Laboratorio de Microeconomía I

Centro de Investigación y Docencia Económicas

Maestría en Economía - 2025

Laboratorista: Arturo López

Tarea 6

Exercises

Ex. 1.30 In the two-good case, the level sets of the indirect utility function in price space are sets of the form

$$\{(p_1, p_2) \mid v(p_1, p_2, y) = v^0\} \quad \text{for } v^0 \in \mathbb{R}.$$

These are sometimes called **price-indifference curves**. Sketch a possible map of price-indifference curves. Give separate arguments to support your claims as to their slope, curvature, and the direction of increasing utility.

Proof. Para $v^0 \in \mathbb{R}$, defina el conjunto de indiferencia de precios de la función de utilidad indirecta:

$$\mathcal{C}_{v^0} := \{(\mathbf{p}, y) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \mid v(\mathbf{p}, y) = v^0\}.$$

donde $y \geq 0$ es un nivel de ingreso fijo y v^0 es un nivel de utilidad.

Un ejemplo de mapa de curvas de indiferencia con $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ se ve de la siguiente forma:

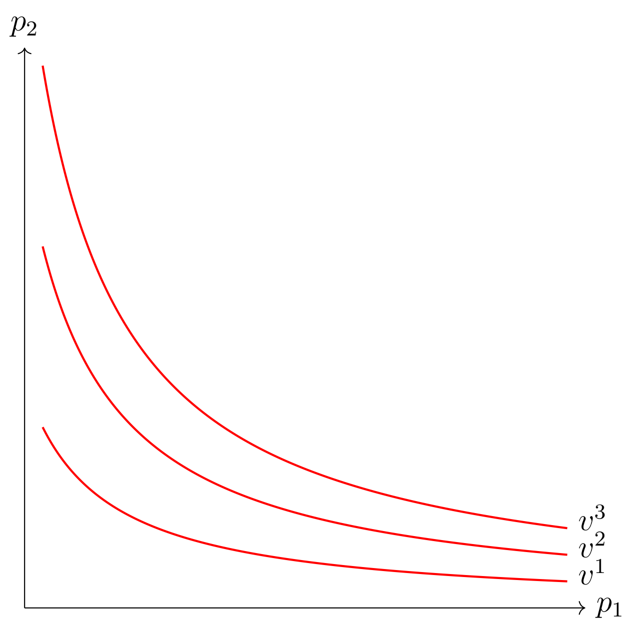

Figure 1: Mapa de curvas de indiferencia en precios para $y \geq 0$ fijo. Decreciente en $\mathbf{p}$: $v^1 > v^2 > v^3$.

A continuación, daremos argumentos separados sobre la pendiente, curvatura y dirección de crecimiento de utilidad de estas curvas de indiferencia.

Pendiente. Recordemos que a lo largo de una curva de nivel el diferencial total de la función es igual a cero[1]. Esto implica que:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial p_1}\, dp_1 + \frac{\partial v}{\partial p_2}\, dp_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dp_2}{dp_1} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_1}}{\frac{\partial v}{\partial p_2}}$$

suponiendo que $v(\mathbf{p}, y)$ es diferenciable y $\nabla_p v(p_1, p_2, y) \neq 0$ en $\mathcal{C}_{v^0}$.

Por las propiedades de la función de utilidad indirecta (**Theorem 1.6**), esta es decreciente en precios. Entonces, $\frac{\partial v}{\partial p_1} < 0$ y $\frac{\partial v}{\partial p_2} < 0$.

Por lo tanto, las curvas de indiferencia de precios de la función de utilidad indirecta tiene pendiente negativa:

$$\frac{dp_2}{dp_1} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_1}}{\frac{\partial v}{\partial p_2}} < 0 \tag{1}$$

Remark. Recordemos que para una función de utilidad $u(\mathbf{x})$, definimos la **Relación Marginal de Sustitución** (RMS) del bien 2 respecto al bien 1 como el valor absoluto de la pendiente de una curva de indiferencia:

$$MRS_{12}(\mathbf{x}) = \left| \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_2}} \right|$$

La RMS nos dice la **tasa de cambio a la que el consumidor pueder intercambiar el bien 2 por el bien 1 sin cambiar su utilidad**.

En cambio, la pendiente negativa de una curva de indiferencia de precios (1) nos dice la **tasa de cambio de precios necesaria para sostener el mismo nivel de utilidad óptima**, dado un nivel de ingreso $y \geq 0$ fijo. Es decir, si estamos sobre una curva de indiferencia, para mantener constante el nivel de utilidad óptima es necesario compensar una subida de un precio con una bajada del otro, a una tasa igual a (1).

Sin embargo, esto es una implicación, más no una decisión del consumidor. Sabemos que el consumidor toma los precios como dados, no intercambia un precio por otro ni puede exigir una compensación. La pendiente negativa no refleja una decisión de intercambio del consumidor (como sí puede interpretarse a la RMS), sino la forma en que la función de utilidad indirecta responde a cambios en $\mathbf{p}$ sobre sus curvas de indiferencia. Véanlo como si el resultado arrojara el siguiente corolario: *Si el precio de un bien aumenta, la única manera de mantener mi utilidad óptima alcanzable fija es que el otro precio baje.*

[1]Como lo comentamos en clase, esto es equivalente a aplicar derivación implícita a la relación $v(p_1, p_2, y) = v^0$.

