

Laboratorio de Microeconomía I
Centro de Investigación y Docencia Económicas
Maestría en Economía - 2025
Laboratorista: Arturo López
Tarea 10 Solver

Exercises

Ex. 2.26 Let $u(w) = -(b - w)^c$. What restrictions on w, b , and c are required to ensure that $u(w)$ is strictly increasing and strictly concave? Show that under those restrictions, $u(w)$ displays *increasing* absolute risk aversion.

Proof. Sea $u(w) = -(b - w)^c$.

Sabemos que $u(w)$ es estrictamente creciente y estrictamente cóncava si $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$ para todo $w \in \mathbb{R}_+$.¹ Entonces,

$$\begin{aligned}u'(w) &= c(b - w)^{c-1} \\u''(w) &= -c(c - 1)(b - w)^{c-2}\end{aligned}$$

Luego, $u'(w) > 0$ si y solo si $c > 0$ y $w < b$.

Asimismo, asumiendo que $c > 0$ y $w < b$, $u''(w) < 0$ si y solo si

$$-c(c - 1) < 0 \iff c(c - 1) > 0 \iff c > 1$$

Por lo tanto, con $0 \leq w < b$ y $c > 1$, u es estrictamente creciente y estrictamente cóncava en $[0, b)$.

La aversión absoluta al riesgo es

$$\begin{aligned}R_a(w) &= \frac{-u''(w)}{u'(w)} \\&= \frac{-(-c(c - 1)(b - w)^{c-2})}{c(b - w)^{c-1}} \\&= \frac{(c - 1)(b - w)^{c-1}(b - w)^{-1}}{(b - w)^{c-1}} \\&= \frac{c - 1}{b - w}\end{aligned}$$

¹Recuerden que, para Jehle y Reny, el conjunto de resultados posibles para loterías de niveles de riqueza se define como $A = \mathbb{R}_+$ (Jehle and Reny, 2011, p. 110). Una interpretación es que el nivel de riqueza no puede ser negativo (estados de la naturaleza con consecuencias de deuda), más eso no significa que no puedan darse pérdidas de riqueza: e.g., $w - x$, donde x es un monto expresado en la misma unidad monetaria que la riqueza w , y cumple que $x \leq w$. El Mas-Colell también procede con loterías monetarias que contienen cantidades no negativas de riqueza (Mas-Colell et al., 1995, pp. 183–184).

Dado $c > 1$ y $w < b$, se cumple que $R_a(w) > 0$.

Luego,

$$R'_a(w) = -\frac{c-1}{(b-w)^2}(-1) = \frac{c-1}{(b-w)^2} > 0 \quad \forall 0 \leq w < b$$

Dado que $R_a(w)$ es estrictamente creciente en w , entonces $u(\cdot)$ exhibe aversión absoluta al riesgo creciente (IARA).

Además, la aversión relativa al riesgo es:

$$\begin{aligned} R_r(w) &= R_a(w) w \\ &= \frac{c-1}{b-w} \cdot w \end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned} R'_r(w) &= R_a(w) + R'_a(w) w \\ &= \frac{c-1}{b-w} + \frac{c-1}{(b-w)^2} \cdot w \\ &= \frac{b-w+w}{(b-w)^2} (c-1) \\ &= \frac{b(c-1)}{(b-w)^2} > 0 \quad (\text{pues } c > 1) \end{aligned}$$

Luego, $u(\cdot)$ exhibe aversión relativa al riesgo creciente (IRRA). □

Ex. 2.27 Show that for $\beta > 0$, the VNM utility function $u(w) = \alpha + \beta \ln(w)$ displays decreasing absolute risk aversion.

Proof. Sea $u(w) = \alpha + \beta \ln(w)$ con $w \in \mathbb{R}_+$. Supongamos que $\beta > 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned} R_a(w) &= \frac{-u''(w)}{u'(w)} \\ &= -\left(-\frac{\beta}{w^2}\right) \cdot \frac{w}{\beta} \\ &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$

Luego,

$$R'_a(w) = -\frac{1}{w^2} < 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}_+$$

Por lo tanto, $u(\cdot)$ exhibe aversión absoluta al riesgo decreciente (DARA).

Además, la aversión relativa al riesgo es constante (CRRA):

$$R_r(w) = R_a(w) w = \frac{1}{w} \cdot w = 1$$

□

Remark. **Medidas de Aversión al Riesgo.**

La medida de **aversión al riesgo absoluta** de Arrow–Pratt se define como

$$R_a(w) = \frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

mientras que la medida de **aversión al riesgo relativa** de Arrow–Pratt es^a

$$R_r(w) = R_a(w) w = \frac{-u''(w)}{u'(w)} w$$

Clasificación de tipos de actitud ante el riesgo:

- **IARA** (*Increasing Absolute Risk Aversion*): $R'_a(w) > 0$.
- **CARA** (*Constant Absolute Risk Aversion*): $R'_a(w) = 0$.
- **DARA** (*Decreasing Absolute Risk Aversion*): $R'_a(w) < 0$.

Relación con la aversión relativa:

Notemos que

$$R_r(w) = w R_a(w)$$

$$R'_r(w) = R_a(w) + w R'_a(w)$$

Es decir, la actitud relativa de aversión al riesgo (signo de $R'_r(w)$) depende de la actitud absoluta (signo de $R'_a(w)$). No obstante, no está totalmente determinada por esta: en particular, depende de la actitud absoluta ante el riesgo $R'_a(w)$ y de la magnitud de la aversión al riesgo en proporción al nivel de riqueza $R_a(w)/w$.

Intuición (aversión *absoluta* al riesgo):

- Bajo **IARA**, el individuo se vuelve más adverso al riesgo conforme aumenta su riqueza: incluso si se vuelve más rico, cada peso adicional de riesgo le duele más.
- Bajo **CARA**, la disposición a asumir riesgo no cambia con la riqueza.
- Bajo **DARA**, el individuo tolera más riesgo conforme crece su riqueza.

Intuición (aversión *relativa* al riesgo):

- Bajo **IRRA** (*Increasing Relative Risk Aversion*), el individuo se vuelve más adverso al riesgo en términos *proporcionales*: conforme aumenta su riqueza, está dispuesto a arriesgar una fracción cada vez menor de ella. Es decir, *al aumentar la riqueza, la proporción del patrimonio que el individuo está dispuesto a arriesgar disminuye*. Por ejemplo, el portafolio de activos de una persona con preferencias IRRA se vuelve más conservador a medida que se enriquece: aunque podría estar dispuesto a apostar más dinero en términos absolutos, la fracción de su portafolio riesgoso se reduce.
- Bajo **CRRA** (*Constant Relative Risk Aversion*), la fracción de riqueza que el individuo está dispuesto a arriesgar se mantiene constante para todo nivel de riqueza. Este caso implica que la tolerancia al riesgo crece en la misma proporción que la riqueza, preservando la misma proporción de riesgo a lo largo de distintos niveles de ingreso.
- Bajo **DRRA** (*Decreasing Relative Risk Aversion*), el individuo se vuelve menos adverso al riesgo en términos *proporcionales*: al aumentar su riqueza, está dispuesto a arriesgar una proporción mayor de ella.

