Laboratorio de Microeconomía I

Centro de Investigación y Docencia Económicas
Maestría en Economía - 2025
Laboratorista: Arturo López
Tarea 9

Exercises

Ex. 2.14 Consider the problem of insuring an asset against theft. The value of the asset is \$D, the insurance cost is \$I per year, and the probability of theft is p. List the four outcomes in the set A associated with this risky situation. Characterise the choice between insurance and no insurance as a choice between two gambles, each involving all four outcomes in A, where the gambles differ only in the probabilities assigned to each outcome.

Proof. Los resultados (consecuencias) posibles combinan dos decisiones (asegurar o no asegurar) y dos estados de la naturaleza (robo o no robo). El conjunto de resultados en $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ es:

$$\begin{aligned}
(\text{asegurado, robo}) &: a_1 = \$D - \$I \\
(\text{asegurado, no robo}) &: a_2 = -\$I \\
(\text{no asegurado, robo}) &: a_3 = 0 \\
(\text{no asegurado, no robo}) &: a_4 = \$D
\end{aligned}$$

La elección entre asegurar o no asegurar puede representarse como una elección entre dos loterías definidas sobre el mismo conjunto de resultados A, que difieren sólo en las probabilidades asignadas:[1]

$$\ell_1 = \Big(a_1, a_2\ ;\ p,\ (1-p)\Big), \qquad \ell_2 = \Big(a_3, a_4\ ;\ p,\ (1-p)\Big)$$

donde ℓ_1 es la lotería donde se elige asegurarse, y ℓ_2 es la lotería donde se elige no asegurarse.

Es decir, bajo la elección de asegurarse, el individuo enfrenta a_1 con probabilidad p, a_2 con probabilidad $(1-p)$ y a_3, a_4 con probabilidad 0 (todos los resultados en A son posibles, pero no todos son probables). Por otro lado, bajo la elección de no asegurarse, enfrenta a_3 con probabilidad p, a_4 con probabilidad $(1-p)$ y a_1, a_2 con probabilidad 0. Ambas loterías comparten los cuatro resultados en A (i.e. $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{G}$) y difieren únicamente en la distribución de probabilidades sobre ellos. □

[1] Noten que opté por usar la notación que la Dra. Sonia utiliza. En notación del Jehle & Reny, estas loterías serían: $\ell_1 = \big(p \circ a_1,\ (1-p) \circ a_2\big),\ \ell_2 = \big(p \circ a_3, (1-p) \circ a_4\big)$

Ex. 2.25 Consider the quadratic VNM utility function $U(w) = a + bw + cw^2$.

(a) What restrictions if any must be placed on parameters a, b, and c for this function to display risk aversion?

(b) Over what domain of wealth can a quadratic VNM utility function be defined?

(c) Given the gamble

$$g = ((1/2) \circ (w + h), (1/2) \circ (w - h)),$$

show that $CE < E(g)$ and that $P > 0$.

(d) Show that this function, satisfying the restrictions in part (a), *cannot* represent preferences that display *decreasing* absolute risk aversion.

Proof. Sea $A = \mathbb{R}_+$ el conjunto de todos los niveles de riqueza w posibles.

(a): Primero, sabemos que toda función de utilidad VNM cumple que $U'(w) > 0$ en todo su dominio. Entonces, debe cumplirse que $U'(w) = b + 2cw > 0$.

Para aversión al riesgo, se requiere concavidad estricta:

$$U''(w) = 2c < 0 \quad \implies \quad c < 0$$

Además, como $U'(w) = b + 2cw > 0$, si $c < 0$ entonces $b > -2cw > 0$ porque $w > 0$. Luego, $b > 0$.

Para el parámetro a, su valor es libre.

(b): Dado que $U'(w) = b + 2cw > 0$, entonces

$$w < -\frac{b}{2c}$$

Por lo tanto, un dominio admisible es cualquier subconjunto de $[0, {}^{-b}/_{2c})$.

