Laboratorio de Microeconomía I

Centro de Investigación y Docencia Económicas
Maestría en Economía - 2025
Laboratorista: Arturo López
Tarea 13 Solver

Exercises

Ex. 4.6 A firm j in a competitive industry has total cost function $c^j(q) = aq + b_j q^2$, where $a > 0$, q is firm output, and b_j is different for each firm.

(a) If $b_j > 0$ for all firms, what governs the amount produced by each of them? Will they produce equal amounts of output? Explain.

(b) What happens if $b_j < 0$ for all firms?

Proof. **(a) Caso $b_j > 0$ para todas las empresas.**

La función de beneficio de la empresa j es:

$$\begin{aligned}\pi^j(q) &= pq - c^j(q)\\ &= pq - aq - b_j q^2\\ &= (p-a)q - b_j q^2\end{aligned}$$

La C.P.O. de maximización de beneficios nos dice que:

$$\left.\frac{\partial \pi^j(q)}{\partial q}\right|_{q=q^*} = (p-a) - 2b_j q = 0$$

La C.S.O.:

$$\left.\frac{\partial^2 \pi^j(q)}{\partial q^2}\right|_{q=q^*} = -2b_j < 0$$

se cumple para $b_j > 0$.

Así, de la C.P.O. obtenemos que el nivel de producción óptimo para la empresa j es:

$$q_j^* = \frac{p-a}{2b_j}$$

Dado que tiene que cumplirse que $q_j^* \geq 0$ para todo j, entonces tiene que darse que $p - a \geq 0$.

La producción de la empresa j depende de su propio valor de b_j. Entonces, en equilibrio, q_j^* será igual para todas las empresas si y solo si b_j es igual para todas las empresas. De lo contrario, las empresas con un valor mayor de b_j producirán menos.

(b) Caso $b_j < 0$ para todas las firmas.

Si $b_j < 0$, entonces el costo marginal disminuye con q para toda empresa:

$$\frac{\partial CMg^j}{\partial q} = 2\,b_j < 0$$

Por otro lado, la C.S.O. para un máximo no se cumple:

$$\left.\frac{\partial^2 \pi^j(q)}{\partial q^2}\right|_{q=q^*} = -2b_j > 0$$

Es decir, la función de beneficio no tiene un máximo. En otras palabras, con $b_j < 0$, la función de beneficios es convexa y su único valor extremo es un mínimo, el cual está dado por:

$$q_j^* = \frac{p-a}{2b_j} < 0$$

A partir de este nivel de q_j^*, la empresa incrementa sus beneficios de forma indefinida conforme aumenta su nivel de producción.[1]

Gráficamente, el mínimo está donde $p = CMg^j$ (ver **Ex. 4.7**).

Intución: Los costos marginales decrecientes inducen a la empresa a querer expandir su producción indefinidamente a cualquier precio $p > a$. Este es un caso de rendimientos crecientes a escala (costos medios decrecientes). En el ejercicio **4.7** exploramos más a fondo estos casos. □

[1]En realidad, como $q_j^* = \frac{p-a}{2b_j} < 0$ y siempre asumimos que $q_j \geq 0$, entonces el mínimo ni siquiera es alcanzable.

Ex. 4.7 Technology for producing q gives rise to the cost function $c(q) = aq + bq^2$. The market demand for q is $p = \alpha - \beta q$.

(a) If $a > 0$, if $b < 0$, and if there are J firms in the industry, what is the short-run equilibrium market price and the output of a representative firm?

(b) If $a > 0$ and $b < 0$, what is the long-run equilibrium market price and number of firms? Explain.

(c) If $a > 0$ and $b > 0$, what is the long-run equilibrium market price and number of firms? Explain.

Proof. **(a) Equilibrio de corto plazo, con $a > 0$, $b < 0$, J fijo.**

Si $b < 0$, entonces las funciones de costo medio y costo marginal son decrecientes en q:

$$CMg(q) = a + 2bq, \qquad \frac{\partial CMg}{\partial q} = 2b < 0$$

$$CMe(q) = a + bq, \qquad \frac{\partial CMe}{\partial q} = b < 0$$

En el corto plazo, la condición de cierre es que $p \geq \min CMe$.[2] Sin embargo, cuando $b < 0$ el costo medio no tiene un mínimo, pues es decreciente para todo nivel de q. De este modo, el precio siempre está trivialmente por encima del mínimo del costo medio variable.

Por otro lado, la función de beneficios

$$\begin{aligned} \pi(q) &= pq - aq - bq^2 \\ &= (p-a)q - bq^2 \end{aligned}$$

cumple las condiciones de primer y segundo orden de un mínimo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 0 \iff q = \frac{p-a}{2b}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = -2b > 0$$

Es decir, π es convexa. En sentido estricto, es una parábola con vértice en $\frac{p-a}{2b}$.

[2] Sabemos que la condición de corto plazo en realidad es: $p \geq \min CVMe$. Sin embargo, como en este caso no hay costos fijos, entonces $CVMe = CMe$.

