11. nodarbība

Nodarbības saturs: Skaitļu virknes robeža. Funkcijas robeža. Vienpusējās robežas. Bezgalīgi lielas, bezgalīgi mazas un ierobežotas funkcijas. Pamatteorēmas par robežām. Nenoteiktības, to novēršana.

11.1. Skaitļu virknes robeža

Ja katram naturālam skaitlim n piekārto kādu skaitli x_n, tad saka, ka ir dota *skaitļu virkne*. Skaitļus, kas ietilpst virknē, sauc par *virknes locekļiem* vai *virknes elementiem.* Virknes locekļu skaits var būt galīgs vai bezgalīgs. Mēs apskatīsim tikai bezgalīgas virknes. To vispārīgais pieraksts ir

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \ .$$

Īsi skaitļu virkni apzīmē ar simbolu $\{x_n\}$. Locekli x_n sauc par *virknes vispārīgo locekli.*

Virkni var uzdot trijos veidos:

1) Nosaucot tik daudzus pirmos virknes locekļus, lai būtu saskatāms likums, pēc kura var atrast tālākos virknes locekļus. Piemēram, virkne

$$3, 6, 9, 12, 15, \ldots$$

ir to skaitļu virkne, kuri dalās ar 3. Virknes vispārīgais loceklis ir $x_n = 3n$.

2) Uzdodot virknes vispārīgo locekli x_n kā funkciju. Piemēram, $x_n = \dfrac{1}{2n}$. n vietā ievietojot naturālos skaitļus, iegūsim virkni

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots \ .$$

3) Ar rekurento sakarību. Tādā gadījumā tiek doti pirmie virknes locekļi un formula, pēc kuras, izmantojot iepriekšējos virknes locekļus, aprēķina nākošos locekļus. Piemēram, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$. Tad, ņemot $n = 1, 2, 3, \ldots$, iegūsim tā sauktos Fibonači skaitļus:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Nodefinēsim dažus jēdzienus, kas raksturo skaitļu virkni.

Definīcija. Skaitļu virkni $\{x_n\}$ sauc par *ierobežotu*, ja eksistē tāds reāls pozitīvs skaitlis M, ka visiem virknes locekļiem ir spēkā nevienādība $|x_n| \le M$.

Piemēram, otrā no piemēros minētajām virknēm ir ierobežota, jo katram n ir spēkā nevienādība $\left|\frac{1}{2n}\right| \le \frac{1}{2}$.

Definīcija. Skaitļu virkni $\{x_n\}$ sauc par *augošu*, ja katram n izpildās nevienādība

$$x_n < x_{n+1}.$$

Definīcija. Skaitļu virkni $\{x_n\}$ sauc par *dilstošu*, ja katram n izpildās nevienādība

$$x_n > x_{n+1}.$$

Kā piemērus aplūkosim 3 virknes:

1) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ jeb $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots;$

2) $b_n = 1 - \frac{1}{n}$ jeb $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots;$

3) $c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ jeb $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

Virkne $\{a_n\}$ ir dilstoša, jo skaitļi tajā samazinās, virkne $\{b_n\}$ ir augoša, jo tās locekļi palielinās, bet virkne $\{c_n\}$ nav ne augoša, ne dilstoša, jo šīs virknes kārtējais loceklis ir te lielāks, te mazāks par iepriekšējo. Šāda veida virknes sauc par *oscilējošām virknēm.*

Taču visām iepriekš aplūkotajām virknēm ir viena kopīga īpašība: ja n ir ļoti liels, tad virknes loceklis ir ļoti tuvs skaitlim 1. Tādā gadījumā saka, ka virknei eksistē robeža un tā ir vienāda ar skaitli 1.

Definīcija. Skaitli a sauc par *virknes* $\{x_n\}$ *robežu*, ja katram pozitīvam skaitlim ε eksistē tāds naturāls skaitlis N, ka katram $n > N$ ir spēkā nevienādība $|x_n - a| < \varepsilon$.