Curvatura. La función de utilidad indirecta $v(\mathbf{p}, y)$ es cuasiconvexa en $(\mathbf{p}, y)$ (**Theorem 1.6**). Entonces, el conjunto de contorno inferior

$$L_{v^0} \ := \ \{ \, (\mathbf{p}, y) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \mid v(\mathbf{p}, y) \leq v^0 \, \}.$$

es convexo. Como v es decreciente en precios, que el conjunto de contorno inferior sea convexo implica que las curvas de indiferencia de precios de la función de utilidad indirecta son convexas respecto al origen en el espacio de $\mathbf{p}$. En realidad, este argumento es suficiente para conocer la curvatura de las curvas de indiferencia de precios de v. Sin embargo, hagamos un argumento más formal a través de que sabemos que $v(\mathbf{p}, y)$ es cuasiconvexa en $(\mathbf{p}, y)$. Específicamente, que para un nivel fijo de $y \geq 0$, $v(\mathbf{p})$ es cuasiconvexa.

Argumento formal sobre la curvatura. En una clase anterior vimos que el criterio de signo de la derivada de la relación marginal de sustitución respecto al bien x_1 es equivalente al criterio de signos de los menores principales de la Hessiana Orlada para funciones cuasicóncavas. Como lo comentamos, ambos criterios caracterizan la curvatura de las curvas de nivel de $u(\mathbf{x})$.

Para el caso de la función de utilidad indirecta, obtendremos el resultado análogo haciendo uso de que sabemos que $v(\mathbf{p}, y)$ es cuasiconvexa en $(\mathbf{p}, y)$.

Primero, obtendremos el resultado del criterio de signos de los menores principales de la Hessiana Orlada. Dado que la función de utilidad indirecta es cuasiconvexa, los menores principales nos darán el signo de la expresión que luego usaremos para encontrar el signo de la derivada de la pendiente de la curva de indiferencia, lo cuál nos indicará su curvatura.

Criterio de signos de la Hessiana orlada. Fije $y \geq 0$. La *Hessiana orlada* es

$$\mathcal{H}_B(v(\mathbf{p})) = \begin{pmatrix} 0 & v_{p_1} & v_{p_2} \\ v_{p_1} & v_{p_1p_1} & v_{p_1p_2} \\ v_{p_2} & v_{p_1p_2} & v_{p_2p_2} \end{pmatrix}.$$

Calculemos el determinante de sus menores principales:

$$\begin{aligned} D_1 &= \det \begin{pmatrix} 0 & v_{p_1} \\ v_{p_1} & v_{p_1p_1} \end{pmatrix} \\ &= -\, v_{p_1}^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & v_{p_1} & v_{p_2} \\ v_{p_1} & v_{p_1 p_1} & v_{p_1 p_2} \\ v_{p_2} & v_{p_1 p_2} & v_{p_2 p_2} \end{pmatrix}.$$
$$\begin{aligned} &= v_{p_1} v_{p_1 p_2} v_{p_2} + v_{p_2} v_{p_1} v_{p_1 p_2} - v_{p_2}^2 v_{p_1 p_1} - v_{p_1}^2 v_{p_2 p_2} \\ &= -(v_{p_1}^2 v_{p_2 p_2} - 2 v_{p_1 p_2} v_{p_1} v_{p_2} + v_{p_2}^2 v_{p_1 p_1}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

donde los signos se deben justo al criterio de signos de los menores principales de la matriz Hessina Orlada para una función cuasiconvexa.

Entonces, $v_{p_1}^2 v_{p_2 p_2} - 2 v_{p_1 p_2} v_{p_1} v_{p_2} + v_{p_2}^2 v_{p_1 p_1} > 0$.

Curvatura a partir del signo de la derivada de la pendiente de la curva de indiferencia de precios. Ahora, podemos analizar la curvatura de la curva de indiferencia de precios derivando respecto a p_1 a la expresión análoga a la RMS para la función de utilidad indirecta, que es el valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia: [2]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp_1} \left[\frac{v_{p_1}}{v_{p_2}} \right] &= \frac{\partial}{\partial p_1} \left[\frac{v_{p_1}}{v_{p_2}} \right] + \frac{\partial}{\partial p_2} \left[\frac{v_{p_1}}{v_{p_2}} \right] \frac{dp_2}{dp_1} \\ &= \frac{v_{p_1 p_1} v_{p_2} - v_{p_1 p_2} v_{p_1}}{v_{p_2}^2} + \frac{v_{p_1 p_2} v_{p_2} - v_{p_2 p_2} v_{p_1}}{v_{p_2}^2} \cdot \frac{dp_2}{dp_1} \\ &= \frac{v_{p_1 p_1} v_{p_2} - v_{p_1 p_2} v_{p_1}}{v_{p_2}^2} + \frac{v_{p_1 p_2} v_{p_2} - v_{p_2 p_2} v_{p_1}}{v_{p_2}^2} \cdot \left(- \frac{v_{p_1}}{v_{p_2}} \right) \\ &= \frac{v_{p_1 p_1} v_{p_2} - v_{p_1 p_2} v_{p_1}}{v_{p_2}^2} - \frac{v_{p_1 p_2} v_{p_1} v_{p_2} - v_{p_2 p_2} v_{p_1}^2}{v_{p_2}^3} \\ &= \frac{v_{p_1 p_1} v_{p_2}^2 - v_{p_1 p_2} v_{p_1} v_{p_2} - v_{p_1 p_2} v_{p_1} v_{p_2} + v_{p_2 p_2} v_{p_1}^2}{v_{p_2}^3} \\ &= \frac{v_{p_2 p_2} v_{p_1}^2 - 2 v_{p_1 p_2} v_{p_1} v_{p_2} + v_{p_1 p_1} v_{p_2}^2}{v_{p_2}^3} \end{aligned}$$

