Justificación del examen

Manuel Arturo Chinchilla Sánchez - mchinchilla11@gmail.com
Análisis Numérico para la Ingeniería
Área Académica de Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

I. Problema 1

I-A. *Problema 1.1*

Grafique los puntos bidimensionales utilizando GNU/Octave. Teniendo los puntos cargados en la matriz X, se utiliza la función de Octave *scatter* que grafica puntos tridimencionalmente.

I-B. *Problema 1.2*

Implemente la función de error. Debe seguir la interfaz especificada en el archivo brindado. Con ayuda de un ciclo que itera desde $i = 1$ hasta m, donde $m = cols(X)$ y X es la matriz con los datos cargados, se realiza la suma del error para cada iteración, de la forma:

$$Error(a, b, c) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2 \tag{1}$$

I-C. *Problema 1.3*

Utilizando las técnicas de diferenciación numérica vistas en clase, calcule el gradiente.

Teniendo la ecuación para el gradiente, dado como un vector:

$$\nabla f(a, b, c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \\ \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} \\ \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Cada componente del vector se puede calcular mediante Diferenciación numérica con aproximación con diferencias centradas de la forma:

$$gradX = \frac{f(X + 1) - f(X - 1)}{2h} \tag{3}$$

Se elije diferencias centradas, ya que en la tarea #2 del curso se demostró que es la más precisa.

I-D. *Problema 1.4*

Implemente un ciclo para encontrar, utilizando la regla $\triangle$ (también conocida como descenso de gradiente) los valores de a, b y c que minimizan f (a, b, c). En este problema se da un punto de inicio para las iteraciones, dado en el vector abc0,y calcula el nuevo punto mediante la fórmula:

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i \pm \lambda \nabla f(\underline{x}_i) \tag{4}$$

Donde en la fórmula se utiliza za que se desea encontrar el mínimo.

Para cada nuevo calor en el vector ABC, se calcula su error y se acarrea en una variable.

para esto se selecciona un λ adecuado para que converja rápidamente y una tolerancia de error como condición de parada para el ciclo.

I-E. *Problema 1.5*

Encuentre cuál es el conjunto de parámetros a, b y c óptimo. Se dice que en el punto anterior al encontrar el punto óptimo el ciclo termina, entonces, en el vector ABC el punto óptimo es guardado en la última posición. Utilizando la función *printf* de Octave se imprime en consola el punto óptimo.

I-F. *Problema 1.6*

Grafique el error en función del número de iteración en su proceso de optimización. Etiquete los ejes. En una nueva figura y utilizando la función *plot* de Octave, se grafica el error en función del número de iteraciones realizadas.

I-G. *Problema 1.7*

Grafique en el intervalo de $x\epsilon[-2, 2]$ soble la figura del punto 1.1 lo siguiente:

I-G1. Problema 1.7.1: **La curva asociada al punto de partida en color negro**

El punto de partida está almacenado en la primera posición de la matriz ABC=(a,b,c) = (0, 1, 0) que evaluado en la función quedaría como:

$$f(a, b, c) = 0x^2 + 1x + 0 \tag{5}$$

Entonces para graficar se evalúa el rango de x=[-2,2] en la función, creando así la línea diagonal en color negro.

I-G2. Problema 1.7.2: **Las curvas asociadas a cada paso intermedio del proceso de optimización en color cian**

Utilizando la función *linspace* de Octave, se crea un vector con valores de x entre los límites de -2 y 2. Además con ayuda de un ciclo para recorrer todos los puntos en el vector ABC, se grafica utilizando la función *plot* y el rango mencionado anteriormente para cada curva.

I-G3. Problema 1.7.3: **La curva asociada al conjunto óptimo de parámetros en color rojo.** Ya que como se mencionó anteriormente, el punto óptimo está almacenado en la última posición del vector ABC, utilizando la función *plot*, se grafica la curva en este punto en el rango de x=[-2,2]

II. PROBLEMA 2

II-A. Problema 2.1

Construya la matriz M de (2.1)

Esta matríz se puede construir de la forma:

$$M_i = [1, -2e_{xi_x}, -2e_{xi_y}, -2e_{xi_z}] \tag{6}$$

para cada vector fila en la matriz M.

II-B. Problema 2.2

Construya el vector $\underline{b}$ de (2.1)

Este vector se construye de la forma:

$$b_i = dist_i^2 - (\sqrt[2]{emiPos_x + emiPos_y + emiPos_z})^2 \tag{7}$$

$$b_i = dist_i^2 - (emiPos_x + emiPos_y + emiPos_z) \tag{8}$$

Que con ayuda de un ciclo se calcula para todas las distancias.

II-C. Problema 2.3

Utilizando la descomposición de valores singulares (función svd) calcule la matriz seudo-inversa de M.

Utilizando la función *svd(M)* de octave que devuelve las matrices $[U, W, V]$ donde:

M: Matriz Original de m x n.