Ja virknei $\{x_n\}$ ir robeža, kura ir vienāda ar a, raksta $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Aplūkosim skaitļu virknes ģeometrisko interpretāciju. Uz skaitļu ass atliksim skaitli a (1. zīm.). No a uz abām pusēm atliksim ε vienības. Nogriezni $(a-\varepsilon;\, a+\varepsilon)$ sauc par punkta a ε-apkārtni. Skaitlis a ir virknes $\{x_n\}$ robeža, ja visi virknes locekļi, sākot no kāda N, atrodas punkta a ε-apkārtnē, t.i. attālums no virknes locekļiem līdz punktam a ir ne lielāki par ε. Pie tam pietiekami mazu skaitli ε mēs varam izvēlēties patvaļīgi, tikai samazinot ε, palielinās N.

1. zīm.

Virkni, kurai eksistē robeža, sauc par *konverģentu virkni*, bet virkni, kurai robežas nav, - par *diverģentu virkni.*

Skaitļu virknes robežu var vispārināt, pieļaujot, ka virknes locekļi neierobežoti aug jeb, kā saka, tiecas uz bezgalību.

Definīcija. Saka, ka virknei $\{x_n\}$ ir *bezgalīga robeža*, ja katram reālam pozitīvam skaitlim *M* var atrast tādu skaitli *N*, ka visiem $n > N$ ir spēkā nevienādība $|x_n| > M$. Tad raksta $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Vienkāršāk sakot, virknei ir bezgalīga robeža, ja visi virknes locekļi, kuru indeksi lielāki par *N*, pēc absolūtās vērtības pārsniedz iepriekš dotu pozitīvu skaitli *M*. Protams, robežas jēdziens šajā gadījumā nav jāsaprot tiešā nozīmē, jo bezgalība nav skaitlis, bet norāda virknes locekļu izturēšanos. Virkne, kuras robeža ir bezgalība, ir diverģenta virkne.

11.2. Funkcijas robeža

Pieņemsim, ka dota skaitļu virkne

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

un funkcija $y = f(x)$, kura ir definēta visos virknes (1) punktos. Aprēķināsim dotās funkcijas vērtības visos virknes (1) punktos un sastādīsim atbilstošo funkcijas vērtību virkni

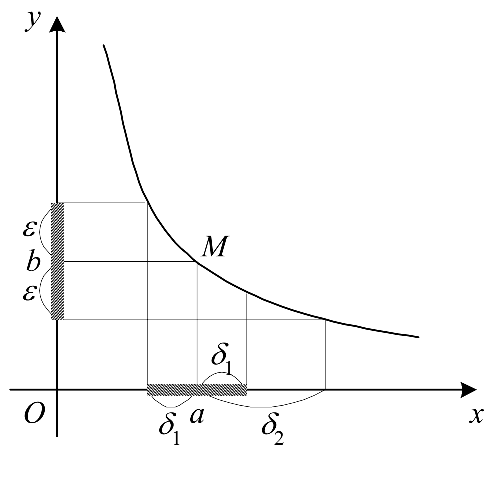
$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots \tag{2}$$

Definīcija. (Pēc Heines). Skaitli *b* sauc par *funkcijas* $y = f(x)$ *robežu*, kad *x* tiecas uz *a*, ja katrai argumenta *x* vērtību virknei (1), kuras robeža ir *a*, atbilst funkcijas vērtību virkne (2), kuras robeža ir *b*.

Taču parasti robežu definē citādi, izmantojot tā saucamo ε-δ valodu.

Definīcija. (Pēc Košī). Skaitli *b* sauc par *funkcijas* $y = f(x)$ *robežu*, kad *x* tiecas uz *a*, ja katram pozitīvam skaitlim ε, lai cik mazs tas būtu, var atrast tādu pozitīvu skaitli δ, ka visām tām $x \neq a$ vērtībām, kuras apmierina nevienādību $|x - a| < \delta$, ir spēkā sakarība $|f(x) - b| < \varepsilon$.

To, ka skaitlis *b* ir funkcijas $y = f(x)$ robeža, kad *x* tiecas uz *a*, simboliski pieraksta $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



2. zīm.