[2] Pudimos haber derivado directamente a la pendiente de la curva de indiferencia en precios respecto a p_1: $\frac{d^2 p_2}{dp_1^2} = \frac{d}{dp_1} \left[-\frac{v_{p_1}}{v_{p_2}} \right]$. Sin embargo, es más intuitivo derivar al valor absoluto de $\frac{v_{p_1}}{v_{p_2}}$, pues así obtendremos que $\frac{d}{dp_1} \left[\frac{v_{p_1}}{v_{p_2}} \right] < 0$, lo que refleja que la tasa de cambio en términos absolutos va disminuyendo conforme incrementa p_1. De la otra forma, obtendríamos

$$\frac{d^2 p_2}{dp_1^2} > 0$$

lo cual es equivalente. Esto es lo mismo que hicimos para funciones cuasicóncavas (derivamos la RMS y no $-\frac{u_1}{u_2}$)

Dado que **la función de utilidad indirecta es decreciente en precios**, entonces $v_{p2}^3 < 0$. Por otro lado, como $v_{p_1}^2 v_{p_2p_2} - 2v_{p_1p_2}v_{p_1}v_{p_2} + v_{p_2}^2 v_{p_1p_1} > 0$ por el criterio de signo de los menores principales de la Hessiana Orlada, entonces:

$$\frac{d}{dp_1}\left[\frac{v_{p_1}}{v_{p_2}}\right] < 0$$

Luego, la curva de indiferencia en precios de la función de utilidad indirecta es convexa respecto al origen.

Dirección de crecimiento de utilidad Dado que v es decreciente en precios, si $(p_1', p_2') \leq (p_1, p_2)$ con al menos una desigualdad estrica, entonces $v(p_1', p_2', y) \geq v(p_1, p_2, y)$. Manteniendo y constante, la utilidad incrementa hacia "abajo" del plano cartesiano de precios. Es decir, las curvas de indiferencia de valores de utilidad óptima más altos se encuentran más cerca del origen.

Combinando estas afirmaciones: un mapa de curvas de indiferencia en precios consiste en una familia de curvas suaves, estrictamente decrecientes y convexas respecto al origen en el espacio (p_1, p_2), con las flechas de aumento de la utilidad indirecta apuntando hacia el origen.

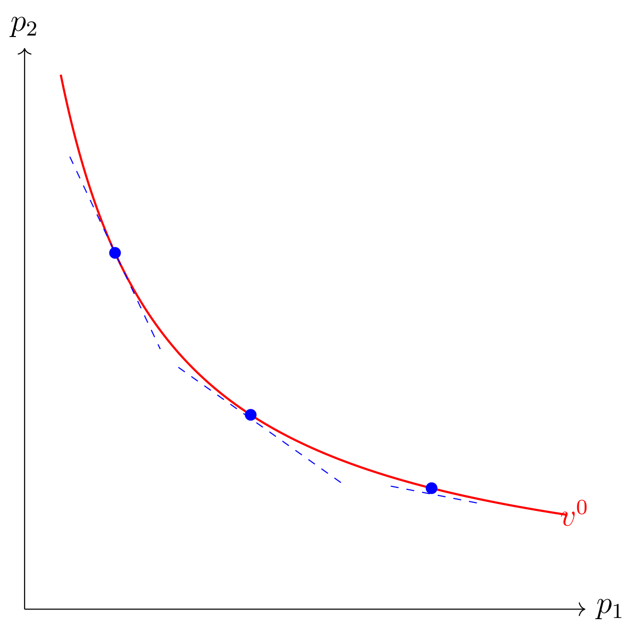

Figure 2: Curva de indiferencia en precios con tangentes en distintos puntos. La pendiente es negativa y su valor absoluto disminuye conforme nos alejamos del origen (i.e., conforme aumenta p_1 y disminuye p_2).

□

Ex. 1.31 Show that the indirect utility function in **Example 1.2** is a quasiconvex function of prices and income.

Proof. Sea $v(\mathbf{p}, y) = y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}$, donde $r = \rho/(\rho - 1) < 0$, y $0 \neq \rho < 1$. Primero, demostraremos que v es cuasiconvexa en precios.

Cuasiconvexidad en precios. Fije $y > 0$. Entonces, $v(\mathbf{p}) = y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}$.

La *Hessiana orlada* es:

$$\mathcal{H}_B(v(\mathbf{p})) = \begin{pmatrix} 0 & v_{p_1} & v_{p_2} \\ v_{p_1} & v_{p_1p_1} & v_{p_1p_2} \\ v_{p_2} & v_{p_1p_2} & v_{p_2p_2} \end{pmatrix}.$$

Sus componentes son:

$$\begin{aligned}
v_{p_1} &= y \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{(1+r)}{r}}\ r\ p_1^{r-1} \\
&= -y(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{(1+r)}{r}}\ p_1^{r-1} \\
v_{p_2} &= y \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{(1+r)}{r}}\ r\ p_2^{r-1} \\
&= -y(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{(1+r)}{r}}\ p_2^{r-1} \\
v_{p_1p_1} &= \frac{\partial}{\partial p_1}\Big(-y\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{(1+r)}{r}}\ p_1^{r-1}\Big) \\
&= y(-\frac{(1+r)}{r}(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{(1+2r)}{r}}\ r\ p_1^{r-1})p_1^{r-1} + (r-1)p_1^{r-2}(y(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{(1+r)}{r}}) \\
&= y(1+r)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+2r}{r}}\ p_1^{2(r-1)}\ -\ y(r-1)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+r}{r}}\ p_1^{r-2}, \\
v_{p_2p_2} &= y(1+r)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+2r}{r}}\ p_2^{2(r-1)}\ -\ y(r-1)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+r}{r}}\ p_2^{r-2}, \\
v_{p_1p_2} &= \frac{\partial}{\partial p_2}\Big(-y\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+r}{r}}\ p_1^{r-1}\Big) \\
&= \Big(-y(-\frac{1+r}{r})\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+2r}{r}}\ rp_2^{r-1}\,p_1^{r-1}\Big) \\
&= y(1+r)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+2r}{r}}\ p_1^{r-1}p_2^{r-1}.
\end{aligned}$$

