Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ”

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ
к лабораторной работе 10
на тему

Метод Адамса

Выполнил: студент группы 053502
Герчик Артём Вадимович

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

Оглавление

Цели выполнения задания

1) Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса.

Краткие теоретические сведения

Пусть есть дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y),$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Разбиваем отрезок $[a,b]$ с шагом h на n частей. То есть, получаем узлы $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0,n}$, где $x_0 = a$.

Пусть $y = y(x)$ - решение. Тогда на $[x_k, x_{k+1}]$ справедливо равенство

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx.$$

Применим формулу левых прямоугольников для вычисления интеграла. Получим

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, то есть формулу Эйлера.

Очевидно, то не самый точный метод вычисления интеграла.

Используем интерполяционную квадратурную формулу Лагранжа для вычисления интеграла, т.е.

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = A_0 f(x_k, y_k) + A_1 f(x_{k-1}, y_{k-1}),$$ где

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)A_i, \quad A_i = \int_a^b l_i(x)dx; \quad l_i(x) = \frac{\varpi_i(x)}{\varpi_i(x_i)}.$$

Найдем коэффициенты A_i методом неопределенных коэффициентов:

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} dx = A_0 + A_1;$$

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} x dx = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_0 = h - A_1 \\ \dfrac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}. \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = (h - A_1) x_k + A_1 x_{k-1};$$

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = h x_k - A_1 (x_k - x_{k-1});$$

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = h x_k - A_1 h;$$

$$A_1 h = h x_k - \frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = \frac{h(x_k - x_{k+1})}{2}.$$

В итоге получим:

$$A_1 = -\frac{h}{2};$$

$$A_0 = h - A_1 = \frac{3h}{2}.$$

Откуда

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = \frac{3}{2}hf_k - \frac{h}{2}f_{k-1}, \quad \text{где} \quad f_k = f(x_k, y_k).$$

Следовательно, получим

$$y_{k+1} = y_k + h(\frac{3}{2}f(x_k, y_k) - \frac{1}{2}f(x_{k-1}, y_{k-1}) \qquad k = \overline{1, n.}.$$

Это формула Адамса второго порядка, которая используется для выполнения задания.

Существенным недостатком метода Адамса второго порядка является то обстоятельство, что для его применения надо знать дополнительно к начальному условию еще

$y_{-1} = y(x_0 - h)$ или $y_1 = y(x_0 + h)$.

Достоинством метода является то, что значение функции *f* в каждой точке (x_k, y_k) вычисляется только один раз.

Программная реализация

```
import time

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


def runge_kutta_method(function, n, h, x, y):
    yn = 0
    for i in range(n):
        k1 = h * (function(x, y))
        k2 = h * (function((x + h / 2), (y + k1 / 2)))
        k3 = h * (function((x + h / 2), (y + k2 / 2)))
        k4 = h * (function((x + h), (y + k3)))
        k = (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
        yn = y + k
        y = yn
        x = x + h

    return x, yn


def adams_bash(funct, n, t0, tn, y0):
    h = abs(tn - t0) / n
    t = np.linspace(t0, tn, n + 1)
    y = np.zeros(n + 1)
    y[0:3] = runge_kutta_method(funct, 2, t0, t0 + 2 * h,
y0)[1]
    K1 = funct(t[1], y[1])
    K2 = funct(t[0], y[0])
    for i in range(2, n):
        K3 = K2
        K2 = K1
        K1 = funct(t[i], y[i])
```

```
        y[i + 1] = y[i] + h * (23 * K1 - 16 * K2 + 5 *
K3) / 12

    return tn, y


def function(x, y):
    return 0.7 * (1 - y ** 2) / (2 * x ** 2 + y ** 2 + 1)


print("\nМетод Рунге-Кутта:")
t = time.perf_counter()
runge_kutta = runge_kutta_method(function, 1000, 0.001,
0, 0)
t_w = time.perf_counter() - t
print(f"В точке ({round(runge_kutta[0])}) имеет значение:
{'%.6f' % runge_kutta[1]}")
print(f"Время выполнения: {'%.6f' % t_w}")

print("\nМетод Адамса:")
t = time.perf_counter()
adams_bash = adams_bash(function, 1000, 0, 1, 0)
t_w = time.perf_counter() - t
print(f"В точке ({adams_bash[0]}) имеет значение:\n
{adams_bash[1]}")
print(f"Время выполнения: {'%.6f' % t_w}")

x_str = [0]
for i in range(1000, 0, -1):
    x_str.append(x_str[1000 - i] + 1 / 1000)
plt.plot(x_str, adams_bash[1], "xb")
plt.grid(True)
plt.axis("equal")
plt.show()
```

