Laboratorio de Microeconomía I

Centro de Investigación y Docencia Económicas

Maestría en Economía - 2025

Laboratorista: Arturo López

Tarea 11 Solver

Exercises

Ex. 3.10 A *Leontief* production function has the form

$$y = \min\{\alpha x_1,\ \beta x_2\}$$

for $\alpha > 0$ and $\beta > 0$. Carefully sketch the isoquant map for this technology and verify that the elasticity of substitution $\sigma = 0$, where defined.

Proof. Para un nivel fijo de $\bar{y} > 0$, una *isocuanta* es un conjunto de nivel de una función de producción f.

Formalmente:

$$\mathcal{Q}(\bar{y}) := \{\mathbf{x} \geq 0 \mid f(\mathbf{x}) = \bar{y}\}$$

Es decir, todo el conjunto de combinaciones de insumos $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}(\bar{y})$ satisface que

$$\bar{y} \ = \ \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$$

Esto implica que

$$\alpha x_1 \ \geq \ \bar{y} \implies x_1 \ \geq \ \frac{\bar{y}}{\alpha}$$

$$\beta x_2 \ \geq \ \bar{y} \implies x_2 \ \geq \ \frac{\bar{y}}{\beta}$$

y al menos una de las dos igualdades debe cumplirse. Estas dos relaciones definen, en cada caso, una recta con pendiente igual a infinito o cero, respectivamente.

Es decir, la isocuanta para $\bar{y}$ dada la tecnología *Leontief* es

$$\mathcal{I}(\bar{y}) = \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, x_1 \geq \tfrac{\bar{y}}{\alpha},\ x_2 = \tfrac{\bar{y}}{\beta}\right\} \cup \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, x_1 = \tfrac{\bar{y}}{\alpha},\ x_2 \geq \tfrac{\bar{y}}{\beta}\right\}$$

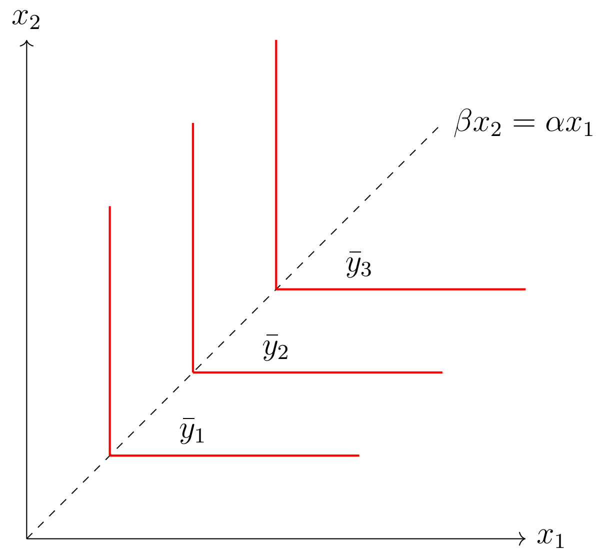
Gráficamente, cada isocuanta es una “L” con vértice en

$$\left(\tfrac{\bar{y}}{\alpha}, \tfrac{\bar{y}}{\beta}\right)$$

y los vértices se intersectan en la recta

$$\beta x_2 = \alpha x_1 \quad \iff \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Un mapa de isocuantas para $\bar{y}_1 < \bar{y}_2 < \bar{y}_3$ se ve como:



Elasticidad de sustitución.

La tecnología Leontief no es diferenciable. Por otro lado, la tasa marginal de sustitución técnica (MRTS) es constante por tramos (por casos):

- Si $y = \alpha x_1 < \beta x_2$, la producción la determina x_1, por lo que $f_1 = \alpha$, $f_2 = 0$ y $MRTS_{12} = \dfrac{f_1}{f_2} = \infty$. En este caso, $MRTS_{12}$ es constante (siempre infinito) a lo largo de este tramo y no varía con $r = x_2/x_1$.

- Si $y = \beta x_2 < \alpha x_1$, la producción la determina x_2, por lo que $f_1 = 0$, $f_2 = \beta$ y $MRTS_{12} = \dfrac{f_1}{f_2} = 0$. De nuevo, $MRTS_{12}$ es constante (siempre cero) a lo largo de este tramo y no varía con r.

En ambos casos, $MRTS_{12}$ no responde a cambios en la razón de insumos $r = x_2/x_1$, de modo que $\sigma = 0$. □

Ex. 3.11 Calculate σ for the Cobb–Douglas production function $y = Ax_1^\alpha x_2^\beta$, where $A > 0$, $\alpha > 0$, and $\beta > 0$.

