Laboratorio de Microeconomía I

Tarea 2
Centro de Investigación y Docencia Económicas
Maestría en Economía
Arturo López

ASSUMPTION 1.1 (Jehle & Reny): Properties of the Consumption Set, X

The minimal requirements on the consumption set are

1. $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n_+$.
2. X *is closed.*
3. X *is convex.*
4. $\mathbf{0} \in X$.

Definition 3.C.1 (Mas-Colell et al.): The preference relation $\succsim$ on X is *continuous* if it is preserved under limits. That is, for any sequence of pairs $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ with $x^n \succsim y^n$ for all n, $x = \lim_{n\to\infty} x^n$, and $y = \lim_{n\to\infty} y^n$, we have $x \succsim y$.

Example 3.C.1 (Mas-Colell et al.): *The Lexicographic Preference Relation.* Let $X = \mathbb{R}^2_+$. Define:

$$x \succsim y \ \text{ iff } \ x_1 > y_1 \text{ or } (x_1 = y_1 \text{ and } x_2 \geq y_2)$$

This is known as the *lexicographic preference relation.*

Exercises

Ex. 1.1 Let $X = \mathbb{R}^2_+$. Verify that X satisfies all five properties required of a consumption set in **Assumption 1.1**.

Ex. 1.2 Let $\succsim$ be a preference relation. Prove the following:

(a) $\succsim \subset \succsim$
(b) $\sim \subset \succsim$
(c) $\succ \cup \sim = \succsim$
(d) $\succ \cap \sim = \emptyset$

Ex. 1.3 Give a proof or convincing argument for each of the following claims.

(a) Neither $\succ$ nor $\sim$ is complete.

(b) For any $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$ in X, only *one* of the following holds: $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$, or $\mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^1$, or $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$.

Ex. 1.4 Prove that if $\succsim$ is a preference relation, then the relation $\succ$ is transitive and the relation $\sim$ is transitive. Also show that if $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$, then $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$.

Ex. 1.5 If $\succsim$ is a preference relation, prove the following: For any $\mathbf{x}^0 \in X$,

(a) $\sim (\mathbf{x}^0) = \succsim (\mathbf{x}^0) \cap \precsim (\mathbf{x}^0)$

(b) $\succsim (\mathbf{x}^0) = \sim (\mathbf{x}^0) \cup \succ (\mathbf{x}^0)$

(c) $\sim (\mathbf{x}^0) \cap \succ (\mathbf{x}^0) = \emptyset$

(d) $\sim (\mathbf{x}^0) \cap \prec (\mathbf{x}^0) = \emptyset$

(e) $\prec (\mathbf{x}^0) \cap \succ (\mathbf{x}^0) = \emptyset$

(f) $\prec (\mathbf{x}^0) \cap \sim (\mathbf{x}^0) \cap \succ (\mathbf{x}^0) = \emptyset$

(g) $\prec (\mathbf{x}^0) \cup \sim (\mathbf{x}^0) \cup \succ (\mathbf{x}^0) = X$

Ex. 3.B.3 Draw a convex preference relation that is locally nonsatiated but is not monotone.

Ex. 3.C.1 Verify that the lexicographic ordering (**Example 3.C.1**) is complete, transitive and strongly monotone.

Ex. 3.C.3 Show that if for every x the upper and lower contour sets $\{y \in \mathbb{R}^L_+ : y \succsim x\}$ and $\{y \in \mathbb{R}^L_+ : x \succsim y\}$ are closed, then $\succsim$ is continuous according to **Definition 3.C.1**.

Ex. 1.2 Let $\succsim$ be a preference relation. Prove the following:

(a) $\succsim \subset \succsim$

(b) $\sim \subset \succsim$

(c) $\succ \cup \sim = \succsim$

(d) $\succ \cap \sim = \emptyset$

(a) P.D. $\succsim \subset \succsim$

Sea $(x,y) \in \succsim$. Claramente, $(x,y) \in \succsim$. $\boxed{\text{Por lo tanto, } \succsim \subset \succsim.}$

(b) P.D. $\sim \subset \succsim$

Sea $(x,y) \in \sim$. Por definición, $x \sim y$ ssi $x \succsim y$ & $y \succsim x$.

Esto implica que $(x,y) \in \succsim$. $\boxed{\therefore \sim \subset \succsim}$

(c) P.D. $\succ \cup \sim = \succsim$

$\subseteq$] Sea $(x,y) \in \succ \cup \sim$. Entonces, $x \succ y$ o $x \sim y$.