U: matriz m x n de columnas ortogonales

W: matriz diagonal con n valores singulares no negativos

V: matriz cuadrada n x n de columnas y filas ortogonales

Estas matrices retornadas por *svd* no tienen las dimensiones anteriores, entonces se utilizó las función *resize* de Octave para darles las dimensiones adecuadas.

La matríz seudo-inversa de M, calculada a partir de las matrices generadas por svd, está dada por:

$$M^T = V[diag(1/W_j]U^T \tag{9}$$

II-D. Problema 2.4

Calcule la solución particular $\hat{\underline{p}}$.

En esta sección se utilizó la función *linsolve* de Octave que resuelve sistemas de ecuaciones lineales.

II-E. 2.5

Para el caso en que solo hayan 3 emisores, encuentre las dos posibles soluciones. Note que esto requiere encontrar el vector que engendra el espacio nulo.

Para este problema las soluciones están dadas por:

$$\tilde{\underline{p}} = \hat{\underline{p}} + \lambda \underline{n} \tag{10}$$

con:

$\underline{n}$: el vector que genera el espacio nulo.

$\hat{\underline{p}} : M^T \underline{b}$

$\underline{M}^T$: seudo inversa de M.

al final se plantea la ecuación cuadrática:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{11}$$

II-F. Problema 2.6

Para el caso con 4 o más emisores, estime la posición del objeto.

La distancia desde un emisor al objeto funciona como el radio de una esfera, entonces, con 4 o más emisores, estas esferas se intersecarán en un punto, dando así la posición de el objeto.

III. PROBLEMA 3

III-A. Problema 3.1

Grafique los puntos tridimensionales almacenados en X con "x" azules.

Como en el problema 2, se utiliza la función *scatter* de Octave para graficar tridimencionalmente los valores de la matriz X.

III-B. Problema 3.2

Indique cómo se calcula matemáticamente el punto medio de los datos, y utilice GNU/Oc- tave para determinarlo. Recuerde que los datos son tridimensionales y se encuentran en las columnas de X.

La media está dada por la ecuación:

$$\underline{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i \tag{12}$$

Entonces, se utiliza la ecuación 12 para calcular la media de cada dimensión y se almacena en un vector columna.

III-C. Problema 3.3

Muestre en la misma gráfica de 3.1 el punto medio con un círculo rojo.

Seleccionando la figura 1, se utiliza la función *scatter* de Octave para graficar tridimencionalmente el punto medio.

III-D. Problema 3.4

Determine una nueva matriz $\bar{X}$ con datos de media cero. Grafique en otra figura dichos datos con "x" azules.

Para esta sección a cada vector dimensional en la matriz X se le resta la su media.

Se crea una segunda figura, donde con *scatter* se grafica tridimensionalmente los puntos sin la media.

III-E. Problema 3.5

Indique cómo se calcula matemáticamente la matriz de covarianza $\sum \bar{x}$ de los datos $\bar{X}$, y determine dicha matriz utilizando GNU/Octave.

La Matriz de covariaza de calcula como:

$$\sum_{\bar{x}} = \frac{1}{n} X X^T \tag{13}$$

Para la solucion en Octave, se utiliza la función *cov*.

III-F. Problema 3.6

Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de covarianza utilizando GNU/Octave

Para calcular los eigenvalores y los eigenvectores, Octave posee la función *eig*, al cual se le pasa como parámetro la matriz de covarianza calculada en el punto anterior.

III-G. Problema 3.7

Reordene la matriz de eigenvalores y eigenvectores, de manera que sea conveniente para realizar el análisis de componentes principales.

Se deben de ordenar descendentemente porque las componentes principales de X tienen mayor pero para los valores más altos.

III-H. Problema 3.8

Indique explícitamente cuáles son los ejes principales y qué varianza tienen los datos en esos ejes.

Los componentes principales de X estan dados entonces por los eigenvectores de su matriz de covarianza $\sum_x = \frac{1}{n} X X^T$

III-I. Problema 3.9

Calcule la proyección de los datos en un plano engendrado por los dos primeros ejes principales. Grafique los puntos proyectados sobre el plano en una figura aparte

La proyección en el eje z se calcula como los eigenvectores de los ejes X y Y multiplicados por cada una de sus medias. Se utiliza la función *scatter* para graficarlos tridimensionalmente.

La proyección se hace mediante la ecuación:

$$Y = PX \tag{14}$$

III-J. 3.10

Reconstruya a partir de los puntos bidimensionales obtenidos con la proyección anterior, los puntos tridimensionales correspondientes en el espacio original, donde están los datos de entrada originales cargados del archivo. Grafique las reconstrucciones en una nueva figura, junto a los datos originales de entrada. Use “x” azules para los datos originales y cuadrados magenta para los datos reconstruidos.

La reconstrucción de la matriz se hace mediante la función

$$X \approx \overline{X} = P^T Y + \mu \tag{15}$$

Se utiliza la función *scatter* de Octave para graficar los puntos en la matriz reconstruida y los puntos en la matriz original.