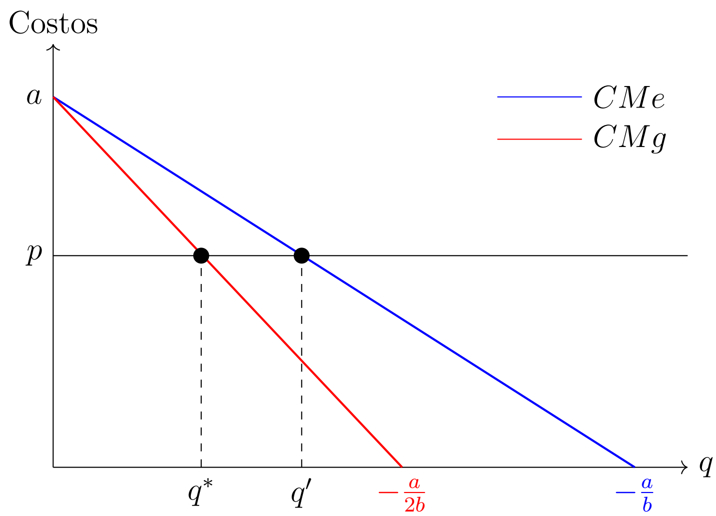

Figure 1: Costo Medio y Marginal cuando $b < 0$.

Por otro lado, notemos que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} > 0 \iff \frac{p-a}{2b} < q$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} < 0 \iff \frac{p-a}{2b} > q$$

Como $\frac{p-a}{2b} < 0$ cuando $b < 0$, entonces $\frac{\partial \pi}{\partial q} > 0$ para todo $q \geq 0$. Es decir, en el corto plazo la empresa incrementa sus beneficios al expandir su nivel de producción para todo $q \geq 0$, de modo que **siempre tiene incentivos para seguir produciendo**.

En resumen, la condición de primer orden $p = CMg$ implica un mínimo de beneficios. Como $CMg(q) < CMe(q)$ para todo q, entonces

$$\pi(q) = q(p - CMe(q)) = q(CMg - CMe(q)) < 0$$

En este punto (el punto mínimo de beneficios), la empresa tiene incentivos para continuar aumentando su producción, pues $\frac{\partial \pi}{\partial q} > 0$ cuando $\frac{p-a}{2b} < q$. Expande su producción hasta llegar al punto de *break-even*: $p = CMe$. En este punto, $\pi(q) = 0$.

Sin embargo, en este punto se sigue cumpliendo que $\frac{\partial \pi}{\partial q} > 0$, por lo que la empresa sigue teniendo incentivos para aumentar su producción. A partir de este punto, va a continuar expandiendo su producción indefinidamente (ver Figura 1).

Por lo tanto, la producción en el corto plazo cumple que:

$$q \to \infty$$

El análisis anterior aplica para todo precio. No obstante, conforme $q \to \infty$, el precio se va afectando. Entonces, a partir de la curva de demanda inversa:

$$p = \alpha - \beta q$$

notamos que $p \to 0$ conforme $q \to \infty$.

El ritmo de convergencia de ambas depende de α y β. No obstante, la conclusión es la misma: **no existe un punto de equilibrio en el mercado** (i.e. (p^*, q^*)). En otras palabras, el equilibrio es **indeterminado**.

(b) Equilibrio de largo plazo con $a > 0$, $b < 0$.

Como vimos en (a), cuando $b < 0$ la industria presenta rendimientos crecientes a escala y, en el corto plazo, beneficios positivos y crecientes para todo nivel de producción q. Esto genera incentivos de entrada para nuevas empresas. Por lo tanto, en el largo plazo, la libre entrada y la competencia perfecta implican que las empresas entrarán al mercado hasta que los beneficios económicos positivos se disipen: [3]

$$\pi(q) = 0$$

Para $q > 0$, esto sucede si y solo si:

$$p = CMe$$

Por otro lado, por condición de primer órden sabemos que $p = CMg$. Entonces, en el largo plazo:

$$CMg = CMe$$

Sin embargo, esto no ocurre para ningún $q > 0$ cuando $a > 0$, $b < 0$, pues se cumple que:

$$CMg(q) < CMe(q) \qquad \forall q > 0$$

Entonces, similar al inciso anterior, los beneficios positivos crecientes incentivan a la entrada de empresas a la industria de forma indefinida: $J \to \infty$. Al mismo tiempo, tenemos que $q \to \infty$. Ambas cosas hacen que $p \to 0$. Por lo tanto, no existe equilibrio de largo plazo.

[3] La lógica es la siguiente: en el largo plazo puede variar el número de empresas que operan en la industria. Si las empresas dentro del mercado obtienen beneficios positivos $\pi(q) > 0$, entonces otras empresas tienen incentivos a entrar. Si, por el contrario, $\pi(q) < 0$, las empresas en el mercado tienen incentivos de salir. El equilibrio se alcanza cuando $\pi(q) = 0$, es decir, cuando $p = CMe(q)$. En este punto, las empresas participantes en la industria no tienen incentivos a salir y las potenciales entrantes no tienen incentivos a entrar.

(c) Equilibrio de largo plazo con $a > 0$, $b > 0$.

Si $b > 0$, entonces los costos medios y marginales son crecientes en q:

$$\frac{\partial CMe}{\partial q} = b > 0, \qquad \frac{\partial CMg}{\partial q} = 2b > 0$$

Por otro lado, la función de beneficios

$$\begin{aligned}\pi(q) &= pq - aq - bq^2 \\ &= (p-a)q - bq^2\end{aligned}$$

cumple las condiciones de primer y segundo orden de un máximo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 0 \iff \frac{p-a}{2b} = q$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = -2b < 0$$

Es decir, π es cóncava. En sentido estricto, es una parábola invertida con vértice en $\frac{p-a}{2b}$.

