

# UPV - Prueba1 Prostata Lineal

19:05 | 2023-05-30 (Tuesday)

Type: #atomic

Main: #status\_unassigned

Tags: #DeepLearning

Relates: UPV - PINNS, Physics - CauchyStressTensor

Status: #status\_toDo

## About

Básicamente es hacer esto con la próstata. Los datos que me pasará serán de una deformación nodal sobre una sola geometría.

## Contenido

### Ecuación diferencial

Por un lado, es la deformación y los desplazamientos los que nos definen las dinámicas del sistema, y luego tenemos la relación entre deformaciones y tensiones, que es lo que nos caracteriza el material y tal.

✓ Duda >

**Duda: ¿Que es realmente el modelo, donde entra en juego estrictamente el tipo de material, que es de la teoría básica y donde empieza el tema lineal, lineal es el material o el modelo?**

Esfuerzo == tensiones ??? Sí, y el tensor de esfuerzo de Cauchy es el estándar tb.

La ecuación diferencial que introducimos en nuestra red, parte de las derivadas de los desplazamientos, eso nos da las deformaciones:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Pero con esto no vamos a ningún lado, necesitamos algo que igualar a 0, necesitamos algo que lo relacione con el material, una pérdida necesitamos.

La tensiones son lo que nos relaciona con el material, de forma lineal con las deformaciones:

Las **ecuaciones de Lamé-Hooke** son las **ecuaciones constitutivas** de un sólido elástico lineal, homogéneo e isótropo, tienen la forma:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

En el caso de un problema unidimensional,  $\sigma = \sigma_{11}$ ,  $\epsilon = \epsilon_{11}$ ,  $C_{11} = E$  y la ecuación anterior se reduce a:

$$\sigma = E\epsilon,$$

donde  $E$  es el **módulo de elasticidad longitudinal** o módulo de Young y  $G$  el **módulo de elasticidad transversal**. Para caracterizar el comportamiento de un sólido elástico lineal e isótropo se requieren además del módulo de Young otra constante elástica, llamada **coeficiente de Poisson** ( $\nu$ ) y el **coeficiente de temperatura** ( $\alpha$ ). Por otro lado, las ecuaciones de **Lamé** para un sólido elástico lineal e **isótropo** pueden ser deducidas del **teorema de Rivlin-Ericksen**, que pueden escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha\Delta T & \epsilon_{xy} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha\Delta T & \epsilon_{yz} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha\Delta T & \epsilon_{xz} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} \end{aligned}$$

Ciertos materiales muestran un comportamiento solo aproximadamente elástico, mostrando por ejemplo variación de la deformación con el tiempo o fluencia lenta. Estas deformaciones pueden ser permanentes o tras descargar el cuerpo pueden desaparecer (parcial o completamente) con el tiempo (viscoplasticidad, viscoelasticidad). Además algunos materiales pueden presentar **plasticidad** es decir pueden llegar a exhibir pequeñas deformaciones permanentes, por lo que las ecuaciones anteriores en muchos casos tampoco constituyen una buena aproximación al comportamiento de estos materiales.

Los parámetros  $\mu$  y  $E$  son del material.

Por último, usamos ecuaciones de conservación o de equilibrio, para indicarle a la red un PDE que debe cumplir:

#### Ecuaciones de equilibrio [\[editar\]](#)

##### Equilibrio interno [\[editar\]](#)

Cuando las deformaciones no varían con el tiempo, el campo de tensiones dado por el tensor tensión representa un estado de equilibrio con las fuerzas de volumen  $b = (b_x, b_y, b_z)$  en todo punto del sólido, lo cual implica que el campo de tensiones satisface estas condiciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned}$$

##### Equilibrio en el contorno [\[editar\]](#)

Además de las últimas ecuaciones deben cumplirse las condiciones de contorno, sobre la **superficie** del sólido, que relacionan el vector normal a la misma  $n = (n_x, n_y, n_z)$  (dirigido hacia el exterior) con las fuerzas por unidad de superficie que actúan en el mismo punto de la superficie  $f = (f_x, f_y, f_z)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z &= f_x \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z &= f_y \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z &= f_z \end{aligned}$$

Y por último en [wikipedia](#) nos pide esta sección que ya no me he leído bien, pero parece algo a considerar también:

### Problema elástico [\[ editar \]](#)

Artículo principal: [Problema elástico](#)

Un problema elástico lineal queda definido por la geometría del sólido, las propiedades de dicho material, unas fuerzas actuantes y unas condiciones de contorno que imponen restricciones al movimiento de cuerpo. A partir de esos elementos es posible encontrar un campo de tensiones internas sobre el sólido (que permitirá identificar los puntos que soportan más tensión) y un campo de desplazamientos (que permitirá encontrar si la rigidez del elemento resistente es la adecuada para su uso).

Para plantear el problema elástico son necesarias las nociones que han sido descritas en las secciones anteriores, que describen las tensiones, las deformaciones y los desplazamientos de un cuerpo. Todas estas magnitudes vienen descritas por 15 funciones matemáticas:

- Las seis componentes del tensor de tensiones  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  y  $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ .
- Las tres componentes del vector de desplazamientos:  $u_x, u_y, u_z$ .
- Las seis componentes del tensor de deformaciones:  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  y  $\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$ .

Para comprobar si se cumplen estas relaciones, formadas por 15 funciones, el siguiente paso es comprobar si las relaciones descritas hasta ahora bastan para describir completamente el estado de un cuerpo. Una condición necesaria para ello es que el número de ecuaciones disponibles coincida con el número de incógnitas. Las ecuaciones disponibles son:

- Las tres [ecuaciones de equilibrio](#) de Cauchy.
- Las seis [ecuaciones de compatibilidad](#) de Saint-Venant, que aseguran que los desplazamientos y deformaciones están adecuadamente relacionados.
- Las seis [ecuaciones constitutivas](#), para un material elástico lineal isótropo y homogéneo estas ecuaciones vienen dadas por las [ecuaciones de Lamé-Hooke](#).

Estas 15 ecuaciones igualan exactamente el número de incógnitas. Un método común es sustituir las relaciones entre desplazamientos y deformaciones en las ecuaciones constitutivas, lo cual hace que se cumplan las ecuaciones de compatibilidad trivialmente. A su vez el resultado de esta sustitución se puede introducir en las ecuaciones de equilibrio de Cauchy lo cual convierte el anterior sistema en un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales y tres desplazamientos como incógnita.