Caso 1: Si $x \succ y$, entonces $x \succsim y$ & $\neg(y \succsim x)$

Caso 2: Si $x \sim y$, entonces $x \succsim y$ & $y \succsim x$.

En ambos casos se cumple que $x \succsim y$. $\boxed{\text{Por lo tanto, } (x,y) \in \succsim.}$

$\supseteq$] Sea $(x,y) \in \succsim$. Entonces $x \succsim y$.

Por completitud de $\succsim$, se tienen que cumplir alguno de los dos siguientes casos:

Caso 1: $y \succsim x \Rightarrow x \sim y$

Caso 2: $\neg(y \succsim x) \Rightarrow x \succ y$

Es decir, $(x,y) \in \sim$ o $(x,y) \in \succ$. $\boxed{\text{Por lo tanto, } (x,y) \in \sim \cup \succ}$

(d) P.D. $\sim \cap \succ = \emptyset$

Sea $(x,y) \in \sim \cap \succ$. Entonces, $x \sim y$ & $x \succ y$.

Por definición, $(x \succsim y$ & $y \succsim x)$ & $(x \succsim y$ & $\neg(y \succsim x))$

Es decir, $y \succsim x$ & $\neg(y \succsim x)$, lo que es una contradicción.

Así, no puede existir un elemento (x,y) en $\sim \cap \succ$.

$\boxed{\text{De modo que } \sim \cap \succ = \emptyset}$

Ex. 1.3 Give a proof or convincing argument for each of the following claims.

(a) Neither $\succ$ nor $\sim$ is complete.

(b) For any $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$ in X, only *one* of the following holds: $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$, or $\mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^1$, or $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$.

(a) Sea R una relación en X. Decimos que R es completa si:

$$\forall x, y \in X \text{ se cumple que } xRy \text{ o } yRx \text{ o ambas}$$

P.D. $\succ$ no es completa

Sea $(x,y) \in \succ$. Entonces $x \succsim y$ & $\neg(y \succsim x)$.

Consideramos el caso en que $x = y$. Entonces, $x \succsim x$ & $\neg(x \succsim x)$, lo cual no es posible.

Así, para $(x,x) \in X \times X$ se cumple que $\neg(x \succ x)$.

Por lo tanto, $\exists x, y \in X$ t.q. $\neg(x \succ y)$; en particular, cuando $x = y$.

De este modo, demostramos que $\succ$ no es completa.

P.D. $\sim$ no es completa.

Sean $(X, \succsim)$ espacio de elección. Sabemos que $\succsim = \sim \cup \succ$.

Supongamos que $\succ \neq \emptyset$. Entonces, sea $(x,y) \in \succ$. Por definición, $x \succsim y$ & $\neg(y \succsim x)$.

De este modo, no puede darse que $x \sim y$, pues $\neg(y \succsim x)$.

Es decir, $\exists x, y \in X$ t.q. $(x,y) \notin \sim$. Por lo tanto, en lo general, $\sim$ no es completa.

(b) $\forall x^1, x^2 \in X$ o $x^1 \succ x^2$ o $x^2 \succ x^1$ o $x^1 \sim x^2$

Sean $x^1, x^2 \in X$ & una relación de preferencias $\succsim$.

Por completitud de $\succsim$, tenemos que $x^1 \succsim x^2$ o $x^2 \succsim x^1$ o ambas.

Esto nos deja con tres casos posibles para todo $x^1, x^2 \in X$:

- Si $x^1 \succsim x^2$ & $x^2 \succsim x^1$, entonces $x^1 \sim x^2$.
- Si $x^1 \succsim x^2$ & $\neg(x^2 \succsim x^1)$, entonces $x^1 \succ x^2$
- Si $x^2 \succsim x^1$ & $\neg(x^1 \succsim x^2)$, entonces $x^2 \succ x^1$.

Por lo tanto, al menos uno de estos casos tiene que cumplirse por completitud de $\succsim$. Al mismo tiempo, los tres son mutuamente excluyentes.

$\therefore \forall x^1, x^2 \in X$ se cumple que $x^1 \succ x^2$ o $x^2 \succ x^1$ o $x^1 \sim x^2$.

Ex. 1.4 Prove that if $\succsim$ is a preference relation, then the relation $\succ$ is transitive and the relation $\sim$ is transitive. Also show that if $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$, then $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$.

