Guion I
Razón de Compresión y Entropía

Información sobre la entrega de la práctica

Las prácticas se entregarán en un único fichero comprimido Practica01ApellidoNombre.zip. El fichero contendrá:

- Las funciones de Matlab a realizar en ficheros .m con los nombres de las funciones que se indiquen en el guion.
- Los trozos de código a realizar, que se entregarán todos en los pasos correspondientes de un único fichero .m llamado Practica01ApellidoNombre.m . Este fichero lo crearás modificando el fichero .m Practica01MolinaRafael.m en el servidor.
- Las discusiones y respuestas solicitadas en el guion se entregarán en un único fichero pdf. El nombre del fichero será Practica01ApellidoNombre.pdf. Lo construirás editando Practica01MolinaRafael.doc y salvándolo en formato pdf.

El objetivo de esta práctica es afianzar los conceptos básicos de codificación y compresión de datos: factor de compresión y entropía y estudiar la importancia de la modelización de una fuente para obtener buenos resultados en la compresión de los datos generados por esa fuente. Necesitaremos ficheros de datos para comprimir. Hemos preparado un conjunto de ficheros de diferentes tipos de datos y características que se encuentran en el fichero comprimido *Ficheros de datos para prácticas* dentro de la sección (tema) *Material para las prácticas*.

Trabajaremos con el concepto de entropía de una fuente como medida de la información de la misma y veremos que es importante un correcto modelado de los datos para obtener los mejores resultados de un sistema de compresión.

Aplicaremos los conceptos de entropía y modelado de los datos a imágenes y ficheros de texto y binarios.

Es importante distinguir entre el número de letras que tiene nuestro alfabeto y la representación de las mismas en el fichero. Suponemos aquí que cada letra se almacena inicialmente usando una codificación que asigna el mismo número de bits a cada una de las letras del alfabeto. Aunque tengamos el alfabeto {0, 1}, nosotros usaremos generalmente un byte para representar cada letra (codificada en binario, usando su código ASCII o cualquier otro sistema de representación) aunque está claro que un sistema más compacto sería usar sólo 1 bit por letra. Esta representación a un byte por letra ha sido escogida simplemente por

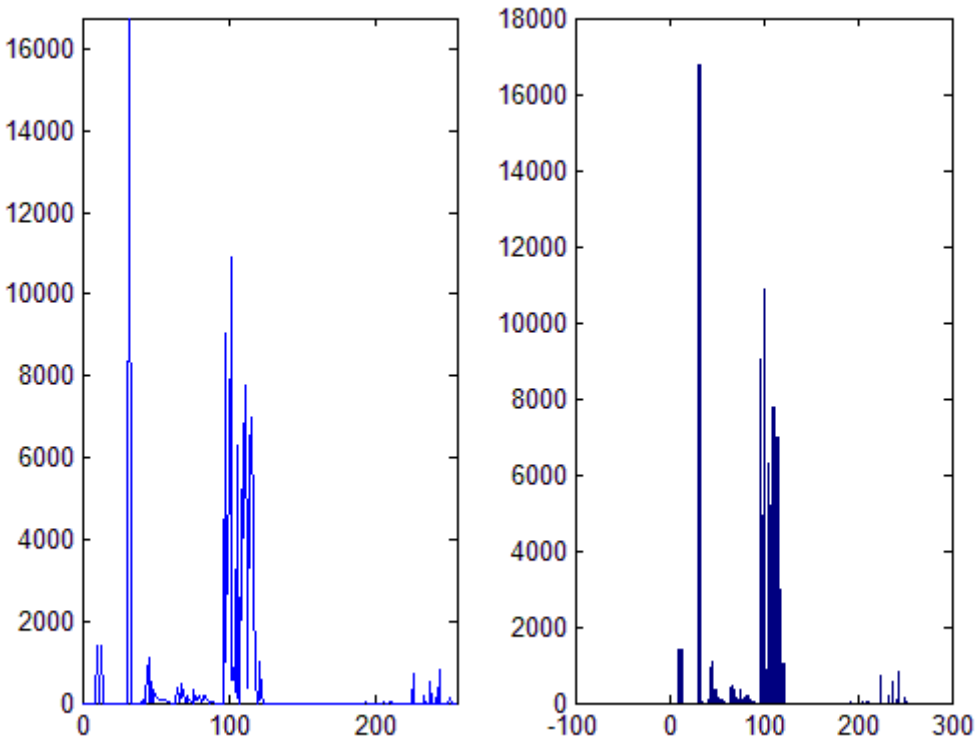
comodidad puesto que realizar los programas usando bytes es más sencillo y cómodo que tener que usar representaciones a nivel de bits de los mismos.

