Laboratorio de Microeconomía I

Centro de Investigación y Docencia Económicas

Maestría en Economía - 2025

Quiz 3

Matrícula: ______________________________

Anote su matrícula con pluma, **no incluya su nombre**. Responda cada inciso de **forma detallada** y con **letra legible**.

Ejercicio 1 (20 puntos) Considere dos individuos con preferencias representadas por la siguiente función de utilidad Bernoulli:

$$u(w) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{a\,w}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma}, \qquad a > 0, \;\; \gamma \neq 1$$

El individuo A tiene $\gamma < 1$ y el individuo B tiene $\gamma > 1$.

(a) [20 puntos] ¿Qué tipo de aversión al riesgo absoluta exhibe cada individuo? ¿Alguno de los dos individuos aceptará poner una proporción mayor de su riqueza en riesgo conforme su nivel de riqueza aumenta?

Ejercicio 2 (80 puntos) Considere a un inversor averso al riesgo que debe decidir cómo distribuir su riqueza inicial w en un portafolio compuesto por un activo riesgoso y un activo libre de riesgo. El activo libre de riesgo rinde r_f en todos los estados $s \in \{1, \ldots, S\}$, que ocurren con probabilidades p_s (con $\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$). El activo riesgoso rinde r_s en el estado s (que puede ser positivo o negativo).

Si α es la riqueza invertida en el activo libre de riesgo y β en el activo riesgoso, la riqueza en el estado s es

$$(w - \alpha - \beta) + (1 + r_f)\alpha + (1 + r_s)\beta = w + r_f\,\alpha + \beta r_s$$

El inversor elige un portafolio $P = (\alpha, \beta)$ para maximizar su utilidad esperada:

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha,\beta} \quad & \sum_{s=1}^{S} p_s\, u\Big(w + r_f\alpha + \beta r_s\Big) \\
\text{s.a.} \quad & \alpha \geq 0 \\
& \beta \geq 0 \\
& \alpha + \beta \leq w
\end{aligned}$$

(a) [10 puntos] Plantee las condiciones de KKT.

(a) [30 puntos] Suponga que $\alpha + \beta = w$. A partir de las condiciones de estacionariedad, derive una condición necesaria bajo la cual el inversor no demandará unidades del activo riesgoso (i.e. $\beta^* = 0$).

(b) [40 puntos] Suponga que el inversor exhibe aversión al riesgo absoluta constante (CARA). ¿Qué puede decir sobre el cambio en la demanda óptima del activo riesgoso dado un cambio en su nivel de riqueza: $\frac{d\beta^*}{dw}$?

Ejercicio Extra (10 puntos) Considere un individuo averso al riesgo con riqueza inicial w y que corre el riesgo de sufrir una pérdida de D pesos. La probabilidad de pérdida es π. El individuo puede contratar un seguro que cuesta q pesos y paga 1 pesos si la pérdida ocurre. Por lo tanto, si α unidades de seguro se contratan, la riqueza del individuo será $w - \alpha q$ en caso de que no ocurra la pérdida, y $w - \alpha q - D + \alpha$ si la pérdida ocurre. El problema del individuo es elegir el nivel óptimo de α.

(a) Suponga que el precio cumple que $q > \pi$. ¿Cuál es la cantidad asegurada óptima α^*?

Ejercicio 1 (20 puntos) Considere dos individuos con preferencias representadas por la siguiente función de utilidad Bernoulli:

$$u(w) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{a\,w}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma}, \qquad a > 0,\ \ \gamma \neq 1$$

El individuo A tiene $\gamma < 1$ y el individuo B tiene $\gamma > 1$.

(a) [20 puntos] ¿Qué tipo de aversión al riesgo absoluta exhibe cada individuo? ¿Alguno de los dos individuos aceptará poner una proporción mayor de su riqueza en riesgo conforme su nivel de riqueza aumenta?

