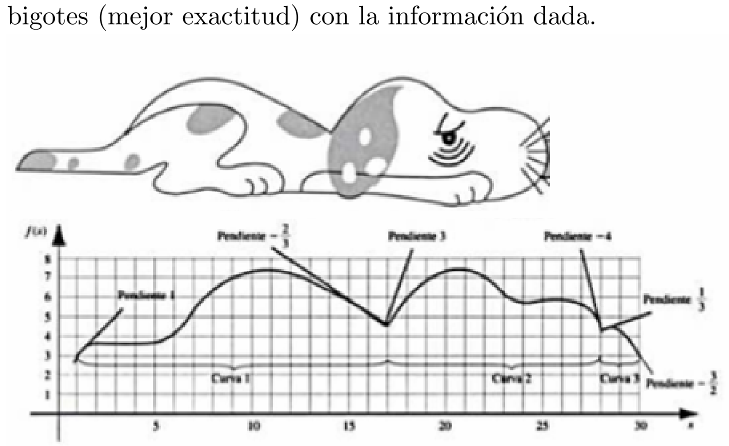
Reto Perrito

Julián Arturo Calle, Omar Espinel Santamaria

29 de Marzo de 2019

1 Introducción

El reto consiste en: Construir un Interpolador(no necesariamente en forma polinómica) utilizando la menor cantidad de puntos puntos k (parte superior y/o inferior o en total) y reproducir el dibujo del contorno completo del perrito sin bigotes (mejor exactitud) con la información dada.



$y = c(3, 3.7, 3.9, 4.5, 5.7, 6.69, 7.12, 6.7, 4.45, 7, 6.1, 5.6, 5.87, 5.15, 4.1, 4.3, 4.1, 3)$
$x = c(1, 2, 5, 6, 7.5, 8.1, 10, 13, 17.6, 20, 23.5, 24.5, 25, 26.5, 27.5, 28, 29, 30)$

2 Metodología

Explique como se seleccionaron los k puntos con k¡n, con el n total de puntos dados (selección de mas puntos o de los puntos de la parte de abajo).

La selección de los puntos del perro se hizo de dos maneras, primero la selección de la parte de arriba del perro y luego la selección de la parte de abajo.

Debido a que la parte de arriba, se compone de varias curvas con forma de parábola con diferentes amplitudes, de diferente duración y pendientes, se decide que no se puede expresar el comportamiento total con solo una curva o una función, periódica, por lo que se decide realizar la interpolación de cada curva una por una.

Debido a que uno de los criterios de evaluación aparte de la precisión es la menor cantidad de puntos, se desea construir la gráfica con la menor cantidad de puntos.Por lo que se procede a buscar cual es la menor cantidad de puntos que pueda describir cada una de las curvas. Para ello, se usa el siguiente criterio:

-Un punto no puede describir el comportamiento de ninguna función.

-Dos puntos tan solo pueden describir adecuadamente el comportamiento de una recta.

-Tres puntos pueden describir el comportamiento de dos rectas,o de una curva parabólica con pendientes de subida y de bajada similares.

Bajo este criterio, se busca que las curvas de la parte superior del perro estén descritas por tres puntos, estos tres puntos son: el punto de inicio, el punto de fin de la curva y el punto mas cercano a la mitad de la curva.

Este tercer punto, si bien es el mas importante, es el mas difícil de escoger, se usa el criterio de poner el punto mas cercano a la mitad para que pueda estar mas cerca del punto donde cambia la pendiente, para comprobar que este punto sea el mas adecuado para hacer la interpolación, se prueba con el algoritmo escogido este punto y se compara el parecido con el resto de puntos (visto como la cercanía entre la curva dada por la interpolación y los demás puntos que componen la curva), si la curva dada por la interpolación no representa adecuadamente la curva deseada se toma a continuación el segundo punto mas cercano a la mitad y así sucesivamente hasta que se encontraba la curva que mas satisface los puntos deseados.

