR}(p, w_1; \bar{x}_2) = \begin{cases} 0 & p = 0 \\ \left(\frac{p\alpha}{w_1}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \bar{x}_2 & p > 0 \end{cases}$$

□

Ex. 5.C.9^A Derive the profit function $\pi(p)$ and supply function (or correspondence) $y(p)$ for the single-output technologies whose production functions $f(z)$ are given by

- (a) $f(z) = \sqrt{z_1 + z_2}$
- (b) $f(z) = \sqrt{\min\{z_1, z_2\}}$
- (c) $f(z) = (z_1^\rho + z_2^\rho)^{1/\rho}, \quad \text{for } \rho \leq 1$

Proof. (a) Sea $f(z) = \sqrt{z_1 + z_2}$. Noten que esta función se puede expresar de la siguiente forma:

$$y = \sqrt{z_1 + z_2} \iff z_1 + z_2 = y^2$$

Es decir, la tecnología tiene forma de sustitutos perfectos. Por lo tanto, la empresa usará exclusivamente el insumo más barato en relación con su producto marginal.

La condición de primer orden del problema de maximización de beneficios

$$p\nabla f(z^*) - w = 0$$

no nos ayudará, pues uno de los insumos será igual a cero.

La condición de primer orden dual:

$$p - \frac{\partial c(w, y^*)}{\partial y} = 0$$

funciona para casos en que la solución es de equina.

Remark. Aquí hay un aspecto interesante sobre la dualidad del problema de la empresa.

El **problema de minimización de costos** nos da la cantidad de insumos demandados que minimiza los costos de la empresa *dado un nivel de producción y que se desea producir*, y dado el precio de los insumos vigente en el mercado:

$$c(\mathbf{w}, y) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad y = f(\mathbf{x})$$

Es decir, resuelve el problema de producir un nivel y al menor costo posible, dado el vector de precios \mathbf{w} . La solución es el vector de demanda de insumos condicionales $x(\mathbf{w}, y)$, que nos dan la cantidad de insumos demandados que nos hacen minimizar el costo de producir el nivel y .

El **problema de maximización de beneficios** nos da la cantidad de insumos deman-

dados que maximiza los beneficios de la empresa dado el precio de los insumos vigente en el mercado:

$$\pi(p, \mathbf{w}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N} p f(\mathbf{x}) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$$

Es decir, resuelve el problema de encontrar una demanda de insumos $\mathbf{x}(p, \mathbf{w})$ que resulta en un nivel de producción $y^* = f(\mathbf{x}(p, \mathbf{w}))$ que maximiza los beneficios de la empresa, dado el precio de los insumos y del producto.

El **problema dual** nos dice que esto es equivalente a producir y^* al menor costo posible. Es decir, a demandar el vector de insumos $x(\mathbf{w}, y^*)$, que es el vector que, dado y^* , minimiza los costos de la empresa: la cantidad de insumos que resuelve el problema de minimización de costos para el nivel de producción y^* :

$$c(\mathbf{w}, y^*) = \mathbf{w} \cdot x(\mathbf{w}, y^*)$$

En otras palabras, imaginemos que conocemos el nivel de producción y^* que maximiza los beneficios de la empresa. Entonces, la respuesta a la pregunta *¿Cuál es la demanda de insumos que minimiza mi costo de producción de y^* ?*, que es $x(\mathbf{w}, y^*)$, es la misma respuesta a la pregunta *¿Cuál es la demanda de insumos que necesito para producir la cantidad que maximiza mis beneficios?*, que es $x(p, \mathbf{w})$ y da el nivel de producción que maximiza los beneficios $y^* = f(x(p, \mathbf{w}))$.

Por lo tanto,

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N} p f(\mathbf{x}) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \max_{y \in \mathbb{R}_{++}} p y - c(\mathbf{w}, y)$$

Esto implica que ambas condiciones de primer orden son equivalentes.