De esta manera se llega a un sistema de 15 ecuaciones con 15 incógnitas. La formulación más simple para resolver el problema elástico es la llamada [formulación de Navier](#), esta formulación reduce el sistema a un sistema de tres ecuaciones diferenciales para los desplazamientos. Esto se logra insertando en las ecuaciones de equilibrio las ecuaciones propias del material, las ecuaciones de los desplazamientos y las ecuaciones de las deformaciones podemos expresar nuestro sistema de ecuaciones en un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales. Si lo reducimos hacia las componentes del vector de desplazamientos llegamos a las ecuaciones de Navier:

$$\begin{aligned} G \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + b_x &= 0 \\ G \left[ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + b_y &= 0 \\ G \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + b_z &= 0 \end{aligned}$$

Que con el operador Nabla y el operador de Laplace se dejan escribir como:

$$G \left[ \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \mathbf{b} = 0$$

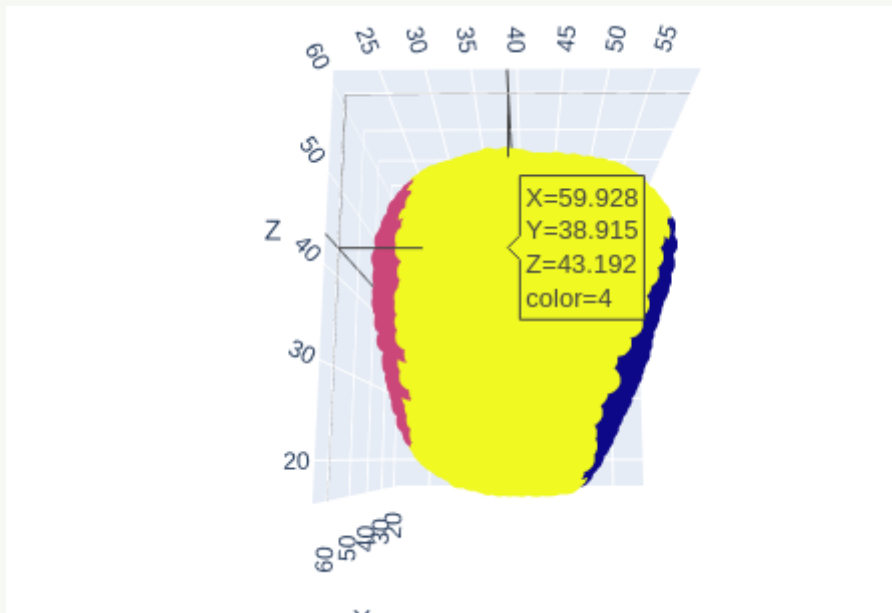
Mediante consideraciones energéticas se puede demostrar que estas ecuaciones presentan una única solución.

## Preguntas 7Junio2023

- ¿Por qué hay 1674 nodos para los stresses, pero tenemos unos 4k nodos?
- Los que tienen limitaciones sobre ciertas direcciones, no pasa nada porque tengan esfuerzos aplicados no ?
- La gran limitación ahora es que tenemos aplicado en los nodos una fuerza en Newtons, pero esa fuerza debería ser fuerza por masa, de modo que o tenemos la densidad o tenemos el area de aplicación o algo.
- La parte de la divergencia okay, pero es el otro término el de la fuerza el que supone una duda.

✓ solved !!

La simulación tiene limitaciones en el movimiento de unos nodos, limitando el movimiento en una sola dirección, yo había pensado que son los que se desplazan por el transductor, pero resulta que la fuerza que ha aplicado para la simulación es al contrario:



Los azules son los que reciben una fuerza, y los morados los que tienen la limitación.

Vale nada, se está limitando de esa forma ahí porque hay hueso y se limita el desplazamiento en esa dirección

- Hay un -1 que no entiendo :

```
normalized_X_tensor[:,col] = (X_tensor[:,col]-min_X_col)*2/(max_X_col-min_X_col)
-1 #para que es este -1?
```

## Sigo con las ecuaciones diferenciales del equilibrio

A general solution of equations of equilibrium in linear elasticity.pdf

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

- [https://en.wikiversity.org/wiki/Elasticity/Constitutive\\_relations](https://en.wikiversity.org/wiki/Elasticity/Constitutive_relations)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Linear\\_elasticity](https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_elasticity)
- <https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/matthias.heil/Lectures/Elasticity/Material/Chapter5.pdf>

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ \text{symm} & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Invert and compare with:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{symm} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

and conclude that:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.52)$$

from [here](#).

- [https://sbrisard.github.io/posts/20140112-elastic\\_constants\\_of\\_an\\_isotropic\\_material-03.html#:~:text=In%20isotropic%20elasticity%2C%20the%20stiffness,combination%20of%20J%20and%20K.](https://sbrisard.github.io/posts/20140112-elastic_constants_of_an_isotropic_material-03.html#:~:text=In%20isotropic%20elasticity%2C%20the%20stiffness,combination%20of%20J%20and%20K.)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + F_x = 0$$

Using the assumption that  $\mu$  and  $\lambda$  are constant we can rearrange and get:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + F_x = 0$$

Following the same procedure for the  $y$ -direction and  $z$ -direction we have

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + F_y = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + F_z = 0$$

These last 3 equations are the Navier–Cauchy equations, which can be also expressed in vector notation as

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0$$

---

De [wiki](#).

Investigando como implementar la ecuación del equilibrio y tal, necesitaba usar el hessiano de la función, pero no me deja calcular el hessiano de una red neuronal muy compleja, lo debo hacer con autograd. Sin embargo aquí propone una solución con una capacidad reciente de pytorch:

<https://stackoverflow.com/questions/71471406/how-to-compute-the-hessian-of-a-large-neural-network-in-pytorch> , la solución viene de [aquí](#)

De [aquí](#) sacamos las relaciones constitutivas:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.17)$$

For ease of calculation, we will express the stress and strain tensors as  $6 \times 1$  matrices, such that  $\underline{\underline{D}}$  will be a  $6 \times 6$  matrix. This notation is called Voigt notation. Hence, fourth-order tensor  $\underline{\underline{D}}$  can be expressed as a  $6 \times 6$  matrix:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & +\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & +\frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

For example, let us apply a stress  $\underline{\underline{\sigma}} = [0, 0, \sigma_{33}, 0, 0, 0]^T$  as in example in Figure 3.11. The result of  $\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\sigma}}$  is

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \left[ -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}, -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}, \frac{1}{E} \sigma_{33}, 0, 0, 0 \right]^T$$

which are the same strains we found above in the definition of  $E$  and  $\nu$ .

