Análisis Numerico: Taller 1

Calle Arturo

Beltrán Osman

Espinel Omar

11 de Febrero de 2019

1. Polinomios y metodo de Horner

1.1. Evaluacion de un polinomio

Haciendo uso de las siguientes ecuaciones:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 \text{ en } x_0 = -2 \tag{1}$$

$$f(x) = 7x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 3x - 4 \text{ en } x_0 = 3 \tag{2}$$

$$f(x) = -5x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 4x \text{ en } x_0 = -1 \tag{3}$$

Al hacer las respectivas evaluaciones en los x_0, obtenemos sus valores.

$$f(x) = 2(-2)^4 - 3(-2)^2 + 3(-2) - 4 = 10 \tag{4}$$

$$f(x) = 7(3)^5 - 6(3)^4 - 6(3)^3 + 3(3) - 4 = 1058 \tag{5}$$

$$f(x) = -5(-1)^6 - 3(-1)^4 + 2(-1)^2 - 4(-1) = -2 \tag{6}$$

1.2. Calculo minimo de operaciones

Teniendo en cuenta el teorema de horner, se puede afirmar que el numero minimo de multiplicaciones de un polinomio es n siendo n el grado del polinomio, de igual forma el minimo de sumas/restas es n.

Teniendo en cuenta lo anterior y revisando las ecuaciones podemos afirmar que:

- En la ecuacion (1) el numero minimo de multiplicaciones es 4 y el numero minimo de sumas es 4, por lo tanto el numero minimo de operaciones es 8.
- En la ecuacion (2) el numero minimo de multiplicaciones es 5 y el numero minimo de sumas es 5, por lo tanto el numero minimo de operaciones es 10.
- En la ecuacion (3) el numero minimo de multiplicaciones es 6 y el numero minimo de sumas es 6, por lo tanto el numero minimo de operaciones es 12.

1.3. Demostracion minimo de operaciones

Para calcular el numero minimo de operaciones necesarias para evaluar un polinomio podemos realizar un analisis general de la estructura de un polinomio de grado (n)

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + cx^2 + dx + e \tag{1}$$

factorizando la x podemos obtener que

$$f(x) = (ax^{n-1} + bx^{n-2})x + ... + cx^2 + dx + e \tag{2}$$

ahora, si realizamos esta factorizacion hasta que todas las x tengan potencia 1 la ecuacion se veria mas o menos asi

$$f(x) = (...((ax_1 + b)x_2 + ... + cx_{n-1} + d)x_n + e \tag{3}$$

ahora podemos ver que se al final tenemos n veces el producto por x por lo que podemos decir que el numero minimo de multiplicaciones es n, de igual forma en todas las ecuaciones anteriores podemos notar que el numero de sumas se mantiene constante en todos los casos, por lo que es correcto afirmar que el numero minimo de sumas para resolver un polimnomio es n.

El numero minimo de operaciones en total para resolver un polimomio es $2n$ siendo n el grado del polinomio.

2. Eficiencia de un algoritmo

Dado el algoritmo:

Algorithm 1 Algoritmo.

```
procedure ALGORITMO(a, b)
    Fx ← leer
    while n>0 do
        d ← mod(n, 2)
        n ← fix(n/2)
        imprimir: d
    end while
end procedure
```

2.1. Recorra el algoritmo con $n = 73$

Respuesta : ver archivo: Punto_2_division.html adjunto.

2.2. Análisis de complejidad

Respuesta :

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{si } n = 1 \\ T(\frac{n}{2}) + O(1) & \text{si } n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Haciendo uso de la ecuacion de complejidad $T(n)$ y el teorema maestro, se puede calcular el orden de complejidad del algoritmo.

$$\theta(n) = n^{log_b^a} * log_2^k(n) \rightarrow \theta(n) = n^{log_b^a} * log_2^{k+1}(n) \tag{2}$$

Obtenemos que el orden de complejidad es

$$\theta(n) = log_2(n) \tag{3}$$

3. Particula en el espacio

Utilice R y el método de Newton para resolver el problema, muestre graficamente cómo se cmporta la convergencia a la solución.

Una particula se mueve en el espacio con el vector de posición:

$$R(t) = (2cos(t), sen(t), 0). \tag{1}$$

Se requiere conocer el tiempo en el que el objeto se encuentra mas cerca del punto P(2,1,0). Utilice el metodo de Newton con cuatro decimales de precisión.

Respuesta : ver archivo: Punto3Taller.html adjunto.

4. Interseccion en polares

$$\mathbf{r = 2 + \cos(3 * t)} \tag{1}$$

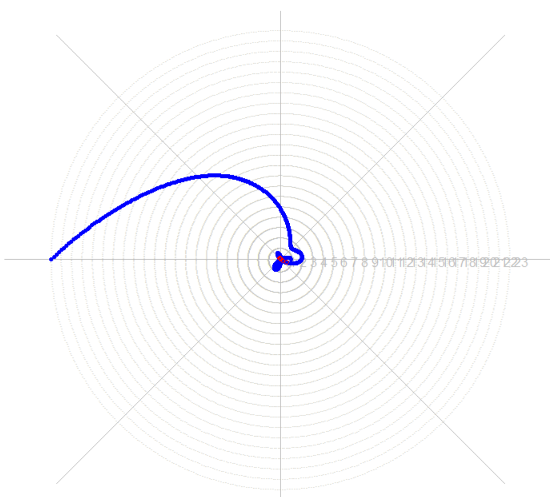
$$\mathbf{r = 2 - e^t} \tag{2}$$

igualando y despejando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos que