Por lo tanto, en el corto plazo $p = CMg$ implica que:[4]

$$\begin{aligned}\alpha - \beta J q &= a + 2bq \\ \alpha - a &= (2b + \beta J)q \\ q^* &= \frac{\alpha - a}{2b + \beta J}.\end{aligned}$$

El precio de equilibrio de corto plazo es:

$$\begin{aligned}p^* &= a + 2bq^* \\ &= a + 2b\,\frac{\alpha - a}{2b + \beta J}\end{aligned}$$

[4] Aquí asumí que la curva de demanda es:

$$p = \alpha - \beta Q$$

pues de lo contrario, la cantidad de empresas se vuelve irrelevante. El ejercicio solo indica que $p = \alpha - \beta q$ para alguna empresa representativa. Mi idea es que con una curva así, la cantidad de empresas se vuelve irrelevante en equilibrio, pero el inciso (c) nos pide justo la implicación de la libre entrada en el largo plazo respecto al numero de empresas. Pienso que el inciso hace implícita la necesidad de incluir a $Q = Jq$ en lugar de solo q en la curva de demanda.

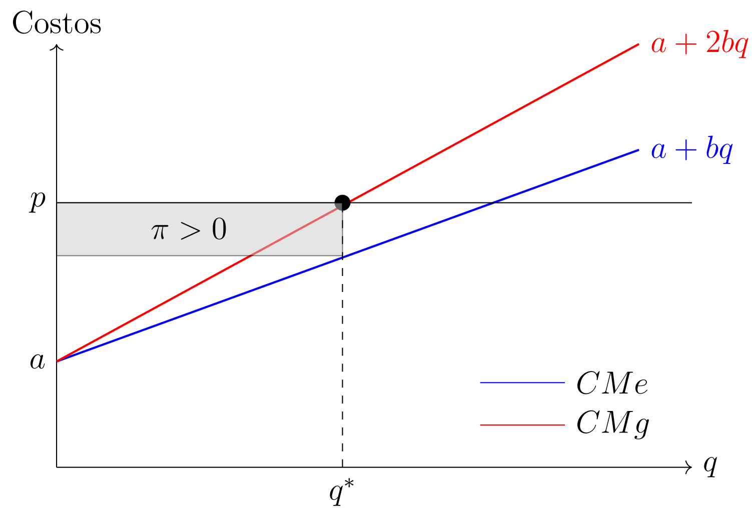

Figure 2: Costo Medio y Marginal cuando $b > 0$.

En resumen, en competencia perfecta el **equilibrio de corto plazo** es:

$$q^* = \frac{\alpha - a}{2b + \beta J}$$

$$p^* = a + 2b\,\frac{\alpha - a}{2b + \beta J}$$

En el **largo plazo** la libre entrada en competencia perfecta fuerza que $p = CMe(q)$, mientras la condición de optimalidad exige $p = CMg(q)$. Juntas implican:

$$CMe(q) = CMg(q)$$

Pero como $CMg(q) > CMe(q)$ para todo $q > 0$, no existe ningún equilibrio con $q > 0$.[5] A su vez, si $CMg(q) > CMe(q)$ para todo $q > 0$, entonces $\pi(q) > 0$ para todo $q > 0$. No obstante, $\frac{\partial \pi}{\partial q} < 0$ cuando $\frac{p-a}{2b} < q$. Es decir, los beneficios están cayendo, pero nunca alcanzan el cero.

Por lo tanto, en el largo plazo cada firma produce una cantidad infinitesimal $q \to 0$, el número de firmas $J \to \infty$, el beneficio $\pi(q) \to 0$ y el precio $p \to a$. Es decir, el equilibrio es **indeterminado**.

$\square$

[5] El equilibrio sería con $q = 0$, pero eso indetermina el costo medio: $CMe(0) = \frac{c(0)}{0}$.

Ex. 4.22 A monopolist faces linear demand $p = \alpha - \beta q$ and has cost $C = cq + F$, where all parameters are positive, $\alpha > c$, and $(\alpha - c)^2 > 4\beta F$.

(a) Solve for the monopolist's output, price, and profits.

(b) Calculate the deadweight loss and show that it is positive.

(c) If the government requires this firm to set the price that maximises the sum of consumer and producer surplus, and to serve all buyers at that price, what is the price the firm must charge? Show that the firm's profits are negative under this regulation, so that this form of regulation is not sustainable in the long run.

Proof. **(a) Producción, precio y beneficios del monopolista.**

El monopolista tiene el poder de fijar el precio de su producto. De igual forma, conoce la curva de demanda del mercado. Por lo tanto, observa la curva de demanda y con base en ella busca la cantidad que logra el precio que maximiza sus beneficios.[6]

En este caso, la función de demanda inversa es $p(q) = \alpha - \beta q$. Entonces, el problema de maximización de beneficios es:

$$\begin{aligned}\max_q \pi(q) &= p(q)q - c(q) \\ &= (\alpha - \beta q)\, q - cq - F \\ &= (\alpha - c)q - \beta q^2 - F\end{aligned}$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = (\alpha - c) - 2\beta q = 0$$

C.S.O.:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = -2\beta < 0$$

Lo que implica que los beneficios alcanzan un máximo en:

$$q^m = \frac{\alpha - c}{2\beta}$$

[6] A diferencia de una empresa en competencia perfecta, que elige el nivel óptimo de producción q^* dado el precio del mercado p, el monopolista elige el nivel óptimo de producción **asociado al precio que maximiza sus beneficios**. Ambas eligen q, pero el enfoque es distinto.

Luego, el precio de equilibrio es:

$$\begin{aligned} p^m &= \alpha - \beta q^m \\ &= \alpha - \beta \frac{\alpha - c}{2\beta} \\ &= \frac{\alpha + c}{2} \end{aligned}$$

Por último, el beneficio óptimo del monopolista es:

$$\begin{aligned} \pi^m &= (\alpha - c)q^m - \beta(q^m)^2 - F \\ &= (\alpha - c)\frac{\alpha - c}{2\beta} - \beta\left(\frac{\alpha - c}{2\beta}\right)^2 - F \\ &= \frac{(\alpha - c)^2}{2\beta} - \frac{(\alpha - c)^2}{4\beta} - F \\ &= \frac{2(\alpha - c)^2 - (\alpha - c)^2}{4\beta} - F \\ &= \frac{(\alpha - c)^2}{4\beta} - F \end{aligned}$$

(b) Pérdida irrecuperable de Eficiencia (DWL).