Paso 1

Limpiamos el espacio de trabajo. Leemos los datos del fichero 'constitución española.txt', calculamos el número de veces que aparece cada carácter y dibujamos el correspondiente histograma.

Entiende que hacen las funciones que utilizamos y sus parámetros. No incluyas ningún camino para el fichero, garantízate que has definido bien el path de Matlab. Observa el tipo de dato que leemos del fichero, éste será por defecto el tipo que usaremos.

```
clear all; close all;
fichero='constitucion española.txt';
fid=fopen(fichero, 'r')
[words count]=fread(fid,inf,'*uint8');
fclose(fid)
histograma= histc(words,[0:255]);
subplot(1,2,1);
plot([0:255],histograma); axis('tight')
% si prefieres puedes usar la función bar
subplot(1,2,2); bar([0:255],histograma)
```



Paso 2

Como ves el histograma está lejano de ser uniforme en el intervalo [0,255] por lo que es seguro que necesitaremos menos de 8 bits por dato. Vamos ahora a calcular la entropía de la fuente.

Crea una función que se llame **entropiaTUSINICIALES**, en mi caso sería **entropiaRMS** de mi nombre **R**afael **M**olina **S**oriano, que acepte un histograma, calcule su distribución de probabilidad asociada y devuelva la entropía. Nota: En Matlab lo podemos hacer de una forma muy sencilla. Primero convertimos el histograma en una distribución de probabilidad que podemos llamar prob. A continuación calculamos la entropía pero tenemos que hacerlo utilizando sólo aquellos términos con prob >0 (lee el manual de la función **find**). Matemáticamente esto no es necesario pero a Matlab no le gusta hacer 0*log2(0). Luego escribe la fórmula de la entropía.

Es importante que escribas una buena implementación de entropía. Debes evitar los for y debe servir para cualquier tamaño de alfabeto, no solo aquellos que tienen 256 símbolos como máximo.

Incluye aquí el código de tu función entropiaTUSINICIALES.m

```
% Función para calcular la entropía a partir de un histograma

function entropiaAAC = entropiaAAC(histograma)
        prob=histograma./sum(histograma)
        entropiaAAC=-sum(prob(find(prob)).*log2(prob(find(prob))))
end
```

Paso 3

Ejecuta la función que calcula la entropía, en mi caso entropiaRMS,

```
H= entropiaRMS(histograma)
```

Debe salirte 4.4880.

Paso 4

1. ¿Qué significa el valor de la entropía que has obtenido?.
2. ¿Cuál sería el factor de compresión que obtendríamos si usamos un modelo de codificación que alcanzase la entropía?.
3. ¿Podremos, a lo largo del curso, ganar a la entropía?

