Laboratorio de Microeconomía I

Funciones Cóncavas y Cuasicóncavas

Centro de Investigación y Docencia Económicas
Maestría en Economía - 2025
Laboratorista: Arturo López

1 Matrices Simétricas

Definición 1.1. Sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Entonces, A es:

(a). **positiva definida** si $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$,

(b). **positiva semidefinida** si $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$,

(c). **negativa definida** si $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$,

(d). **negativa semidefinida** si $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$, y

(e). **indefinida** si $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0$ para algún(os) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} < 0$ para algún(os) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Nota. Toda matriz simétrica cae en alguna de estas cinco categorías. Una matriz que es positiva (negativa) definida es automáticamente positiva (negativa) semidefinida.

El siguiente teorema nos brinda condiciones analíticas necesarias y suficientes para que una matriz sea definida o semidefinida.

Teorema 1.1. *Sea A una matriz simétrica. Entonces, A es:*

(1) *positiva definida si y solo si sus n menores principales son todos > 0.*

(2) *negativa definida si y solo si sus n menores principales alternan en signo, con los de orden impar siendo < 0 y los de orden par siendo > 0.*

(3) *positiva semidefinida si y solo si sus $2^n - 1$ menores principales son todos ≥ 0.*

(4) *negativa semidefinida si y solo si sus $2^n - 1$ menores principales alternan en signo, con los de orden impar siendo ≤ 0 y los de orden par siendo ≥ 0.*

Para la definición de **menores principales** de una matriz, ver el **Apéndice**.

2 Funciones Cóncavas y Convexas en $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.1 (Criterio de la Hessiana)**.** *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, y $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Defínase la matriz Hessiana de segundas derivadas:*

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} \in U,$$

Entonces:

- *f es una **función cóncava** en U si y sólo si la matriz Hessiana $H_f(\mathbf{x})$ es negativa semidefinida para todo $\mathbf{x} \in U$.*
- *f es una **función convexa** en U si y sólo si la matriz Hessiana $H_f(\mathbf{x})$ es positiva semidefinida para todo $\mathbf{x} \in U$.*
- *(Suficiencia para concavidad estricta) Si la matriz Hessiana $H_f(\mathbf{x})$ es negativa definida para todo $\mathbf{x} \in U$, entonces f es **estrictamente cóncava** en U.*
- *(Suficiencia para convexidad estricta) Si la matriz Hessiana $H_f(\mathbf{x})$ es positiva definida para todo $\mathbf{x} \in U$, entonces f es **estrictamente convexa** en U.*

Ejemplo 2.1. Sea $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - 3x - 8y$. La matriz Hessiana viene dada por

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

Para $(x, y) \neq (0, 0)$, sus dos menores principales son:

$$\left|12x^2 + 2y^2\right| = 12x^2 + 2y^2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 12x^2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 + 12y^2 \end{vmatrix} = 24x^4 + 132x^2y^2 + 24y^4 > 0$$

Como $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$, entonces la matriz Hessiana es positiva definida (**Teorema 1.1**). Entonces, f es **estrictamente convexa**.

Ejemplo 2.2. Sea $f(x,y) = \ln x + \ln y$ con $x > 0$, $y > 0$. La matriz Hessiana es

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -1/x^2 & 0 \\ 0 & -1/y^2 \end{pmatrix}.$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$, sus dos menores principales son:

$$\left|-1/x^2\right| = -\frac{1}{x^2} \ < \ 0, \qquad \begin{vmatrix} -1/x^2 & 0 \\ 0 & -1/y^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2y^2} \ > \ 0.$$

Como $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 > 0$, entonces $H_f(x,y)$ es negativa definida. Por tanto, f es **estrictamente cóncava** en $\mathbb{R}^2_{++}$.

Ejemplo 2.3. Sea $f(x,y) = \ln(x+y)$ con $x + y > 0$. La matriz Hessiana viene dada por

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -1/(x+y)^2 & -1/(x+y)^2 \\ -1/(x+y)^2 & -1/(x+y)^2 \end{pmatrix}$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$, sus dos menores principales son:

$$\left|-1/(x+y)^2\right| = -1/(x+y)^2 < 0$$

$$\begin{vmatrix} -1/(x+y)^2 & -1/(x+y)^2 \\ -1/(x+y)^2 & -1/(x+y)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Como $\Delta_1 \leq 0$ y $\Delta_2 \geq 0$, entonces la matriz Hessiana es negativa semidefinida (**Teorema 1.1**). Entonces, f es **cóncava**, más no estrictamente cóncava.