Calculemos el determinante de sus menores principales:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \det\begin{pmatrix} 0 & v_{p_1} \\ v_{p_1} & v_{p_1p_1} \end{pmatrix} \\
&= -\, v_{p_1}^2 \\
&< 0
\end{aligned}
$$

porque $v_{p_1}^2 > 0$ para todo $p_1 > 0$.

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \det\begin{pmatrix} 0 & v_{p_1} & v_{p_2} \\ v_{p_1} & v_{p_1p_1} & v_{p_1p_2} \\ v_{p_2} & v_{p_1p_2} & v_{p_2p_2} \end{pmatrix}. \\
&= v_{p_1}v_{p_1p_2}v_{p_2} + v_{p_2}v_{p_1}v_{p_1p_2} - v_{p_2}^2 v_{p_1p_1} - v_{p_1}^2 v_{p_2p_2} \\
&= -(v_{p_1}^2 v_{p_2p_2} - 2v_{p_1p_2}v_{p_1}v_{p_2} + v_{p_2}^2 v_{p_1p_1})
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
-D_2 &= v_{p_1}^2\, v_{p_2p_2} - 2\, v_{p_1p_2}\, v_{p_1}v_{p_2} + v_{p_2}^2\, v_{p_1p_1} \\
&= \left[y^2\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{2(1+r)}{r}}\, p_1^{2r-2}\right]\left[y(1+r)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+2r}{r}}\, p_2^{2r-2} - y(r-1)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+r}{r}}\, p_2^{r-2}\right] \\
&\quad -\; 2\left[y(1+r)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+2r}{r}}\, p_1^{r-1}p_2^{r-1}\right]\left[y^2\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{2(1+r)}{r}}\, p_1^{r-1}p_2^{r-1}\right] \\
&\quad +\left[y^2\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{2(1+r)}{r}}\, p_2^{2r-2}\right]\left[y(1+r)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+2r}{r}}\, p_1^{2r-2} - y(r-1)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{1+r}{r}}\, p_1^{r-2}\right] \\
&= y^3(1+r)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{3+4r}{r}}\, p_1^{2r-2}p_2^{2r-2} \;-\; y^3(r-1)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{3+3r}{r}}\, p_1^{2r-2}p_2^{r-2} \\
&\quad -\; 2y^3(1+r)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{3+4r}{r}}\, p_1^{2r-2}p_2^{2r-2} \\
&\quad +\; y^3(1+r)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{3+4r}{r}}\, p_1^{2r-2}p_2^{2r-2} \;-\; y^3(r-1)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{3+3r}{r}}\, p_1^{r-2}p_2^{2r-2} \\
&= -\, y^3(r-1)\,(p_1^r + p_2^r)^{-\frac{3+3r}{r}}\left(p_1^{2r-2}p_2^{r-2} \;+\; p_1^{r-2}p_2^{2r-2}\right).
\end{aligned}
$$

Como $y > 0$, $p_1, p_2 > 0$, y $r < 0$ implica que $-(r-1) = 1 - r > 0$, entonces se tiene que:

$$-D_2 \;>\; 0$$

Por lo tanto, $D_2 < 0$ y luego $v(\mathbf{p}) = y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}$ es cuasiconvexa.

Cuasiconvexidad en ingreso. Fije $p_1, p_2 > 0$ y define $A := (p_1^r + p_2^r)^{-1/r}$.

Entonces, $v(y) = yA$.

Queremos demostrar la definición de cuasiconvexidad, i.e., $v(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2) \leq \max\{v(y^1), v(y^2)\}$.

Sean $y^1, y^2 \geq 0$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces:

$$\begin{aligned} v(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2) &= \left(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2\right)A \\ &= \lambda y^1 A + (1-\lambda)y^2 A \\ &= \lambda v(y^1) + (1-\lambda)v(y^2) \end{aligned}$$

Como $\lambda a + (1-\lambda)b$ es menor o igual a $\max\{a, b\}$ para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} v(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2) &= \lambda v(y^1) + (1-\lambda)v(y^2) \\ &\leq \max\{v(y^1), v(y^2)\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $v(y) = y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r}$ es cuasiconvexa. □

Ex. 1.54 The n-good Cobb–Douglas utility function is

$$u(\mathbf{x}) = A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

where $A > 0$ and $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

(a) Derive the Marshallian demand functions.

(b) Derive the indirect utility function.