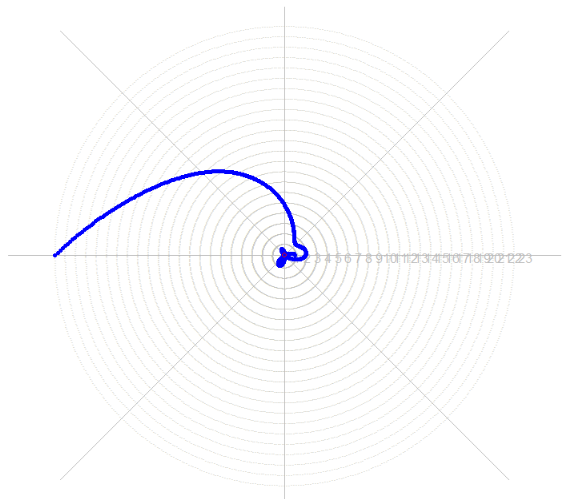
$$\mathbf{\cos(3 * t) + e^t = 0} \tag{3}$$

Para hallar la raiz de esa ecuacion usaremos 2 metodos diferentes ***Metodo de biseccion*** y ***Metodo de secante***

Los cuales se encuentran implementados en los archivos SecanteTaller.html y BiseccionTalleer.html adjuntos.



grafica del metodo Biseccion de la ecuacion.



grafica del metodo de Secante de la ecuacion.

5. Error de maquina

5.1.

Según el estandar 754 de la IEEE un flotante se expresa en 32 bits donde el primero determina el signo, los siguientes 8 representan el exponente $*10^n$ que multiplica al numero representado en la mantiza y por ultimo los siguientes 23 bits representan la mantiza, que conrresponde al numero representado en binario.

5.2.

El redondeo consiste en aproximar el ultimo decimal a la siguiente cifra mas cercana, si el valor es menor a 5 se elimina el decima si es mayo se aumenta hasta la siguiente cifra. Mientras que el recorte consiste en eliminar todas las cifras decimales apartir del punto en el que se considere hacer la estimacion.

5.3.

la representacion del valor $x = 0{,}4$ de $fl(0{,}4)$ es:
0−01111111101−1001100110011001100110011001100110011001100110011010

5.4.

El error de redondeo para $x = 0{,}4$ en flotante corresponde a: $\frac{|fl(x)-x|}{|x|}$ $\frac{|3{,}9999998-4{,}0000001|}{|4{,}0000001|} = 7{,}49999999 * 10^{-8}$

6. Raíz n-esima y método intuitivo

6.1. Raíz n-esima

Encuentre una fórmula iterativa de convergencia cuadratica y defina un intervalo de convergencia apropiado para calcular la raíz n-ésima re un numero real. el algoritmo unicamente debe incluir operaciones aritmeticas.

Respuesta: Para hayar la raiz n-esima de cualquier valor real debemos considerar que $\sqrt[n]{a} = x$ y si despejamos la formula obtendriamos que: $a - x^n = 0$ por lo que un metodo para hayar la raiz n-esima de a es usando el metodo de biseccion el cual unicamente necesita conocer un intervalo de busqueda el cual entonces corresponde a: $min \leftarrow i$ y $max \leftarrow i + 1$ donde $i^n < a$ y definiriamos como función $f(x) = a - x^n$ el algoritmo propuesto puede encontrarse en el archivo adjunto: raiz n-esima.r

6.2. Método intuitivo

El siguiente es un procedimiento intuitivo para calcular la raíz real positiva de la ecuacion $\mathbf{f(x)}$ en un intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ con precisión $\mathbf{E}$: A partir de $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ evalue $\mathbf{f(x)}$ incrementando $\mathbf{x}$ en un valor $\mathbf{d}$. inicialmente $\mathbf{d} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/\mathbf{10}$ cuando $\mathbf{f}$ cambie de signo, retorceda $\mathbf{x}$ al punto $\mathbf{x} - \mathbf{d}$ y redusca a $\mathbf{d}$ al valor $\mathbf{d}/\mathbf{10}$ evalue este procedimiento hasta que $\mathbf{d}$ sea menor que $\mathbf{E}$

A. Escriba las condiciones para que las raíz exista, sea unica y pueda ser calculada.

Respuesta: Para que la raiz exista debe:

- $a < b$
- La funcion $f(x)$ debe ser continua en el intervalo $[a, b]$
- La funcion $f(x)$ debe ser tener almenos 1 raiz en el intervalo $[a, b]$

B. Indique el orden de convergencia y estime el valor de convergencia de el método

Dado que el teorema no hace particiones para dividir el conjunto de posibilidades para explorar la solución $\rightarrow T(n)$, no es posible aplicar el teorema masetro para calcular su complegidad. Por ende analiticamente se puede intuir que se hara un ciclo desde el cual avanzara de una manera lineal hasta llegar a la raiz y por tanto no tiene manera de saltar pasos dadas condiciones especiales de algunos casos por lo que el peor de los casos y el caso promedio tienden a ser iguales $\theta(n) = O(n)$ considerando que no hay ciclos anidados que la funcion deba obedecer seguira entonces una complegidad de : $O(n)$ donde: n corresponde a la cantidad de iteraciones que hace el algoritmo desde el valor minimo hasta al raíz, y la eficiencia depende de los limites que se proovean para que el calcule la raiz.

Respuesta: El orden de convergencia del metodo es aritmetico pues la comprobacion de la solucion se reduce

C. Describa el proceso en un algoritmo

Respuesta: Verificar el archivo adjunto: metodo intuitivo.r