Aplūkosim robežas definīcijas ģeometrisko interpretāciju. Konstruēsim funkcijas $y = f(x)$ grafiku (2. zīm.). Uz grafika atzīmēsim punktu *M*, kura abscisa ir *a*, bet ordināta ir *b*. No vērtības *b* uz *Oy* ass uz augšu un uz leju atzīmēsim ε vienības. No iegūtajiem punktiem novilksim perpendikulus pret *Oy* asi, līdz tie krusto funkcijas grafiku, tad no krustpunktiem ar grafiku velkam perpendikulus pret *Ox* asi. Attālumus no punkta $(a; 0)$ līdz perpendikulu krustpunktiem ar *Ox* asi apzīmēsim ar δ_1 un δ_2. Par δ ņemsim mazāko no δ_1 un δ_2. Tad, skaitlis *b* ir funkcijas $y = f(x)$ robeža, kad *x* tiecas uz *a*, ja, ņemot jebkuru *x* no punkta *a* δ-apkārtnes (iezīmētais intervāls uz *Ox* ass), atbilstošā funkcijas vērtība atradīsies punkta *b* ε-apkārtnē (iezīmētais intervāls uz *Oy* ass).

Var gadīties, ka funkcijai eksistē robeža, kad arguments tiecas uz bezgalību. Nodefinēsim šo gadījumu.

Definīcija. Skaitli *b* sauc par *funkcijas* $y = f(x)$ *robežu*, kad *x* tiecas uz bezgalību, ja katram pozitīvam skaitlim ε, lai cik mazs tas būtu, var atrast tādu pozitīvu skaitli *M*, ka visiem $x > M$, ir spēkā nevienādība $|f(x) - b| < \varepsilon$. Tad raksta $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

11.3. Vienpusējās robežas

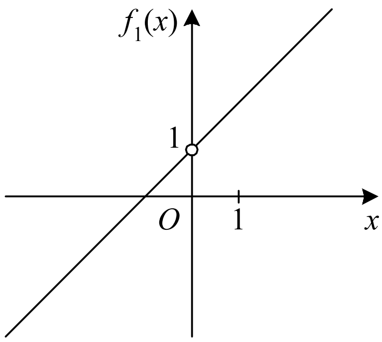
Kā piemēru apskatīsim divas funkcijas

$$f_1(x) = \frac{x + x^2}{x} \quad \text{un} \quad f_2(x) = \frac{x + x^2}{|x|}.$$

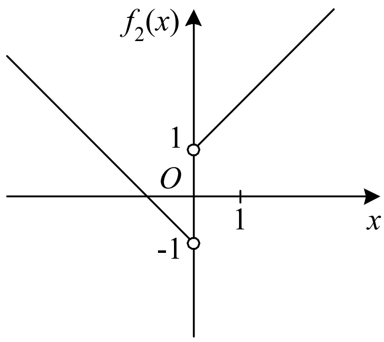
Abām funkcijām ir viens un tas pats definīcijas apgabals $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Dotās funkcijas varam pārrakstīt šādi:

$$f_1(x) = 1 + x, \quad \text{ja} \quad x \neq 0, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{ja} \quad x > 0 \\ -1 - x, & \text{ja} \quad x < 0 \end{cases}$$

Uzzīmēsim šo funkciju grafikus.



3. zīm.



4. zīm.

3. zīmējumā redzams funkcijas $y = f_1(x)$ grafiks, 4. zīmējumā – funkcijas $y = f_2(x)$ grafiks.

Sastādīsim 3 skaitļu virknes, kuru robeža ir 0:

1) $a_n = \frac{1}{n}$ jeb $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$;

2) $b_n = -\frac{1}{n}$ jeb $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$;

3) $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ jeb $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$

Paskatīsimies, kas notiek ar atbilstošajām doto funkciju virknēm:

- Funkcijas $y = f_1(x)$ vērtību virknes visos trijos gadījumos tiecas uz skaitli 1. Arī pēc grafika redzams:
  1) ja mēs tuvojamies nullei no labās puses (virkne a_n), ejot pa funkcijas grafiku, nonākam punktā, kura ordināta $y = 1$;
  2) ja mēs tuvojamies nullei no kreisās puses (virkne b_n), ejot pa funkcijas grafiku, arī nonākam punktā, kura ordināta $y = 1$;
  3) ja x vērtība mainās no negatīvās uz pozitīvo un atpakaļ, aizvien tuvojoties nullei, (virkne c_n), ejot pa funkcijas grafiku, tik un tā nonākam punktā ar ordinātu $y = 1$.