Proof. Para $y = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ se tiene

$$f_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta$$

$$f_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = A\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} MRTS_{12} &= \frac{f_1}{f_2} = \frac{A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{A\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Si definimos $r := \dfrac{x_2}{x_1}$, entonces

$$\ln MRTS_{12} = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \ln r \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d\ln MRTS_{12}}{d\ln r} = 1$$

Por definición,

$$\sigma_{12} = \left(\frac{d\ln MRTS_{12}}{d\ln r}\right)^{-1} = 1$$

Por lo tanto, la elasticidad de sustitución de la función de producción Cobb–Douglas es $\sigma = 1$. □

Ex. 3.14 Calculate the elasticity of substitution for the production function in Example 3.2.

Proof. La función de producción es:

$$y = k\,(1 + x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta})^{-1}$$

Entonces

$$\begin{aligned} MRTS_{12} &= \frac{f_1}{f_2} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{k\,(1 + x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta})^{-2}x_1^{-\alpha-1}\,x_2^{-\beta}}{k\,(1 + x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta})^{-2}x_2^{-\beta-1}x_1^{-\alpha}} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Tomamos logaritmos:

$$\ln MRTS_{12} = \ln\frac{\alpha}{\beta} + \ln r$$

Luego,

$$\sigma_{12} = \frac{d\ln MRTS_{12}}{d\ln r} = 1$$

□

Ex. 3.21 What restrictions must there be on the parameters of the Cobb–Douglas form in Example 3.4 in order that it be a legitimate cost function?

Proof. Consideremos la función de tipo Cobb-Douglas:

$$c(\mathbf{w}, y) = Aw_1^{\alpha} w_2^{\beta}\, y$$

Para que c sea una función de costo, necesita cumplir las propiedades de una función de costo (**Theorem 3.2**).

- **Cero cuando** $y = 0$

Claramente, $c(\mathbf{w}, 0) = Aw_1^{\alpha} w_2^{\beta} \cdot 0 = 0$.

Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- **Continua en su dominio**

Claramente, $c(\mathbf{w}, y)$ es continua para todo $(\mathbf{w}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ si y solo si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{++}$.

- **Para todo $\mathbf{w} >> 0$, estrictamente creciente y no acotada superiormente en y**

Para todo $\mathbf{w} >> 0$,

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial y} = Aw_1^{\alpha} w_2^{\beta} > 0$$

Por otro lado, sea $M > 0$ tal que

$$y > \frac{M}{Aw_1^{\alpha} w_2^{\beta}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} c(\mathbf{w}, y) &= Aw_1^{\alpha} w_2^{\beta} y \\ &> Aw_1^{\alpha} w_2^{\beta} \cdot \frac{M}{Aw_1^{\alpha} w_2^{\beta}} \\ &= M \end{aligned}$$

Luego, c es estrictamente creciente y no acotada superiormente en y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{++}$.

- **Creciente en w**

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{++}$, entonces

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial w_1} = \alpha\, Aw_1^{\alpha-1} w_2^{\beta} y > 0$$

$$\frac{\partial c(\mathbf{w},y)}{\partial w_2} = \beta\, A w_1^{\alpha} w_2^{\beta-1} y > 0$$

- **Homogénea de grado uno en w**

Sea $t \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} c(t\mathbf{w},y) &= A(tw_1)^{\alpha}(tw_2)^{\beta}y \\ &= t^{\alpha+\beta} A w_1^{\alpha} w_2^{\beta} y \end{aligned}$$

Si $\alpha+\beta=1$, entonces

$$\begin{aligned} c(t\mathbf{w},y) &= t\, A w_1^{\alpha} w_2^{\beta} y \\ &= t\, c(\mathbf{w},y) \end{aligned}$$

Luego, c es homogénea de grado uno en $\mathbf{w}$.

- **Cóncava w**

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{++}$ tal que $\alpha+\beta=1$, entonces c es una función de tipo Cobb-Douglas, que sabemos es cóncava para todo $\mathbf{w}$.

$$\boxed{\therefore\ c(\mathbf{w},y) \text{ es una función de costo ssi } \alpha,\beta \in \mathbb{R}_{++}\ \&\ \alpha+\beta=1}$$

□

Ex. 3.24 *True or false?* 'If $\lambda(\mathbf{w},y)$ is the Lagrangian multiplier associated with the firm's cost-minimisation problem, then $mc(\mathbf{w},y) = \lambda(\mathbf{w},y)$.'