Derivamos:

$$u'(w) = \cancel{1-\gamma}\left(\frac{aw}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma-1}\frac{a}{\cancel{1-\gamma}} = a\left(\frac{aw}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma-1}$$

$$u''(w) = -\cancel{(1-\gamma)}a\left(\frac{aw}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma-2}\frac{a}{\cancel{1-\gamma}} = -a^2\left(\frac{aw}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma-2}$$

Luego,

$$R_a(w) = \frac{-u''(w)}{u'(w)} = a\left(\frac{aw}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma-2}\left(\frac{aw}{1-\gamma} + b\right)^{1-\gamma} = \frac{a}{\frac{aw}{1-\gamma} + b}$$

Para conocer el tipo de aversión al riesgo absoluta, derivamos $R_a(w)$:

$$R_a'(w) = -\frac{a^2}{\left(\frac{aw}{1-\gamma} + b\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\gamma}$$

$\boxed{\text{Individuo A: } \gamma < 1. \text{ Entonces, } -\frac{1}{1-\gamma} < 0 \text{ luego exhibe DARA}}$

$\boxed{\text{Individuo B: } \gamma > 1. \text{ Entonces, } -\frac{1}{1-\gamma} > 0 \text{ luego exhibe IARA}}$

Para saber si alguno aceptará poner una proporción mayor de su riqueza en riesgo conforme esta aumenta, necesitamos conocer su tipo de aversión al riesg relativa.

Si $R_r(w) = R_a(w)\,w$, entonces $R_r(w) = \dfrac{aw}{\frac{aw}{1-\gamma} + b}$.

Para derivar, notemos que $R_r(w) = \dfrac{aw}{\frac{aw}{1-\gamma} + b} = \dfrac{a}{\frac{a}{1-\gamma} + \frac{b}{w}}$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
R_r'(w) &= -\frac{a}{\left(\frac{a}{1-\gamma} + \frac{b}{w}\right)^2} \cdot \left(-\frac{b}{w^2}\right) \\
&= \frac{ab}{\left(\frac{a}{1-\gamma} + \frac{b}{w}\right)^2 w^2} \\
&= \frac{ab}{\left(\frac{aw}{1-\gamma} + b\right)^2} > 0
\end{aligned}
$$

Como $R_r'(w) > 0$ tanto para $\gamma > 1$ como para $\gamma < 1$, entonces ambos exhiben IRRA. Ninguno aceptará poner una proporción mayor de su riqueza en riesgo conforme esta aumenta.

Ejercicio 2 (80 puntos) Considere a un inversor averso al riesgo que debe decidir cómo distribuir su riqueza inicial w en un portafolio compuesto por un activo riesgoso y un activo libre de riesgo. El activo libre de riesgo rinde r_f en todos los estados $s \in \{1, \ldots, S\}$, que ocurren con probabilidades p_s (con $\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$). El activo riesgoso rinde r_s en el estado s (que puede ser positivo o negativo).

Si α es la riqueza invertida en el activo libre de riesgo y β en el activo riesgoso, la riqueza en el estado s es

$$(w - \alpha - \beta) + (1 + r_f)\alpha + (1 + r_s)\beta = w + r_f\,\alpha + \beta r_s$$

El inversor elige un portafolio $P = (\alpha, \beta)$ para maximizar su utilidad esperada:

$$
\begin{aligned}
\max_{\alpha,\beta} \quad & \sum_{s=1}^{S} p_s\, u\Big(w + r_f\alpha + \beta r_s\Big) \\
\text{s.a.} \quad & \alpha \geq 0 \\
& \beta \geq 0 \\
& \alpha + \beta \leq w
\end{aligned}
$$

(a) [10 puntos] Plantee las condiciones de KKT.

(a) KKT

Lagrange:

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta; \lambda, \mu_1, \mu_2) = \sum_{s=1}^{S} p_s u(w + r_f\alpha + \beta r_s) - \lambda[\alpha + \beta - w] + \mu_1\alpha + \mu_2\beta$$

Condiciones KKT:

(Estacionariedad)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f\alpha^* + r_s\beta^*) r_f - \lambda + \mu_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f\alpha^* + r_s\beta^*) r_s - \lambda + \mu_2 = 0$$

(Factibilidad Primal) $\alpha+\beta \leq w$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$

(Factibilidad Dual) $\lambda \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$

(Holgura Complementaria) $\lambda[\alpha+\beta-w]=0$, $\mu_1 \alpha = 0$, $\mu_2 \beta = 0$

(a) [30 puntos] Suponga que $\alpha + \beta = w$. A partir de las condiciones de estacionariedad, derive una condición necesaria bajo la cual el inversor no demandará unidades del activo riesgoso (i.e. $\beta^* = 0$).

Supongamos que $\alpha+\beta = w$. Luego, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\beta^* = 0$, entonces $\alpha^* = w > 0$. Por holgura, $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 \geq 0$.