Ejemplo 2.4. Considera la función Cobb-Douglas en $\mathbb{R}^2_+$, $u(x_1,x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$. La matriz Hessiana está dada por:

$$H_u(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^\beta & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x_1^\alpha x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

Para $(x_1,x_2) \neq (0,0)$, sus dos menores principales son:

$$\left|\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^\beta\right| = \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^\beta$$

$$\begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \end{vmatrix} = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2}$$

Entonces, para que $u(\cdot)$ sea cóncava en $\mathbb{R}^n_{++}$, necesitamos que

$$\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} < 0 \implies \alpha(\alpha-1) < 0$$

y además

$$\alpha\beta(1-\alpha-\beta)x_1^{2\alpha-2} > 0 \implies \alpha\beta(1-\alpha-\beta) > 0$$

Es decir, que $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En otras palabras, la función Cobb-Douglas es **cóncava** si y solo si presenta rendimientos a escala constantes o decrecientes.

2.1 Resumen: Criterio en Funciones Cóncavas y Convexas

Sea Δ_k el menor principal de orden k de la matriz Hessiana. Entonces

(a) f es una **función cóncava** en $\mathbb{R}^n$ si y solo si

$$\Delta_1 = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right| \leq 0\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \geq 0\,, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} \leq 0\,, \quad \cdots$$

(b) f es una **función convexa** en $\mathbb{R}^n$ si y solo si

$$\Delta_1 = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right| \geq 0\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \geq 0\,, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} \geq 0\,, \quad \cdots$$

El criterio para funciones **estrictamente cóncavas** y **estrictamente convexas** es análogo, solo sustituyendo desigualdades débiles por estrictas.

3 Funciones Cuasicóncavas y Cuasiconvexas en $\mathbb{R}^n$

El signo de la forma cuadrática de la matriz Hessiana evalúa, en un punto, la curvatura de una función en todas las direcciones. Para funciones cuasicóncavas/cuasicónvexas no exigimos concavidad/convexidad global, sino que se restringe la forma cuadrática de la Hessiana a las direcciones tangentes a una superficie de nivel (i.e., al subespacio ortogonal al gradiente).

Formalmente sea $f \in \mathcal{C}^2(U)$ con $\nabla f(x) \neq 0$ [1]. Entonces f es **cuasicóncava** si y solo si

$$\mathbf{y}^\top H_f(x)\,\mathbf{y} \leq 0 \quad \text{para todo vector } \mathbf{y} \text{ tal que} \quad \nabla f(x) \cdot \mathbf{y} = 0$$

Esto nos indica que los **conjuntos de contorno superior** $\{z \in U \mid f(z) \geq t\}$ son convexos para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1. Consideremos el problema de determinar la definitud de una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$:

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$$

sujeto a que

$$B \cdot \mathbf{x} = \alpha x_1 + \beta x_2 = 0$$

Si resolvemos la restricción para x_1, tenemos que $x_1 = -\frac{\beta x_2}{\alpha}$. Sustituyendo en la forma cuadrática,

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= a\left(-\frac{\beta x_2}{\alpha}\right)^2 + 2b\left(-\frac{\beta x_2}{\alpha}\right)x_2 + cx_2^2 \\ &= \frac{a\beta^2}{\alpha^2}x_2^2 - 2b\left(\frac{2b\beta}{\alpha}\right)x_2^2 + cx_2^2 \\ &= \frac{a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2}{\alpha^2}\,x_2^2 \end{aligned}$$

Por la **Definición 1.1**, la matriz A es negativa semidefinida en todo vector (x_1, x_2) tal que $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$ si y solo si

$$Q(x_1, x_2) = \frac{a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2}{\alpha^2}\,x_2^2 \leq 0$$

Esto se reduce a que $a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2 \leq 0$. Resulta que esta expresíon es exactamente igual al negativo del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & b \\ \beta & b & c \end{vmatrix} = -(a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2)$$

