

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ”

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ
к лабораторной работе 9
на тему

Методы Эйлера и Рунге-Кутта

Выполнил: студент группы 053502

Герчик Артём Вадимович

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

Оглавление

Цели выполнения задания	3
Краткие теоретические сведения	4
Программная реализация	9
Полученные результаты	12
Выводы	20

Цели выполнения задания

1) Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом Рунге-Кутты.

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Будем предполагать, что $f(x, y)$ непрерывная и непрерывно дифференцируемая по y функция в окрестности замкнутой области

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

содержащей внутри себя точку (x_0, y_0) .

Требуется решить задачу Коши: найти непрерывно дифференцируемую функцию $y=y(x)$, такую что $y'(x) = f(x, y(x))$ при всех $x \in [a, b]$ и $y(x_0) = y_0$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ с помощью точек разбиения $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ с шагом $h = (b - a) / n$. Тогда узлы разбиения имеют вид $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0, n}$. Пусть $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_n)$ - значения функции в точках разбиения.

1) Метод Эйлера

Построим рекуррентную последовательность:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.1)$$

$$y_0 = y(x_0),$$

которую называют последовательностью Эйлера. Соединяя ломаными все точки (x_k, y_k) , полученные из рекуррентной последовательности Эйлера, получим ломаную линию, приближающую график решения $y = y(x)$. Функция, график которой совпадает с ломаной Эйлера, принимается за приближенное решение задачи Коши.

Точность метода Эйлера на всем отрезке $[a, b]$ будет $O(h)$.

Для повышения точности вычислений иногда используется модифицированный метод Эйлера, в котором рекуррентная последовательность Эйлера вычисляется по формулам

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (9.2)$$

Модифицированный метод Эйлера обычно дает более точное приближение решения.

Пример. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -y, & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Полагая $h = 0,2$ и используя метод Эйлера, получим, как легко убедиться, из формулы Эйлера (9.1)

$$y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.8 \cdot y_k.$$

С другой стороны, используя модифицированный метод Эйлера, получим в силу формулы (2) рекуррентную последовательность $y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.82 \cdot y_k$.

Поскольку точным решением задачи Коши, как легко проверить, является функция $y = e^{-x}$, можно сравнить точность обоих методов.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8	0.64	0.572	0.4086	0.3277
$y_k^{\text{модиф}}$	1	0.82	0.6724	0.5514	0.4521	0.3708
e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Общепризнанным недостатком метода Эйлера является его не достаточно высокая точность. Несомненным достоинством метода Эйлера является его простота.

2) Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

На каждом шаге производится вычисление коэффициентов K_1, K_2, K_3, K_4 :

$$K_1 = hf(x_k, y_k);$$

$$K_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2});$$

$$K_3 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2}{2});$$

$$K_4 = hf(x_k + h, y_k + K_3).$$

Затем вычисляем

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Данный метод имеет точность $O(h^4)$ на $[a, b]$.

Рассмотрим пример, который мы использовали для иллюстрации точности метода Эйлера.

Пример. Требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ на отрезке } [0, 1].$$

Выберем шаг $h = 0,2$. Результат вычислений поместим в таблицу.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8187	0.6703	0.5487	0.4493	0.3678
e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Таким образом, метод Рунге-Кутты 4-го порядка отличается очень высокой точностью. К определенным его недостаткам относится большая сложность и трудоемкость (на каждом шаге необходимо четырежды вычислять значения функции f вместо одного раза в методе Эйлера).

Отметим, что на практике выбирают начальную длину шага h таким образом, чтобы $h^4 < \varepsilon$, где ε - заданная точность вычисления решения. Затем шаг выбирают вдвое меньшим и останавливают вычисления, если разность полученных значений y_k со значениями, полученными при начальном выборе шага меньше ε . В противном случае шаг еще раз уменьшают вдвое и т.д.