(c): El equivalente cierto (Certainty Equivalent) es la cantidad de riqueza que hace a una persona indiferente entre recibir esa cantidad con certeza o aceptar participar en una lotería (situación riesgosa). Es decir,

$$U(g) = U(CE)$$

El CE es el monto que proporciona la misma utilidad que elegir la lotería. Es la respuesta a la pregunta: *¿Cuánto dinero seguro aceptarías a cambio de renunciar a esta lotería (situación* *incierta)?* [2] La persona es indiferente entre recibir CE de riqueza o jugar la lotería.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
U(g) &= \frac{1}{2}U(w+h) + \frac{1}{2}U(w-h) \\
&= \frac{1}{2}\left(a + b(w+h) + c(w+h)^2\right) + \frac{1}{2}\left(a + b(w-h) + c(w-h)^2\right) \\
&= a + bw + \frac{1}{2}c\left((w+h)^2 + (w-h)^2\right) \\
&= a + bw + \frac{1}{2}c\left(w^2 + 2wh + h^2 + w^2 - 2wh + h^2\right) \\
&= a + bw + \frac{1}{2}c\left(2w^2 + 2h^2\right) \\
&= U(w) + c\,h^2
\end{aligned}$$

Luego, $U(g) = U(w) + c\,h^2 = U(CE)$.

Como $c < 0$, entonces se tiene que $U(CE) < U(w)$. Como U es estrictamente creciente, entonces de $U(CE) < U(w)$ se sigue que

$$CE < w = \mathbb{E}(g)$$

pues $\mathbb{E}(g) = {}^1\!/\!_2(w+h) + {}^1\!/\!_2(w-h) = w$.

Por otro lado, dado que demostramos que $CE < \mathbb{E}(g)$, entonces la prima de riesgo cumple que[3]

$$P = \mathbb{E}(g) - CE > 0$$

(d): La medida de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo es

$$R_a(w) \equiv -\frac{U''(w)}{U'(w)} = \frac{-2c}{b + 2cw}$$

Con $c < 0$ y $b + 2cw > 0$, tenemos que $R_a(w) > 0$ para todo w en el dominio de U.

[2] Recuerden que, en realidad, lo que hace indiferente al agente es **la lotería que asigna al equivalente cierto probabilidad uno de suceder**. Es decir, la lotería degenerada $g_{CE} = (1 \circ CE)$. Por lo tanto, la manera formal de definir al CE de una lotería g es que es aquel valor que logra que: $U(g) = U(g_{CE})$. No obstante, como g_{CE} es una lotería degenerada, esto implica que:

$$U(g) = U(CE)$$

Para mayor profundización, consulten la sección de aversión al riesgo del Mas-Colell.

[3] La prima de riesgo P se define como la cantidad de riqueza que la persona está dispuesta a sacrificar (pagar) por evitar participar en la lotería (tomar el riesgo).

Entonces,

$$R'_a(w) = \frac{-(-2c)}{(b+2cw)^2} \cdot 2c$$
$$= \frac{4c^2}{(b+2cw)^2}$$

Como $4c^2 > 0$ y $(b+2cw)^2 > 0$, entonces $R'_a(w) > 0$. Por lo tanto, la aversión absoluta al riesgo es creciente, de modo que U bajo las restricciones encontradas en (a) no puede representar preferencias con aversión absoluta al riesgo decreciente. Es decir, una función de utilidad VNM cuadrática que satisfaga $c < 0, b > 0$ y a libre no puede representar preferencias con DARA. $\square$

Ex. 6.C.16^A An individual has Bernoulli utility function $u(\cdot)$ and initial wealth w. Let lottery L offer a payoff of G with probability p and a payoff of B with probability $1-p$.

(a) If the individual owns the lottery, what is the minimum price he would sell it for?

(b) If he does not own it, what is the maximum price he would be willing to pay for it?

(c) Are buying and selling prices equal? Give an economic interpretation for your answer. Find conditions on the parameters of the problem under which buying and selling prices are equal.