The inverse of the compliance matrix is the stiffness matrix  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{D}}^{-1}$  and let us calculate stress as a function of strain.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Voigt notation is easier to code in computer codes that work with matrices.

The Lamé equations are the same equations shown above but use the Lamé parameters  $\lambda$  and  $\mu$  instead of  $E$  and  $\nu$ . For example, let us write the first equation of the product of the stiffness tensor and the strain tensor in Voigt notation:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{33}]$$

Estoy raiao, porque lo que sale en el código del plano lineal es esto:

$$f = \begin{cases} \frac{2G}{1-\nu} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \frac{2G}{1-\nu} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \end{cases}$$

## Derivar las ecuaciones del plano lineal

Parto de las ecuaciones de la segunda ley de newton:

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

De esta ecuación, estamos suponiendo el caso estático, luego los desplazamientos no cambian.

Y las fuerzas  $F$ , las estamos imponiendo en la parte de BC de la ecuación diferencial, luego es algo que estamos sumando igualmente a la loss. Parece que no está del todo correcto, pero tampoco mal.

La relación entre el stres y las deformaciones es la ecuacion constitutiva, la cual se define por el material. Para materiales elásticos, lineales.

$$\sigma = \mathbf{C} : \epsilon,$$

Tendremos unas relaciones que vienen dadas por el tensor de stiffness. Esto al final es la ley de

Hooke y nada mas:

In matrix form, Hooke's law for isotropic materials can be written as

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

where  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  is the **engineering shear strain**. The inverse relation may be written as

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

which can be simplified thanks to the Lamé constants:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Donde E es el parametro de young, y mu el de poisson.

Todo esto es basicamente la **ley de hooke en 3d**

Cuando aproximamos para el caso 2D, tenemos que hacer una de dos posibles aproximaciones:  
Tensión plana o deformación plana.

Aquí se explica genial -> <https://ingenieriabasica.es/teoria-de-la-elasticidad-deformacion-y-tension-plana/>

En el caso que hicieron, es el de Tensión plana, donde la deformación resulta no ser nula, de modo que  $\varepsilon_{33}$  no es nula y la tenemos que poner en función de las otras, porque no podemos poner  $\frac{\partial w}{\partial z}$ , en su lugar, ponemos epsilon en función de las otras dos.

Bueno aun asi, no me sale como puede ser posible que no haya un  $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$

Maria Jose me pasa este desarrollo ([Nota 15 jun 2023.pdf](#)) y medice por correo:

#### Note

[10:10, 15/6/2023] Maria jose PINNS UPV: Hola. He estado haciendo el cálculo para la hipótesis de tensión plana que es la que se puede aplicar a un plano y he encontrado los coeficientes sin suponer que la deformación z es cero. Sin embargo, sigo pensando que hay un error en las



derivadas.

[10:11, 15/6/2023] Maria jose PINNS UPV: Te he enviado 2 correos, no le hagas caso al primero que el documento tiene un error.

[10:11, 15/6/2023] Maria jose PINNS UPV: Es el segundo el que está bien deducido. Aún así, échale un vistazo no sea que me haya equivocado en algo.

Para el caso 2D con la aproximación de **Tension Plana**  $\sigma_z = 0$ , terminamos con esta eq:

$$\rightarrow \frac{2G}{1-\nu} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

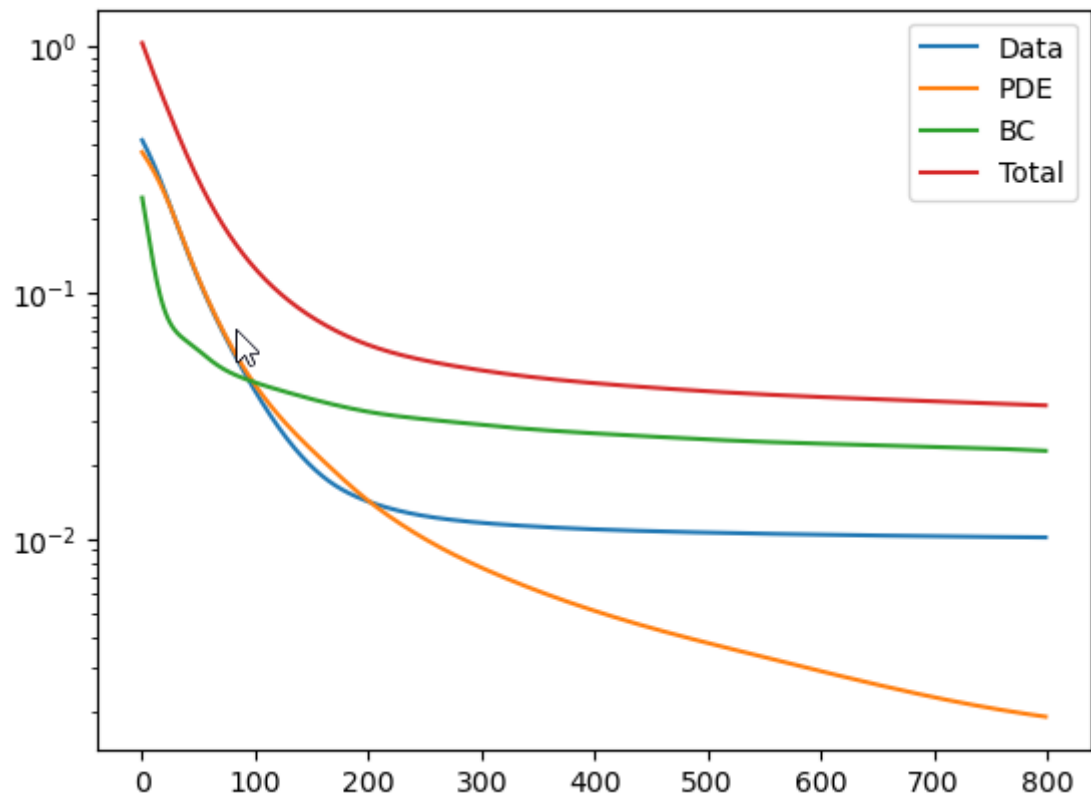
Y la otra **supongo** que será exactamente igual pero con los u cambiados por v y viceversa, y los x por y y viceversa.