Por estacionariedad:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f \alpha^*) r_f - \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f \alpha^*) r_s - \lambda + \mu_2 = 0 \qquad (2)$$

De (1) tenemos que $\lambda = \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f\alpha^*) r_f$. Sustituyendo en (2):

$$\sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f \alpha^*) r_s - \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f \alpha^*) r_f + \mu_2 = 0$$

Como $\mu_2 \geq 0$, entonces

$$-\mu_2 = \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f \alpha^*) r_s - \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f \alpha^*) r_f \leq 0$$

Es decir,

$$\sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f \alpha^*) r_s \leq \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w + r_f \alpha^*) r_f$$

Dado que $u'(w+r_f\alpha^*)$ no depende del estado, factorizamos:

$$\cancel{u'(w + r_f \alpha^*)} \sum_{s=1}^{S} p_s r_s \leq \cancel{u'(w + r_f \alpha^*)} \sum_{s=1}^{S} p_s r_f$$

$$\sum_{s=1}^{S} p_s r_s \leq r_f \cancel{\sum_{s=1}^{S} p_s}^{\,1}$$

$$\boxed{\sum_{s=1}^{S} p_s r_s \leq r_f}$$

Es decir, $\beta^* = 0$, $\alpha^* = w$ es una solución óptima si y solo si el valor esperado del retorno del activo riesgoso es menor o igual al retorno del activo libre de riesgo

(b) [40 puntos] Suponga que el inversor exhibe aversión al riesgo absoluta constante (CARA). ¿Qué puede decir sobre el cambio en la demanda óptima del activo riesgoso dado un cambio en su nivel de riqueza: $\frac{d\beta^*}{dw}$? $\alpha^*+\beta^*<w$ & $\beta^*>0$

Supongamos que $\alpha^*+\beta^*<w$ y $\beta^*>0$. Entonces, por holgura $\lambda=0$ & $\mu_2=0$.

Por estacionariedad,

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s = 0$$

Definamos $F(\beta,w) := \sum_{s=1}^{S} p_s u'(w+r_f\alpha^*+r_s\beta)r_s$

Por las C.P.O., $F(\beta^*,w)=0$.

Por las C.S.O., $\frac{\partial F}{\partial \beta}\Big|_{\beta=\beta^*} = \sum_{s=1}^{S} p_s u''(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s^2 < 0$. Luego, $\frac{\partial F}{\partial \beta}\Big|_{\beta=\beta^*} \neq 0$.

Por el Teorema de la Función Implícita,

$$\frac{d\beta^*}{dw} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial \beta^*}}$$

$$= -\frac{\sum_{s=1}^{S} p_s u''(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s}{\sum_{s=1}^{S} p_s u''(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s^2}$$

Como $\sum_{s=1}^{S} p_s u''(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s^2 < 0$, entonces el signo de $\frac{d\beta^*}{dw}$ depende del numerador.

Dado que $R_a(w) = -u''(w)/u'(w)$, entonces $u''(w) = -R_a(w)u'(w)$.

Por lo tanto,

$$u''(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*) = -R_a(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)\,u'(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)$$

Promediando por ambos lados,

$$\sum_{s=1}^{S} p_s u''(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s = -\sum_{s=1}^{S} p_s R_a(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)\,u'(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s$$

Bajo CARA, $R_a(w) = R_a(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)$. Entonces,

$$\sum_{s=1}^{S} p_s u''(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s = -\sum_{s=1}^{S} p_s R_a(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)\,u'(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s$$

$$= -\sum_{s=1}^{S} p_s R_a(w)\,u'(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s$$

$$= -R_a(w)\sum_{s=1}^{S} p_s u'(w+r_f\alpha^*+r_s\beta^*)r_s$$

Por estacionariedad,

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{s=1}^{S} p_s\, u'(w + r_f \alpha^* + r_s \beta^*)\, r_s = 0$$

De este modo,

$$\sum_{s=1}^{S} p_s\, u''(w + r_f \alpha^* + r_s \beta^*)\, r_s = -R_a(w) \underbrace{\sum_{s=1}^{S} p_s\, u'(w + r_f \alpha^* + r_s \beta^*)\, r_s}_{=0}$$

$$= 0$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{d\beta^*}{dw} = -\frac{\overbrace{\sum_{s=1}^{S} p_s\, u''(w + r_f \alpha^* + r_s \beta^*)\, r_s}^{=0}}{\underbrace{\sum_{s=1}^{S} p_s\, u''(w + r_f \alpha^* + r_s \beta^*)\, r_s^2}_{<0}} = 0}$$