Ejemplos clásicos:**(a) Función de utilidad cuadrática.**

La función de utilidad cuadrática tiene la forma

$$u(w) = a w - b w^2$$

con $a > 0$, $b > 0$.

Entonces,

$$R_a(w) = \frac{2b}{a - 2bw}, \quad R_r(w) = \frac{2bw}{a - 2bw}$$

Además,

$$R'_a(w) = \frac{4b^2}{(a - 2bw)^2} > 0, \quad R'_r(w) = R_a(w) + R'_a(w) w = \frac{2ab}{(a - 2bw)^2} > 0$$

Por lo tanto, esta función de utilidad exhibe **IARA** e **IRRA**.

(b) Exponencial negativa.

La función de utilidad exponencial negativa tiene la forma

$$u(w) = a - be^{-cw}$$

con $b > 0$, $c > 0$ y a libre.

Entonces,

$$R_a(w) = c, \quad R_r(w) = cw$$

Además,

$$R'_a(w) = 0, \quad R'_r(w) = c > 0$$

Por lo tanto, esta función de utilidad exhibe **CARA** e **IRRA**.

(c) HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion).

La familia de funciones de utilidad HARA tienen la forma

$$u(w) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{aw}{1-\gamma} + b \right)^\gamma, \quad a > 0, \quad \gamma \neq 1,$$

con la restricción de dominio:

$$b + \frac{aw}{1-\gamma} > 0$$

la cual impone una *cota inferior* sobre w si $\gamma < 1$:

$$w > \frac{b}{a}(\gamma - 1)$$

y una *cota superior* si $\gamma > 1$:

$$w < \frac{b}{a}(\gamma - 1)$$

Entonces,

$$R_a(w) = \frac{a}{b + \frac{a}{1-\gamma}w}, \quad R_r(w) = \frac{aw}{b + \frac{a}{1-\gamma}w}$$

Además,

$$R'_a(w) = -\frac{a^2}{1-\gamma} \frac{1}{\left(b + \frac{a}{1-\gamma}w\right)^2}, \quad R'_r(w) = \frac{ab}{\left(b + \frac{a}{1-\gamma}w\right)^2} > 0$$

Por lo tanto, esta función de utilidad exhibe **DARA** si $\gamma < 1$, **IARA** si $\gamma > 1$, y siempre **IRRA**.

Casos límite (por L'Hopital):

$$\gamma \rightarrow 1 : u(w) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{a w}{1-\gamma} + b \right)^\gamma = a w + b^*$$

$$\Rightarrow R_a(w) = 0, \quad R_r(w) = 0$$

\Rightarrow **CARA** y **CRRA**

$$\gamma \rightarrow 0 : u(w) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{a w}{1-\gamma} + b \right)^\gamma = \log(a w + b)$$

$$\Rightarrow R_a(w) = \frac{a}{a w + b}, \quad R_r(w) = \frac{a w}{a w + b}$$

$$\Rightarrow R'_a(w) = -\frac{a^2}{(a w + b)^2} < 0, \quad R'_r(w) = \frac{b}{(a w + b)^2} > 0$$

\Rightarrow **DARA** e **IRRA**

(d) Funciones de utilidad con CRRA (Constant Relative Risk Aversion).

La familia de funciones de utilidad con **aversión relativa constante al riesgo** (CRRA) se define como

$$u(w) = \begin{cases} \frac{w^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} & \text{si } \gamma \neq 1, \\ \ln(w) & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}$$

donde $\gamma > 0$ es el *coeficiente de aversión relativa al riesgo*.

Si $\gamma \neq 1$, entonces

$$R_a(w) = \frac{\gamma}{w}, \quad R_r(w) = \gamma$$

Además,

$$R'_a(w) = -\frac{\gamma}{w^2} < 0, \quad R'_r(w) = 0$$

Por lo tanto, esta función de utilidad exhibe **DARA** y **CRRA**.

Casos límite (por L'Hopital):

$$\begin{aligned}\gamma \rightarrow 1: \quad u(w) &= \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{w^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} = \ln(w) \\ &\Rightarrow R_a(w) = \frac{1}{w}, \quad R_r(w) = 1 \\ &\Rightarrow R'_a(w) = -\frac{1}{w^2} < 0, \quad R'_r(w) = 0 \\ &\Rightarrow \textbf{DARA y CRRA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma \rightarrow 0: \quad u(w) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{w^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} = w - 1 \\ &\Rightarrow R_a(w) = 0, \quad R_r(w) = 0 \\ &\Rightarrow \textbf{CARA y CRRA}\end{aligned}$$

Intuición: El parámetro γ mide la proporción del ingreso/riqueza que un individuo está dispuesto a arriesgar. Aunque su riqueza absoluta aumente, la fracción relativa de riesgo que acepta se mantiene constante.

^aver el ejercicio 2.34 de [Jehle and Reny \(2011\)](#).

Ex. 2.28 Let $u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + 2\ln(x_2)$. If $p_1 = p_2 = 1$, will this person be risk loving, risk neutral, or risk averse when offered gambles over different amounts of income?

La idea es que el individuo elige su consumo óptimo dados los precios de mercado y su ingreso w . No obstante, si decide participar en una lotería que involucra su ingreso, entonces w se vuelve incierto. Por lo tanto, su bienestar dependerá del estado de la naturaleza que sucede, pero no porque las cantidades (x_1, x_2) o los precios (p_1, p_2) sean inciertos, sino porque su nivel de ingreso w lo será. Es decir, estas loterías, aunque condicionan el consumo final, no implican incertidumbre directa sobre las cantidades, sino únicamente sobre el ingreso disponible para decidir cuánto consumir de cada una: ante distintos niveles de ingreso en cada estado de la naturaleza, la persona elegirá diferentes canastas óptimas.

El consumidor siempre maximiza su utilidad en cada estado, dadas sus preferencias y los precios vigentes (que aquellas y estos no dependen del estado de la naturaleza), pero enfrenta distintos presupuestos según el ingreso que se materialice. En este sentido, las demandas marshallianas $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ pueden interpretarse como un plan contingente que asigna una canasta óptima a cada nivel posible de ingreso (y, por tanto, a cada estado de la naturaleza).

Podríamos entonces analizar cómo cambia la elección óptima del consumidor en distintos estados de la naturaleza de w , y luego calcular su bienestar con esas canastas para caracterizar su actitud ante el riesgo. Si tan solo tuviéramos una herramienta que resumiera esa elección óptima en una función que arroje la utilidad máxima alcanzable con distintos niveles de w , dadas sus preferencias y los precios, sin necesidad de resolver todo el problema de maximización de utilidad...²

Por lo tanto, obtendremos $v(w)$ y con ella podemos caracterizar su actitud ante el riesgo cuando enfrenta loterías monetarias que afectan su riqueza.