La pérdida irrecuperable de eficiencia (DWL, por sus siglas en inglés) corresponde a la suma del excedente del consumidor y del productor que se pierde en un mercado monopólico. En un mercado con competencia perfecta, el equilibrio maximiza el bienestar social total. Por ello, para calcular el DWL debemos establecer primero el escenario de competencia perfecta, que sirve como punto de referencia. A partir de la comparación con el escenario competitivo, podemos determinar el excedente que deja de generarse en el mercado monopólico.

En competencia perfecta, la cantidad óptima producida sería donde $p = c$:

$$\alpha - \beta q^c = c \implies q^c = \frac{\alpha - c}{\beta}$$

Si $q^m = \frac{\alpha - c}{2\beta}$ es la cantidad óptima del monopolista, entonces notemos que:

$$\frac{\alpha - c}{\beta} > \frac{\alpha - c}{2\beta} \implies q^c > q^m$$

Luego, en un mercado monopólico la cantidad producida es menor a la de competencia perfecta. Esto ya va mostrando una potencial pérdida de eficiencia en la asignación de recursos en este

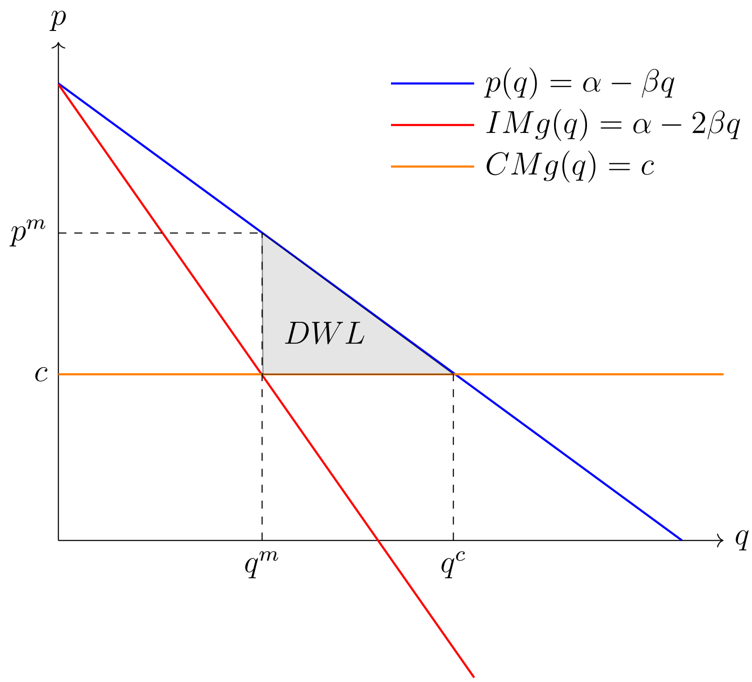

Figure 3: DWL del monopolio.

mercado.

Así, la pérdida irrecuperable de eficiencia es:[7]

$$
\begin{aligned}
DWL &= \frac{1}{2}(q^c - q^m)(p^m - c) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - c}{\beta} - \frac{\alpha - c}{2\beta}\right)\left(\frac{\alpha + c}{2} - c\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - c}{2\beta}\right)\left(\frac{\alpha - c}{2}\right) \\
&= \frac{(\alpha - c)^2}{8\beta} > 0
\end{aligned}
$$

que es estrictamente positiva para todo p y q.

(c) Regulación eficiente.

La regulación del gobierno busca que el monopolista fije un precio tal que se maximice la suma del excedente del consumidor y del productor (función de bienestar total).

[7]Cuando las curvas de demanda, costo marginal e ingreso marginal son lineales, la forma más directa de calcular el DWL es simplemente calculando el área del excedente que se pierde en el monpólio (ver Figura 3).

Es decir, el problema del gobierno es:

$$\max_{q\geq 0} \; W(q) = CS + PS = \int_0^q [p(\xi) - CMg(\xi)] \, d\xi$$

Condición de primer orden para maximizar el bienestar social total:[8]

$$\left.\frac{dW}{dq}\right|_{q=q^*} = p(q^*) - CMg(q^*) = 0 \qquad\qquad \iff p(q^*) = CMg(q^*)$$

Es decir, la maximización del bienestar social total se logra cuando la industria opera en equilibrio de competencia perfecta. Por lo tanto, el precio de la regulación es:

$$p^{reg} = c \quad \Rightarrow \quad q^* = q^c = \frac{\alpha - c}{\beta}$$

Beneficio del monopolista bajo esta regulación:

$$\begin{aligned} \pi^{reg} &= pq^c - cq^c - F \\ &= cq^c - cq^c - F \\ &= -F < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, con precio regulado $p^{reg} = c$ que maximiza el bienestar total, la firma incurre en pérdidas, lo que implica que la regulación no es sostenible en el largo plazo pues las pérdidas generan incentivos de salida al monopolista. $\square$

[8] Aquí aplicamos el Primer Teorema Fundamental del Cálculo:
Teorema (Rudin, 1976). Sea f integrable en $[a, b]$ y continua en $x_0 \in [a, b]$. Definimos:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Entonces, F es diferenciable en x_0 y

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Ex. 4.23 (Ramsey Rule) Building from the preceding exercise, suppose a monopolist faces negatively sloped demand, $p = p(q)$, and has costs $C = cq + F$. Now suppose that the government requires this firm to set a price (p^*) that will maximise the sum of consumer and producer surplus, subject to the constraint that firm profit be non-negative, so that the regulation is sustainable in the long run. Show that under this form of regulation, the firm will charge a price greater than marginal cost, and that the percentage deviation of price from marginal cost ($(p^* - c)/p^*$) will be proportional to $1/\epsilon^*$, where ϵ^* is the elasticity of firm demand at the chosen price and output. Interpret your result.