(a) Funciones de Demanda Marshallianas El problema de maximización de utilidad del consumidor es

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} \; u(\mathbf{x}) = A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \\ &\text{s.t. } \; \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \leq y \end{aligned}$$

El Lagrange asociado es

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} + \lambda \left[y - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right]$$

Dado que la función Cobb-Douglas es estrictamente creciente (preferencias monotónicas), entonces la restricción se satura y podemos aplicar las condiciones de primer orden del método de Lagrange:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\right|_{(\mathbf{x},\lambda)=(\mathbf{x}^*,\lambda^*)} = A\ \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} x_j^{\alpha_j} - \lambda p_i = 0, \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right|_{(\mathbf{x},\lambda)=(\mathbf{x}^*,\lambda^*)} = y - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0 \tag{2}$$

De (1) obtenemos:

$$\lambda^* = \frac{A\ \alpha_i x_i^{*\alpha_i - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} x_j^{\alpha_j}}{p_i}, \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n$$

Entonces, igualando las expresiones de λ^* para dos índices $i \neq j$:

$$\frac{A\ \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} x_k^{\alpha_k}}{p_i} = \frac{A\ \alpha_j x_j^{\alpha_j - 1} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n-1} x_k^{\alpha_k}}{p_j}$$

$$\frac{A\ \alpha_i x_i^{-1} \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}}{p_i} = \frac{A\ \alpha_j x_j^{-1} \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}}{p_j}$$

$$\frac{\alpha_i x_i^{-1}}{p_i} = \frac{\alpha_j x_j^{-1}}{p_j}$$

$$\frac{\alpha_i x_j}{\alpha_j x_i} = \frac{p_i}{p_j} \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n$$

Por lo tanto, para $i \neq j$,

$$x_i^* = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{p_j}{p_i}\, x_j^* \tag{3}$$

Ahora, sustituyendo (3) en (2) para todo $i \neq j$:

$$\begin{aligned} y &= p_j x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n-1} p_i \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{p_j}{p_i}\, x_j \right) \\ &= p_j x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n-1} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j} p_j\, x_j \right) \\ &= p_j x_j + \frac{p_j}{\alpha_j}\, x_j \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n-1} \alpha_i \\ &= p_j x_j + \frac{p_j}{\alpha_j}\, x_j (1-\alpha_j) \\ &= p_j x_j + \frac{p_j}{\alpha_j}\, x_j - p_j\, x_j \\ &= \frac{p_j}{\alpha_j}\, x_j \end{aligned}$$

donde usamos $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Luego

$$x_j^* \; = \; \frac{\alpha_j}{p_j}\, y.$$

Finalmente, para cualquier i (incluyendo $i = j$):

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{p_j}{p_i}\, x_j^* \\ &= \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{p_j}{p_i} \left(\frac{\alpha_j}{p_j} y \right) \\ &= \frac{\alpha_i}{p_i}\, y \end{aligned}$$

Por lo tanto, las demandas marshallianas son

$$\boxed{x_i(\mathbf{p}, y) = \frac{\alpha_i}{p_i}\, y\ , \quad i = 1, \ldots, n,}$$

Además,

$$\boxed{\lambda^* \; = \; \frac{\alpha_i\, u(\mathbf{x}^*)}{p_i x_i^*} = \frac{u(\mathbf{x}^*)}{y} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n}$$

(b) Función de Utilidad Indirecta La función de utilidad indirecta es:

$$v(\mathbf{p}, y) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{n}}} \{ A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \;\mid\; \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \leq y \}$$

Esto es:

$$v(\mathbf{p}, y) = u\Big(\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)\Big) = A \prod_{i=1}^{n} x_i(\mathbf{p}, y)^{\alpha_i}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{p}, y) &= u\Big(\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)\Big) \\
&= A \prod_{i=1}^{n} x_i(\mathbf{p}, y)^{\alpha_i} \\
&= A \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\, y\right)^{\alpha_i} \\
&= y^{(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)}\, A \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i} \\
&= y\, A \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de utilidad indirecta es

$$\boxed{v(\mathbf{p}, y) = y\, A \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}}$$

□

Ex. 3.G.15 Consider the utility function

$$u(x_1, x_2) = 2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2}$$

(a) Find the demand functions for goods 1 and 2 as they depend on prices and wealth.

(b) Find the indirect utility function and verify all the properties of an indirect utility function.

(a) Funciones de Demanda Marshallianas. El problema de maximización de utilidad del consumidor es

$$\begin{aligned}
\max_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+} \quad & u(x_1, x_2) = 2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2} \\
\text{s.t.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq y
\end{aligned}$$

El Lagrange asociado es

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = 2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2} + \lambda\left[y - p_1x_1 - p_2x_2\right]$$

Dado que u es estrictamente creciente en $\mathbf{x}$ (preferencias monotónicas), entonces la restricción se satura y podemos aplicar las condiciones de primer orden del método de Lagrange:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right|_{(\mathbf{x},\lambda)=(\mathbf{x}^*,\lambda^*)} = x_1^{-1/2} - \lambda p_1 = 0 \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right|_{(\mathbf{x},\lambda)=(\mathbf{x}^*,\lambda^*)} = 2x_2^{-1/2} - \lambda p_2 = 0 \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right|_{(\mathbf{x},\lambda)=(\mathbf{x}^*,\lambda^*)} = y - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \tag{3}$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$\lambda^* = \frac{x_1^{-1/2}}{p_1} = \frac{2x_2^{-1/2}}{p_2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x_1^* &= \left(\frac{2p_1}{p_2}\right)^{-2} x_2^* \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 x_2^* \end{aligned} \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3)

$$\begin{aligned} y &= p_1\left(\frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 x_2^*\right) + p_2x_2^* \\ &= \left(\frac{1}{4}\frac{p_2^2}{p_1}x_2^*\right) + p_2x_2^* \\ &= x_2^*\left(\frac{1}{4}\frac{p_2^2}{p_1} + p_2\right) \\ &= x_2^*\left(\frac{p_2^2 + 4p_1p_2}{4p_1}\right) \end{aligned}$$