Proof. Sea $u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + 2 \ln(x_2)$ con $p_1 = p_2 = 1$ e ingreso $w > 0$.

El problema de maximización de utilidad es

$$\max_{x_1, x_2 > 0} \ln(x_1) + 2 \ln(x_2) \quad \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 = w$$

El Lagrangiano asociado:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \ln(x_1) + 2 \ln(x_2) + \lambda(w - x_1 - x_2).$$

C.P.O.:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \right|_{(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0 \iff \frac{1}{x_1} = \lambda \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \right|_{(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0 \iff \frac{2}{x_2} = \lambda \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \right|_{(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0 \iff x_1 + x_2 = w \quad (3)$$

De (1) y (2), tenemos que

$$2x_1 = x_2$$

Sustituyendo en (3),

$$\mathbf{x}_1(w) = \frac{1}{3} w \implies \mathbf{x}_2(w) = \frac{2}{3} w$$

Por lo tanto, la utilidad indirecta es:

$$\begin{aligned} v(w) &= \ln\left(\frac{w}{3}\right) + 2 \ln\left(\frac{2w}{3}\right) \\ &= \ln w - \ln 3 + 2 \ln 2 + 2 \ln w - 2 \ln 3 \\ &= 3 \ln w + 2 \ln 2 - 3 \ln 3 \end{aligned}$$

²... esto es justo ... la función de utilidad indirecta ... $v(w)$.

Derivamos respecto a w :

$$v'(w) = \frac{3}{w} > 0 \quad v''(w) = -\frac{3}{w^2} < 0$$

Los coeficientes de Arrow-Pratt son:

$$R_a(w) = \frac{-v''(w)}{v'(w)} = \frac{1}{w}$$

$$R_r(w) = R_a(w) w = 1$$

Como $R_a(w) > 0$, entonces el individuo es averso al riesgo cuando se le ofrecen loterías sobre cantidades de su ingreso w .

Por otro lado, tenemos que:

$$R'_a(w) = -\frac{1}{w^2} < 0$$

$$R'_r(w) = 0$$

Por lo tanto, el individuo tiene preferencias que exhiben **DARA** y **CRRA**.

□

Ex. 2.35 An investor must decide how much of initial wealth w to allocate to a risky asset with unknown rate of return r , where each outcome r_i occurs with probability $p_i, i = 1, \dots, n$. Using the framework of Example 2.6, prove that if the investor's preferences display *increasing* absolute risk aversion, the risky asset must be an 'inferior' good.

Proof. El problema de maximización de utilidad esperada es:

$$\max_{\beta} \sum_{i=1}^n p_i u(w + \beta r_i) \quad \text{s.t. } 0 \leq \beta \leq w$$

Las condiciones de primer y segundo orden para solución interior son:

$$\sum_{i=1}^n p_i u'(w + \beta^* r_i) r_i = 0 \quad (\text{C.P.O.})$$

$$\sum_{i=1}^n p_i u''(w + \beta^* r_i) r_i^2 < 0 \quad (\text{C.S.O.})$$

Definamos:

$$F(\beta, w) := \sum_{i=1}^n p_i u'(w + \beta^* r_i) r_i$$

de modo que $F(\beta^*, w) = 0$ por las condiciones de primer orden. También, de las condiciones de segundo orden sabemos que:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \beta} \right|_{(\beta, w) = (\beta^*, w)} = \sum_{i=1}^n p_i u''(w + \beta^* r_i) r_i^2 < 0$$

Por lo tanto, $\left. \frac{\partial F}{\partial \beta} \right|_{(\beta, w) = (\beta^*, w)} \neq 0$.

Entonces, por el **Teorema de la Función Implícita** sabemos que $F(\cdot)$ define de forma implícita a β como una función C^1 de w en una vecindad del punto (β^*, w) .

Por lo tanto, derivamos $F(\beta^*(w), w) = 0$ respecto a w :

$$\frac{dF}{dw} = \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{d\beta^*}{dw} = 0$$

Despejando,

$$\frac{d\beta^*}{dw} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial \beta}}$$

Sustituyendo,

$$\frac{d\beta^*}{dw} = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i u''(w + \beta^* r_i) r_i}{\sum_{i=1}^n p_i u''(w + \beta^* r_i) r_i^2}$$

Por (C.S.O.), el denominador es negativo, de modo que el signo de $\frac{d\beta^*}{dw}$ depende del numerador.

Como $R_a(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$, entonces

$$u''(w + \beta^* r_i) = -R_a(w + \beta^* r_i) u'(w + \beta^* r_i),$$

y por consiguiente

$$\sum_{i=1}^n p_i u''(w + \beta^* r_i) r_i = - \sum_{i=1}^n p_i R_a(w + \beta^* r_i) u'(w + \beta^* r_i) r_i \quad (*)$$

Bajo *IARA*, $R_a(\cdot)$ es creciente. Por tanto,

$$\begin{cases} R_a(w + \beta^* r_i) > R_a(w) & \text{si } r_i > 0 \\ R_a(w + \beta^* r_i) < R_a(w) & \text{si } r_i < 0 \end{cases}$$

Multiplicando cada desigualdad por $u'(w + \beta^* r_i) r_i$ (positivo por $u' > 0$ y con el mismo signo que r_i), en ambos casos obtenemos

$$R_a(w + \beta^* r_i) u'(w + \beta^* r_i) r_i > R_a(w) u'(w + \beta^* r_i) r_i$$

Promediando con las p_i y usando (C.P.O.),

$$\sum_{i=1}^n p_i R_a(w + \beta^* r_i) u'(w + \beta^* r_i) r_i > R_a(w) \sum_{i=1}^n p_i u'(w + \beta^* r_i) r_i = 0$$

Sustituyendo en (*), concluimos que

$$\sum_{i=1}^n p_i u''(w + \beta^* r_i) r_i < 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\beta^*}{dw} < 0$$

Es decir, cuando las preferencias exhiben **IARA**, el activo riesgoso es un bien inferior: la cantidad óptima invertida en el activo riesgoso disminuye cuando aumenta la riqueza w . \square

Ex. 6.C.1^B Consider the insurance problem studied in Example 6.C.1. Show that if insurance is not actuarially fair (so that $q > \pi$), then the individual will not insure completely.

Proof. El problema de maximización de utilidad esperada del individuo es:

$$\max_{\alpha \geq 0} \pi u(w - \alpha q - D + \alpha) + (1 - \pi) u(w - \alpha q) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq \alpha \leq w/q$$

con $u'(\cdot) > 0$, $u''(\cdot) < 0$ (aversión al riesgo).