Proof. En el ejercicio anterior, el gobierno buscaba regular el precio del producto para maximizar el bienestar social total del mercado sin restricciones. Sin embargo, vimos que esta regulación no es sostenible en el largo plazo, pues fijar $p^{reg} = c$ implica que el monopolista enfrentaría pérdidas en su operación, lo cual le genera incentivos de salida. Bajo esta regulación, ninguna empresa tendría incentivos de entrada, de modo que la industria desaparecería y el producto dejaría de ofrecerse..

Ahora, el gobierno busca maximizar el bienestar social sujeto a que la ganancia del monopolista no sea negativa, de modo que el monopolista tenga incentivos a producir.

Es decir, el problema del gobierno es:

$$\max_{q \geq 0} W(q) = \int_0^q [p(\xi) - c] \, d\xi \qquad \text{s.a.} \qquad \pi(q) \geq 0$$

Como el gobierno desea que el precio sea lo más cercano posible al costo marginal, la restricción se satura en el óptimo. Esto implica que, en equilibrio:

$$\pi(q^*) = 0$$

De este modo el problema es:

$$\max_{q \geq 0} W(q) = \int_0^q [p(\xi) - c] \, d\xi \qquad \text{s.a.} \qquad \pi(q) = 0$$

En este caso, el monopolista obtiene beneficios nulos, de modo que no tiene incentivos de salida.

Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(q, \mu) = \int_0^q [p(\xi) - c] d\xi + \mu\Big(p(q)q - cq - F\Big)$$

C.P.O.: [9]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = p(q) - c + \mu\Big(p(q) + p'(q)q - c\Big) = 0$$

$$\Rightarrow (p(q) - c)(1+\mu) + \mu p'(q)q = 0 \tag{1}$$

La elasticidad precio de la demanda se define como:

$$\epsilon(q) = \frac{dq}{dp}\frac{p(q)}{q}$$

lo que implica

$$p'(q)q = \frac{p(q)}{\epsilon(q)}$$

Sustituyendo en (1) y dividiendo ambos lados por $p(q)$:

$$(1+\mu)\frac{p(q)-c}{p(q)} + \mu\frac{1}{\epsilon(q)} = 0$$

Despegamos la brecha porcentual entre el precio y el costo marginal:

$$\frac{p(q)-c}{p(q)} = -\frac{\mu}{1+\mu}\frac{1}{\epsilon(q)}$$

Como $p'(q) < 0$, tenemos $\epsilon(q) < 0$, luego

$$\frac{p(q)-c}{p(q)} = \frac{\mu}{1+\mu}\,\frac{1}{|\epsilon(q)|}$$

Evaluando en el óptimo q^*:

$$\frac{p^*-c}{p^*} = \frac{\mu}{1+\mu}\,\frac{1}{|\epsilon(q^*)|}$$

Por último, debido a que fijar $p^{reg} = c$ daría $\pi = -F < 0$ entonces tiene que darse $p^{reg} > c$. $\square$

[9] Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\int_0^q (p(\xi) - c)\, d\xi\right] = p(q) - c$$

Ex. 4.26 A competitive industry is in long-run equilibrium. Market demand is linear, $p = a - bQ$, where $a > 0$, $b > 0$, and Q is market output. Each firm in the industry has the same technology with cost function, $c(q) = k^2 + q^2$.

(a) What is the long-run equilibrium price? (Assume what is necessary of the parameters to ensure that this is positive and less than a.)

(b) Suppose that the government imposes a per-unit tax, $t > 0$, on every producing firm in the industry. Describe what would happen in the long run to the number of firms in the industry. What is the post-tax market equilibrium price? (Again, assume whatever is necessary to ensure that this is positive and less than a.)

(c) Calculate the long-run effect of this tax on consumer surplus. Show that the loss in consumer surplus from this tax exceeds the amount of tax revenue collected by the government in the post-tax market equilibrium.

(d) Would a lump-sum tax, levied on producers and designed to raise the same amount of tax revenue, be preferred by consumers? Justify your answer.

(e) State the conditions under which a lump-sum tax, levied on consumers and designed to raise the same amount of revenue, would be preferred by consumers to either preceding form of tax.

Proof. **(a) Equilibrio competitivo de largo plazo.**

En competencia perfecta de largo plazo, cada firma produce en el mínimo de su costo medio y el precio es igual a este mínimo:

$$p = \min_q CMe(q)$$

Por condición de primer orden ($p = CMg(q^*)$), lo anterior implica que

$$CMe(q^*) = CMg(q^*)$$

Minimizando el CMe:

$$\frac{dCMe}{dq} = -\frac{k^2}{q^2} + 1 = 0 \implies {q^*}^2 = k^2 \implies q^* = k$$

Entonces,

$$\min CMe = \frac{k^2}{k} + k = 2k$$

Luego, $CMg = 2k$, de modo que el equilibrio de largo plazo es [10]

$$p^* = 2k, \qquad q^* = k$$

Con demanda de mercado $p = a - bQ$, la cantidad total y el número de firmas son

$$Q^* = \frac{a - p^*}{b} = \frac{a - 2k}{b}$$
$$J^* = \frac{Q^*}{k} = \frac{a - 2k}{bk}$$

donde la última línea surge de que

$$Q^* = \sum_{j=1}^{J} q_i^* = Jq^* = Jk$$

pues todas las firmas comparten la misma tecnología de producción, de modo que son idéntidas y producen la misma cantidad óptima $q_i^* = k, \ \forall i \in J$.