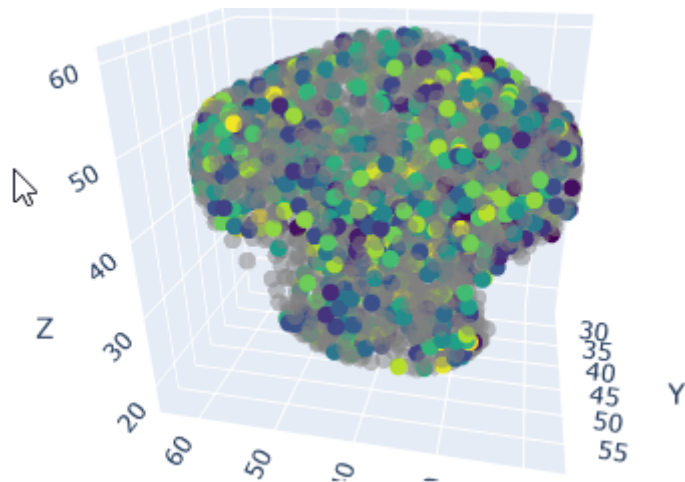
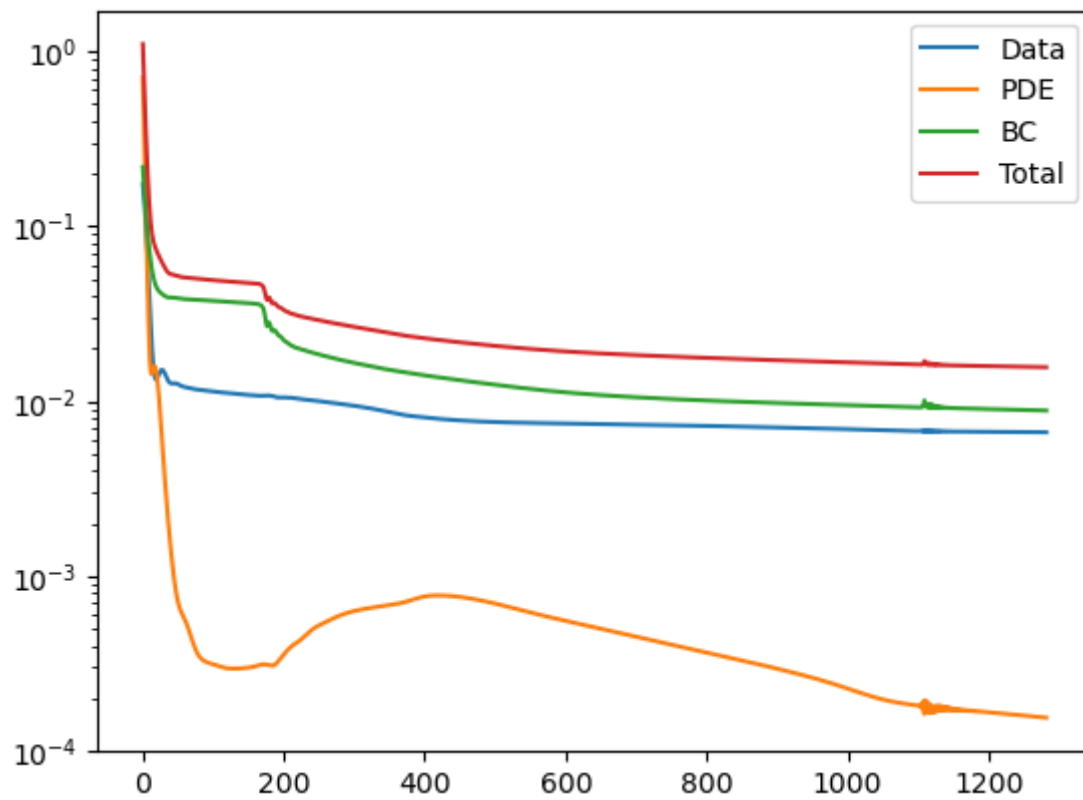
## Resultados para 12JUL

Lo he dejado aqui:

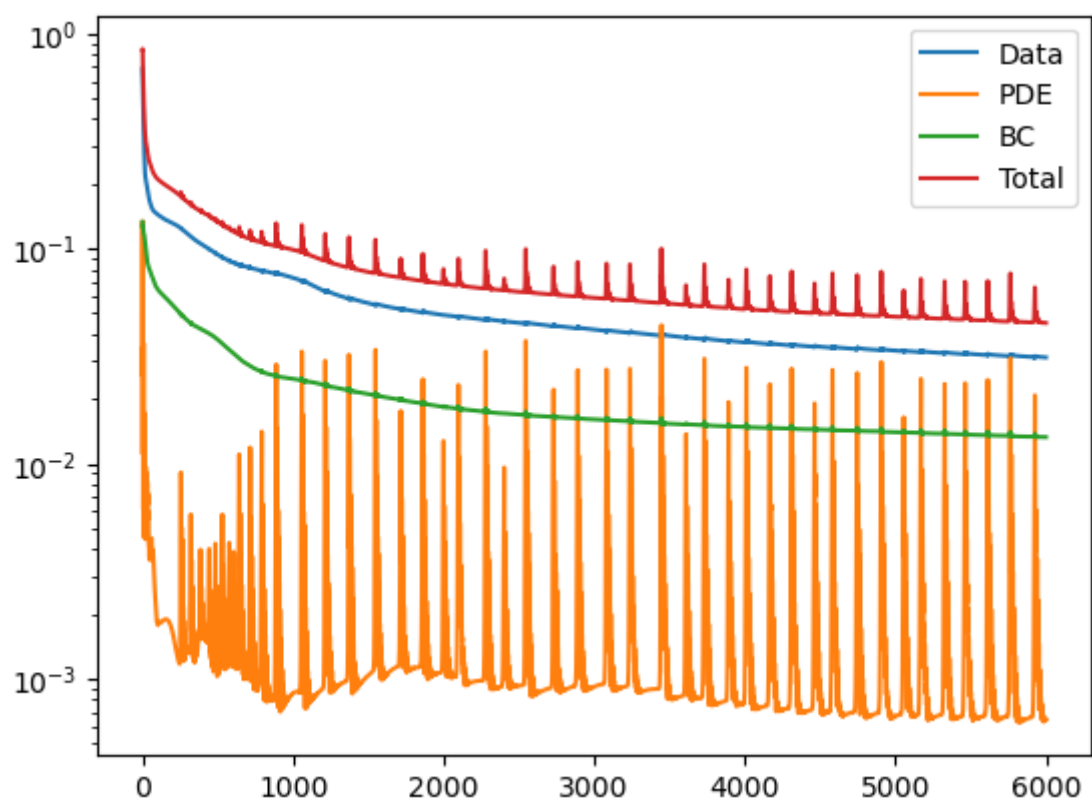
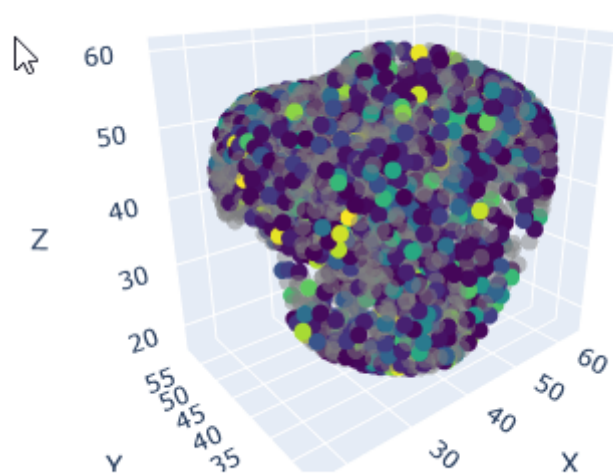
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Infinitesimal\\_strain\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Infinitesimal_strain_theory)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s_law)