Para la segunda parte, la parte inferior del perro se usa un criterio diferente, dado que las lineas de la parte inferior son muy diferentes de las de la parte superior y estas no son adecuadas para usar el mismo criterio de los tres puntos, se debe no solo encontrar los puntos que mejor describan esas lineas, sino que buscar las coordenadas (X,Y) en donde están esos puntos, para eso, se utilizan dos criterios, se usa un software de edición de imágenes para poner la imagen del perro sobre el plano con la curva superior ya trazada y se busca hacer que encajen, una vez esto se trazan las diferentes curvas inferiores sobre este mismo plano de referencia y se vuelve a mover el perro, dejando solo el plano, una vez con las curvas trazadas se seleccionan los puntos que se creen puedan describir mejor las curvas. Adicionalmente se usa otra forma de aproximación para definir los puntos inferiores, se le pide a artistas que dibujen el perro de la imagen de la forma mas similar pero, con la menor cantidad de lineas posibles, ante esto, se hace la relación entre las lineas dibujadas por los artistas y los puntos mas importantes de estas, estos puntos se trasladan al mismo plano de referencia donde estaba ya la mitad superior del perro y se toman esos puntos X y Y, dados estos dos métodos, se decide repartir el perro en la parte inferior en diferentes curvas y escoger entre los dos criterios, curva a curva, la curva mas similar a la deseada y con esta los puntos que mejor la describan.

3 Algoritmo

A continuación se presenta el algoritmo seleccionado para realizar la interpolación:

Dado que se habían visto algunos algoritmos de interpolación en clase se desea consultar uno de los vistos que resultaba interesante para los propósitos del reto: el polinomio de Lagrange.

Tras una investigación sobre esta forma de interpolación se descubre una variante, la forma baricéntrica de Lagrange.

Esta forma del polinomio interpolante de Lagrange, es "eficiente para el cálculo computacional además de ser numéricamente mucho más estable" [2]

Estas dos características hacen que se prefiera este método al Lagrange normal, adicionalmente se consulta y se ve que este método es útil para hacer curvas como las deseadas, razón por la cual se decide definitivamente este método, no fue necesario hacer una función ya que tras una búsqueda en linea se descubre que este método, ya posee una implementación en R disponible, por lo que se decide usar esta función y se adapta para que seleccione los puntos deseados de todo el vector de puntos y haga la interpolación correspondiente a esa sección.

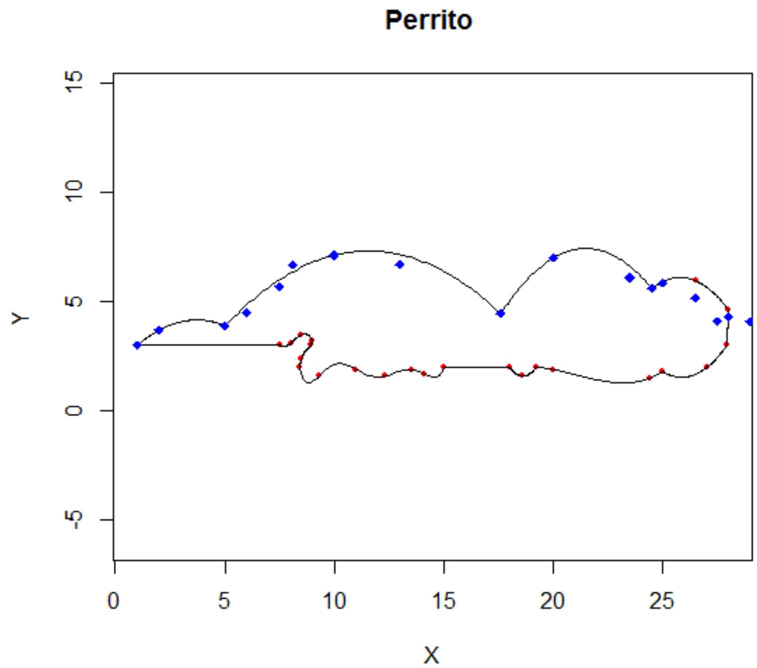
4 Validación

La validación se realiza corriendo el código con los puntos seleccionados y verificando la diferencia o Error (Para mayor detalle sobre como se calcula el error, ver la siguiente sección) tanto visual como matemáticamente con respecto a los puntos dados, si la curva obtenida no es satisfactoria o el error se puede disminuir con otra selección de puntos se usan los criterios ya mencionados para escoger otro conjunto de puntos con un error o distancia visual menor, si este nuevo conjunto de puntos no satisface mejor el criterio se vuelve al inicial, al final bajo este criterio, se obtiene la gráfica con el menor error y mayor parecido visual a la gráfica original y los puntos de esta proporcionados por la profesora.