Así, la demanda marshalliana para el bien 2 es:

$$x_2(\mathbf{p},y) = y\left(\frac{4p_1}{p_2^2 + 4p_1p_2}\right)$$

Sustituyendo en (4), obtenemos la del bien 1:

$$\begin{aligned}
x_1(\mathbf{p}, y) &= \frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \left(y\,\frac{4p_1}{p_2^2 + 4p_1p_2}\right) \\
&= y\left(\frac{p_2^2}{p_1}\right)\left(\frac{1}{p_2^2 + 4p_1p_2}\right) \\
&= y\left(\frac{p_2^2}{p_1p_2^2 + 4p_1^2p_2}\right) \\
&= y\left(\frac{p_2}{p_1p_2 + 4p_1^2}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las demandas marshallianas son:

$$\boxed{x_1(\mathbf{p}, y) = y\,\frac{p_2}{p_1(p_2 + 4p_1)} \quad , \quad x_2(\mathbf{p}, y) = y\,\frac{4p_1}{p_2(p_2 + 4p_1)}}$$

Función de utilidad indirecta. La función de utilidad indirecta es:

$$v(\mathbf{p}, y) = \max_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2} \{2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2} \mid p_1x_1 + p_2x_2 \leq y\}$$

Esto es:

$$v(\mathbf{p}, y) = u\Big(\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)\Big) = 2x_1(\mathbf{p}, y)^{1/2} + 4x_2(\mathbf{p}, y)^{1/2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{p}, y) &= u\Big(\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)\Big) \\
&= 2x_1(\mathbf{p}, y)^{1/2} + 4x_2(\mathbf{p}, y)^{1/2} \\
&= 2\left(y\,\frac{p_2}{p_1(p_2 + 4p_1)}\right)^{1/2} + 4\left(y\,\frac{4p_1}{p_2(p_2 + 4p_1)}\right)^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{p_2 + 4p_1}}\left(2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2} + 8\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$
\begin{aligned}
v(\mathbf{p}, y)^2 &= \frac{y}{p_2 + 4p_1}\left(2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2} + 8\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2}\right)^2 \\
&= \frac{y}{p_2 + 4p_1}\left((2)\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2} + 4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2}\right]\right)^2 \\
&= \frac{4y}{p_2 + 4p_1}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2} + 4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2}\right)^2 \\
&= \frac{4y}{p_2 + 4p_1}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + 8\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2} + 16\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right) \\
&= \frac{4y}{p_2 + 4p_1}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + 8 + 16\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right) \\
&= \frac{4y}{p_2 + 4p_1} \cdot \frac{p_2^2 + 8p_1p_2 + 16p_1^2}{p_1p_2} \\
&= \frac{4y}{p_2 + 4p_1} \cdot \frac{(p_2 + 4p_1)^2}{p_1p_2} \\
&= \frac{4y\,(p_2 + 4p_1)}{p_1p_2} \\
&= 4y\left(\frac{1}{p_1} + \frac{4}{p_2}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la función de utilidad indirecta es

$$
\boxed{v(\mathbf{p}, y) = 2\left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right)^{1/2}}
$$

Propiedades de la función de utilidad indirecta.

(1) Continua en $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$

Claramente, $v(\mathbf{p}, y)$ es continua para todo $y \geq 0$ y $p_1, p_2 > 0$.

(2) Homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, y)$.

Sea $t > 0$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
v(t\mathbf{p}, ty) &= 2\left(\frac{ty}{tp_1} + \frac{4ty}{tp_2}\right)^{1/2} \\
&= 2\left(\frac{t}{t}\right)^{1/2}\left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right)^{1/2} \\
&= t^0\left[2\left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right)^{1/2}\right] \\
&= t^0 v(\mathbf{p}, y)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, v es homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, y)$.

(3) Estrictamente creciente en y.

Calculemos su derivada parcial respecto a y:

$$
\frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{4}{p_2}\right)
$$

Vemos que $\frac{\partial v}{\partial y} > 0$ para todo $y > 0$.

(4) Decreciente en p.

Calculemos ambas derivadas parciales:

$$
\frac{\partial v}{\partial p_1} = \left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{y}{p_1^2}\right)
$$

$$
\frac{\partial v}{\partial p_2} = \left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{4y}{p_2^2}\right)
$$

Vemos que $\frac{\partial v}{\partial p_i} < 0$ para todo $p_i > 0$, $i = 1, 2$.

(5) Cuasiconvexa en $(\mathbf{p}, y)$.

Cuasiconvexidad en p.

Fije $y \geq 0$. Entonces, $v(\mathbf{p}, y) = v(\mathbf{p})$.

La *Hessiana orlada* es:

$$
\mathcal{H}_B(v(\mathbf{p})) = \begin{pmatrix} 0 & v_{p_1} & v_{p_2} \\ v_{p_1} & v_{p_1p_1} & v_{p_1p_2} \\ v_{p_2} & v_{p_1p_2} & v_{p_2p_2} \end{pmatrix}.
$$