Proof. **Verdadero**

Si $\mathbf{x}^*(\mathbf{w},y)$ es la solución al problema de minimización de costos, entonces la función de costos es:

$$c(\mathbf{w},y) = \mathbf{w}\cdot\mathbf{x}^*(\mathbf{w},y)$$

Por Teorema de la Envolvente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(\mathbf{w},y)}{\partial y} &= \left.\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{w},y;\lambda)}{\partial y}\right|_{(\mathbf{x},\lambda)=(\mathbf{x}^*,\lambda^*)} \\ &= \lambda(\mathbf{w},y) \end{aligned}$$

donde $\lambda^* = \lambda(\mathbf{w},y)$.

Por definición, el costo marginal óptimo es

$$mc(\mathbf{w}, y) = \frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial y}$$

de modo que

$$mc(\mathbf{w}, y) = \lambda(\mathbf{w}, y)$$

bajo los supuestos de solución interior y diferenciabilidad. □

Ex. 3.26 Calculate the cost function and conditional input demands for the Leontief production function in Exercise 3.8.

Proof. El problema de minimización de costo es

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} \; w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad y = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}.$$

En el óptimo,

$$\alpha x_1^* = \beta x_2^* = y$$

Es decir, las demandas de insumos *condicionadas* al nivel de producción y son:

$$x_1^*(w_1, w_2, y) = \frac{y}{\alpha}, \qquad x_2^*(w_1, w_2, y) = \frac{y}{\beta}$$

Como ninguna depende del precio, en realidad son: $x_i^*(w_1, w_2, y) = x_i^*(y), \; i = 1, 2.$

Sustituyendo en la función objetivo, la función de costo mínimo es

$$\begin{aligned} c(w_1, w_2, y) &= w_1 \, x_1^*(y) + w_2 \, x_2^*(y) \\ &= w_1 \frac{y}{\alpha} + w_2 \frac{y}{\beta} \\ &= y \left(\frac{w_1}{\alpha} + \frac{w_2}{\beta} \right) \end{aligned}$$

□

Ex. 3.36 Derive the cost function for the two-input, constant-returns, Cobb–Douglas technology. Fix one input and derive the short-run cost function. Show that long-run average and long-run marginal cost are constant and equal. Show that for every level of the fixed input, short-run average cost and long-run average cost are equal at the minimum level of short-run average cost. Illustrate your results in the cost-output plane.

Proof. Consideremos la tecnología Cobb-Douglas con retornos constantes a escala:

$$y = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

donde $A > 0,\ \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1.$

1. Función de Costo de Corto Plazo

$$sc(w_1, \bar{w}_2, y; \bar{x}_2) = \min_{x_1 \geq 0} \left(w_1 x_1 + \bar{w}_2 \bar{x}_2\right) \quad \text{s.a.} \quad Ax_1^{\alpha} \bar{x}_2^{\beta} \geq y$$

Dado que el costo es creciente en x_1, la restricción se cumple con igualdad.

Esto implica

$$x_1 = \left(\frac{y}{A\bar{x}_2^{\beta}}\right)^{1/\alpha}$$

En el óptimo

$$x_1^{SR}(w_1, \bar{x}_2, y) = \left(\frac{y}{A\bar{x}_2^{\beta}}\right)^{1/\alpha}$$

Por lo tanto,

$$sc(w_1, \bar{w}_2, y; \bar{x}_2) = w_1 \left(\frac{y}{A\bar{x}_2^{\beta}}\right)^{1/\alpha} + \bar{w}_2 \bar{x}_2$$

El costo de corto plazo no requiere Lagrange porque el problema tiene solo un insumo variable, y el costo es estrictamente creciente en ese insumo. Por lo tanto, el nivel de costo mínimo se alcanza saturando la restricción de producción y resolviendo la cantidad mínima necesaria del insumo variable para producir el nivel y.