Luego, el problema de costo es:

$$c(w_1, w_2, q) = \min_{z_1, z_2 \geq 0} w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{s.t.} \quad z_1 + z_2 = y^2$$

Claramente,

$$c(w_1, w_2, y) = \begin{cases} w_1 y^2, & w_1 < w_2 \\ w y^2, & w_1 = w_2 = w \\ w_2 y^2, & w_1 > w_2 \end{cases}$$

Ahora, resolvemos el problema de maximización de beneficio:

$$\max_{y>0} p y - c(w_1, w_2, y).$$

El costo marginal por tramos es,

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y} = \begin{cases} 2w_1y, & w_1 < w_2, \\ 2wy, & w_1 = w_2, \\ 2w_2y, & w_1 > w_2. \end{cases}$$

Las CPO requieren:

$$p = \frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y}$$

Igualando a p , obtenemos la función de demanda

$$y(p, \mathbf{w}) = \begin{cases} \frac{p}{2w_1}, & w_1 < w_2, \\ \frac{p}{2w}, & w_1 = w_2, \\ \frac{p}{2w_2}, & w_1 > w_2. \end{cases}$$

Luego, sustituyendo en el beneficio:

$$\pi(p, w_1, w_2) = py(p, \mathbf{w}) - c(w_1, w_2, (p, \mathbf{w})) = \begin{cases} \frac{p^2}{4w_1}, & w_1 < w_2, \\ \frac{p^2}{4w}, & w_1 = w_2, \\ \frac{p^2}{4w_2}, & w_1 > w_2. \end{cases}$$

(b) Sea $f(z) = \sqrt{\min\{z_1, z_2\}}$.

Noten que esta función se puede expresar de la siguiente forma:

$$y = \sqrt{\min\{z_1, z_2\}} \iff \min\{z_1, z_2\} = y^2$$

lo que obliga:

$$z_1 = z_2 = y^2$$

La producción requiere usar ambos insumos en proporciones iguales.

Costo:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1y^2 + w_2y^2 = (w_1 + w_2)y^2.$$

El beneficio:

$$\max_{y \geq 0} py - (w_1 + w_2)y^2$$

C.P.O.:

$$p = 2(w_1 + w_2)y \implies y(p) = \frac{p}{2(w_1 + w_2)}$$

Beneficio:

$$\begin{aligned} \pi(p, w_1, w_2) &= py(p) - (w_1 + w_2)y(p)^2 \\ &= p \frac{p}{2(w_1 + w_2)} - (w_1 + w_2) \frac{p^2}{4(w_1 + w_2)^2} \\ &= \frac{p^2}{4(w_1 + w_2)} \end{aligned}$$

(c) Sea $f(z) = (z_1^\rho + z_2^\rho)^{1/\rho}$, con $\rho \leq 1$. La función de costo dual es

$$c(w_1, w_2, y) = \left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} y$$

Noten que

$$MC = \frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y} = \left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}$$

es el costo marginal (que en este caso es constante: $MC(y) = MC$).

Entonces, $c(w_1, w_2, y) = MC y$.

El problema de beneficio es

$$\pi(p, w_1, w_2) = \max_{y \geq 0} [py - MC y] = \max_{y \geq 0} [p - MC] y$$

Análisis por casos:

- Si $p < MC$, entonces $p - MC < 0$ y π es estrictamente *decreciente* en y . El máximo se alcanza en $y^* = 0$:

$$y(p, w_1, w_2) = 0 \quad \pi(p, w_1, w_2) = 0$$

- Si $p = MC$, entonces $p - MC = 0$ y

$$\pi = 0 \quad \forall y \geq 0$$

La firma es indiferente entre cualquier nivel de producción, por lo que la **correspondencia**

de oferta es todo $y \geq 0$:

$$y(p, w_1, w_2) = \{y \geq 0\} = [0, \infty) \quad \pi(p, w_1, w_2) = 0$$

- Si $p > MC$, entonces $p - MC > 0$ y π es estrictamente *creciente* en y . El beneficio puede hacerse arbitrariamente grande dejando $y \rightarrow \infty$:

$$y(p, w_1, w_2) = \infty, \quad \pi(p, w_1, w_2) = \infty$$

Por lo tanto,

$$y(p, w_1, w_2) = \begin{cases} 0, & p < MC, \\ \{y \geq 0\}, & p = MC, \\ \infty, & p > MC \end{cases}$$

y la función de beneficios

$$\pi(p, w_1, w_2) = \begin{cases} 0, & p \leq MC, \\ \infty, & p > MC \end{cases}$$

□