  Šajā gadījumā varam secināt, ka funkcijas $y = f_1(x)$ robeža, kad $x \to 0$, ir vienāda ar skaitli 1.
- Funkcijas $y = f_2(x)$ vērtību virknes visos trijos gadījumos uzvedas atšķirīgi:
  1) ja mēs tuvojamies nullei no labās puses (virkne a_n), ejot pa funkcijas grafiku, nonākam punktā, kura ordināta $y = 1$;
  2) ja mēs tuvojamies nullei no kreisās puses (virkne b_n), ejot pa funkcijas grafiku, nonākam punktā, kura ordināta $y = -1$;
  3) ja x vērtība mainās no negatīvās uz pozitīvo un atpakaļ, aizvien tuvojoties nullei, (virkne c_n), ejot pa funkcijas grafiku, nevienā konkrētā punktā nenonākam, funkcijas vērtības lēkā starp vērtībām, kas ir tuvas 1, un vērtībām, kas ir tuvas -1.

  Varam secināt, ka funkcijai $y = f_2(x)$ robeža parastajā nozīmē neeksistē.

Taču, ja robežas definīcijā apskatām tikai tos x, kuriem izpildās nosacījums $x > 0$ vai arī $x < 0$, tad robeža eksistē arī funkcijai $y = f_2(x)$. Šādas robežas sauc par *vienpusējām robežām*. Gadījumā, kad $x > a$, vienpusējo robežu, kad $x \to a$, sauc par *robežu no labās puses*, kad $x < a$, - par *robežu no kreisās puses*. Nodefinēsim tās:

Definīcija. Skaitli b sauc par *funkcijas* $y = f(x)$ *robežu no labās puses*, kad x tiecas uz a, ja katram pozitīvam skaitlim ε, lai cik mazs tas būtu, var atrast tādu pozitīvu skaitli δ, ka visām tām $x > a$ vērtībām, kuras apmierina nevienādību $|x - a| < \delta$, ir spēkā sakarība $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Funkcijas $y = f(x)$ robežu no labās puses, kad *x* tiecas uz *a*, apzīmē ar vienu no šādiem simboliem: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$, $f(a+0)$.

Definīcija. Skaitli *b* sauc par *funkcijas $y = f(x)$ robežu no kreisās puses*, kad *x* tiecas uz *a*, ja katram pozitīvam skaitlim *ε*, lai cik mazs tas būtu, var atrast tādu pozitīvu skaitli *δ*, ka visām tām $x < a$ vērtībām, kuras apmierina nevienādību $|\, x - a \,| < \delta$, ir spēkā sakarība $|\, f(x) - b \,| < \varepsilon$.

Funkcijas $y = f(x)$ robežu no kreisās puses, kad *x* tiecas uz *a*, apzīmē ar vienu no šādiem simboliem: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$, $f(a-0)$.

Ja funkcijai eksistē robeža parastajā nozīmē, tad tai eksistē arī abas vienpusējās robežas un tās ir vienādas. Pareizs arī apgrieztais apgalvojums: ja funkcijai eksistē abas vienpusējās robežas un tās ir vienādas, tad tai eksistē arī robeža parastajā nozīmē.

Ja funkcijai eksistē abas vienpusējās robežas, kuras ir galīgas un savstarpēji atšķirīgas, tad starpību starp tām pēc absolūtās vērtības, t.i.

$$\delta = |\, f(a+0) - f(a-0) \,|,$$

sauc par *funkcijas lēcienu* punktā $x = a$.

Iepriekš apskatītajai funkcijai $y = f_2(x)$ robeža no labās puses, kad $x \to 0$, ir $\lim\limits_{x \to +0} f_2(x) = 1$, robeža no kreisās puses, kad $x \to 0$, - $\lim\limits_{x \to -0} f_2(x) = -1$, un lēciens punktā $x = 0$ ir $\delta = |1 - (-1)| = 2$.

