Análisis numérico: Tarea 3

Presentado por:

Omar Espinel

Arturo Calle

Osman Beltrán

Presentado a: Eddy Herrera Daza Msc.

22 de febrero de 2019

1. Se tienen n tareas y n individuos, y existe entre ellos una cantidad de nxn coeficientes que representan la eficiencia del individuo i con la tarea j.

Condiciones:

Ninguna tarea puede quedarse sin asignar, ningún individuo puede quedarse sin hacer nada y cada tarea debe ser realizada por una y solamente una persona.

Objetivo: determinar la asignación más optima.

Solución:

Este tipo de problema es llamado problema de asignación y poseen un método para ser resueltos, el cual es llamado “El método húngaro” usualmente este método se usa para realizar problemas de minimización, pero dado que en este caso se quiere escoger la máxima eficiencia se realiza el método solo que con un paso extra.

- Primero se organiza la información, de la manera en que esta descrita se puede poner toda la información en una tabla:

	Tarea 1	Tarea 2	…	Tarea n-1	Tarea n
Individuo 1	α	α	α	α	α
Individuo 2	α	α	α	α	α
…	α	α	α	α	α
Individuo n-1	α	α	α	α	α
Individuo n	α	α	α	α	α

- Luego se ubica el α mas grande entre todos y el valor de cada casilla va a ser ahora el valor de ese α máximo menos le valor original de la casilla, así:

	Tarea 1	Tarea 2	…	Tarea n-1	Tarea n
Individuo 1	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α
Individuo 2	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α
…	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α
Individuo n-1	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α
Individuo n	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α	α(max)-α

- Con esto hecho ya se puede aplicar el método húngaro ya que al restarle el valor de eficiencia al máximo total ahora la diferencia mas pequeña (el mas cercano a la máxima eficiencia) es el valor mínimo.

- Luego se le resta el valor mínimo de cada fila a todas las filas

	Tarea 1	Tarea 2	…	Tarea n-1	Tarea n
Individuo 1	α-α1min	α-α1min	α-α1min	α-α1min	α-α1min
Individuo 2	α-α2min	α-α2min	α-α2min	α-α2min	α-α2min
…	α-α...min	α-α...min	α-α...min	α-α...min	α-α...min
Individuo n-1	α-αn-1min	α-αn-1min	α-αn-1min	α-αn-1min	α-αn-1min
Individuo n	α-αnmin	α-αnmin	α-αnmin	α-αnmin	α-αnmin

- Después se hace lo mismo pero en las columnas

	Tarea 1	Tarea 2	…	Tarea n-1	Tarea n
Individuo 1	α-α1min	α-α2min	α-α...min	α-αn-1min	α-αnmin
Individuo 2	α-α1min	α-α2min	α-α...min	α-αn-1min	α-αnmin
…	α-α1min	α-α2min	α-α...min	α-αn-1min	α-αnmin
Individuo n-1	α-α1min	α-α2min	α-α...min	α-αn-1min	α-αnmin
Individuo n	α-α1min	α-α2min	α-α...min	α-αn-1min	α-αnmin

- Una vez hecho este paso, en las diferentes filas y columnas, debe haber mínimo un valor que sea igual a cero

	Tarea 1	Tarea 2	…	Tarea n-1	Tarea n
Individuo 1	α	0	α	α	α
Individuo 2	0	α	α	α	α
…	α	α	α	α	0
Individuo n-1	α	α	0	α	α
Individuo n	α	α	α	0	α

Estas casillas en cero muestran la máxima eficiencia de cada individuo con respecto a cada tarea, por ejemplo, la máxima eficiencia se tendrá asignando el individuo 1 a la tarea 2, así como el individuo n a la tarea n-1 y así sucesivamente asignando un individuo a una tarea.

En el caso de que hayan mas de un cero por columna/fila se escoge uno de ellos y se asignan el resto normalmente en caso de que por ello quede un individuo o tarea sin asignar, se vuelve a asignar, pero se escoge el otro cero.