C.P.O.

$$-(1 - \pi) u'(w - \alpha^* q) q + \pi u'(w - D + \alpha^*(1 - q))(1 - q) = 0$$

descartando soluciones de esquina (i.e., suponemos $\alpha^* > 0$).

Supongamos que el precio no es actuarialmente justo: $q > \pi$.

Entonces, $-q < -\pi$ y $(1 - q) < (1 - \pi)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= -(1 - \pi) u'(w - \alpha^* q) q + \pi u'(w - D + \alpha^*(1 - q))(1 - q) \\ &< -(1 - \pi) u'(w - \alpha^* q) \pi + \pi u'(w - D + \alpha^*(1 - q))(1 - \pi) \end{aligned}$$

Es decir,

$$-(1 - \pi) u'(w - \alpha^* q) \pi + \pi u'(w - D + \alpha^*(1 - q))(1 - \pi) > 0$$

Reordenando, tenemos que:

$$\pi u'(w - D + \alpha^*(1 - q))(1 - \pi) > (1 - \pi) u'(w - \alpha^* q) \pi$$

Dividiendo entre $\pi(1 - \pi)$ ambos lados,

$$u'(w - D + \alpha^*(1 - q)) > u'(w - \alpha^* q)$$

Como el individuo es averso al riesgo, entonces la utilidad marginal es decreciente: $u'' < 0$. Esto significa que $u'(w + \epsilon) < u'(w)$ para $\epsilon > 0$. Entonces, esto implica que

$$w - D + \alpha^*(1 - q) < w - \alpha^* q$$

Es decir,

$$\alpha^* < D$$

Luego, el individuo no se asegurará por completo.³

□

³Una forma adicional de demostrar esto es la siguiente: Supongamos que el individuo se asegura por completo: $\alpha^* = D > 0$.

Entonces, evaluando en las C.P.O.:

$$-(1 - \pi) u'(w - Dq) q + \pi u'(w - D + D(1 - q))(1 - q) = 0$$

Reordenando las C.P.O.,

$$\begin{aligned} \pi u'(w - Dq)(1 - q) - (1 - \pi) u'(w - Dq) q &= u'(w - Dq) (\pi(1 - q) - (1 - \pi)q) \\ &= u'(w - Dq) (\pi - q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si el precio no es actuarialmente justo $q > \pi$, entonces $u'(w - Dq) (\pi - q) < 0$ y luego la condición de primer orden no se satisface. Por lo tanto, si $q > \pi$ entonces $\alpha^* = D$ no es una elección óptima.

Ex. 6.C.15^A Assume that, in a world with uncertainty, there are two assets. The first is a riskless asset that pays 1 dollar. The second pays amounts a and b with probabilities π and $1 - \pi$, respectively. Denote the demand for the two assets by (x_1, x_2) .

Suppose that a decision maker's preferences satisfy the axioms of expected utility theory and that he is a risk averter. The decision maker's wealth is 1, and so are the prices of the assets. Therefore, the decision maker's budget constraint is given by

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1, x_2 \in [0, 1].$$

- (a) Give a simple *necessary* condition (involving a and b only) for the demand for the riskless asset to be strictly positive.
- (b) Give a simple *necessary* condition (involving a, b , and π only) for the demand for the risky asset to be strictly positive.

In the next three parts, assume that the conditions obtained in (a) and (b) are satisfied.

- (c) Write down the first-order conditions for utility maximization in this asset demand problem.
 - (d) Assume that $a < 1$. Show by analyzing the first-order conditions that $dx_1/da \leq 0$.
 - (e) Which sign do you conjecture for $dx_1/d\pi$? Give an economic interpretation.
 - (f) Can you prove your conjecture in (e) by analyzing the first-order conditions?
-

Proof. Para una versión alternativa de responder (a) y (b) por medio de optimización con restricciones de igualdad y desigualdad (KKT), ver el **Apéndice**.

Hay dos activos, cada uno con un rendimiento de:

- **Activo libre de riesgo.** Paga 1 en todos los estados:

$$R_f = 1$$

- **Activo riesgoso.**

$$R_r = \begin{cases} a & \text{con probabilidad } \pi, \\ b & \text{con probabilidad } 1 - \pi \end{cases}$$

Ambos activos tienen el mismo precio, de modo que su demanda depende únicamente del rendimiento que ofrecen en cada estado de la naturaleza.

Decimos que un activo domina a otro si rinde más en todos los estados. Es decir, el activo r domina a f si:

$$R_r(s) \geq R_f(s) \quad \forall s \in S \quad \text{y} \quad \exists s \in S : R_r(s) > R_f(s)$$

Un argumento simple e intuitivo de suficiencia para (a) es el de dominancia de un activo.⁴

(a) Condición necesaria para invertir en el activo libre de riesgo.

Si $a > 1$ y $b > 1$, entonces el activo riesgoso *domina estrictamente* al libre de riesgo, pues paga más en todos los estados por el mismo precio.

En este caso, el individuo asignará toda su riqueza al activo riesgoso ($x_1 = 0$).

Para que exista una demanda estrictamente positiva por el activo libre de riesgo ($x_1 > 0$), es necesario que el activo riesgoso *no domine* al activo libre de riesgo, es decir, pagar menos que el activo sin riesgo en al menos un estado.

Por lo tanto,

$$\min\{a, b\} < 1 \implies x_1 > 0$$

⁴La manera formal de conectar el concepto de dominancia de un activo con la elección de un individuo que maximiza su utilidad esperada es a través de la *dominancia estocástica de primer orden (FSD)*:

$$F_{R_r}(w) \leq F_{R_f}(w) \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

con desigualdad estricta para algún w .

Un activo que rinde más en todos los estados de la naturaleza implica FSD.

Demostración: Sean F_{R_r} y F_{R_f} las funciones de distribución acumulada de los rendimientos R_r y R_f . Si $R_r(s) \geq R_f(s)$ c.s., entonces para todo $w \in \mathbb{R}$:

$$R_r(s) \leq w \implies R_f(s) \leq w \quad \forall s \in S : p_s > 0$$

es decir, $\{s \in S : R_r(s) \leq w\} \subseteq \{s \in S : R_f(s) \leq w\}$ en todo $s \in S : p_s > 0$.

Por monotonía de la probabilidad,

$$\{R_r(s) \leq w\} \subseteq \{R_f(s) \leq w\} \implies \mathbb{P}(R_r(s) \leq w) \leq \mathbb{P}(R_f(s) \leq w) \implies F_{R_r}(w) \leq F_{R_f}(w)$$

Por lo tanto, $R_r \succeq_{FSD} R_f$. \square

Por la proposición 6.D.1 del Mas-Colell,

$$R_r \succeq_{FSD} R_f \iff \int u(w) dF_{R_r}(w) \geq \int u(w) dF_{R_f}(w) \quad \forall u' > 0$$

Equivalentemente,

$$\mathbb{E}[u(R_r)] \geq \mathbb{E}[u(R_f)] \quad \forall u' > 0$$

es decir, todos los individuos que prefieren más a menos (satisfacen los axiomas de utilidad esperada), **sin importar su aversión al riesgo**, preferirán el activo riesgoso si su rendimiento es mayor al del activo libre de riesgo en todos los estados de la naturaleza probables.