Sea $\succsim$ una relación de preferencias en X. De esta relación definimos las siguientes relaciones:

$$x^1 \sim x^2 \quad \text{ssi} \quad x^1 \succsim x^2 \ \& \ x^2 \succsim x^1$$

$$x^1 \succ x^2 \quad \text{ssi} \quad x^1 \succsim x^2 \ \& \ \neg(x^2 \succsim x^1)$$

P.D. $\succ$ es transitiva.

Sean $x, y, z \in X$ t.q. $x \succ y$ & $y \succ z$. Entonces

$$x \succ y \ \& \ y \succ z \iff [x \succsim y \ \& \ \neg(y \succsim x)] \ \& \ [y \succsim z \ \& \ \neg(z \succsim y)]$$

Por transitividad de $\succsim$:

$$x \succsim y \ \& \ y \succsim z \implies x \succsim z$$

Ahora, procedemos por contradicción para demostrar que $\neg(z \succsim x)$.

Supongamos que $z \succsim x$. Por transitividad de $\succsim$, esto implica que $z \succsim y$, pues $x \succ y$ implica que $x \succsim y$.

Sin embargo, tenemos que $y \succ z$, lo que implica que $\neg(z \succsim y)$ ⚡

Por lo tanto, tiene que ser que $\neg(z \succsim x)$.

Juntando ambos resultados, tenemos que $x \succsim z$ & $\neg(z \succsim x)$.

Por lo tanto, $x \succ z$. $\boxed{\text{Es decir, } \succ \text{ es transitiva.}}$

P.D $\sim$ es transitiva

Sean $x, y, z \in X$ t.q. $x \sim y$ & $y \sim z$. Entonces

$$x \sim y \ \& \ y \sim z \iff [x \succsim y \ \& \ y \succsim x] \ \& \ [y \succsim z \ \& \ z \succsim y]$$

Por transitividad de $\succsim$:

$$x \succsim y \ \& \ y \succsim z \implies x \succsim z$$

$$y \succsim x \ \& \ z \succsim y \implies z \succsim x$$

Luego,

$$x \sim y \ \& \ y \sim z \iff x \succsim z \ \& \ z \succsim x$$

$\iff \quad x \sim z$

$\boxed{\text{Por lo tanto, } \sim \text{ es transitiva.}}$

P.D. $x^1 \sim x^2 \gtrsim x^3 \Rightarrow x^1 \gtrsim x^3$

Sean $x^1, x^2, x^3 \in X$ t.q. $x^1 \sim x^2 \gtrsim x^3$.

Entonces, $x^1 \gtrsim x^2$ & $x^2 \gtrsim x^1$ & $x^2 \gtrsim x^3$

Por transitividad, $x^1 \gtrsim x^2$ & $x^2 \gtrsim x^3 \Rightarrow x^1 \gtrsim x^3$.

Ex. 1.5 If $\succsim$ is a preference relation, prove the following: For any $\mathbf{x}^0 \in X$,

(a) $\sim(\mathbf{x}^0) = \succsim(\mathbf{x}^0) \cap \precsim(\mathbf{x}^0)$
(b) $\succsim(\mathbf{x}^0) = \sim(\mathbf{x}^0) \cup \succ(\mathbf{x}^0)$
(c) $\sim(\mathbf{x}^0) \cap \succ(\mathbf{x}^0) = \emptyset$
(d) $\sim(\mathbf{x}^0) \cap \prec(\mathbf{x}^0) = \emptyset$
(e) $\prec(\mathbf{x}^0) \cap \succ(\mathbf{x}^0) = \emptyset$
(f) $\prec(\mathbf{x}^0) \cap \sim(\mathbf{x}^0) \cap \succ(\mathbf{x}^0) = \emptyset$
(g) $\prec(\mathbf{x}^0) \cup \sim(\mathbf{x}^0) \cup \succ(\mathbf{x}^0) = X$

(a) $\sim(x^0) = \gtrsim(x^0) \cap \lesssim(x^0)$

Procedemos por doble implicación:

$$\begin{aligned} x \in \sim(x^0) &\iff x \sim x^0 \\ &\iff x \gtrsim x^0 \text{ \& } x^0 \gtrsim x \qquad (\text{por definición de } \sim) \\ &\iff x \in \gtrsim(x^0) \text{ \& } x \in \lesssim(x^0) \\ &\iff x \in \gtrsim(x^0) \cap \lesssim(x^0) \end{aligned}$$

(b) $\gtrsim(x^0) = \sim(x^0) \cup \succ(x^0)$

$\underline{\subseteq}]$ Sea $x \in \gtrsim(x^0)$. Entonces, $x \gtrsim x^0$.