11.4. Bezgalīgi lielas, bezgalīgi mazas un ierobežotas funkcijas

Līdz šim apskatījām gadījumus, kad funkcijas robeža ir galīgs skaitlis, taču funkcijas vērtība var tiekties arī uz bezgalību.

Definīcija. Saka, ka funkcijas $y = f(x)$ *robeža ir bezgalība*, kad *x* tiecas uz *a*, ja katram pozitīvam skaitlim *M*, lai cik liels tas būtu, var atrast tādu pozitīvu skaitli *δ*, ka visiem $x \neq a$, kuri apmierina nevienādību $|\, x - a \,| < \delta$, ir spēkā nevienādība $|\, f(x) \,| > M$. Tad raksta $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, ja funkcijas vērtības, kad $x \to a$, ir tikai pozitīvas; atbilstoši $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, ja funkcijas vērtības, kad $x \to a$, ir tikai negatīvas.

Funkcijas, kuru robeža, kad $x \to a$, ir bezgalība, sauc par *bezgalīgi lielām funkcijām*.

Definīcija. Funkciju $y = f(x)$ sauc par *bezgalīgi mazu*, kad $x \to a$, ja tās robeža, kad $x \to a$, ir vienāda ar nulli, t.i., ja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Jāņem vērā, ka bezgalīgi maza funkcija ir mainīgs lielums. Vienīgā konstante, kura ir bezgalīgi maza funkcija, ir 0. Visas pārējās konstantes, lai cik mazas tās būtu, nav bezgalīgi mazas funkcijas.

Bezgalīgi mazas funkcijas parasti apzīmē ar grieķu burtiem $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$.

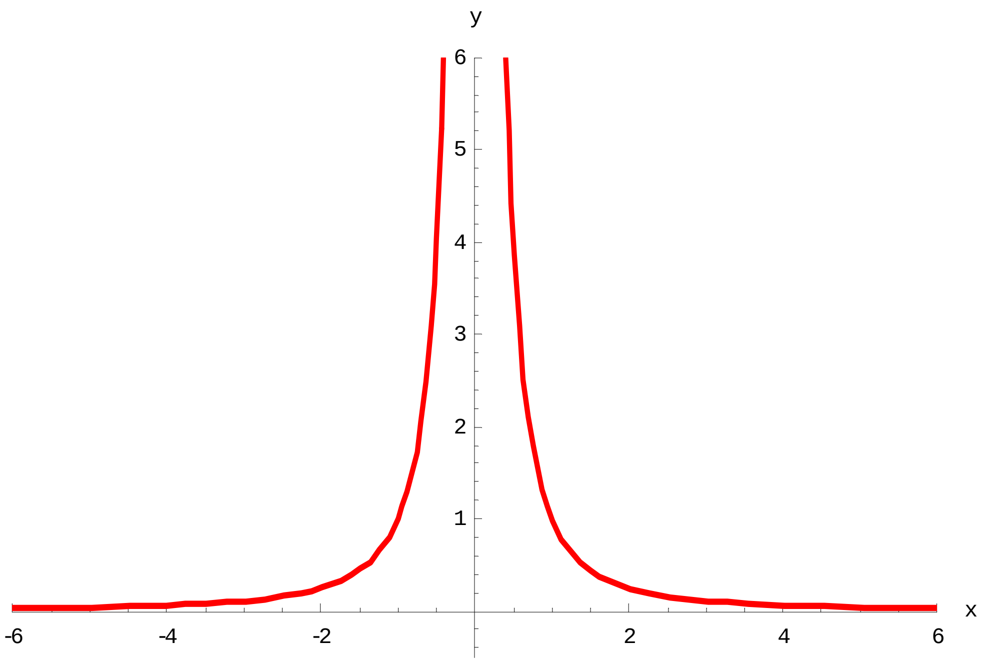
Definīcija. Funkciju $y = f(x)$ sauc par *ierobežotu* kādā intervālā, ja eksistē tāds reāls pozitīvs skaitlis *M*, ka visām *x* vērtībām no šī intervālā ir spēkā nevienādība $|f(x)| \le M$. Pretējā gadījumā, t.i., ja šāds skaitlis *M* neeksistē, tad funkciju sauc par *neierobežotu* minētajā intervālā.