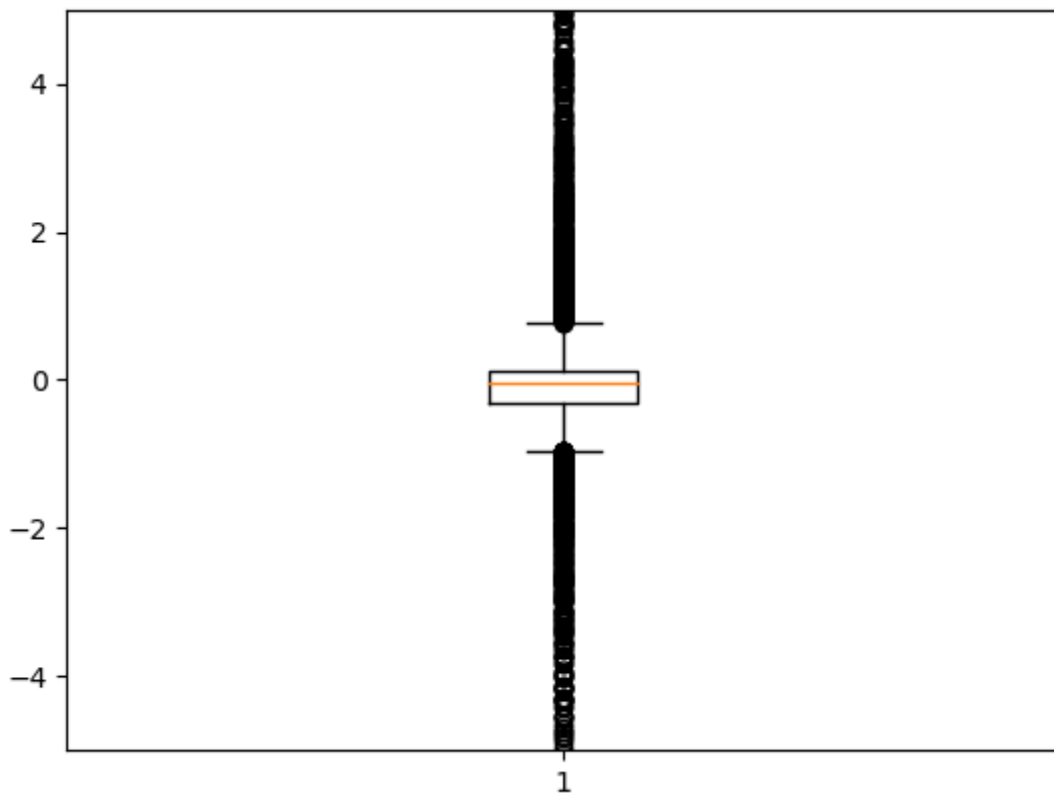
- <https://www.continuummechanics.org/greenstrain.html>