Полученные результаты

Тестовый пример 1

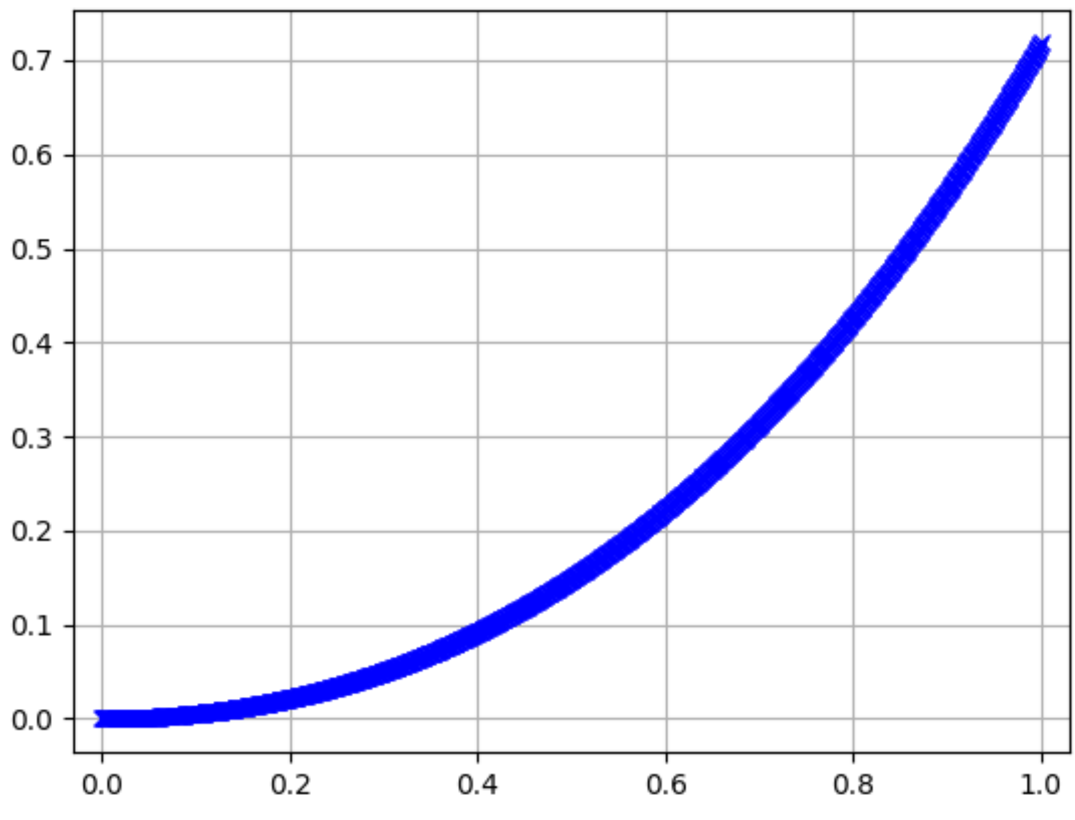
$y' = x, \quad y(0) = 0, \quad [0,1]$

Ответ:

Метод Рунге-Кутта:
В точке (1) имеет значение: 0.718282
Время: 0.000640

Метод Адамса:
В точке (1) имеет значение:
[0.   0.   0.   ... 0.71484528 0.71655948 0.7182764]
Время: 0.001427