Sus componentes son:

$$
\begin{aligned}
v_{p_1} &= \left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{y}{p_1^2}\right) \\
&= -\left[\left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right) \cdot \left(\frac{y}{p_1^2}\right)^{-2}\right]^{-1/2} \\
&= -\left[\left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right) \cdot \left(\frac{p_1^4}{y^2}\right)\right]^{-1/2} \\
&= -\left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{p_2} &= \left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{4y}{p_2^2}\right) \\
&= -4\left[\left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right) \cdot \left(\frac{y}{p_2^2}\right)^{-2}\right]^{-1/2} \\
&= -4\left[\left(\frac{y}{p_1} + \frac{4y}{p_2}\right) \cdot \left(\frac{p_2^4}{y^2}\right)\right]^{-1/2} \\
&= -4\left(\frac{p_2^4}{y\,p_1} + \frac{4\,p_2^3}{y}\right)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

$$
v_{p_1p_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{3\,p_1^2}{y} + \frac{16\,p_1^3}{y\,p_2}\right)
$$

$$
v_{p_2p_2} = 2\left(\frac{p_2^4}{y\,p_1} + \frac{4\,p_2^3}{y}\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{4\,p_2^3}{y\,p_1} + \frac{12\,p_2^2}{y}\right)
$$

$$
v_{p_1p_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-3/2} \cdot \left(-\frac{4\,p_1^4}{y\,p_2^2}\right)
$$

Calculemos el determinante de los menores principales de $\mathcal{H}_B(v(\mathbf{p}))$:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \det\begin{pmatrix} 0 & v_{p_1} \\ v_{p_1} & v_{p_1p_1} \end{pmatrix} \\
&= -\,v_{p_1}^2 \\
&< 0
\end{aligned}
$$

porque $v_{p_1}^2 > 0$ para todo $p_1 > 0$.

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 0 & v_{p_1} & v_{p_2} \\ v_{p_1} & v_{p_1p_1} & v_{p_1p_2} \\ v_{p_2} & v_{p_1p_2} & v_{p_2p_2} \end{pmatrix}$$

$$= v_{p_1}v_{p_1p_2}v_{p_2} + v_{p_2}v_{p_1}v_{p_1p_2} - v_{p_2}^2 v_{p_1p_1} - v_{p_1}^2 v_{p_2p_2}$$

$$= -(v_{p_1}^2 v_{p_2p_2} - 2v_{p_1p_2}v_{p_1}v_{p_2} + v_{p_2}^2 v_{p_1p_1})$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
-D_2 &= v_{p_1}^2\, v_{p_2p_2} - 2\, v_{p_1p_2}\, v_{p_1}v_{p_2} + v_{p_2}^2\, v_{p_1p_1} \\
&= \left[-\left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-1/2}\right]^2 \left[2\left(\frac{p_2^4}{y\,p_1} + \frac{4\,p_2^3}{y}\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{4\,p_2^3}{y\,p_1} + \frac{12\,p_2^2}{y}\right)\right] \\
&\quad - 2\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-3/2} \cdot \left(-\frac{4\,p_1^4}{y\,p_2^2}\right)\right]\left[-\left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-1/2}\right]\left[-4\left(\frac{p_2^4}{y\,p_1} + \frac{4\,p_2^3}{y}\right)^{-1/2}\right] \\
&\quad + \left[-4\left(\frac{p_2^4}{y\,p_1} + \frac{4\,p_2^3}{y}\right)^{-1/2}\right]^2 \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{3\,p_1^2}{y} + \frac{16\,p_1^3}{y\,p_2}\right)\right] \\
&= \underbrace{\left[\left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-1}\right]\left[2\left(\frac{p_2^4}{y\,p_1} + \frac{4\,p_2^3}{y}\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{4\,p_2^3}{y\,p_1} + \frac{12\,p_2^2}{y}\right)\right]}_{>0 \;\; \forall \;\; p_1,p_2>0} \\
&\quad + \underbrace{2\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{4\,p_1^4}{y\,p_2^2}\right)\right]\left[\left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-1/2}\right]\left[4\left(\frac{p_2^4}{y\,p_1} + \frac{4\,p_2^3}{y}\right)^{-1/2}\right]}_{>0 \;\; \forall \;\; p_1,p_2>0} \\
&\quad + \underbrace{\left[4\left(\frac{p_2^4}{y\,p_1} + \frac{4\,p_2^3}{y}\right)^{-1}\right]\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1^3}{y} + \frac{4\,p_1^4}{y\,p_2}\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{3\,p_1^2}{y} + \frac{16\,p_1^3}{y\,p_2}\right)\right]}_{>0 \;\; \forall \;\; p_1,p_2>0}
\end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$-D_2 \;>\; 0$$

Por lo tanto, $D_2 < 0$ y luego $v(\mathbf{p})$ es cuasiconvexa.

Cuasiconvexidad en ingreso. Fije $p_1, p_2 > 0$. Queremos demostrar la definición de cuasiconvexidad, i.e., $v(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2) \leq \max\{v(y^1), v(y^2)\}$.

Sean $y^1, y^2 \geq 0$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces:

$$\begin{aligned}
v(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2) &= 2\left(\frac{(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2)}{p_1} + \frac{4\,(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2)}{p_2}\right)^{1/2} \\
&= 2\left(\left(\frac{1}{p_1} + \frac{4}{p_2}\right)\left[\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2\right]\right)^{1/2} \\
&\leq 2\left(\left(\frac{1}{p_1} + \frac{4}{p_2}\right)\max\{y^1, y^2\}\right)^{1/2} \qquad (\text{pues } \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2 \leq \max\{y^1, y^2\}) \\
&= 2\left(\frac{1}{p_1} + \frac{4}{p_2}\right)^{1/2}\max\{y^1, y^2\}^{1/2} \\
&= 2\max\left\{\left(\frac{y^1}{p_1} + \frac{4y^1}{p_2}\right)^{1/2}, \left(\frac{y^2}{p_1} + \frac{4\,y^2}{p_2}\right)^{1/2}\right\} \\
&= \max\left\{2\left(\frac{y^1}{p_1} + \frac{4y^1}{p_2}\right)^{1/2},\ 2\left(\frac{y^2}{p_1} + \frac{4y^2}{p_2}\right)^{1/2}\right\} \\
&= \max\{\, v(y^1),\ v(y^2)\,\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $v(y)$ es cuasiconvexa.