2. Medir la sensibilidad del método Gauss Jordan a:

- Un cambio en la entrada:

La sensibilidad a la entrada del Método de Gauss Jordan es la variación (en porcentaje) que se puede ver en la respuesta o solución de un sistema al alterar en un porcentaje sus entradas.
Una forma de calcular este valor, es primero resolver un sistema de ecuaciones por el método de Gauss Jordan y anotar la respuesta, luego, hacer una variación de uno de los datos de la matriz (los datos de entrada) y resolver de nuevo el sistema, una vez con esas respuesta (datos de salida) se calcula cuanto fue la variación de esta con respecto a la primera, así:

$$\frac{\left(\left|(2.5, 3.2, 4.1, 5.4)\right| - \left|(0.1494, 0.4182, 8.3432, 4.8778)\right|\right)}{\left|(2.5, 3.2, 4.1, 5.4)\right|}$$

En la ecuación anterior se ve como se calcula la sensibilidad a la entrada en un sistema 4x4 donde se calcula la diferencia entre el primer resultado, (el resultado de la matriz sin variar), menos el segundo, (que es el resultado de la matriz tras haberle hecho una variación del 1.6%) y esa diferencia se divide en el primer resultado para calcular así la variación en un porcentaje de estas dos soluciones. En este caso la respuesta de esta ecuación es de 0.22415 lo que quiere decir que la variación de la salida es de un 22.15%

- Un error en la entrada:

La sensibilidad ante un error en la entrada se calcula de manera similar al de un cambio en la entrada, se varia en un valor decimal una de las entradas y se calcula cuanto cambia la solución con respecto a ese error, en este caso para explicarlo, se presentan fragmentos del ejemplo que ilustra este fenómeno en el libro:" ANALISIS NUMERICO BÁSICO CON PYTHON" tomado de la pagina 128.

Se tiene un sistema de ecuaciones que representa los precios pagados por unos materiales, y el total de las facturas, menos en la segunda fila donde este total se desconoce y se toma la letra k:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 35 \\ 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 &= k \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Posteriormente se desarrolla este sistema con el método de Gauss Jordan y se obtiene la siguiente respuesta en función de k:

$$A\,|\,B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 35 \\ 3 & 9 & 8 & k \\ 2 & 3 & 1 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & 2 & 35/2 \\ 0 & 3/2 & 2 & k-105/2 \\ 0 & -2 & -3 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 105-5k/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 2k/3-35 \\ 0 & 0 & -1/3 & 4k/3-88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 457-7k \\ 0 & 1 & 0 & 6k-387 \\ 0 & 0 & 1 & 264-4k \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 457-7k \\ 6k-387 \\ 264-4k \end{bmatrix}$$

Para calcular la sensibilidad al error se procede a variar de manera decimal uno de sus valores, en este caso el error es de 0.1, variando el 5 de la primera fila por un 5.1 o lo que es lo mismo de 51/10 y se asigna un valor de 65 a k para obtener una solución numérica, lo que aporta los siguientes resultados:

$$A\,|\,B = \begin{bmatrix} 2 & 51/10 & 4 & 35 \\ 3 & 9 & 8 & 65 \\ 2 & 3 & 1 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 51/20 & 2 & 35/2 \\ 0 & 27/20 & 2 & 25/2 \\ 0 & -21/10 & -3 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -16/9 & -55/9 \\ 0 & 1 & 40/27 & 250/27 \\ 0 & 0 & 1/9 & 13/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 17 \\ -10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Y calculando de nuevo el primer sistema pero con k = 65 se tiene que:

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para calcular el error relativo de esta solución se toman ambas soluciones y se aplica la formula del error relativo tanto en la solución como en la matriz original, obteniendo lo siguiente:

$$|e_x| = \frac{\|X - X'\|}{\|X\|} = 3.75 = 375\%, \qquad |e_A| = \frac{\|A - A'\|}{\|A\|} = 0.005 = 0.5\%$$

Este resultado significa que ante un 0.55 de error en la matriz se obtiene un 375% de error en la solución. Por lo que se puede decir que el sistema es muy sensible a errores.

Referencias:

- “Modelo de asignación” , recurso digital, tomado de: https://proyectoinvestigacionoperaciones.wordpress.com/2016/11/09/primera-entrada-del-blog/
- “ANALISIS NUMERICO BASICO CON PYTHON”,