Escribe tus respuestas aquí

1. Número mínimo de bits para codificar los datos.

2. N.º de bits para codificar los datos originales dividido entre el resultado de calcular la entropía: 8/4,4880 = 1,7825

3. Sí, aplicando algún tipo de proceso a los datos, como codificar las diferencias o transformaciones.

Paso 5

Vamos a limpiar de nuevo el espacio de trabajo y las imágenes que hemos mostrado. A continuación leemos la imagen camera.pgm

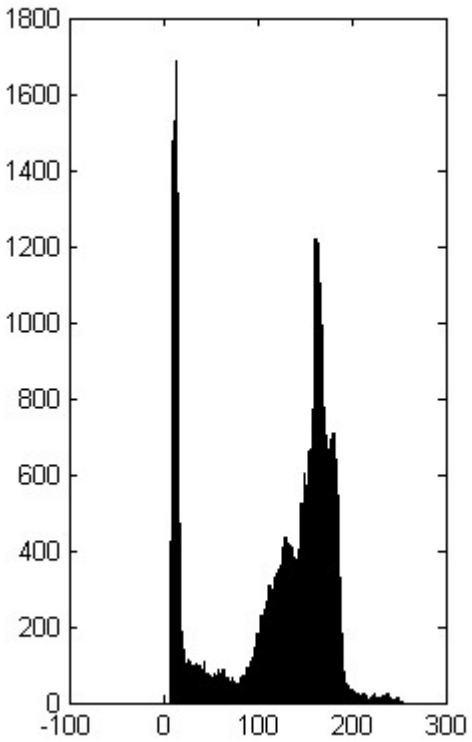
```
clear all; close all;
A=imread('camera.pgm');
% Mostramos la imagen camera.pgm
subplot(1,2,1); imshow(A);
```

Paso 6

A continuación de la imagen A, no del fichero camera.pgm, calculamos el histograma, lo mostramos y calculamos la entropía de la fuente. Observa cómo introducimos la imagen bidimensional en la función histc

```
histograma=histc(A(:),[0:255]);
subplot(1,2,2); bar([0:255],histograma)
entropiaRMS(histograma)
```

Obtenemos gráficamente



Paso 7

1. ¿Cuál es el valor de la entropía que has obtenido?.
2. ¿Cuál sería el factor de compresión que obtendríamos si usamos un modelo de codificación que alcanzase la entropía?.

Escribe tus respuestas aquí

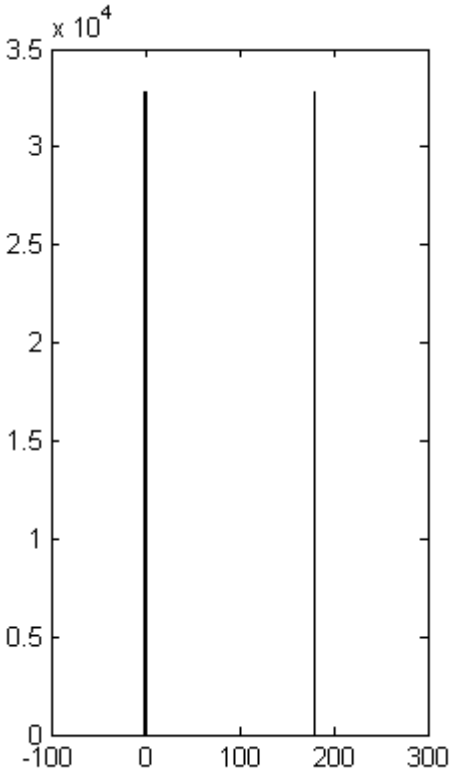
1. 7,0097

2. 1,1412

Paso 8

Limpia el espacio de trabajo y las variables. Creamos una imagen de tamaño 256x256 con niveles de gris 0 (fondo) y un cuadrado con nivel de gris 180. Utiliza el tipo uint8. Calcula ahora el histograma de esta imagen y su entropía.

```
clear all; close all;
A=uint8(zeros(256));
A(1:128,:)=uint8(180);
imshow(A)
histograma= histc(A(:),[0:255]);
figure; bar([0:255],histograma)
H=entropiaRMS(histograma)
```



Paso 9

1. ¿Qué significa el valor de la entropía que has obtenido?.
2. ¿Cuál sería el factor de compresión que obtendríamos si usamos un modelo de codificación que alcanzase la entropía?
3. ¿Podremos, a lo largo del curso, ganar a la entropía?