Cuando $\min\{a, b\} < 1$, las distribuciones ya no guardan una relación de FSD. El activo riesgoso deja de dominar y las preferencias dependerán del grado de aversión al riesgo.

Para más detalle, ver [Mas-Colell et al. \(1995, p. 195\)](#).

(b) Condición necesaria para invertir en el activo riesgoso.

El rendimiento esperado del activo riesgoso es

$$\mathbb{E}[R_r] = \pi a + (1 - \pi) b$$

mientras que el activo libre de riesgo paga con certeza

$$R_f = 1$$

Si el activo riesgoso ofrece el mismo o menor rendimiento esperado que el activo seguro, es decir, si $\mathbb{E}[R_r] \leq 1$, entonces cualquier individuo racional que satisfaga los axiomas de utilidad esperada preferirá mantener su riqueza en el activo libre de riesgo, pues el activo riesgoso implica un mayor riesgo sin una prima esperada.⁵

Por lo tanto, una condición necesaria para que exista inversión positiva en el activo riesgoso ($x_2 > 0$) es que éste ofrezca un rendimiento esperado estrictamente mayor que el activo seguro:

$$\pi a + (1 - \pi) b > 1$$

⁵Un argumento más formal es el siguiente. Dado que $R_f = 1$ para todo estado de la naturaleza, entonces la utilidad esperada de la lotería degenerada asociada es:

$$\mathbb{E}[u(R_f)] = u(1)$$

Mientras que para el activo riesgoso es:

$$\mathbb{E}[u(R_r)] = \pi u(a) + (1 - \pi) u(b)$$

Dado que el individuo es averso al riesgo, u es cóncava. Entonces, por la desigualdad de Jensen:

$$\mathbb{E}[u(R_r)] \leq u(\mathbb{E}[R_r])$$

Como $\mathbb{E}[R_r] = \pi a + (1 - \pi) b$, se sigue que

$$\mathbb{E}[u(R_r)] \leq u(\pi a + (1 - \pi) b)$$

Si $\pi a + (1 - \pi) b \leq 1$ y como $u'(\cdot) > 0$, tenemos que

$$u(\pi a + (1 - \pi) b) \leq u(1) = \mathbb{E}[u(R_f)]$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}[u(R_r)] \leq \mathbb{E}[u(R_f)]$, de modo que el individuo no demandará el activo riesgoso ($x_2 = 0$), pues la utilidad esperada del activo riesgoso es menor o igual a la del activo libre de riesgo. Concluimos así que

$$\pi a + (1 - \pi) b > 1 \implies x_2 > 0$$

Noten que, si u fuera lineal (neutral al riesgo),

$$\mathbb{E}[u(R_r)] = u(\mathbb{E}[R_r]) = u(\pi a + (1 - \pi) b) \leq u(1) = \mathbb{E}[u(R_f)]$$

Es decir, $\mathbb{E}[u(R_r)] \leq \mathbb{E}[u(R_f)]$ y la condición necesaria para $x_2 > 0$ vuelve a ser que $\pi a + (1 - \pi) b > 1$. Si u fuera convexa (amante del riesgo), es posible que $\mathbb{E}[u(R_r)] > u(1)$ incluso con $\pi a + (1 - \pi) b \leq 1$.

(c) Condiciones de primer orden.

Con precios unitarios $p_1 = p_2 = 1$ y riqueza normalizada a 1, el consumidor elige (x_1, x_2) para maximizar su utilidad esperada:

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \mathbb{E}[u(x_1, x_2)] = \pi u(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) u(x_1 + bx_2) \quad \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 = 1$$

El Lagrangiano asociado es

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \pi u(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) u(x_1 + bx_2) + \lambda (1 - x_1 - x_2)$$

Condiciones de primer orden:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \right|_{(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0 \iff \pi u'(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) u'(x_1 + bx_2) = \lambda \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \right|_{(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0 \iff \pi a u'(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) b u'(x_1 + bx_2) = \lambda \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \right|_{(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{x}^*, \lambda^*)} = 0 \iff x_1 + x_2 = 1 \quad (3)$$

De (1) y (2), obtenemos la condición de optimalidad, que iguala las utilidades marginales en cada estado de la naturaleza, ponderadas por su probabilidad de suceder:

$$\pi u'(x_1^* + ax_2^*) + (1 - \pi) u'(x_1^* + bx_2^*) = \pi a u'(x_1^* + ax_2^*) + (1 - \pi) b u'(x_1^* + bx_2^*) \quad (4)$$

Es decir, en el óptimo mi bienestar es igual en todos los estados de la naturaleza, valorados (ponderados) por la probabilidad de que sucedan.

Dividimos ambos lados entre $\pi u'(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) u'(x_1 + bx_2)$, obtenemos:

$$\frac{\pi a u'(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) b u'(x_1 + bx_2)}{\pi u'(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) u'(x_1 + bx_2)} = 1$$

En equilibrio, el valor esperado ponderado de los pagos marginales del activo riesgoso, ajustados por la utilidad marginal, debe igualar el pago seguro del activo sin riesgo: la valoración subjetiva entre el activo riesgoso y el libre de riesgo son iguales.

(d) Del inciso anterior, reordenamos la ecuación (4) y obtenemos

$$\pi(1 - a) u'(x_1^* + ax_2^*) + (1 - \pi)(1 - b) u'(x_1^* + bx_2^*) = 0$$

Esta ecuación define de forma implícita a x_1 y $x_2 = 1 - x_1$ en el óptimo (i.e. en una vecindad de (x_1^*, x_2^*)).

Entonces, definimos:

$$F(a, \pi, x_1) := \pi(1 - a)u'(x_1 + a(1 - x_1)) + (1 - \pi)(1 - b)u'(x_1 + (1 - x_1)b)$$

Por la C.P.O., sabemos que:

$$F(a, \pi, x_1^*) = 0$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial a} \right|_{x_1=x_1^*} &= -\pi u'(x_1 + a(1 - x_1)) + \pi(1 - a)u''(x_1 + a(1 - x_1))(1 - x_1) \\ \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^*} &= \pi(1 - a)^2 u''(x_1 + a(1 - x_1)) + (1 - \pi)(1 - b)^2 u''(x_1 + (1 - x_1)b) \end{aligned}$$

Como $u'' < 0$ y $u' > 0$, se tiene que $\left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^*} < 0$, de modo que $\left. \frac{\partial F}{\partial a} \right|_{x_1=x_1^*} \neq 0$.