Por completitud de $\gtrsim$, hay dos posibilidades

- $x^0 \gtrsim x$, de modo que $x \sim x^0$
- $\neg(x^0 \gtrsim x)$, de modo que $x \succ x^0$

Es decir, $x \in \sim(x^0)$ o $x \in \succ(x^0)$. $\boxed{\text{Por lo tanto, } x \in \sim(x^0) \cup \succ(x^0).}$

$\underline{\supseteq}]$ Sea $x \in \sim(x^0) \cup \succ(x^0)$. Entonces, $x \sim x^0$ o $x \succ x^0$.

- Si $x \sim x^0$, entonces $x \gtrsim x^0$ & $x^0 \gtrsim x$
- Si $x \succ x^0$, entonces $x \gtrsim x^0$ & $\neg(x^0 \gtrsim x)$

En ambos casos, $x \gtrsim x^0$. $\boxed{\text{Por lo tanto, } x \in \gtrsim(x^0).}$

(c) $\sim(x^0) \cap \succ(x^0) = \emptyset$

Sea $x \in \sim(x^0) \cap \succ(x^0)$. Entonces, $x \sim x^0$ & $x \succ x^0$.

Esto significa que $(x \succsim x^0 \;\&\; x^0 \succsim x) \;\&\; (x \succsim x^0 \;\&\; \neg(x^0 \succsim x))$.

En particular, $x^0 \succsim x$ & $\neg(x^0 \succsim x)$. Esto es una contradicción, de modo que no existe un $x \in \sim(x^0) \cap \succ(x^0)$. $\boxed{\text{Por lo tanto, } \sim(x^0) \cap \succ(x^0) = \emptyset.}$

(d) Mismo argumento que en (c).

(e) $\prec(x^0) \cap \succ(x^0) = \emptyset$

Sea $x \in \prec(x^0) \cap \succ(x^0)$. Entonces, $x^0 \succ x$ & $x \succ x^0$.

Esto significa que $(x^0 \succsim x \;\&\; \neg(x \succsim x^0)) \;\&\; (x \succsim x^0 \;\&\; \neg(x^0 \succsim x))$.

En particular, $x^0 \succsim x$ & $\neg(x^0 \succsim x)$. Esto es una contradicción, de modo que no existe un $x \in \prec(x^0) \cap \succ(x^0)$. $\boxed{\text{Por lo tanto, } \prec(x^0) \cap \succ(x^0) = \emptyset.}$

(f) $\prec(x^0) \cap \sim(x^0) \cap \succ(x^0) = \emptyset$

Como ya hemos demostrado, $\prec(x^0) \cap \sim(x^0) = \emptyset$. Entonces:

$$\begin{aligned} \prec(x^0) \cap \sim(x^0) \cap \succ(x^0) &= \emptyset \cap \succ(x^0) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\prec(x^0) \cap \sim(x^0) \cap \succ(x^0) = \emptyset$.

(g) $\prec(x^0) \cup \sim(x^0) \cup \succ(x^0) = \mathcal{X}$

Sean $x, x^0 \in \mathcal{X}$. Por completitud de $\succsim$ en $\mathcal{X}$, tenemos que $x \succsim x^0$ o $x^0 \succsim x$ o ambas.

Entonces:

- Si $x \succsim x^0$ & $x^0 \succsim x$, entonces $x \sim x^0 \Rightarrow x \in \sim(x^0)$.
- Si $x \succsim x^0$ & $\neg(x^0 \succsim x)$, entonces $x \succ x^0 \Rightarrow x \in \succ(x^0)$
- Si $x^0 \succsim x$ & $\neg(x \succsim x^0)$, entonces $x^0 \succ x \Rightarrow x \in \prec(x^0)$.

En cualquier caso, $x \in \prec(x^0) \cup \sim(x^0) \cup \succ(x^0)$.