Программная реализация

```
# # EXAMPLE 1 #  
# def function(x, y):  
#     return x  
# # EXAMPLE 1 #
```

```
# # EXAMPLE 2 #  
# def function(x, y):  
#     return x + y  
# # EXAMPLE 2 #
```

```
# # MAIN TASK #  
def function(x, y):  
    return (0.7 * (1 - y ** 2)) / ((1 + 1.0) * x ** 2 + y  
** 2 + 1)
```

```
# # MAIN TASK #
```

```
def euler_method(func, n, h, x, y):  
    for i in range(n):  
        y += h * func(x, y)  
        x += h  
    return x, y
```

```
def runge_kutta_method(func, n, h, x, y):  
    yn = 0  
    for i in range(n):  
        k1 = h * (func(x, y))  
        k2 = h * (func((x + h / 2), (y + k1 / 2)))  
        k3 = h * (func((x + h / 2), (y + k2 / 2)))
```

```

        k4 = h * (func((x + h), (y + k3)))
        k = (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
        yn = y + k
        y = yn
        x = x + h

    return x, yn

print("Метод Эйлера и Рунге-Кутта(4-го порядка)\n")

n = 10
h = 0.1
x = 0
y = 0

for i in range(7):
    print('+++++')
    print()
    print(f'h = {h:.10f}')
    print()

    point, answer = euler_method(function, n, h, x, y)
    print('Метод Эйлера')
    print(f'В точке {round(point)} Значение = ', "%.6f" %
answer)

    print()
    print('Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)')
    point, answer = runge_kutta_method(function, n, h, x,
y)
    print(f'В Точке {round(point)} Значение = ', "%.6f" %
answer)

    n *= 10

```

```
h /= 10  
print()  
print('++++++++++++++++++++')
```

Полученные результаты

Тестовый пример 1

$$y' = x, \quad y(0) = 0, \quad [0,1]$$

Точность : 10^{-4}

Ответ:

Метод Эйлера и Рунге-Кутта(4-го порядка)

+++++

$h = 0.1000000000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.450000

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.500000

+++++

$h = 0.0100000000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.495000

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.500000

+++++

$h = 0.0010000000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.499500

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.500000

+++++

$h = 0.0001000000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.499950

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.500000

+++++

$h = 0.0000100000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.499995

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.500000

+++++

$h = 0.0000010000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.499999

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.500000

+++++

$h = 0.0000001000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.500000

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.500000

+++++

Исходя из тестов видно, что требуемая точность достигается при $h = 0.0000001$ для метода Эйлера и $h = 0.1$ для метода Рунге-Кутты. Это демонстрирует значительно большую точность метода Рунге-Кутты при решении задачи Коши.

Тестовый пример 2

$$y' = x+y, \quad y(0) = 0, \quad [0,1]$$

Точность : 10^{-3}

Ответ:

Метод Эйлера и Рунге-Кутта(4-го порядка)

+++++

$$h = 0.1000000000$$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.593742

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718280

+++++

+++++

$$h = 0.0100000000$$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.704814

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718282

+++++

+++++

$$h = 0.0010000000$$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.716924

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718282

+++++

+++++

$$h = 0.0001000000$$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.718146

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718282

+++++

$h = 0.0000100000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.718268

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718282

+++++

$h = 0.0000010000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.718280

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718282

+++++

$h = 0.0000001000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.718282

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718282

+++++

Исходя из тестов видно, что требуемая точность достигается при $h = 0.0001$ для метода Эйлера и $h = 0.1$ для метода Рунге-Кутта. Это демонстрирует значительно большую точность метода Рунге-Кутта при решении задачи Коши.

ЗАДАНИЕ

Вариант 7

ЗАДАНИЕ. С помощью метода Эйлера, а затем метода Рунге-Кутта найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке [0; 1].

$$y' = \frac{a(1-y^2)}{(1+m)x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 0,$$

где значения параметров a и m принимают следующие значения для вариантов k .

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	2.0
a	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.0

$$y' = \frac{a(1-y^2)}{(1+m)x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 0, \quad \text{где } m = 1.0, \quad a = 0.7$$

Ответ:

Метод Эйлера и Рунге-Кутта(4-го порядка)

+++++

$h = 0.1000000000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.448969

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.426957

+++++

+++++

$h = 0.0100000000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.429154

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.426957

+++++

$h = 0.0010000000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.427177

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.426957

+++++

$h = 0.0001000000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.426979

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.426957

+++++

$h = 0.0000100000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.426959

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.426957

+++++

$h = 0.0000010000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.426958

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.426957

+++++

$h = 0.0000001000$

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.426957

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.426957

+++++

Исходя из тестов видно, что требуемая точность достигается при $h = 0.0001$ для метода Эйлера и $h = 0.1$ для метода Рунге-Кутта. Это демонстрирует значительно большую точность метода Рунге-Кутта при решении задачи Коши.

Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы были освоены метод Эйлера, метод Рунге-Кутты четвёртого порядка для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы, по количеству необходимых для этого отрезков сравнена трудоёмкость методов.