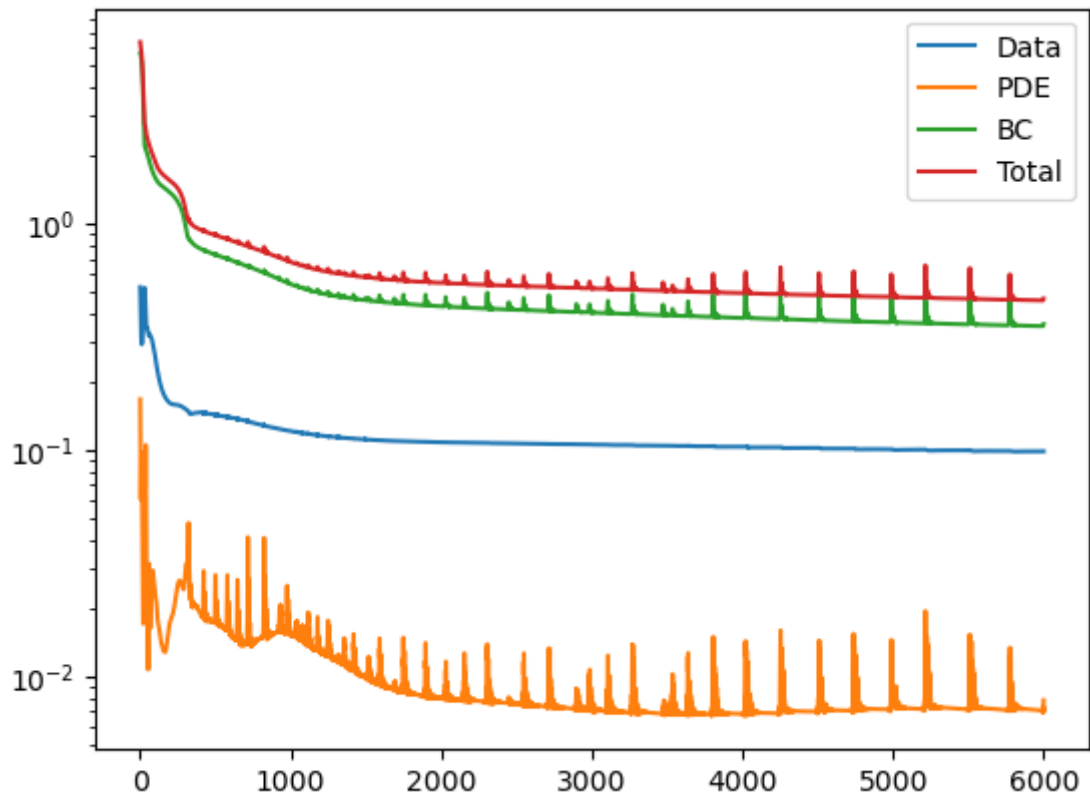


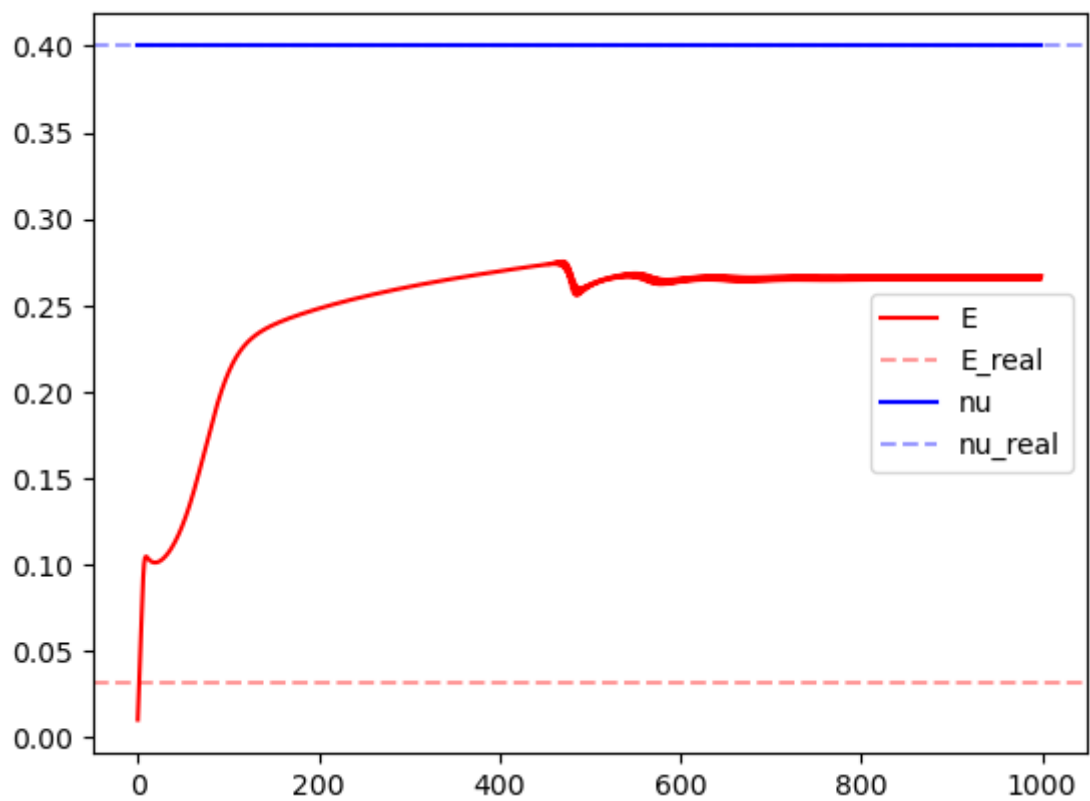
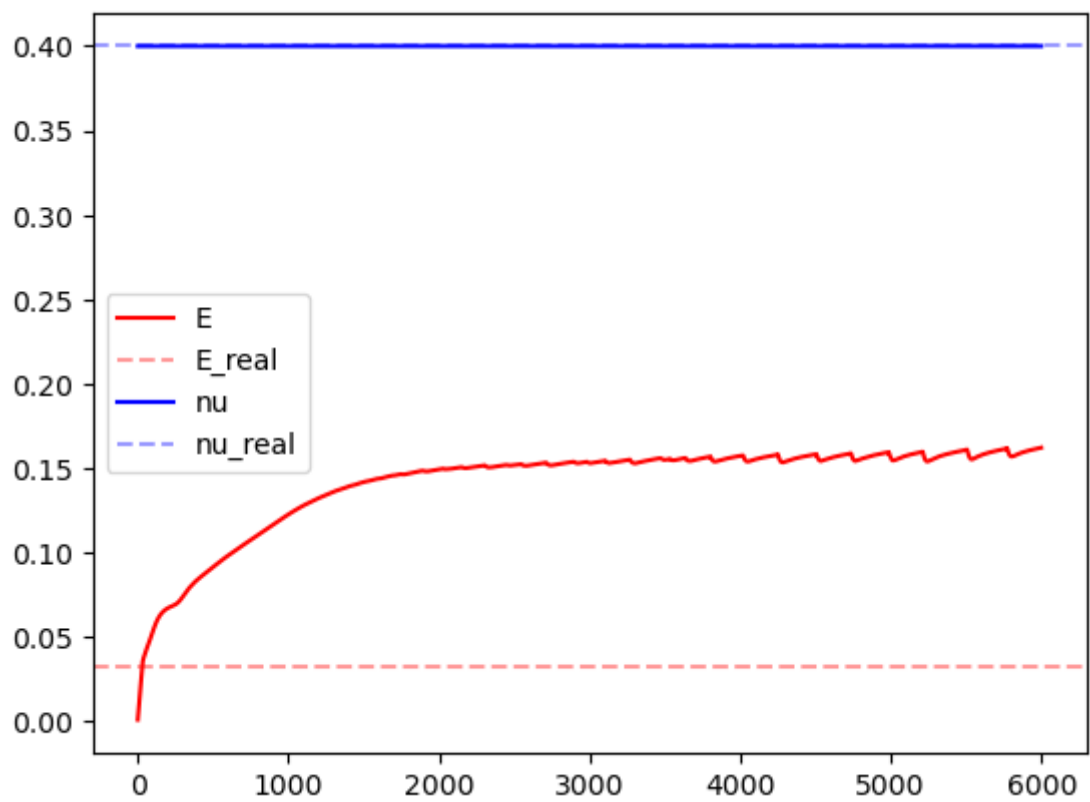
1. He corregido lo del stress, ahora se calcula la BC sobre todo el tensor.
2. Calculamos epsilon de forma vectorial.
3. Entrenamos para encontrar los parámetros E y mu.
4. He probado poniendo pesos a las losses, y no esta claro, deberá ser sobre la variación de estas loses.