[10] Una forma equivalente de encontrar el equilibrio de largo plazo con la condición de $p = \min_q CMe(q)$ es a partir de la condición de salida/entrada en el largo plazo: $\pi(q^*) = 0$. En este caso, partimos de las C.P.O. de maximización de beneficios:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = p - 2q = 0 \iff q^* = \frac{p}{2}$$

Luego, sustituimos en la condición de salida:

$$\begin{aligned} 0 &= \pi(q^*) \\ &= pq^* - k^2 - (q^*)^2 \\ &= \frac{p^2}{2} - k^2 - \frac{p^2}{4} \\ &= \frac{p^2 - 4k^2}{4} \\ &= p^2 - 4k^2 \\ &\implies p^* = \sqrt{4k^2} = 2k \end{aligned}$$

Sustituyendo en q^*,

$$q^* = \frac{2k}{2} = k$$

Por lo tanto, llegamos al equilibrio de largo plazo:

$$p^* = 2k, \qquad q^* = k$$

(b) Impuesto unitario $\tau > 0$ y equilibrio de largo plazo.

Con el impuesto unitario, la función de costos ahora es:

$$c(q) = k^2 + q^2 + \tau q$$

Como en equilibrio de largo plazo $p = \min CMe$, entonces

$$\frac{dCMe}{dq} = -\frac{k^2}{q^2} + 1 = 0 \implies q_\tau = k$$

El mínimo del CMe no se ve afectado por el impuesto, cada firma sigue produciendo $q_\tau = k = q^*$ en equilibrio de largo plazo.

Sustituyendo en la C.P.O.:

$$\begin{aligned} p_\tau &= CMg(q^\tau) \\ &= 2q_\tau + \tau \\ &= 2k + \tau \end{aligned}$$

Es decir, el impuesto se traslada totalmente al precio.

Con demanda de mercado $p = a - bQ$, la cantidad total y el número de firmas son

$$Q_\tau = \frac{a - p^\tau}{b} = \frac{a - 2k - \tau}{b}$$
$$J_\tau = \frac{Q_\tau}{k} = \frac{a - 2k - \tau}{bk}$$

Notamos que $J_\tau < J^* = \dfrac{a - 2k}{bk}$: el impuesto unitario reduce el número de empresas de equilibrio en la industria.

Notamos que $Q_\tau < Q^* = \dfrac{a - 2k}{b}$: el impuesto unitario reduce la cantidad total de equilibrio en el mercado. Sin embargo, esto resulta de la reducción de empresas de en la industria, no de la producción óptima por empresa.

(c) Efecto de largo plazo sobre el excedente del consumidor.

Sin impuesto ($\tau = 0$), el precio y la cantidad de equilibrio son

$$p^* = 2k$$
$$Q^* = \frac{a - 2k}{b}$$

Con demanda lineal, el excedente del consumidor es el área del triángulo bajo la curva de demanda:

$$\begin{aligned} CS &= \frac{1}{2}(a - p^*)Q^* \\ &= \frac{1}{2}(a - 2k)\,\frac{a - 2k}{b} \\ &= \frac{(a - 2k)^2}{2b} \end{aligned}$$

Con impuesto unitario $\tau > 0$,

$$p_\tau = 2k + \tau$$
$$Q_\tau = \frac{a - 2k - \tau}{b}$$

y el nuevo excedente del consumidor es

$$\begin{aligned} CS_\tau &= \frac{1}{2}(a - p_\tau)Q_\tau \\ &= \frac{1}{2}(a - 2k - \tau)\,\frac{a - 2k - \tau}{b} \\ &= \frac{(a - 2k - \tau)^2}{2b} \end{aligned}$$

La recaudación del gobierno en equilibrio de largo plazo es

$$T = \tau Q_\tau = \tau\,\frac{a - 2k - \tau}{b}$$

La pérdida de excedente del consumidor es

$$\begin{aligned} \Delta CS &= CS - CS_\tau \\ &= \frac{(a - 2k)^2}{2b} - \frac{(a - 2k - \tau)^2}{2b} \end{aligned}$$

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
(a-2k)^2-(a-2k-\tau)^2 &= \Big[(a-2k)-(a-2k-\tau)\Big]\Big[(a-2k)+(a-2k-\tau)\Big] \\
&= \tau\Big(2a-4k-\tau\Big)
\end{aligned}
$$

por lo que

$$\Delta CS = \frac{\tau(2a-4k-\tau)}{2b}$$

Comparamos con la recaudación:

$$
\begin{aligned}
\Delta CS - T &= \frac{\tau(2a-4k-\tau)}{2b} - \tau\,\frac{a-2k-\tau}{b} \\
&= \frac{\tau}{2b}\Big[(2a-4k-\tau)-2(a-2k-\tau)\Big] \\
&= \frac{\tau}{2b}\Big[(2a-4k-\tau)-2a+4k+2\tau\Big] \\
&= \frac{\tau^2}{2b} > 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\Delta CS = CS - CS_\tau = T + \frac{\tau^2}{2b} > T$$

Es decir, la pérdida de excedente del consumidor excede la recaudación del gobierno: el impuesto genera una pérdida irrecuperable de eficiencia (DWL) de magnitud $\frac{\tau^2}{2b}$.