Escribe tus respuestas aquí

1. El valor 1 indica que necesitamos 1 bit (0 y 1) para codificar la imagen. Esto se debe a que únicamente cuenta con dos colores diferentes.

2. 8/1 = 8

3. Sí, codificar el tamaño de las secuencias del mismo color.

Paso 10

1. Si hicieras más grande (y luego más chico) el cuadrado blanco, ¿qué le pasaría a la entropía?
2. ¿Cuánto valdría la entropía si toda la imagen fuera blanca o negra?
3. ¿Qué significaría el valor de la entropía obtenido en este caso?.

Escribe tus respuestas aquí

1. Se haría más pequeña.

2. 0

3. Que el mismo valor aparece siempre con un 100% de probabilidad.

Paso 11

La entropía de segundo orden de una fuente con un alfabeto de m letras se obtiene considerando la secuencia como formada por parejas de letras, (X_1, X_2). Supuesto que las parejas de letras (X_1, X_2) son independientes e idénticamente distribuidas, su entropía se calcula mediante:

$$H(S) = - \Sigma_{=0}^{m-1} \Sigma_{j=0}^{m-1} P(X_1 = i, X_2 = j) \log P(X_1 = i, X_2 = j).$$

Por tanto, debemos calcular las probabilidades $P(X_1 = i, X_2 = j)$. Para guardar estas probabilidades podemos construir una matriz de tamaño $m \times m$ en que cada celda (i,j) contiene el número de veces que la pareja $(X_1 = i, X_2 = j)$ aparece en la secuencia dividido entre el número de parejas de letras en la secuencia.

Esta matriz de probabilidades también la podemos representar en forma de un vector, V, con $m \times m$ elementos en que cada posición del vector $k = i*m+j$ contiene la probabilidad $P(X_1 = i, X_2 = j)$ y calcular la entropía como

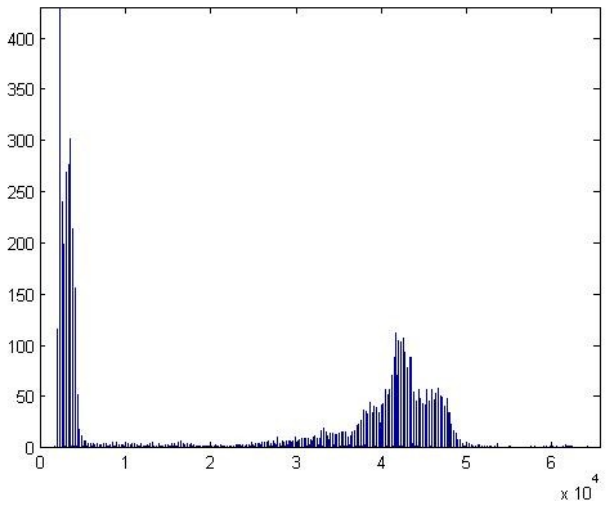
$$H(S) = - \Sigma_{k=0}^{mxm-1} V(k) \log V(k).$$

Observa que estoy empezando los índices en cero. Vamos a leer los caracteres de dos en dos y luego calcularemos la entropía. Lo haremos con el fichero 'camera.pgm'. Observa la sintaxis de lectura y como calculamos el histograma

```
clear all; close all;
fichero='camera.pgm'
fid=fopen(fichero, 'r')
words=fread(fid,inf,'*uint16');
```

```
fclose(fid)
histograma= histc(words,[0:256*256-1]);
bar([0:256*256-1],histograma), axis('tight')
H=entropiaRMS(histograma)
```

El histograma es



Paso 12

¿Cuál es la entropía de esta fuente que codifica los símbolos de 'camera.pgm' de dos en dos?.

1. ¿Qué significa el valor de la entropía que has obtenido?.