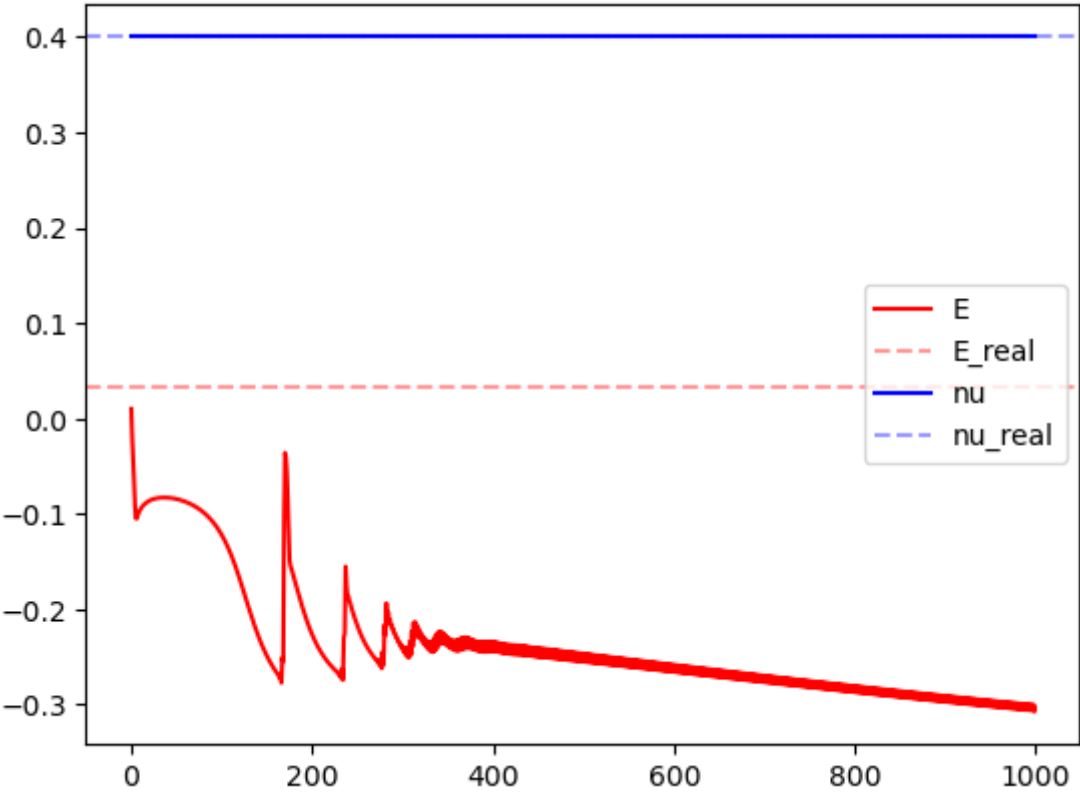
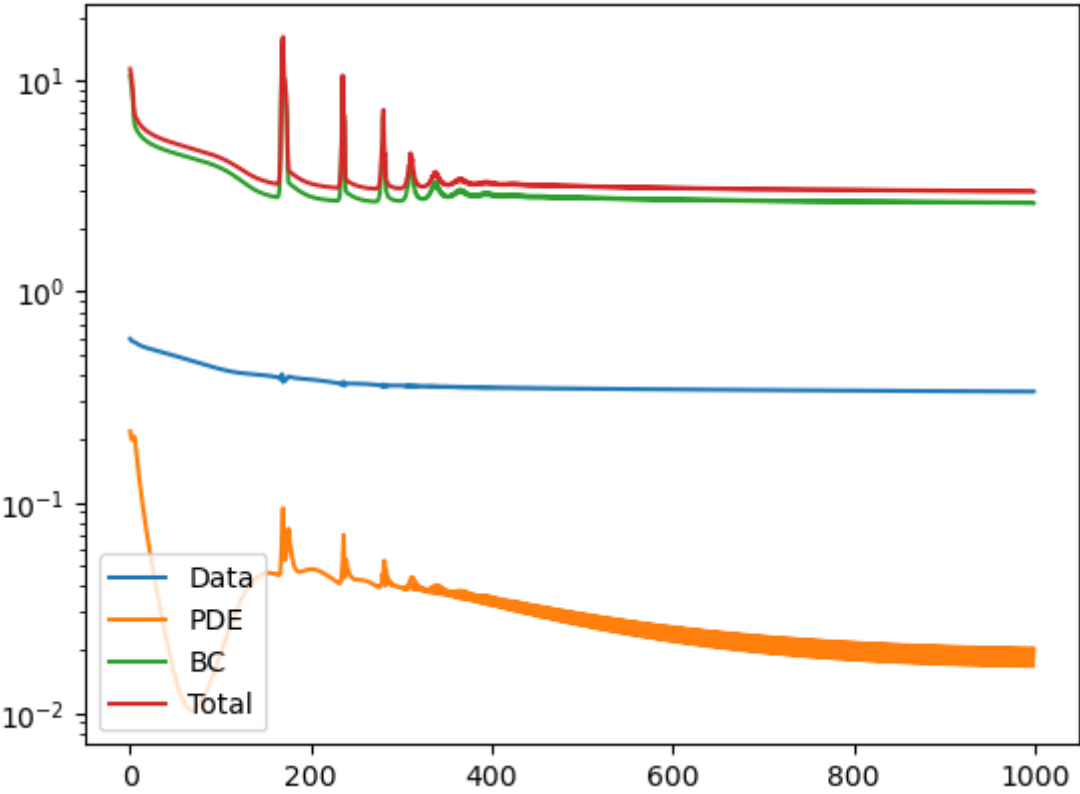