Из результатов видно, что метод Рунге - Кутта занимает больше времени.
Метод Рунге-Кутта достигает заданной точности при n =10, однако методу Адамса необходимо n = 100000



ЗАДАНИЕ

Вариант 7

ЗАДАНИЕ. Найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке [0; 1]

$$y' = \frac{a\left(1 - y^2\right)}{\left(1 + m\right)x^2 + y^2 + 1}, \; y(0) = 0,$$

где значения параметров a и m принимают следующие значения для вариантов k.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	2.0
a	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.0

Ответ:

Метод Рунге-Кутта:

В точке (1) имеет значение: 0.426957

Время: 0.169269

Метод Адамса:

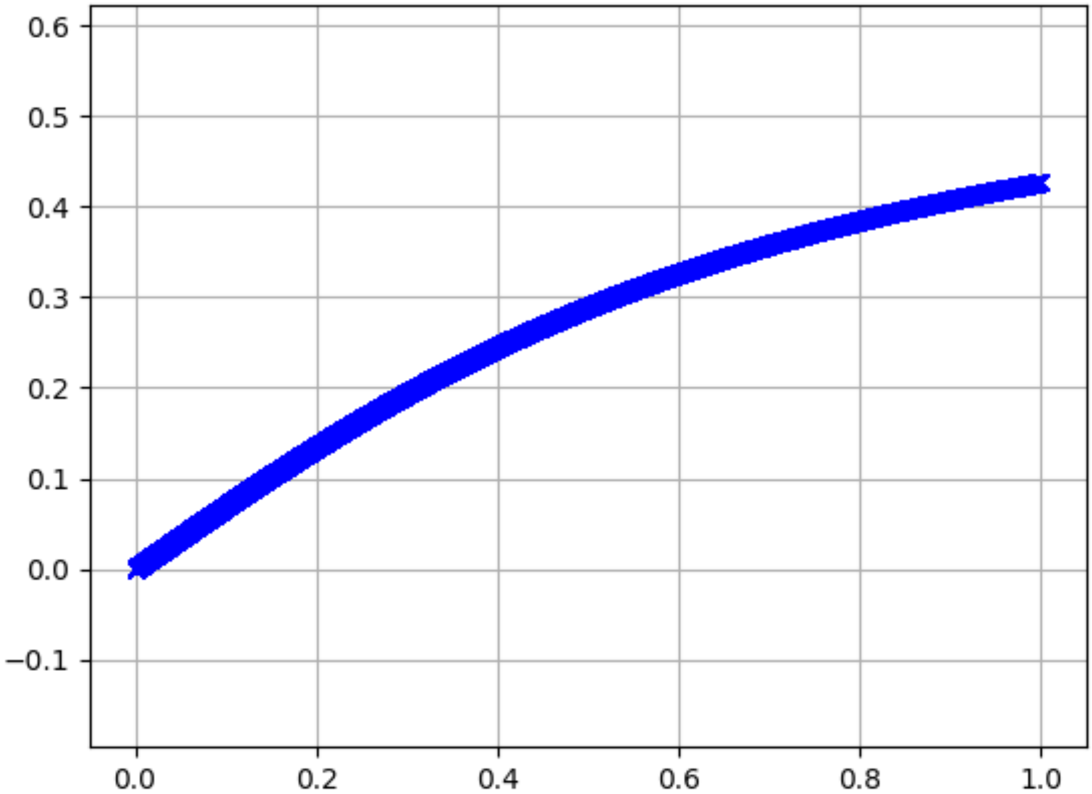
В точке (1) имеет значение:

[0. 0. 0. ... 0.42694348 0.42694528 0.42694708]

Время: 0.252416

Из результатов видно, что метод Рунге - Кутта занимает больше времени.

Метод Рунге-Кутта достигает заданной точности при n =10, однако методу Адамса необходимо n = 100000


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы был освоен метод Адамса третьего порядка для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Составлена компьютерная программа, на тестовом примере проверена правильность её работы, сравнена трудоёмкость методов.