(d) Impuesto lump-sum sobre productores.

Supongamos ahora un impuesto de suma fija $\tau_p > 0$ por productor, escogido para recaudar la misma cantidad total que el impuesto unitario τ. El costo de cada empresa pasa a ser

$$c(q) = k^2 + q^2 + \tau_p$$

El costo marginal no cambia:

$$CMg(q) = 2q$$

pero el costo medio sí:

$$CMe(q) = \frac{k^2+q^2+\tau_p}{q} = \frac{k^2+\tau_p}{q} + q$$

Minimizando:

$$\frac{dCMe}{dq} = -\frac{k^2+\tau_p}{q^2} + 1 = 0 \iff q_{\tau_p} = \sqrt{k^2+\tau_p}$$

Sustituyendo en la C.P.O. de maximización de beneficios:

$$\begin{aligned} p_{\tau_p} = CMg(q_{\tau_p}) &\iff p_{\tau_p} = 2q_{\tau_p} \\ &\iff p_{\tau_p} = 2\sqrt{k^2+\tau_p} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el equilibrio de largo plazo es:

$$p_{\tau_p} = 2\sqrt{k^2+\tau_p}\ , \qquad q_{\tau_p} = \sqrt{k^2+\tau_p}$$

Con demanda de mercado $p = a - bQ$, la cantidad total y el número de firmas son

$$Q_{\tau_p} = \frac{a - p_{\tau_p}}{b} = \frac{a - 2\sqrt{k^2+\tau_p}}{b}, \qquad J_{\tau_p} = \frac{Q_{\tau_p}}{\sqrt{k^2+\tau_p}} = \frac{a - 2\sqrt{k^2+\tau_p}}{b\sqrt{k^2+\tau_p}}$$

El excedente del consumidor es

$$\begin{aligned} CS_{\tau_p} &= \frac{1}{2}(a - p_{\tau_p})Q_{\tau_p} \\ &= \frac{1}{2}\left(a - 2\sqrt{k^2+\tau_p}\right)\frac{a - 2\sqrt{k^2+\tau_p}}{b} \\ &= \frac{(a - 2\sqrt{k^2+\tau_p})^2}{2b} \end{aligned}$$

Los consumidores preferirán este esquema si y solo si:

$$\begin{aligned} CS_{\tau_p} > CS_{\tau} &\iff \frac{(a - 2\sqrt{k^2+\tau_p})^2}{2b} > \frac{(a-2k-\tau)^2}{2b} \\ &\iff (a - 2\sqrt{k^2+\tau_p})^2 > (a-2k-\tau)^2 \\ &\iff \left|a - 2\sqrt{k^2+\tau_p}\right| > \left|a-2k-\tau\right| \\ &\iff a - 2\sqrt{k^2+\tau_p} > a-2k-\tau \\ &\iff -2\sqrt{k^2+\tau_p} > -2k-\tau \\ &\iff 2\sqrt{k^2+\tau_p} < 2k+\tau \\ &\iff p_{\tau_p} < p_{\tau} \end{aligned}$$

Es decir, si el precio en el esquema lump-sum es menor que en el del impuesto unitario. En particular, si se cumple la siguiente cota:

$$
\begin{aligned}
p_{\tau_p} < p_\tau &\iff 2\sqrt{k^2+\tau_p} < 2k+\tau \\
&\iff \sqrt{k^2+\tau_p} < k+\frac{\tau}{2} \\
&\iff k^2+\tau_p < \left(k+\frac{\tau}{2}\right)^2 \\
&\iff k^2+\tau_p < k^2+k\,\tau+\frac{\tau^2}{4} \\
&\iff \tau_p < k\,\tau+\frac{\tau^2}{4} \\
&\iff \tau_p < 4\tau_p < 4k\,\tau+\tau^2 \\
&\iff \tau_p < 4k\,\tau+\tau^2
\end{aligned}
$$

Notemos que, por C.P.O.:

$$
p_{\tau_p} = CMg(q_{\tau_p}), \qquad p_\tau = CMg(q_\tau)
$$

Por lo tanto, si el impuesto es lo suficientemente grande como para distorsionar los costos marginales de tal forma que se cumpla que $p_{\tau_p} < p_\tau$, entonces los consumidores preferirán el impuesto de suma fija aplicado a los productores. Esto se debe a que este no distorsiona la decisión marginal de producción (opera como un costo fijo), mientras que el impuesto por unidad distorsiona los costos marginales, de modo que su impacto en el precio es directo. En consecuencia, si $\tau_p < 4k\,\tau + \tau^2$, entonces el precio en el esquema lump-sum a productores será lo suficientemente menor para logar que el excedente del consumidor sea mayor en este esquema respecto al de impuesto por unidad.

(e) Impuesto de lump-sum sobre consumidores.

Consideremos ahora un impuesto de suma fija $\tau_c > 0$ sobre cada consumidor, diseñado para recaudar la misma cantidad total que el impuesto unitario τ.

Un impuesto lump-sum sobre consumidores no afecta la curva de demanda de mercado ni las decisiones de producción de las firmas. La demanda sigue siendo $p = a - bQ$, y las firmas operan con la misma tecnología sin impuestos.