Para el ajuste de valores :

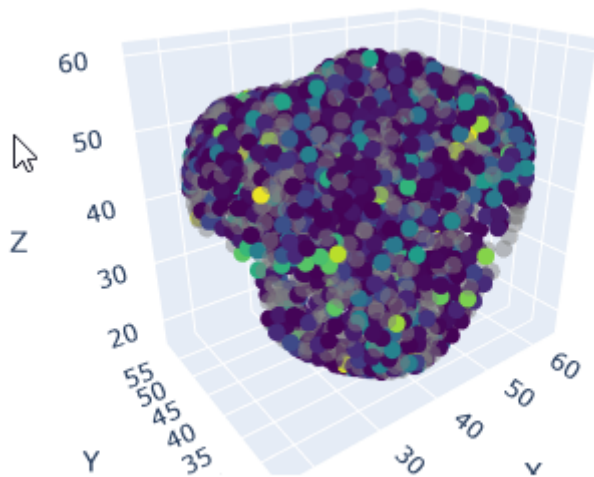
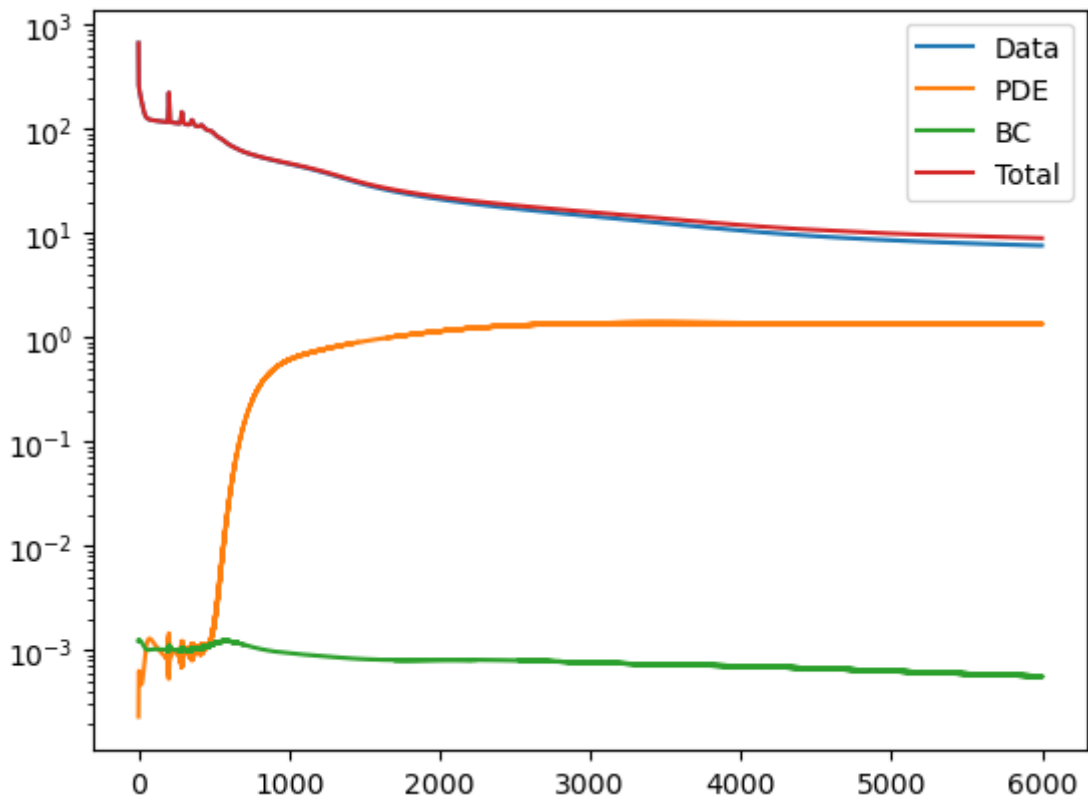




Otras veces tenía oscilaciones un poco raras que se veían en las losses y en los parametros:



Subiéndole un poco el peso a los datos reales, obtengo algo un poco mejor:



## References

Tengo que hacer lo que hacen aquí pero con la próstata. Un poco más complex. ->

[https://github.com/CDiazCuadro/ElasticityPINN/blob/main/examples/LinearElasticPlate/PlaneStress/PINN\\_LinearElasticPlate.ipynb](https://github.com/CDiazCuadro/ElasticityPINN/blob/main/examples/LinearElasticPlate/PlaneStress/PINN_LinearElasticPlate.ipynb) (recordar invitarle a comer <3)

La PDE que usan aquí es :



```

def loss_PDE(self, pos_f, save = False):

    # clone the input data and add AD

    pos = pos_f.clone()
    pos.requires_grad = True

    # predict u
    U = self.dnn(pos)

    # compute the derivatives together
    dU = autograd.grad(U, pos, torch.ones([pos.shape[0],
2])).to(device), retain_graph=True, create_graph=True)[0]

    u_x = dU[:,0].reshape(-1,1)
    v_y = dU[:,1].reshape(-1,1)

    # compute second derivatives
    ddU = autograd.grad(dU, pos, torch.ones([pos.shape[0],
2])).to(device), retain_graph=True, create_graph=True)[0]

    u_xx = ddU[:,0].reshape(-1,1)
    v_yy = ddU[:,1].reshape(-1,1)

    # Shift columns of du tensor
    dU_shifted = torch.roll(dU, 1, 1)

    cross_ddU = autograd.grad(dU_shifted, pos, torch.ones([pos.shape[0],
2])).to(device), retain_graph=True, create_graph=True)[0]

    u_xy = cross_ddU[:,1].reshape(-1,1)
    v_yx = cross_ddU[:,0].reshape(-1,1)

    # PDE f = 0
    f = [ (2*G)/(1-nu) * (u_xx + nu*v_yx) + G*(u_xy+ v_yy) ,
          G*(u_xx + v_yx) + (2*G)/(1-nu)*(v_yy + nu*u_xy) ]
    f_tensor= torch.cat((f[0] , f[1]), dim=1).to(torch.float32)

    # f_hat is just an auxiliar term to compute the loss (is zero)
    loss_f = self.loss_function(f_tensor, f_hat)

    save and
self.loss_history["PDE"].append(loss_f.to('cpu').detach().numpy())
    return loss_f

```