Entonces, por el teorema de la función implícita,

$$\frac{\partial x_1}{\partial a} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial a}}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} < 0$$

Pues si $a < 1$, entonces $1 - a > 0$ de modo que $\left. \frac{\partial F}{\partial a} \right|_{x_1=x_1^*} < 0$.

(e) De (a) sabemos que $\min\{a, b\} < 1$, mientras que de (b) tenemos que $\pi a + (1 - \pi)b > 1$.

Entonces, tenemos dos casos para a y b .

Caso 1: Si $a \leq b$, entonces, de $\pi a + (1 - \pi)b > 1$ se sigue que:

$$b + \pi(a - b) > 1 \iff b > 1 - \pi(a - b) \iff b > 1 + \pi(b - a) \geq 1$$

Luego $b \geq 1$. Por lo tanto,

$$a < 1 \leq b$$

Derivando a F respecto a x_1 y a π :

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^*} &= \pi(1-a)^2 u''(x_1 + a(1-x_1)) + (1-\pi)(1-b)^2 u''(x_1 + b(1-x_1)) < 0 \\ \left. \frac{\partial F}{\partial \pi} \right|_{x_1=x_1^*} &= (1-a) u'(x_1 + a(1-x_1)) - (1-b) u'(x_1 + b(1-x_1)) > 0\end{aligned}$$

pues $1-a > 0$, $1-b \leq 0$, $u' > 0$ y $u'' > 0$.

Por el teorema de la función implícita,

$$\frac{\partial x_1}{\partial \pi} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \pi}}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} > 0$$

Si aumenta π (la probabilidad del peor estado para el activo riesgoso), la demanda del activo libre de riesgo aumenta:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \pi} > 0$$

Caso 2: Si $a > b$, entonces, de $\pi a + (1-\pi)b > 1$ se sigue que:

$$\begin{aligned}a &= \pi a + (1-\pi)a \\ &> \pi a + (1-\pi)b \\ &> 1\end{aligned}$$

Luego $a > 1$. Por lo tanto,

$$b < 1 < a$$

Entonces, derivando a F ahora tenemos que:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^*} &= \pi(1-a)^2 u''(x_1 + a(1-x_1)) + (1-\pi)(1-b)^2 u''(x_1 + b(1-x_1)) < 0 \\ \left. \frac{\partial F}{\partial \pi} \right|_{x_1=x_1^*} &= (1-a) u'(x_1 + a(1-x_1)) - (1-b) u'(x_1 + b(1-x_1)) < 0\end{aligned}$$

pues $1-a > 0$, $1-b \leq 0$, $u' > 0$ y $u'' > 0$.

Por el teorema de la función implícita,

$$\frac{\partial x_1}{\partial \pi} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \pi}}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} < 0$$

Si aumenta π (la probabilidad del mejor estado para el activo riesgoso, en el que paga más que el activo libre de riesgo), la demanda del activo libre de riesgo disminuye:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \pi} < 0$$

(f) Ya está en (e). □

Ex (6.C.18^B). Suppose that an individual has a Bernoulli utility function $u(x) = \sqrt{x}$.

- (a) Calculate the Arrow–Pratt coefficients of absolute and relative risk aversion at the level of wealth $w = 5$.
- (b) Calculate the certainty equivalent and the probability premium for a gamble $(16, 4; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- (c) Calculate the certainty equivalent and the probability premium for a gamble $(36, 16; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Compare this result with the one in (b) and interpret.

Proof. Sea $u(x) = \sqrt{x}$. Entonces

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad u''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}$$

(a) **Coefficientes en $w = 5$.**

$$R_a(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{2x}, \quad R_r(x) = R_a(x)x = \frac{1}{2}$$

(DARA y CRRA).

En $w = 5$:

$$R_a(5) = \frac{1}{10}, \quad R_r(5) = \frac{1}{2}$$

(b) Sea $\ell_1 = (16, 4; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Utilidad esperada de la lotería:⁶

$$\begin{aligned} U(\ell_1) &= \frac{1}{2}u(16) + \frac{1}{2}u(4) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{16} + \frac{1}{2}\sqrt{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Equivalente cierto CE :

Si $u(CE) = U(\ell_1) = 3$, entonces

$$\sqrt{CE} = 3 \Rightarrow CE = 9$$

Para calcular la prima de probabilidad π asociada a esta lotería, hablemos un poco sobre ella.

Remark. Prima de Probabilidad: Definición 6.C.2.ii Mas-Colell et al. (1995).

Para una cantidad fija de riqueza x y un $\epsilon > 0$, la *prima de probabilidad* $\pi(x, \epsilon, u)$ es el exceso en la probabilidad de ganar sobre la probabilidad justa que hace al individuo indiferente entre el resultado x con certeza y una lotería entre los resultados $x + \epsilon$ y $x - \epsilon$.

⁶Recuerden que la utilidad esperada de una lotería ℓ puede escribirse de distintas formas equivalentes:

$$UE(\ell) = U(\ell) = \mathbb{E}[u(x)] = \int u(x) dF(x)$$

donde $u(\cdot)$ es la *utilidad Bernoulli* (definida sobre los resultados posibles de la lotería, e.g. montos monetarios o niveles de riqueza) y $U(\ell)$ es la *utilidad von Neumann–Morgenstern* (definida sobre loterías).

Mas-Colell et al. (1995, §6.C) emplean la notación general de la integral de Lebesgue–Stieltjes, pues abarca tanto los casos continuos como discretos:

Caso continuo

$$U(\ell) = \int u(x) dF(x) = \int u(x)f(x) dx$$

donde $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, de modo que el diferencial $dF(x)$ representa un incremento infinitesimal en la probabilidad acumulada asociada a un pequeño cambio en x : $dF(x) = f(x) dx$. En otras palabras, $dF(x)$ mide la “masa” de probabilidad infinitesimal asignada a un intervalo infinitamente pequeño $[x, x + dx)$.

Caso discreto

$$U(\ell) = \int u(x) dF(x) = \sum_{i \in S} u(x_i) p_i$$

donde la acumulación de probabilidad se da a través de saltos: $dF(x) = \Delta F(x_i) = F(x_i) - F(x_i^-) = p_i$.

Lo importante es distinguir entre $u(\cdot)$ (utilidad sobre resultados monetarios) y $U(\cdot)$ (utilidad sobre distribuciones/loterías). En mi opinión, el contexto del problema lo suele dejar claro.

Lo más común en ejercicios es en tiempo discreto:

$$U(\ell) = \sum_{i \in S} u(x_i) p_i = p_1 u(x_1) + \dots p_s u(x_s)$$

para los $s \in S$ estados de la naturaleza.

Es decir,

$$u(x) = (1/2 + \pi(x, \epsilon, u)) u(x + \epsilon) + (1/2 - \pi(x, \epsilon, u)) u(x - \epsilon)$$

La prima de probabilidad es la "compensación en probabilidad" que necesita un individuo averso al riesgo para aceptar tomar el riesgo asociado a una lotería justa.