(d) Let $G = 10$, $B = 5$, $w = 10$, and $u(x) = \sqrt{x}$. Compute the buying and selling prices for this lottery and this utility function.

Proof. **(a) Precio mínimo de venta.**

Si el individuo es propietario de la lotería L, venderla por un precio R_S le deja una riqueza cierta de $w + R_S$. Conservar la lotería implica una riqueza aleatoria de $w + G$ con probabilidad p o $w + B$ con probabilidad $1 - p$. El precio mínimo aceptable R_S es aquel que lo hace indiferente entre ambas opciones.[4] Es decir,

$$u(w + R_S) = p\, u(w+G) + (1-p)\, u(w+B)$$

Noten que el monto $w + R_S$ es justamente el equivalente cierto al vender la lotería. Es decir, el equivalente cierto asociado a la lotería cuando uno es propietario. Esto nos servirá para el inciso (c).

[4] ¿Por qué? piensen esto y si no lo agarran me dicen.

(b) Precio máximo de compra.

Si el individuo no es propietario de la lotería, comprarla por un precio R_b implica una riqueza aleatoria de $w - R_b + G$ con probabilidad p o $w - R_b + B$ con probabilidad $1 - p$. Si no la compra, le deja una riqueza cierta de w. El precio máximo R_b que estaría dispuesto a pagar lo hace indiferente entre ambas opciones. Es decir, es el equivalente cierto al comprar:

$$u(w) = p\,u(w - R_b + G) + (1 - p)\,u(w - R_b + B)$$

Noten que el monto w es justamente el equivalente cierto al comprar la lotería. Es decir, el equivalente cierto asociado a la lotería cuando uno es comprador. Esto nos servirá para el inciso (c).

(c) Comparación e interpretación.

En general, los precios de compra y de venta de la lotería no coinciden. Sin embargo, si la función de utilidad $u(\cdot)$ presenta **aversión absoluta al riesgo constante (CARA)**, entonces ambos precios son iguales.

Para demostrarlo, reescribamos las condiciones de indiferencia derivadas en (a) y (b) en términos de los *equivalentes ciertos* para cada nivel de riqueza inicial:

$$c_w = w + R_s, \qquad c_{w-R_b} = w,$$

donde:

- c_w es el equivalente cierto de la lotería cuando la riqueza inicial es w (es decir, la riqueza inicial del individuo propietario de L);
- c_{w-R_b} es el equivalente cierto cuando la riqueza inicial es $w - R_b$ (es decir, la riqueza inicial del individuo que no es propietario de L, en caso de comprarla);

La **Proposición 6.C.3(iii)** del Mas-Colell establece que para cualquier riesgo $F(z)$, el equivalente cierto c_x de una lotería que se suma a un nivel de riqueza x, definido por [5]

$$u(c_x) = \int u(x + z)\,dF(z),$$

tiene la propiedad de que:

$$(x - c_x) \text{ es } \textit{decreciente} \text{ en } x \quad \Longleftrightarrow \quad u(\cdot) \text{ exhibe DARA}$$

[5] Es decir, c_x es el equivalente cierto del riesgo cuando la riqueza inicial es x. Es la cantidad segura que lo deja indiferente a enfrentar el riesgo si parte con riqueza x: $u(c_x) = \int u(x + z)\,dF(z)$

Intuitivamente, cuanto mayor es la riqueza x, menor es la cantidad $x - c_x$ que el individuo estaría dispuesto a pagar para eliminar el riesgo.

Si en cambio $u(\cdot)$ presenta **aversión absoluta al riesgo constante (CARA)**, entonces:

$$(x - c_x) \text{ es } \textit{constante} \text{ en } x,$$

lo que significa que el "costo subjetivo" de enfrentar el riesgo no varía con el nivel de riqueza.

Entonces, bajo DARA:

$$w - c_w < (w - R_b) - c_{w-R_b}.$$

Pues $(x - c_x)$ es decreciente en x, y como $w > w - R_b$, entonces $w - c_w < (w - R_b) - c_{w-R_b}$.