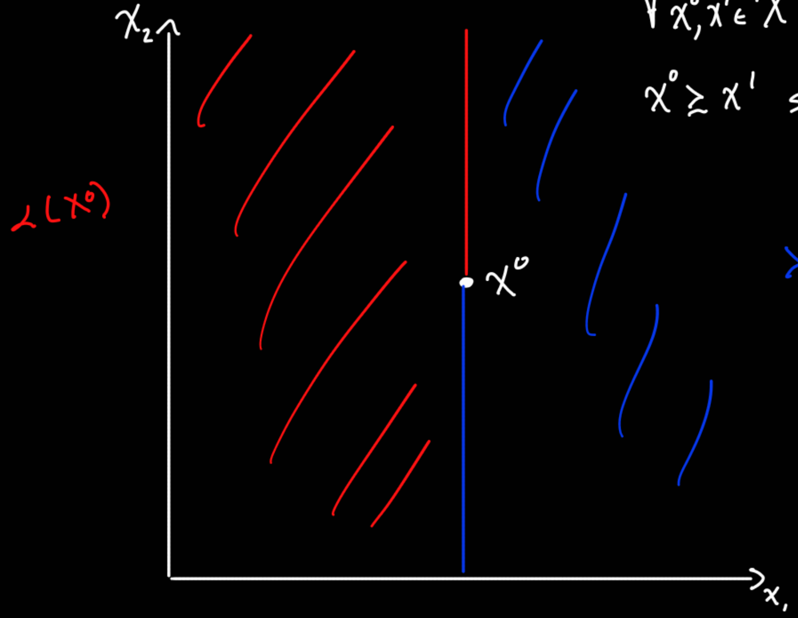
Como esto se cumple para cualquier $x, x^0 \in \mathcal{X}$, entonces $\boxed{\prec(x^0) \cup \sim(x^0) \cup \succ(x^0) = \mathcal{X}.}$

Ex. 3.B.3 Draw a convex preference relation that is locally nonsatiated but is not monotone.

(3.B.3) Sea $(X, \succsim)$ un espacio de elección, con $X = \mathbb{R}^2_+$.

$\forall x^0, x^1 \in X$,

$x^0 \succsim x^1$ ssi $x^0_1 > x^1_1$ o $(x^0_1 = x^1_1$ & $x^0_2 \leq x^1_2)$



Ex. 3.C.1 Verify that the lexicographic ordering (**Example 3.C.1**) is complete, transitive and strongly monotone.

Sea $X = \mathbb{R}^2_+$ y la relación $\succsim$ definida como:

$$x \succsim y \text{ ssi } x_1 > y_1 \text{ o } (x_1 = y_1 \text{ \& } x_2 \geq y_2), \quad \forall x, y \in X$$

Queremos demostrar que $\succsim$ es completa, transitiva y estrictamente monótona.

1) P.D. $\forall x, y \in X$ $x \succsim y$ o $y \succsim x$ o ambos.

Sean $x, y \in X$. Entonces,

- Si $x_1 > y_1 \Rightarrow x \succsim y$
- Si $x_1 < y_1 \Rightarrow y \succsim x$
- Si $x_1 = y_1$ & $x_2 \geq y_2 \Rightarrow x \succsim y$
- Si $x_1 = y_1$ & $x_2 < y_2 \Rightarrow y \succsim x$

En todos los casos, $x \succsim y$ o $y \succsim x$. $\boxed{\text{Por lo tanto, } \succsim \text{ es completa.}}$

II) P.D. $x \succsim y$ & $y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$ $\forall x, y, z \in X$

Sean $x, y, z \in X$ t.q. $x \succsim y$ & $y \succsim z$.

Entonces,

- Caso 1: $x_1 > y_1$, entonces:
  - Si $y_1 \geq z_1$, $x_1 > z_1 \Rightarrow x \succsim z$
  - Si $y_1 < z_1$, entonce $z \succsim y$ ⚡ ($y \succsim z$ por hipótesis)

- Caso 2: $x_1 = y_1$ & $x_2 \geq y_2$
  - Si $y_1 > z_1$, entonces $x_1 > z_1 \Rightarrow x \succsim z$
  - Si $y_1 = z_1$ & $y_2 \geq z_2$, entonces $x_1 = z_1$ & $x_2 \geq y_2 \Rightarrow x \succsim z$

En todos los casos, se tiene que $x \succsim z$.

$\boxed{\text{Por lo tanto, } \succsim \text{ es transitiva.}}$

III) Monotonicidad estricta

Sean $x, y \in X$.

Note que: $\forall x, y \in X$,

$$x \succ y \text{ ssi } x_1 > y_1 \text{ o } (x_1 = y_1 \text{ \& } x_2 > y_2).$$

Entonces,

- Si $x_1 > y_1$, entonces $x \succ y$.
- Si $x_1 = y_1$ & $x_2 > y_2$, entonces $x \succ y$.

Es decir, si $x \geq y$ componente a componente, con $x \neq y$, entonces $x \succsim y$.

Por lo tanto, $\succsim$ es estrictamente monótona.