5 Error

Para poder calcular el error entre los puntos con los polinomios interpolantes fue necesario revisar cuales puntos k fueron agregados a la gráfica y cuales se descartaron $n-k$ para reducir el numero de puntos que interpolaban la forma del perrito.

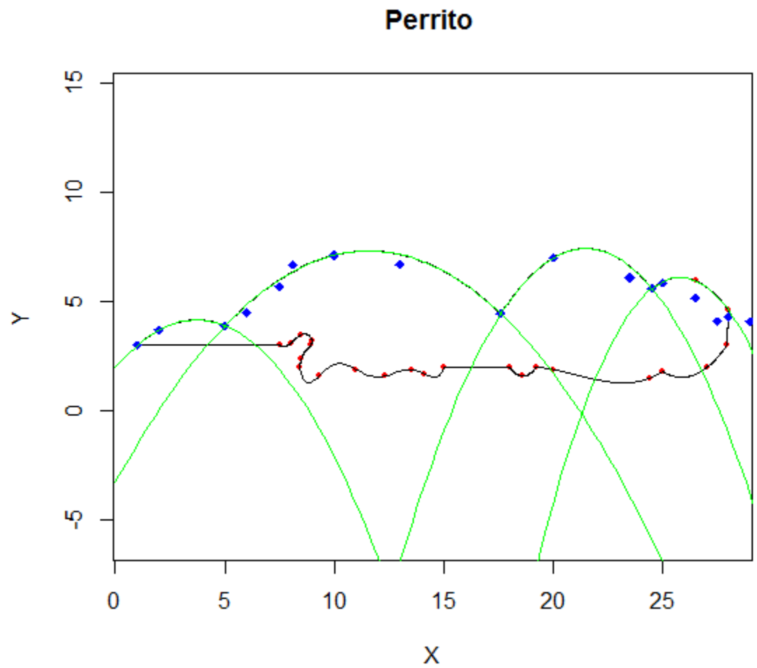
Como en los datos dados no había información sobre la interpolación de la parte inferior del perro solo se calcularon con los puntos que se tomaron del original.



La gráfica se puede apreciar a todos los puntos n que se poseían desde el comienzo graficados sobre la interpolación de los puntos k

Recalculando las ecuaciones usando el método de interpolación de Lagrange, se obtuvieron 4 polinomios de interpoladores acotados para dar la forma, la formula de cada uno de estos fueron:

- $Lagr_1 = 1.98333333333333 + 1.175 * x - 0.158333333333333 * x^2$
- $Lagr_2 = -3.26966583124478 + 1.82889974937343 * x - 0.0789933166248956 * x^2$
- $Lagr_3 = -84.3240740740741 + 8.54768518518519 * x - 0.199074074074074 * x^2$
- $Lagr_4 = -198.1 + 15.8392857142857 * x - 0.307142857142857 * x^2$



Se separaron los puntos $n-k$ para ser calculados sobre cada una de las ecuaciones de polinomios interpoladores correspondientes.

$x = c(6, 7.5, 8.1, 13, 23.5, 25, 27.5, 29, 30)$

$y = c(5, 5.7, 6.69, 6.7, 6.1, 5.87, 4.1, 4.1, 3)$

Los cálculos de los puntos no tomados entonces fue:

$ye = c(4.859973, 6.003708, 6.361671, 6.60787, 5.917857, 5.203571)$

Teniendo en cuenta la formula de el error absoluto:

$$ErrorAbsoluto = \frac{|ValorReal - ValorAproximado|}{|ValorReal|} \tag{1}$$

$$error = \frac{|y[i] - ye[i]|}{|y[i]|}; i = 1 \rightarrow n-k \tag{2}$$

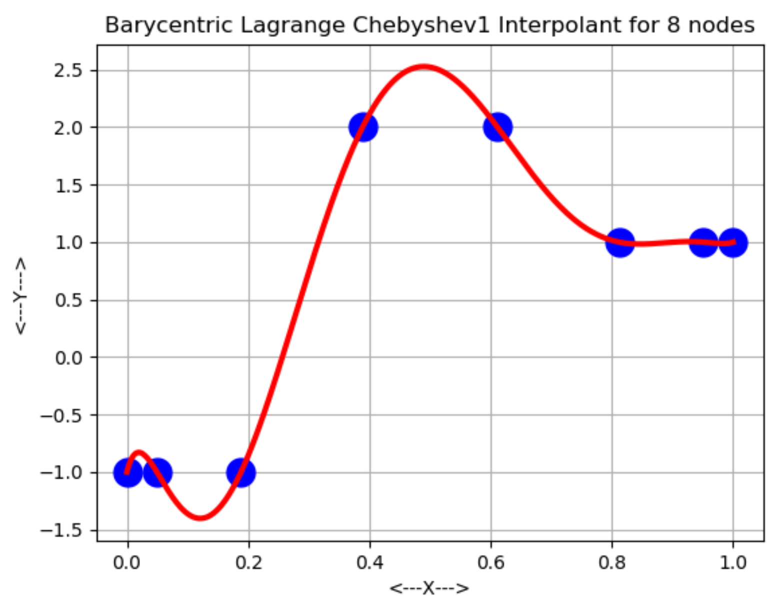
Se obtuvo la tabla de errores:

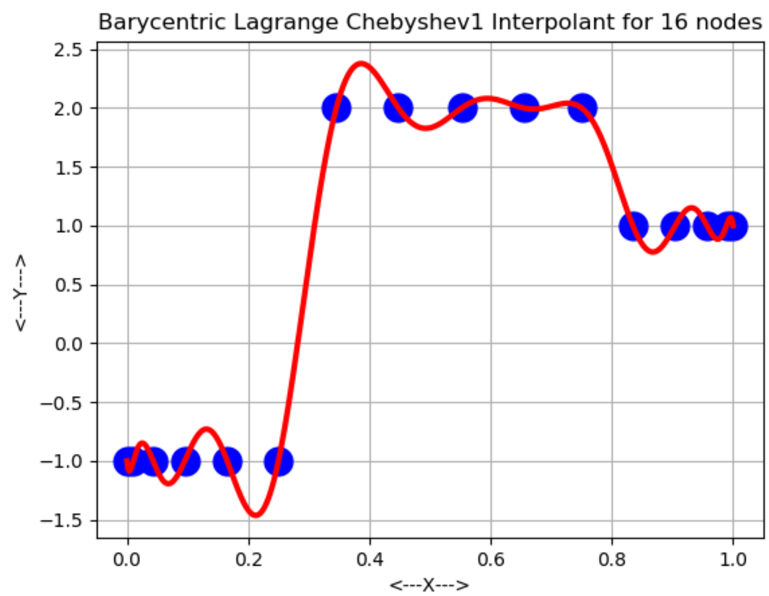
x	y	ye	error
6.00000000	5.00000000	4.85997300	0.05328211
7.50000000	5.70000000	6.00370800	0.04907758
8.10000000	6.69000000	6.36167100	0.08596681
13.00000000	6.70000000	6.60787000	0.01375075
23.50000000	6.10000000	5.91785700	0.02985951
25.00000000	5.87000000	5.20357100	0.11353135
27.50000000	4.10000000	0.02800540	0.46341446