Sustituyendo las definiciones anteriores:

$$w - (w + R_s) < (w - R_b) - w \quad \Longrightarrow \quad -R_s < -R_b \quad \Longrightarrow \quad R_s > R_b$$

Por lo tanto, cuando $u(\cdot)$ exhibe DARA, los precios de compra máximo y de venta mínimo de la lotería no coinciden.

En cambio, bajo CARA:

$$w - c_w = (w - R_b) - c_{w-R_b}.$$

Esto se debe a que la diferencia $(x - c_x)$ es constante para todo nivel de riqueza incial x y el equivalente cierto asociado c_x.

Sustituyendo las definiciones anteriores:

$$w - (w + R_s) = (w - R_b) - w \quad \Longrightarrow \quad -R_s = -R_b \quad \Longrightarrow \quad R_s = R_b$$

Por lo tanto, bajo CARA, los precios extremos de compra y venta coinciden.

Interpretación económica.

- Si $(x - c_x)$ *disminuye* con x, el individuo con más riqueza paga menos por eliminar el riesgo $\Rightarrow$ **DARA**. En este caso, al ser el comprador más "pobre" después de pagar $(w - R_b)$, muestra mayor aversión al riesgo y por tanto $R_S > R_b$.
- Si $(x - c_x)$ es *constante* en x, la valoración del riesgo no depende del nivel de riqueza $\Rightarrow$ **CARA**. Por ello, los precios de compra y venta coinciden: $R_S = R_b$.
- Si $(x - c_x)$ *aumenta* con x, el individuo paga más por eliminar el riesgo cuanto más rico es

$\Rightarrow$ **IARA**. En este caso, al ser el vendedor más "rico" después de vender $(w+R_S)$, muestra mayor aversión al riesgo y por tanto $R_S < R_b$.

Tabla Resumen:

Aversión	Propiedad de $(x - c_x)$	Interpretación	Relación entre precios
DARA	Decreciente en x	El rico es menos adverso al riesgo	$R_S > R_b$
CARA	Constante en x	El grado de aversión no depende de x	$R_S = R_b$
IARA	Creciente en x	El rico es más adverso al riesgo	$R_S < R_b$

(d) Ejemplo numérico.

Sean $G = 10$, $B = 5$, $w = 10$ y $u(x) = \sqrt{x}$.

Precio de venta:

$$\sqrt{10 + R_S} = p\,\sqrt{20} + (1-p)\,\sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad R_S = \left(p\,\sqrt{20} + (1-p)\,\sqrt{15}\right)^2 - 10$$

Precio de compra:

$$\sqrt{10} = p\,\sqrt{20 - R_b} + (1-p)\,\sqrt{15 - R_b}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{R_s > R_b,}$$

confirmando que el individuo con utilidad $u(x) = \sqrt{x}$ (DARA) exige un precio de venta mayor que el de compra, porque es más averso al riesgo cuando tiene menos riqueza. $\square$

Apéndice

Proposition 6.C.3: The following properties are equivalent:

(i) The Bernoulli utility function $(\cdot)$ exhibits decreasing absolute risk aversion.

(ii) Whenever $x_2 < x_1$, $u_2(z) = u(x_2 + z)$ is a concave transformation of $u_1(z) = u(x_1 + z)$.

(iii) For any risk $F(z)$, the certainty equivalent of the lottery formed by adding risk z to wealth level x, given by the amount c_x at which

$$u(c_x) = \int u(x + z)\,dF(z),$$

is such that $(x - c_x)$ is decreasing in x. That is, the higher x is, the less the individual is willing to pay to get rid of the risk.

(iv) The probability premium $\pi(x, \varepsilon, u)$ is decreasing in x.

(v) For any $F(z)$, if $\int u(x_2 + z)\, dF(z) \geq u(x_2)$ and $x_2 < x_1$, then $\int u(x_1 + z)\, dF(z) \geq u(x_1)$.