(5) Identidad de Roy.

Supongamos que $v(\mathbf{p}, y)$ es diferenciable en $(\mathbf{p}^0, y^0) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$ y $\partial v(\mathbf{p}^0, y^0)/\partial y \neq 0$. Entonces

$$x_1(\mathbf{p}, y) = -\frac{v_{p_1}}{v_y} = -\frac{\dfrac{-\,y}{p_1^2}\left(\dfrac{y}{p_1} + \dfrac{4y}{p_2}\right)^{-1/2}}{\left(\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{4}{p_2}\right)\left(\dfrac{y}{p_1} + \dfrac{4y}{p_2}\right)^{-1/2}} = \frac{y/p_1^2}{\left(\frac{1}{p_1} + \frac{4}{p_2}\right)} = \frac{y\,p_2}{p_1\,(p_2 + 4p_1)}$$

$$x_2(\mathbf{p}, y) = -\frac{v_{p_2}}{v_y} = -\frac{\dfrac{-\,4y}{p_2^2}\left(\dfrac{y}{p_1} + \dfrac{4y}{p_2}\right)^{-1/2}}{\left(\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{4}{p_2}\right)\left(\dfrac{y}{p_1} + \dfrac{4y}{p_2}\right)^{-1/2}} = \frac{4y/p_2^2}{\left(\frac{1}{p_1} + \frac{4}{p_2}\right)} = \frac{4y\,p_1}{p_2\,(p_2 + 4p_1)}$$

Evaluadas en $(\mathbf{p}^0, y^0)$:

$$x_1(\mathbf{p}^0, y^0) = \frac{y^0\,p_2^0}{p_1^0\,(p_2^0 + 4p_1^0)}, \qquad x_2(\mathbf{p}^0, y^0) = \frac{4y^0\,p_1^0}{p_2^0\,(p_2^0 + 4p_1^0)}.$$

que coinciden con las demandas marshallianas evaluadas en $(\mathbf{p}^0, y^0)$. $\square$

Appendix

1.4.1 The Indirect Utility Function

The ordinary utility function $u(\mathbf{x})$ is defined over the consumption set X and represents consumer preferences directly, as we have seen. It is therefore refered to as the **direct utility function**. Given prices $\mathbf{p}$ and income y, the consumer chooses a utility-maximizing bundle $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$. The level of utility achieved when $\mathbf{x}(p, y)$ is chosen thus will be the highest level permitted by the consumer's budget constraint facing prices $\mathbf{p}$ and income y. Different prices or incomes, giving different budget constraints, will generally give rise to different choices by the consumer and so to different levels of maximised utility. The relationship among prices, income, and the maximised value of utility can be summarised by a real-valued function $v : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ defined as follows:

$$v(\mathbf{p}, y) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y. \tag{1.12}$$

The function $v(\mathbf{p}, y)$ is called the **indirect utility function**. It is the maximum-value function corresponding to the consumer's utility maximisation problem. When $u(x)$ is continuous, $v(\mathbf{p}, y)$ is well-defined for all $\mathbf{p} \gg 0$ and $y \geq 0$. If $u(\mathbf{x})$ is strictly quasiconcave, the solution is unique and we can write it as $x(\mathbf{p}, y)$, the consumer's demand function. Hence,

$$v(\mathbf{p}, y) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)) \tag{1.13}$$

Theorem 1.6 Properties of the Indirect Utility Function

If $u(\mathbf{x})$ is continuous and strictly increasing on $\mathbb{R}^n_+$, then $v(\mathbf{p}, y)$ defined in (1.12) is

Proof. 1. Continuous on $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$,

2. Homogeneous of degree zero in $(\mathbf{p}, y)$,

3. Strictly increasing in y,

4. Decreasing in $\mathbf{p}$,

5. Quasiconvex in $(\mathbf{p}, y)$.

Moreover, it satisfies

6. Roy's identity: If $v(\mathbf{p}, y)$ is differentiable at $(\mathbf{p}^0, y^0)$ and $\partial v(\mathbf{p}^0, y^0)/\partial y \neq 0$, then

$$x_i(\mathbf{p}^0, y^0) = -\frac{\partial v(\mathbf{p}^0, y^0)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}^0, y^0)/\partial y}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Example 1.2 In Example 1.1, the direct utility function is the CES form, $u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$, where $0 \neq \rho < 1$. There we found the Marshallian demands:

$$x_1(\mathbf{p}, y) = \frac{p_1^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}, \qquad x_2(\mathbf{p}, y) = \frac{p_2^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}, \tag{E.1}$$

for $r \equiv \rho/(\rho - 1)$. By (1.13), we can form the indirect utility function by substituting these back into the direct utility function. Doing that and rearranging, we obtain

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}, y) &= \left[(x_1(\mathbf{p}, y))^\rho + (x_2(\mathbf{p}, y))^\rho\right]^{1/\rho} \\ &= \left[\left(\frac{p_1^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}\right)^\rho + \left(\frac{p_2^{r-1} y}{p_1^r + p_2^r}\right)^\rho\right]^{1/\rho} \\ &= y\left[\frac{p_1^r + p_2^r}{(p_1^r + p_2^r)^\rho}\right]^{1/\rho} \\ &= y(p_1^r + p_2^r)^{-1/r} \end{aligned} \tag{E.2}$$