[1] Si en algún x se cumple $\nabla f(x) = 0$, una condición suficiente (no necesaria) para cuasicóncavidad local es $\mathbf{y}^\top H_f(x)\,\mathbf{y} \leq 0 \quad \text{para todo } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, la matriz A es negativa semidefinida en todo vector (x_1, x_2) tal que $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$ si y solo si

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & b \\ \beta & b & c \end{vmatrix} \geq 0$$

Notemos que esta matriz es igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & b \\ \beta & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B^\top \\ B & A \end{pmatrix}$$

Entonces, si hacemos $A = H_f(\mathbf{x})$, $B = \nabla f(\mathbf{x})$, tenemos la matriz Hessiana Orlada:

$$\bar{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla f(\mathbf{x})^\top \\ \nabla f(\mathbf{x}) & H_f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Así, el signo del determinante de $\bar{H}_f(\mathbf{x})$ nos dice si la matriz $H_f(\mathbf{x})$ es negativa/positiva definida o semidefinida en el subespacio de $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0$. Esto caracteriza a una función cuasicóncava/cuasiconvexa.

Teorema 3.1 (Criterio de la Hessiana orlada, Arrow–Enthoven)**.** *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Defínase la Hessiana orlada*

$$\bar{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla f(\mathbf{x})^\top \\ \nabla f(\mathbf{x}) & H_f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} \in U,$$

y denótese por $D_r(x)$ el menor principal *de orden r de $\bar{H}_f(x)$. Supóngase que $\nabla f(x) \neq 0$ en U. Entonces:*

(a) *Si los $n-1$ menores principales alternan en signo, comenzando por estrictamente negativo, $D_2 < 0, D_3 > 0, \cdots$, entonces f es* ***cuasicóncava****. Además, si $\mathbf{x} >> 0$, entonces f es* ***estrictamente cuasicóncava****.*

(b) *Si los $n-1$ menores principales son todos negativos, $D_2 < 0, D_3 < 0, \cdots$, entonces f es* ***cuasiconvexa****. Además, si $\mathbf{x} >> 0$, entonces f es* ***estrictamente cuasiconvexa****.*

Ejemplo 3.2. Considera otra vez la función Cobb-Douglas en $\mathbb{R}^2_+$, $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$. Supongamos que $0 < \alpha, \beta < 1$ y $\alpha + \beta \leq 1$.

La matriz Hessiana Orlada está dada por:

$$\bar{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & u_{x_1} & u_{x_2} \\ u_{x_1} & u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ u_{x_2} & u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} & \beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} \\ \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} & \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

Calculamos sus menores principales:

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 0 & \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} \\ \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} & \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} \end{vmatrix} \\ &= -(\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta})^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 0 & \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} & \beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} \\ \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} & \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \end{vmatrix} \\ &= 2\Big[\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}\Big]\Big[\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}\Big]\Big[\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}\Big] \\ &- \Big(\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}\Big)^2\Big[\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}\Big] - \Big(\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}\Big)^2\Big[\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}\Big] \\ &= \alpha\beta\,(\alpha+\beta)\,x_1^{3\alpha-2}\,x_2^{3\beta-2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

El signo de D_3 surge del hecho de que $0 < \alpha, \beta < 1$ y $\alpha + \beta \leq 1$.
Dado que $D_2 < 0,\ D_3 > 0$, entonces $u(\cdot)$ es **cuasicóncava**.

Ejemplo 3.3. Sea $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^{-1}$ con $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. La matriz Hessiana Orlada viene dada por

$$\bar{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & f_{x_1} & f_{x_2} \\ f_{x_1} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2} & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1x_2^{-1} & -x_1^2x_2^{-2} \\ 2x_1x_2^{-1} & 2x_2^{-1} & -2x_1x_2^{-2} \\ -x_1^2x_2^{-2} & -2x_1x_2^{-2} & 2x_1^2x_2^{-3} \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus menores principales:

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 2x_1x_2^{-1} \\ 2x_1x_2^{-1} & 2x_2^{-1} \end{vmatrix} \\ &= -(2x_1x_2^{-1})^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 2x_1x_2^{-1} & -x_1^2x_2^{-2} \\ 2x_1x_2^{-1} & 2x_2^{-1} & -2x_1x_2^{-2} \\ -x_1^2x_2^{-2} & -2x_1x_2^{-2} & 2x_1^2x_2^{-3} \end{vmatrix} \\ &= 2\,(2x_1x_2^{-1})\,(-x_1^2x_2^{-2})\,(-2x_1x_2^{-2}) - \;(2x_1x_2^{-1})^2\,(2x_1^2x_2^{-3}) \;-\; (-x_1^2x_2^{-2})^2\,(2x_2^{-1}) \\ &= 8x_1^4x_2^{-5} - 8x_1^4x_2^{-5} \;-\; 2x_1^4x_2^{-5} \\ &= -\,2x_1^4x_2^{-5} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Como $D_2 < 0$, $D_3 < 0$ en el dominio, entonces f es **cuasiconvexa**.

3.1 Resumen: Criterio en Funciones Cuasicóncavas y Cuasiconvexas

Sea D_k el menor principal de orden k de la matriz Hessiana Orlada. Entonces

(a) f es una **función cuasicóncava** en $\mathbb{R}^n$ si y solo si

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{vmatrix} < 0\,, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0\,, \quad \cdots$$

(b) f es una **función cuasiconvexa** en $\mathbb{R}^n$ si y solo si

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{vmatrix} < 0\,, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0\,, \quad \cdots$$

El criterio para funciones **estrictamente cóncavas/convexas** requiere que $\mathbf{x} >> 0$.

4 Apéndice

5 Menores Principales

Definición 5.1. Sea A una matriz de dimensión $n \times n$. Una submatriz $k \times k$ de A formada al eliminar $n - k$ columnas y las mismas $n - k$ filas de A es llamada una **submatriz principal** de orden k de A. El determinante de una submatriz principal de orden k es llamado un **menor** de orden k de A[2].

Ejemplo 5.1. Para una matriz general de 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Una submatriz principal es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La cual se forma al eliminar la columna 2 y la fila 2 de A. Esta es una de las tres submatrices de segundo orden de A (las otras dos surgen de eliminar las columnas y filas 1 y 3, respectivamente).

Su menor es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Definición 5.2. Sea A una matriz de dimensión $n \times n$. El determinante de la submatriz principal de orden k de A obtenida al eliminar las últimas $n - k$ filas y columnas de A se le conoce como **menor principal** de orden k de A.

[2]Algunos autores le llaman *menor principal* a lo que aquí definimos como *menor*, mientras le llaman *menor principal inicial* o *menor principal director* a lo que definiremos más adelante como *menor principal*. Me decido por esta forma de definirlos para tener congruencia con Jehle & Reny (2011), pues ellos lo definen de esta manera. Los resultados no se ven afectados por estas sutilezas siempre y cuando se tenga en mente a qué submatriz de A nos estámos refiriendo. En los ejemplos se puede ver claramente cuáles son.

Ejemplo 5.2. Para el ejemplo de una matriz general de 3×3, sus tres menores principales son

$$|a_{11}| \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6 Formas Cuadráticas

Definición 6.1. Una **forma cuadrática** en $\mathbb{R}^n$ es una función $Q(\cdot)$ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ de la forma

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

6.1 Representación Matricial de una Forma Cuadrática

Como una transformación lineal $f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ tiene una representación matricial, una forma cuadrática también tiene una representación matricial. Por ejemplo, para una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, podemos representarla de la siguiente forma:

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para cada $Q(\cdot)$, la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

podría tener distintos elementos. Sin embargo, la elección de esos elementos es adecuada porque hace que la matriz sea simétrica.

Por lo tanto, podemos generalizar este resultado en el siguiente teorema sobre la representación matricial de formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 6.1. *La forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$*

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

puede representarse como

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \cdots & \frac{1}{2}a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Estos es

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$$

donde A es una ***matriz simétrica única*** *que representa a $Q(\cdot)$. De manera inversa, si A es una matriz simétrica, entonces la función $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ es una forma cuadrática.*

Entonces, podemos ver que la definitud de una matriz simétrica (positiva o negativa definida o semidefinida) se da por el signo de su forma cuadrática (**Definición 1.1**).