Visā definīcijas apgabalā ierobežotas funkcijas ir, piemēram, funkcijas $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, jo katram *x* izpildās nevienādības

$$|\sin x| \le 1, \quad |\cos x| \le 1, \quad |\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}.$$

Bezgalīgi maza funkcija, kad $x \to a$, protams, arī ir ierobežota funkcija punkta *a* apkārtnē.

Viena un tā pati funkcija pie dažādām *x* vērtībām var būt gan bezgalīgi maza, gan bezgalīgi liela, gan ierobežota, bet ne bezgalīgi maza. Piemēram, funkcija $y = \dfrac{1}{x^2}$ (tās grafiks redzams 5. zīmējumā), ir bezgalīgi liela, kad $x \to 0$, jo $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$; bezgalīgi maza, kad $x \to +\infty$, jo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; ierobežota intervālā $[1; 2]$, jo visiem *x* no šī intervāla $\left|\dfrac{1}{x^2}\right| \le 1$.



5. zīm.

Bezgalīgi lielu, bezgalīgi mazu un ierobežotu funkciju īpašības:

1) bezgalīgi lielas un ierobežotas funkcijas summa ir bezgalīgi liela funkcija;
2) divu bezgalīgi lielu funkciju summa ne vienmēr ir bezgalīgi liela funkcija;
3) divu bezgalīgi lielu funkciju reizinājums ir bezgalīgi liela funkcija;
4) bezgalīgi lielas funkcijas apgrieztais lielums ir bezgalīgi maza funkcija, un otrādi, bezgalīgi mazas funkcijas apgrieztais lielums ir bezgalīgi liela funkcija;
5) galīga skaita bezgalīgi mazu funkciju summa ir bezgalīgi maza funkcija;
6) ierobežotas funkcijas un bezgalīgi mazas funkcijas reizinājums ir bezgalīgi maza funkcija;
7) bezgalīgi mazas funkcijas dalījums ar funkciju, kuras robeža atšķiras no nulles, ir bezgalīgi maza funkcija.

Minētās īpašības pielieto robežu aprēķināšanā. Piemēram,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+2\cos x\right)=[\,x^2$ - bezgalīgi liela funkcija, kad $x\to\infty$, $2\cos x$ - ierobežota funkcija, pēc 1.īpašības iegūstam bezgalīgi lielu funkciju$]=\infty$;

$\lim\limits_{x\to\infty}(3x+4)\lg x=[$gan $3x+4$, gan $\lg x$ ir bezgalīgi lielas funkcijas, kad $x\to\infty$, pēc 3.īpašības iegūstam bezgalīgi lielu funkciju$]=\infty$;

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+\operatorname{tg}x\right)=[$gan x^3, gan $\operatorname{tg}x$ ir bezgalīgi mazas funkcijas, kad $x\to 0$, pēc 5.īpašības iegūstam bezgalīgi mazu funkciju$]=0$;

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\operatorname{arctg}x}=[\,x-2$ - bezgalīgi maza funkcija, kad $x\to 2$, $\operatorname{arctg}x$ - ierobežota funkcija un $\operatorname{arctg}2\neq 0$, pēc 7.īpašības iegūstam bezgalīgi mazu funkciju$]=0$.

.

11.5. Pamatteorēmas par robežām

Bez pierādījumiem noformulēsim robežu teorijas pamatteorēmas.

1. Divu vai vairāku funkciju summas (starpības) robeža ir vienāda ar atsevišķo saskaitāmo funkciju robežu summu (starpību), t.i.

$$\lim_{x\to a}(u\pm v)=\lim_{x\to a}u\pm\lim_{x\to a}v.$$

2. Divu vai vairāku funkciju reizinājuma robeža ir vienāda ar atsevišķo reizinātāju robežu reizinājumu, t.i.

$$\lim_{x\to a}(u\cdot v)=\lim_{x\to a}u\cdot\lim_{x\to a}v.$$

3. Divu funkciju dalījuma robeža ir vienāda ar šo funkciju robežu dalījumu, ja vien dalītāja robeža atšķiras no nulles, t.i.

$$\lim_{x\to a}\frac{u}{v}=\frac{\lim\limits_{x\to a}u}{\lim\limits_{x\to a}v},\quad \text{ja } \lim_{x\to a}v\neq 0.$$

4. Ja katram x no punkta a apkārtnes $u(x)\geq 0$ un eksistē $\lim\limits_{x\to a}u(x)$, tad $\lim\limits_{x\to a}u(x)\geq 0$.