El costo promedio de corto plazo es

$$\begin{aligned} SRAC &= \frac{sc(w_1, \bar{w}_2, y; \bar{x}_2)}{y} \\ &= \frac{w_1}{y} \left(\frac{y}{A\bar{x}_2^{\beta}}\right)^{1/\alpha} + \frac{\bar{w}_2 \bar{x}_2}{y} \end{aligned}$$

2. Función de Costo de Largo Plazo

El costo óptimo de largo plazo se obtiene minimizando sobre ambos insumos (i.e. es la función de costos):

$$c(\mathbf{w}, y) = \min_{x_1, x_2 \geq 0} \{w_1 x_1 + w_2 x_2 \mid Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} \geq y\}$$

El Lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda\Big(y - A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}\Big)$$

C.P.O.:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right|_{(x_1,x_2,\lambda)=(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)} = w_1 - \lambda A \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} = 0 \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right|_{(x_1,x_2,\lambda)=(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)} = w_2 - \lambda A \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} = 0 \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right|_{(x_1,x_2,\lambda)=(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)} = y - A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = 0 \tag{3}$$

A partir de (1) y (2):

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{x_2}{x_1}$$

de donde

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{w_1}{w_2} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{w_1}{w_2} x_1$$

Sustituyendo en la restricción:

$$y = A x_1^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{w_1}{w_2} x_1\right)^{\beta} = A\left(\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{w_1}{w_2}\right)^{\beta} x_1^{\alpha+\beta} = A\left(\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{w_1}{w_2}\right)^{\beta} x_1$$

donde usamos que $\alpha + \beta = 1$.

Entonces

$$x_1^*(\mathbf{w}, y) = \frac{y}{A}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w_2}{w_1}\right)^{\beta}$$

El otro insumo es

$$\begin{aligned} x_2^*(\mathbf{w}, y) &= \frac{\beta}{\alpha}\frac{w_1}{w_2}\, x_1^*(\mathbf{w}, y) \\ &= \frac{y}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{w_1}{w_2}\right)^{1-\beta} \\ &= \frac{y}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

El costo mínimo se obtiene sustituyendo en la función objetivo:

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{w}, y) &= w_1 x_1^*(\mathbf{w}, y) + w_2 x_2^*(\mathbf{w}, y) \\
&= w_1 \, \frac{y}{A} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{w_2}{w_1} \right)^{\beta} + w_2 \, \frac{y}{A} \, \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} \right)^{\alpha} \\
&= \frac{y}{A} \left[w_1 \, \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{w_2}{w_1} \right)^{\beta} + w_2 \, \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} \right)^{\alpha} \right] \\
&= \frac{y}{A} \left[w_1^{\alpha} \, \left(\frac{\alpha}{\beta} w_2 \right)^{\beta} + w_2^{\beta} \, \left(\frac{\beta}{\alpha} w_1 \right)^{\alpha} \right] \\
&= \frac{y}{A} w_1^{\alpha} w_2^{\beta} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\beta} + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\alpha} \right] \\
&= \frac{y}{A} w_1^{\alpha} w_2^{\beta} \left[\frac{1}{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta}} \right] \\
&= \frac{y}{A} \, \frac{w_1^{\alpha} w_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$LRAC = \frac{c(\mathbf{w}, y)}{y} = \frac{w_1^{\alpha} w_2^{\beta}}{A \, \alpha^{\alpha} \beta^{\beta}}, \qquad LRMC = \frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial y} = \frac{w_1^{\alpha} w_2^{\beta}}{A \alpha^{\alpha} \beta^{\beta}}$$

Luego,

$$LRAC = LRMC$$

y ambos son constantes.

3. Relación entre $SRAC$ y $LRAC$.

Definimos

$$SRAC(w_1, \bar{w}_2; y, \bar{x}_2) = \frac{sc(w_1, \bar{w}_2; y, \bar{x}_2)}{y}, \qquad SRMC(w_1, \bar{w}_2; y, \bar{x}_2) = \frac{\partial sc(w_1, \bar{w}_2; y, \bar{x}_2)}{\partial y}$$

3.1. El mínimo de $SRAC$ satisface $SRAC = SRMC$.

Derivamos el costo promedio de corto plazo respecto a y:

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{sc(w_1, \bar{w}_2; y, \bar{x}_2)}{y} \right] = \frac{sc'(w_1, \bar{w}_2; y, \bar{x}_2) \, y - sc(w_1, \bar{w}_2; y, \bar{x}_2)}{y^2}$$

Sea $y^* > 0$ tal que $SRAC$ alcanza su mínimo (interior). En este nivel se cumple

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{sc(w_1,\bar{w}_2;y,\bar{x}_2)}{y}\right]\Bigg|_{y=y^*} = 0 \implies sc'(w_1,\bar{w}_2;y^*,\bar{x}_2)\,y^* - sc(w_1,\bar{w}_2;y^*,\bar{x}_2) = 0$$

$$\implies sc'(w_1,\bar{w}_2;y^*,\bar{x}_2) = \frac{sc(w_1,\bar{w}_2;y^*,\bar{x}_2)}{y^*}$$