Si $\pi(x, \epsilon, u) > 0$, el individuo debe tener más probabilidad de obtener $x + \epsilon$ que la probabilidad justa para aceptar tomar el riesgo. De hecho, la condición $\pi(x, \epsilon, u) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$ y para todo $\epsilon > 0$ es equivalente a la de aversión al riesgo (Mas-Colell et al., 1995, p. 187).

De forma coloquial, pensemos en un agente averso al riesgo que posee un nivel de riqueza x . Le ofrecemos participar en una lotería donde con $1/2$ de probabilidad obtendría $x + \epsilon$ y con $1/2$ de probabilidad obtendría $x - \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$. Es decir, le ofrecemos la lotería:

$$\ell = (x + \epsilon, x - \epsilon; 1/2, 1/2)$$

Nótese que esta lotería es *justa en valor esperado*, ya que

$$\mathbb{E}[\ell] = \frac{1}{2}(x + \epsilon) + \frac{1}{2}(x - \epsilon) = x$$

Dado que el agente es averso al riesgo, prefiere la riqueza x con certeza a participar en esta lotería justa, pues la utilidad esperada de la lotería es menor que la utilidad del resultado cierto. Es decir, por desigualdad de Jensen:

$$\mathbb{E}[u(x)] = \frac{1}{2}u(x + \epsilon) + \frac{1}{2}u(x - \epsilon) < u(\mathbb{E}[x]) = u(x)$$

Por lo tanto, el agente rechazará la lotería cuando las probabilidades son $(1/2, 1/2)$. Queremos entonces encontrar cuál sería la probabilidad adicional de ganar $x + \epsilon$ que haría al individuo *indiferente* entre mantener la riqueza cierta x o participar en la lotería.

Esa probabilidad adicional de ganar es precisamente la **prima de probabilidad** $\pi(x, \epsilon, u)$, que satisface:

$$u(x) = \left(1/2 + \pi(x, \epsilon, u)\right) u(x + \epsilon) + \left(1/2 - \pi(x, \epsilon, u)\right) u(x - \epsilon)$$

Juegos justos y *fair odds*

Un **juego justo** es aquel cuyo valor esperado de ganancia neta es cero:

$$\mathbb{E}[g] = 0$$

En otras palabras, si el juego se repitiera un número infinito de veces, el jugador ni ganaría ni perdería riqueza en promedio.

En el contexto de elección bajo incertidumbre, este principio se traduce al concepto de **probabilidades justas** (o *fair odds*), que son aquellas probabilidades que hacen que el *valor esperado monetario* de la lotería sea igual a la riqueza inicial:

$$\mathbb{E}[\ell] = \sum_i p_i x_i = x$$

Para una lotería simétrica con pagos $(x + \epsilon, x - \epsilon)$, las probabilidades justas son $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, pues

$$\mathbb{E}[\ell] = \frac{1}{2}(x + \epsilon) + \frac{1}{2}(x - \epsilon) = x$$

Por tanto, una lotería con *probabilidades justas* constituye un *juego justo* en términos de riqueza esperada: el individuo no espera ganar ni perder dinero en promedio.

Sin embargo, si el individuo es averso al riesgo, rechazará incluso un juego justo, ya que la utilidad esperada de la lotería es menor que la utilidad del resultado cierto:

$$\mathbb{E}[u(x)] < u(\mathbb{E}[x]) = u(x)$$

En consecuencia, aunque la lotería sea justa en valor esperado, el individuo preferirá el resultado x y no participar en la lotería justa $\ell = \frac{1}{2}(x + \epsilon) + \frac{1}{2}(x - \epsilon)$.

El valor esperado de la lotería es $\mathbb{E}[\ell_1] = 10$.⁷ Entonces, la prima de probabilidad π es:

$$u(10) = \left(\frac{1}{2} + \pi\right)u(10 + 6) + \left(\frac{1}{2} - \pi\right)u(10 - 6)$$

$$\sqrt{10} = \left(\frac{1}{2} + \pi\right)4 + \left(\frac{1}{2} - \pi\right)2$$

$$\sqrt{10} = 3 + 2\pi$$

$$\therefore \pi = \frac{\sqrt{10} - 3}{2}$$

(c) Sea $\ell_2 = (36, 16; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

⁷Noten que la lotería $\ell_1 = (16, 4; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es una lotería con riqueza de $x = 10$ y $\epsilon = 6$. Es decir, $\ell_1 = (10 + 6, 10 - 6; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Luego, $\mathbb{E}[\ell_1] = 10 = x$ y ℓ_1 es un juego justo.

Utilidad esperada:

$$\begin{aligned} U(\ell_2) &= \frac{1}{2}u(36) + \frac{1}{2}u(16) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{36} + \frac{1}{2}\sqrt{16} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Equivalente cierto:

Si $u(CE) = U(\ell_2) = 5$, entonces

$$\sqrt{CE} = 5 \Rightarrow CE = 25$$

El valor esperado de la lotería es $\mathbb{E}[\ell_2] = 26$.⁸ Entonces, la prima de probabilidad π es:

$$\begin{aligned} u(26) &= \left(\frac{1}{2} + \pi\right)u(26 + 10) + \left(\frac{1}{2} - \pi\right)u(26 - 10) \\ \sqrt{26} &= \left(\frac{1}{2} + \pi\right)6 + \left(\frac{1}{2} - \pi\right)4 \\ \sqrt{26} &= 5 + 2\pi \\ \therefore \pi &= \frac{\sqrt{26} - 5}{2} \end{aligned}$$

Interpretación.

Cuando un individuo enfrenta una lotería simétrica con resultados $x + \epsilon$ y $x - \epsilon$, la probabilidad justa de ganar es $\frac{1}{2}$.

Si el individuo es averso al riesgo, necesitará que la probabilidad de ganar sea *mayor* que la probabilidad justa $\frac{1}{2}$ para aceptar la lotería como indiferente frente al resultado cierto x .

Ese exceso por encima de $\frac{1}{2}$ es la **prima de probabilidad**.

La **prima de probabilidad** es el valor de π que hace al individuo *indiferente* entre:

- Recibir x con certeza, y
- Jugar una lotería con resultados $x + \epsilon$ y $x - \epsilon$, con probabilidades $\frac{1}{2} + \pi$ y $\frac{1}{2} - \pi$, respectivamente.

⁸Una vez más, noten que la lotería $\ell_2 = (36, 16; 1/2, 1/2)$ es una lotería con riqueza de $x = 26$ y $\epsilon = 10$. Es decir, $\ell_2 = (26 + 10, 26 - 10; 1/2, 1/2)$. Luego, $\mathbb{E}[\ell_2] = 26 = x$ y ℓ_2 es un juego justo.