Escribe tus respuestas aquí

1. El valor es 11,1213. Este es el número mínimo de bits para codificar dos símbolos (no uno).

Paso 13

Leamos ahora el mismo fichero pero de byte en byte y calculamos la entropía

```
clear all; close all;
fichero='camera.pgm'
fid=fopen(fichero, 'r')
words=fread(fid,inf,'*uint8');
fclose(fid)
histograma= histc(words,[0:255]);
H=entropiaRMS(histograma)
```

Paso 14

1. Compara los valores de la entropía que has obtenido en los pasos 11 y 13. ¿Qué está pasando?

Escribe tus respuestas aquí

1. El valor obtenido en este caso es 7,0102. Es el valor mínimo para codificar cada símbolo. Al ser mayor que la mitad del resultado obtenido para dos símbolos, podemos deducir que es mejor realizar la codificación de dos en dos.

Paso 15

Una vez que conocemos los programas que vamos a usar para calcular la entropía, vamos a aplicarlos a diferentes tipos de datos y ver su significado.

Para los ficheros bird.pgm, ptt1.pbm, texto10000.txt, Cinco semanas en globo - Julio Verne.txt completa la siguiente tabla. ¿Qué significan los valores que obtienes? Escribe el código correspondiente en el Paso 15 del fichero Practica01ApellidoNombre.

Escribe tus respuestas aquí

Fichero	Entropía de primer orden	Entropía de segundo orden
Bird.pgm	6,7752	10,2581
ptt1.pbm	0,6979	1,1228
texto10000.txt	0,9999	1,9998
Cinco semanas en globo - Julio Verne.txt	4,4747	7,8791

Significado:

- Bird.pgm → Este caso es similar al de la imagen camera, ya que al entropía de primer orden es mayor que la mitad de la entropía de segundo orden, se puede deducir que es mejor utilizar la segunda.

- ptt1.pbm → Ídem para este caso.

- texto10000.txt → En este caso, al ser un fichero binario, ambos resultados son equivalentes. El valor de la entropía de segundo orden es exactamente el doble que el valor de la entropía de primer orden.

- Cinco semanas en globo - Julio Verne.txt → Mismo caso que los dos primeros.

Paso 16

Lee la siguiente imagen

```
A=imread('bird.pgm');
```

Paso 17

En el paso 17 del fichero Practica01ApellidoNombre.m escribe código para

1. Calcular la entropía de la matriz que contiene la imagen.
2. Calcular la diferencia de cada píxel con el anterior por filas. Es decir, vamos a calcular A(i,j)-A(i,j-1). No debes usar bucles y además tienes que tener mucho cuidado con las diferencias ya que la diferencia de dos caracteres sin signo da un carácter sin signo y esto no es lo que queremos hacer. Para calcular la diferencia de la primera columna considera que la columna anterior es cero.
3. Calcula también las diferencias módulo 256, es decir, (diferencias+256) módulo 256
4. Dibujar en una misma ventana la imagen de diferencias y su histograma.
5. Dibujar también la imagen de (diferencias +256) módulo 256 y su histograma
6. Calcular la entropía de primer orden sobre la imagen de diferencias y sobre la imagen (diferencias +256) módulo 256

Nota 1: Ten cuidado con los tipos de datos cuando hagas diferencias

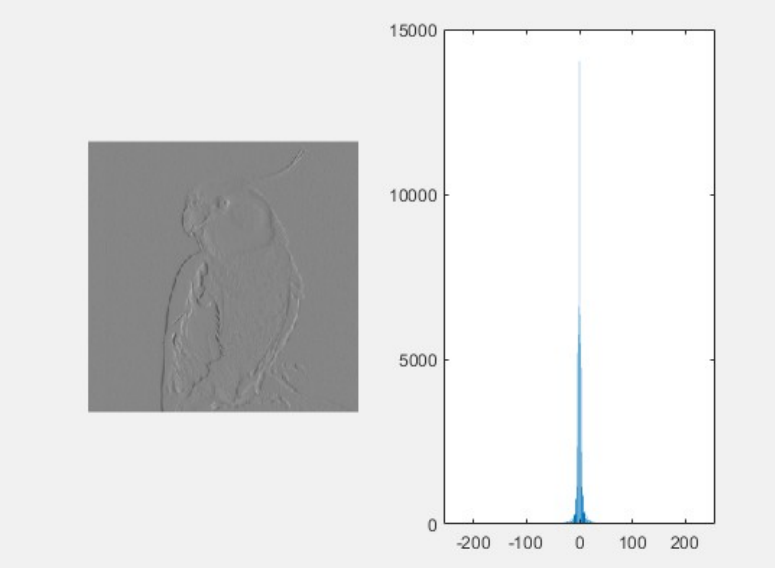
Nota 2: ¡Cuidado al calcular las diferencias! Para una imagen en escala de grises, las diferencias pueden estar en el intervalo [-255, 255] y por tanto necesitamos al menos 9 bits para representarlas. Esto no es necesario en la imagen (diferencias +256) módulo 256