5. Ja katram x no punkta a apkārtnes $u(x)\geq v(x)$ un eksistē gan $\lim\limits_{x\to a}u(x)$, gan $\lim\limits_{x\to a}v(x)$, tad $\lim\limits_{x\to a}u(x)\geq \lim\limits_{x\to a}v(x)$.

6. Ja katram x no punkta a apkārtnes $u(x)\leq w(x)\leq v(x)$, eksistē $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ un eksistē $\lim\limits_{x\to a}v(x)=b$, tad eksistē arī $\lim\limits_{x\to a}w(x)=b$.

7. Jebkurai ierobežotai monotonai funkcijai ir robeža, kad $x\to a$ vai $x\to\infty$.

11.6. Nenoteiktības, to novēršana

Aprēķinot robežas, pirmkārt argumenta x vietā jāievieto vērtība, uz kuru tas tiecas. Piemēram,

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{x^2-3}=\frac{3\cdot 2+1}{2^2-3}=\frac{7}{1}=7.$$

Ja rezultātā iegūstam galīgu skaitli vai kādu no gadījumiem, kuri minēti bezgalīgi lielu, bezgalīgi mazu un ierobežotu funkciju īpašībās, rezultāts uzreiz ir zināms. Taču ir gadījumi, kad tādā veidā rezultātu uzreiz aprēķināt nevar. Piemēram, nekas netika teikts par divu bezgalīgi mazu funkciju dalījumu. Aplūkosim 3 piemērus:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{2}=2{,}5$.

Visos trijos gadījumos sākotnēji ir divu bezgalīgi mazu funkciju dalījums $\left(\frac{0}{0}\right)$, bet pēc saīsināšanas iegūstam pilnīgi atšķirīgus rezultātus: pirmajā piemērā dalījums ir bezgalīgi maza funkcija, otrajā – bezgalīgi liela funkcija, trešajā – galīgs lielums, atšķirīgs no nulles. Šādus gadījumus sauc par nenoteiktībām. Bez minētā veida $\frac{0}{0}$ nenoteiktības ir arī

$\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}. No nenoteiktībām bieži var atbrīvoties ar funkciju algebriskiem pārveidojumiem. Apskatīsim dažus piemērus.

1. **Nenoteiktība** $\frac{\infty}{\infty}$**.** Ja funkcija, kurai jāaprēķina robeža, ir daļveida racionāla vai iracionāla funkcija, tad skaitītāju un saucēju izdala ar augstāko x pakāpi, ko tā satur. Piemēram,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+5x^3-7}{6x^2+1+x^4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4}{x^4}+\frac{5x^3}{x^4}-\frac{7}{x^4}}{\frac{6x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}+\frac{x^4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}}{\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}+1}=\frac{2+0-0}{0+0+1}=2.$$

2. **Nenoteiktība** $\frac{0}{0}$**.** Ja funkcija, kurai jāaprēķina robeža, ir daļveida racionāla funkcija, tad skaitītāju un saucēju sadala reizinātājos. Piemēram,

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-3}{x+2}=\frac{2-3}{2+2}=-\frac{1}{4}.$$

Ja funkcija ir iracionāla, tad piereizina iracionālajai izteiksmei saistīto izteiksmi. Piemēram,

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{5x-1}-2\right)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{5x-1-4}{(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}=\frac{5}{\sqrt{5\cdot1-1}+2}=\frac{5}{4}.$$

3. **Nenoteiktība** $\infty-\infty$**.** Ja funkcija ir daļveida racionālu funkciju starpība, tai vienādo saucējus. Piemēram,

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to3}\frac{x+3-2}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x^2-9}=\left(\frac{4}{0}\right)=\infty.$$

Dažreiz no šāda veida nenoteiktības var atbrīvoties, piereizinot un izdalot ar saistīto izteiksmi. Piemēram,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+4x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=\frac{4+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=2.$$