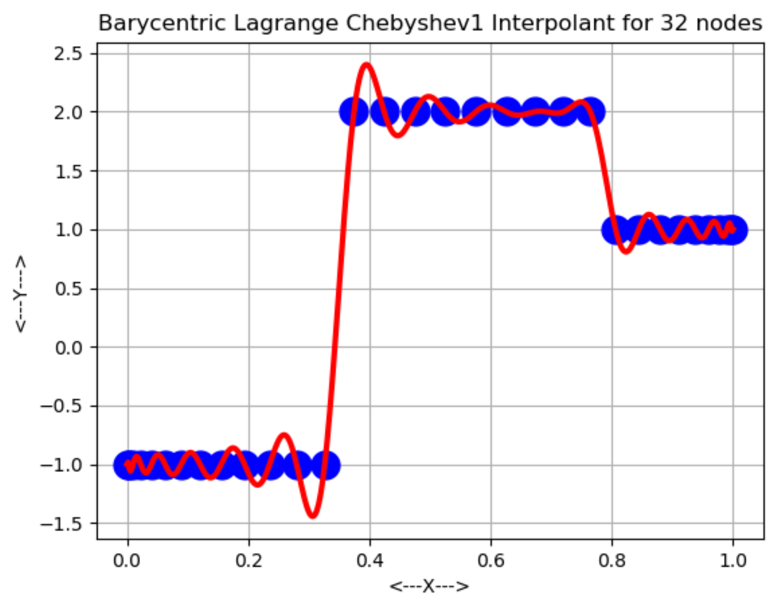
6 Preguntas adicionales

1. ¿El origen se puede modificar?

Solución: Si, el origen se puede modificar sin problemas, la interpolación y las curvas dan igual con los puntos actuales como con los puntos a los que se les ha cambiado el origen.
2. Si tenemos nueva información osea nodos ¿cómo podemos implementar esa información en el algoritmo de interpolación?
Solución: Los nodos se ponen en el arreglo de números, se ponen tanto en el arreglo de x como en el arreglo de y, y se colocan en el intervalo en el que deben ir, es decir, entre el nodo que va antes y el nodo que va después del recién agregado, a la hora de interpolarlo con la función desarrollada solo se da el índice del nuevo ultimo punto con el o los nodos insertados.
3. ¿Su método es robusto, en el sentido que si se tienen más puntos la exactitud no disminuye?
Solución:El método no es robusto. Mientras mas puntos de la gráfica hayan, como se ve en el siguiente ejemplo, la gráfica interpolada sera mas parecida a la gráfica deseada. Eso puede entrar en contradicción con la afirmación anteriormente hecha, pero dado que en algunos casos el algoritmo encuentra la función que pasa por esos puntos, la función obtenida al añadirle mas puntos puede dar como resultado una linea diferente a la que se desea pero que satisface las nuevas condiciones, por lo que en los casos en los que se dan estos eventos el método falla, razón por la que no es robusto.







4. Suponga que tiene más puntos con más cifras significativas ¿cómo se comporta su algoritmo? ¿la exactitud decae?

Solución: Usualmente la precisión de la interpolación y por lo tanto de la curva definida por esos puntos, será mayor pero depende del punto, puede la curva interpolada que satisface los nuevos puntos sea diferente a la deseada, como

se menciona en la pregunta anterior por lo que depende de ese punto nuevo a insertar.
5. Eficiencia medida
Solución: Se mide la precisión como el tiempo que pasa desde que se corre el algoritmo hasta el fin del algoritmo, en el caso del código incluido junto con este documento, el tiempo medido es de: $0.3256781 secs$

7 Referencias

1. Rodriguez Ojeda Luis "Análisis numérico básico" Ver 4.3 , Recurso digital, disponible en: $http://www.fcnm.espol.edu.ec/sites/fcnm.espol.edu.ec/files$ $/ANALISIS_NUMERICO_BASICO_CON_PYTHON_V4P3.pdf$
2. Guillen Arturo "Proyecto Métodos Numéricos MA-0320" , Recurso digital, disponible en: $https://arturoguillen90.wordpress.com/interpolacion/lagrange/$ $modificada-y-baricentrica/$
3. R Documentation "BaryLag" , Recurso digital, disponible en: $https://www.rdocumentation.org/packages/pracma/versions/1.9.9/topics/barylag$
4. "Barycentric Lagrange Polynomial Interpolation in 1D"Recurso digital, disponible en: $https://people.sc.fsu.edu/ jburkardt/py_src/barycentric_interp_1d/barycentric_interp_1d.html$