Por lo tanto, el equilibrio de largo plazo permanece igual al caso sin impuestos:

$$p_{\tau_c} = 2k$$

$$Q_{\tau_c} = \frac{a-2k}{b}$$

$$J_{\tau_c} = \frac{a-2k}{bk}$$

El excedente del consumidor *antes* de considerar el pago del impuesto lump-sum es:

$$\begin{aligned} CS_{\tau_c}^{\text{bruto}} &= \frac{1}{2}(a - p_{\tau_c})Q_{\tau_c} \\ &= \frac{(a-2k)^2}{2b} \end{aligned}$$

Sin embargo, los consumidores deben pagar el impuesto lump-sum total $T_c = n\tau_c$, donde n es el número de consumidores. El excedente neto del consumidor es:

$$\begin{aligned} CS_{\tau_c}^{\text{neto}} &= CS_{\tau_c}^{\text{bruto}} - T_c \\ &= \frac{(a-2k)^2}{2b} - n\tau_c \end{aligned}$$

Para comparar con el impuesto unitario, recordemos que bajo este último:

$$CS_\tau = \frac{(a-2k-\tau)^2}{2b}$$

Los consumidores preferirán el lump-sum sobre consumidores al impuesto unitario si y solo si:

$$\begin{aligned} CS_{\tau_c}^{\text{neto}} > CS_\tau &\iff \frac{(a-2k)^2}{2b} - n\tau_c > \frac{(a-2k-\tau)^2}{2b} \\ &\iff \frac{(a-2k)^2}{2b} - \frac{(a-2k-\tau)^2}{2b} > n\tau_c \\ &\iff \frac{(a-2k)^2 - (a-2k-\tau)^2}{2b} > n\tau_c \end{aligned}$$

Del inciso (c), sabemos que:

$$(a-2k)^2 - (a-2k-\tau)^2 = \tau(2a - 4k - \tau)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\tau(2a - 4k - \tau)}{2b} > n\tau_c$$

Con la restricción de igual recaudación $T_c = T$:

$$n\tau_c = \tau Q_\tau = \tau \frac{a - 2k - \tau}{b}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\tau(2a - 4k - \tau)}{2b} > \tau \frac{a - 2k - \tau}{b}$$

$$\frac{2a - 4k - \tau}{2} > a - 2k - \tau$$

$$2a - 4k - \tau > 2a - 4k - 2\tau$$

$$-\tau > -2\tau$$

$$\tau < 2\tau$$

Esta desigualdad es siempre verdadera para $\tau > 0$. Por lo tanto, los consumidores siempre preferirán el impuesto lump-sum sobre consumidores a cualquiera de los otros dos esquemas.

El impuesto lump-sum sobre consumidores no distorsiona el mercado: el precio y la cantidad de equilibrio permanecen en sus niveles eficientes de competencia perfecta sin impuestos. Los consumidores pierden exactamente la cantidad recaudada T, sin pérdida irrecuperable de eficiencia. En contraste, tanto el impuesto unitario como el lump-sum a productores generan distorsiones que reducen la cantidad de equilibrio, causando pérdidas de eficiencia adicionales más allá de la recaudación fiscal. $\square$

Ex. 4.27 A per-unit tax, $t > 0$, is levied on the output of a monopoly. The monopolist faces demand, $q = p^{-\epsilon}$, where $\epsilon > 1$, and has constant average costs. Show that the monopolist will increase price by more than the amount of the per-unit tax.

Proof. El monopolista enfrenta la demanda $q = p^{-\epsilon}$ con $\epsilon > 1$, y tiene costos medios constantes $c > 0$, de modo que $c(q) = cq$. La cruva inversa de demanda es $p(q) = q^{-\frac{1}{\epsilon}}$.

Equilibrio sin impuesto.

El monopolista maximiza beneficios:

$$\max_q \pi(q) = p(q)q - c(q) = q^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - cq$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{d\pi}{dq} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q^{-\frac{1}{\epsilon}} - c = 0$$
$$\implies q^* = \left[\frac{\epsilon}{\epsilon - 1} c\right]^{-\epsilon}$$

Sustituyendo en la curva de demanda,

$$\begin{aligned} p^* &= (q^*)^{-\frac{1}{\epsilon}} \\ &= \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} c \end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio del monopolista sin impuesto es:

$$p^* = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} c$$

Equilibrio con impuesto unitario $\tau > 0$.

Con el impuesto por unidad, ahora la función de costos es $c(q) = cq + \tau q$, de modo que el costo marginal pasa de c a $c + \tau$. El monopolista ahora maximiza:

$$\max_q \pi(q) = q^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - cq - \tau q$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{d\pi}{dq} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q^{-\frac{1}{\epsilon}} - c - \tau = 0$$
$$\implies q_\tau = \left[\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}(c + \tau)\right]^{-\epsilon}$$

Sustituyendo en la curva de demanda,

$$\begin{aligned} p_\tau &= (q_\tau)^{-\frac{1}{\epsilon}} \\ &= \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}(c + \tau) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio del monopolista con impuesto unitario es:

$$p_\tau = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}(c + \tau)$$

Cambio en el precio.

El aumento en el precio debido al impuesto es:

$$\begin{aligned} p_\tau - p^* &= \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}(c + \tau) - \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}c \\ &= \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto:[11]

$$p_\tau - p^* = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}\tau > \tau$$

Es decir, el monopolista aumenta el precio en más que el monto del impuesto unitario.

Interpretación: El monopolista opera con un markup sobre el costo marginal:

$$p^* = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}c$$

donde $\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}$ es el markup. Como el impuesto es por unidad, el costo marginal aumenta de c a $c + t$, de modo que el monopolista aplica el mismo markup al nuevo costo marginal. Por lo tanto, el aumento en el precio refleja el markup sobre el impuesto: $\Delta p = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}\tau$. Cuanto más inelástica sea la demanda (menor ϵ, aunque manteniendo $\epsilon > 1$), mayor será el *overshifting*. □

[11] Como $\epsilon > 1$, entonces $\epsilon - 1 > 0$. Por otro lado, $\epsilon - 1 < \epsilon \implies 1 < \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}$.