Paso 18

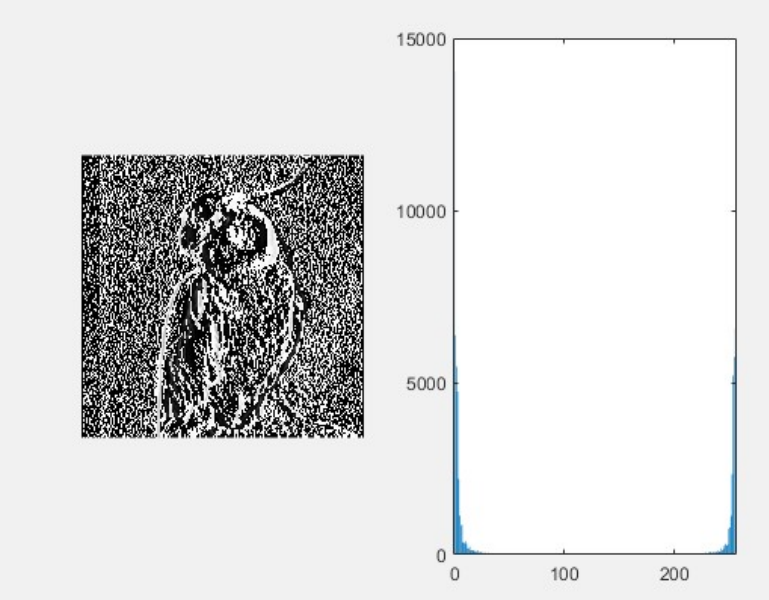
1. Incluye los gráficos del paso 17 aquí
2. ¿Cuál son las entropías de la imagen original, de la imagen de diferencias y de la imagen (diferencias+256) módulo 256 ?
3. Compáralas y explica el resultado
4. Si hubiese codificado las diferencias usando (diferencias+256) módulo 256, ¿podrías con esta codificación de las diferencias reconstruir la señal original?

Escribe tus respuestas aquí

1)



Diferencias



Módulo

2)

Entropía diferencias: 4.1869

Entropía módulo: 4.1869

3)

El valor de ambas es el mismo, por lo que el número mínimo de valores binarios para codificar las imágenes son el mismo.

4) Sí se puede reconstruir.

Paso 19

Supongamos que tenemos una fuente que obtiene palabras de cuatro letras. Supongamos además que las letras son generadas aleatoriamente suponiendo una distribución uniforme sobre las 27 letras del abecedario. ¿Cuántos bits necesitaríamos en media para representar cada palabra de cuatro letras?

Escribe tus respuestas aquí

Cada letra tendría una probabilidad de aparecer de 1/27 es decir, P(letra) = 0.03703. Para cada letra necesitamos i(letra) = log2(1/P(letra)) bits, es decir, 4.75 bits.

Ahora, haciendo uso de la expresión de la entropía (imagen), obtenemos la cantidad media por palabra.

$$H = \sum_{k=1}^{M} P(a_k) i(a_k)$$

H(palabra) = P(letra)*i(letra)*4 = **0,70357 bits por palabra.**