La condición de indiferencia se expresa como:

$$u(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x, \epsilon, u)\right)u(x + \epsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x, \epsilon, u)\right)u(x - \epsilon)$$

- Si $\pi = 0$: el individuo es **neutral al riesgo**, acepta la lotería con las probabilidades justas.
- Si $\pi > 0$: el individuo es **averso al riesgo**, requiere mayor probabilidad de ganar para aceptar el riesgo.
- Si $\pi < 0$: el individuo es **amante del riesgo**, acepta menor probabilidad de ganar.

Interpretación del ejercicio.

La diferencia entre el valor esperado de la lotería y su equivalente cierto es igual a uno en ambos casos. Sin embargo, la primera lotería presenta una *prima de probabilidad* mayor. Esto se debe a que la función de utilidad $u(\cdot)$ exhibe **DARA** y **CRRA**.

En consecuencia, conforme aumenta el nivel de riqueza, el individuo se vuelve relativamente más tolerante al riesgo en términos absolutos (la magnitud monetaria de riesgo que acepta crece con la riqueza), aunque mantiene constante su actitud hacia el riesgo cuando se mide de forma proporcional a la riqueza. □

Apéndice

Solución de 6.C.15^A por medio de KKT

Problema de optimización.

$$\max_{x_1, x_2 \in [0,1]} \pi u(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) u(x_1 + bx_2) \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2; \lambda, \mu_1, \mu_2) = \pi u(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) u(x_1 + bx_2) - \lambda (x_1 + x_2 - 1) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

Condiciones KKT:

$$\text{(Estacionariedad)} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \pi u'(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) u'(x_1 + bx_2) - \lambda + \mu_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \pi a u'(x_1 + ax_2) + (1 - \pi) b u'(x_1 + bx_2) - \lambda + \mu_2 = 0$$

$$\text{(Factibilidad primal)} \quad x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$\text{(Factibilidad dual)} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0$$

$$\text{(Holgura)} \quad \mu_1 x_1 = 0, \quad \mu_2 x_2 = 0$$

Análisis de casos:

Caso 1: Toda la riqueza en el activo sin riesgo ($x_1^* = 1, x_2^* = 0$)

Si $x_2^* = 0$, entonces por factibilidad $x_1^* = 1$.

Por holgura: $\mu_1 = 0, \mu_2 \geq 0$.

Evaluando las condiciones de estacionariedad en $(1, 0)$:

$$\pi u'(1) + (1 - \pi) u'(1) - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = u'(1)$$

$$\pi a u'(1) + (1 - \pi) b u'(1) - \lambda + \mu_2 = 0$$

Sustituyendo $\lambda = u'(1)$:

$$u'(1)[\pi a + (1 - \pi)b] - u'(1) + \mu_2 = 0$$

$$\mu_2 = u'(1)[1 - \pi a - (1 - \pi)b]$$

Para que $x_2^* = 0$ sea óptimo, necesitamos $\mu_2 \geq 0$:

$$u'(1)[1 - \pi a - (1 - \pi)b] \geq 0$$

Como $u'(1) > 0$:

$$1 \geq \pi a + (1 - \pi)b$$

Por lo tanto, $x_1^* = 1$ y $x_2^* = 0$ es una elección óptima si $1 \geq \pi a + (1 - \pi)b$.

Caso 2: Toda la riqueza en el activo riesgoso ($x_1^* = 0, x_2^* = 1$)

Si $x_1^* = 0$, entonces por factibilidad $x_2^* = 1$.

Por holgura: $\mu_1 \geq 0, \mu_2 = 0$.

Evaluando las condiciones de estacionariedad en $(0, 1)$:

$$\pi u'(a) + (1 - \pi) u'(b) - \lambda + \mu_1 = 0$$

$$\pi a u'(a) + (1 - \pi) b u'(b) - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pi a u'(a) + (1 - \pi) b u'(b)$$

Sustituyendo λ en la primera ecuación:

$$\pi u'(a) + (1 - \pi) u'(b) - \pi a u'(a) - (1 - \pi) b u'(b) + \mu_1 = 0$$

Despejando μ_1 y reordenando,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -[\pi(1 - a)u'(a) + (1 - \pi)(1 - b)u'(b)] \\ &= \pi(a - 1)u'(a) + (1 - \pi)(b - 1)u'(b) \end{aligned}$$

Para que $x_1^* = 0$ sea óptimo, necesitamos $\mu_1 \geq 0$:

$$\pi(a - 1)u'(a) + (1 - \pi)(b - 1)u'(b) \geq 0$$

Por lo tanto, $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 1$ es una elección óptima si $\pi(a - 1)u'(a) + (1 - \pi)(b - 1)u'(b) \geq 0$, lo que se cumple solo cuando $a > 1, b > 1$.

Caso 3: Solución interior ($x_1^*, x_2^* \in (0, 1)$)

Por holgura: $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Las condiciones de estacionariedad se reducen a:

$$\pi u'(x_1^* + ax_2^*) + (1 - \pi) u'(x_1^* + bx_2^*) = \pi a u'(x_1^* + ax_2^*) + (1 - \pi) b u'(x_1^* + bx_2^*)$$

junto con $x_1^* + x_2^* = 1$.

(a) Condición necesaria para $x_1^* > 0$:

En el Caso 2 vimos que $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 1$ es una elección óptima si

$$\pi(a - 1)u'(a) + (1 - \pi)(b - 1)u'(b) \geq 0,$$

lo que se cumple solo cuando $a > 1$, $b > 1$.

Para que $x_1^* > 0$, debe cumplirse que $x_2^* < 1$, es decir, que el **Caso 2 no sea óptimo**.

Entonces, una condición **suficiente** es que:

$$\pi(a - 1)u'(a) + (1 - \pi)(b - 1)u'(b) < 0$$

Como $u'(\cdot) > 0$, esto se cumple si:

$$a < 1 \quad \text{y} \quad b < 1$$

Si el activo riesgoso paga menos que 1 en ambos estados ($a < 1$ y $b < 1$), entonces no puede dominar al activo libre de riesgo, que paga 1 en todos los estados. Como el agente es averso al riesgo, entonces demandará $x_1^* > 0$.

(b) Condición necesaria para $x_2^* > 0$:

En el Caso 1 vimos que $x_1^* = 1$ y $x_2^* = 0$ es una elección óptima si

$$1 \geq \pi a + (1 - \pi)b$$

Para que $x_2^* > 0$, debe cumplirse que $x_1^* < 1$, es decir, que el **Caso 1 no sea óptimo**.

Entonces, una condición **suficiente** es que:

$$\pi a + (1 - \pi)b > 1$$

El agente solo invertirá en el activo riesgoso ($x_2^* > 0$) si su retorno esperado supera al del activo libre de riesgo.

References

- Jehle, G. A. and Reny, P. J. (2011). *Advanced Microeconomic Theory*. Pearson Education Limited, Harlow, England, 3rd edition.
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.