Es decir,

$$SRMC(w_1,\bar{w}_2;y^*,\bar{x}_2) = SRAC(w_1,\bar{w}_2;y^*,\bar{x}_2).$$

3.2. Costo de largo plazo como valor optimizado de sc.

Sea ahora el costo de largo plazo

$$c(\mathbf{w},y) = \min_{x_1,x_2\geq 0}\{w_1x_1 + w_2x_2 :\ f(x_1,x_2) \geq y\}$$

Podemos escribirlo como un valor optimizado de la función de costo de corto plazo (i.e. el nivel de y que alcanza el óptimo con $\bar{x}_2$):

$$c(\mathbf{w},y) = sc\Big(w_1,w_2;y,\bar{x}_2(y)\Big)$$

donde $\bar{x}_2(y)$ es la cantidad óptima de x_2 elegida en largo plazo para el nivel de producción y.

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dc(\mathbf{w},y)}{dy} = \frac{\partial sc(w_1,w_2;y,\bar{x}_2(y))}{\partial y} + \frac{\partial sc(w_1,w_2;y,\bar{x}_2(y))}{\partial \bar{x}_2}\frac{d\bar{x}_2(y)}{dy}$$

Sin embargo, $\bar{x}_2(y)$ resuelve el problema de minimización de sc respecto a $\bar{x}_2$, por lo que en el óptimo se cumple la C.P.O.

$$\frac{\partial sc(w_1,w_2;y,\bar{x}_2(y))}{\partial \bar{x}_2} = 0$$

Así, el segundo término desaparece y obtenemos

$$\frac{dc(\mathbf{w},y)}{dy} = \frac{\partial sc(w_1,w_2;y,\bar{x}_2(y))}{\partial y}.$$

Es decir, en el nivel de producción y donde el insumo fijo coincide con el óptimo de largo plazo $\bar{x}_2(y)$,

$$LRMC(\mathbf{w},y) = \frac{dc(\mathbf{w},y)}{dy} = \frac{\partial sc(w_1,w_2;y,\bar{x}_2(y))}{\partial y} = SRMC(w_1,w_2;y,\bar{x}_2(y)).$$

3.3. Tangencia entre $SRAC$ y $LRAC$ en el mínimo.

Anteriormente demostramos que

$$LRAC(\mathbf{w}, y) = LRMC(\mathbf{w}, y) \quad \text{para todo } y > 0.$$

Tomemos ahora el nivel y^* que minimiza el costo promedio de corto plazo para un $\bar{x}_2$ dado. En ese punto hemos mostrado que

$$SRMC(w_1, \bar{w}_2; y^*, \bar{x}_2) = SRAC(w_1, \bar{w}_2; y^*, \bar{x}_2).$$

Si además fijamos $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(y^*)$ igual al nivel óptimo de largo plazo para y^*, de 3.2 obtenemos

$$LRMC(\mathbf{w}, y^*) = SRMC(w_1, \bar{w}_2; y^*, \bar{x}_2).$$

Combinando ambas igualdades:

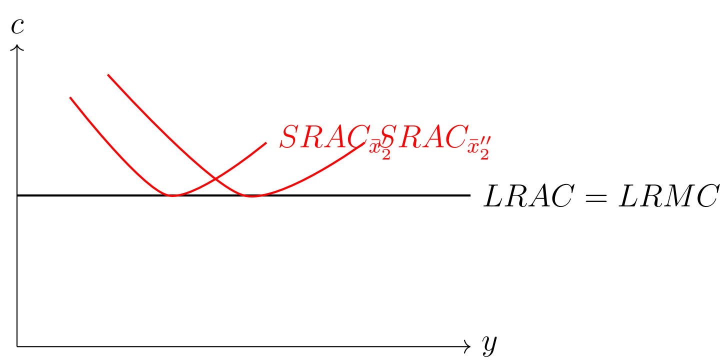
$$SRAC(w_1, \bar{w}_2; y^*, \bar{x}_2) = SRMC(w_1, \bar{w}_2; y^*, \bar{x}_2) = LRMC(\mathbf{w}, y^*).$$

Pero $LRAC(\mathbf{w}, y^*) = LRMC(\mathbf{w}, y^*)$, así que finalmente

$$SRAC(w_1, \bar{w}_2; y^*, \bar{x}_2) = LRAC(\mathbf{w}, y^*).$$

4. Representación en el espacio costo–producto.

La curva $LRAC$ es horizontal; las curvas $SRAC$ (una por cada $\bar{x}_2$) son en forma de U y son tangentes a $LRAC$ exactamente en sus mínimos:



□