Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ”

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ
к лабораторной работе 9
на тему

Методы Эйлера и Рунге-Кутта

Выполнил: студент группы 053502
Герчик Артём Вадимович

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

Оглавление

Цели выполнения задания

1) Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом Рунге-Кутта.

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Будем предполагать, что *f(x,y)* непрерывная и непрерывно дифференцируемая по y функция в окрестности замкнутой области

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

содержащей внутри себя точку (x_0, y_0).

Требуется решить задачу Коши: найти непрерывно дифференцируемую функцию *y=y(x)*, такую что $y'(x) = f(x, y(x))$ при всех $x \in [a,b]$ и $y(x_0) = y_0$.

Разобьем отрезок *[a, b]* с помощью точек разбиения $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ с шагом $h = (b-a)/n$. Тогда узлы разбиения имеют вид $x_k = x_0 + kh,\ k = \overline{0,n}$.
Пусть $y(x_0), y(x_1), ..., y(x_n)$ - значения функции в точках разбиения.

1) Метод Эйлера

Построим рекуррентную последовательность:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \qquad k = 0,1... \qquad (9.1)$$

$$y_0 = y(x_0),$$

которую называют последовательностью Эйлера. Соединяя ломаными все точки (x_k, y_k), полученные из рекуррентной последовательности Эйлера, получим ломаную линию, приближающую график решения $y = y(x)$. Функция, график которой совпадает с ломаной Эйлера, принимается за приближенное решение задачи Коши.

Точность метода Эйлера на всем отрезке $[a, b]$ будет $O(h)$.

Для повышения точности вычислений иногда используется модифицированный метод Эйлера, в котором рекуррентная последовательность Эйлера вычисляется по формулам

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)), \qquad k = 0,1 \ldots, n-1. \qquad (9.2)$$

Модифицированный метод Эйлера обычно дает более точное приближение решения.

Пример. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -y, \ \ x \in [0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Полагая $h = 0{,}2$ и используя метод Эйлера, получим, как легко убедиться, из формулы Эйлера (9.1)

$$y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.8 \cdot y_k.$$

С другой стороны, используя модифицированный метод Эйлера, получим в силу формулы (2) рекуррентную последовательность

$$y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.82 \cdot y_k \ .$$

Поскольку точным решением задачи Коши, как легко проверить, является функция $y = e^{-x}$, можно сравнить точность обоих методов.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8	0.64	0.572	0.4086	0.3277
$y_k^{модиф}$	1	0.82	0.6724	0.5514	0.4521	0.3708
e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Общепризнанным недостатком метода Эйлера является его не достаточно высокая точность. Несомненным достоинством метода Эйлера является его простота.

2) Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

На каждом шаге производится вычисление коэффициентов K_1, K_2, K_3, K_4:

$K_1 = hf(x_k, y_k)$;

$K_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2})$;

$K_3 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2}{2})$;

$K_4 = hf(x_k + h, y_k + K_3)$.

Затем вычисляем

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Данный метод имеет точность $O(h^4)$ на $[a,b]$.

Рассмотрим пример, который мы использовали для иллюстрации точности метода Эйлера.

Пример. Требуется решить задачу Коши:

$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ на отрезке [0, 1].

Выберем шаг $h = 0{,}2$. Результат вычислений поместим в таблицу.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8187	0.6703	0.5487	0.4493	0.3678
e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Таким образом, метод Рунге-Кутта 4-го порядка отличается очень высокой точностью. К определенным его недостаткам относится большая сложность и трудоемкость (на каждом шаге необходимо четырежды вычислять значения функции f вместо одного раза в методе Эйлера).

Отметим, что на практике выбирают начальную длину шага h таким образом, чтобы $h^4 < \varepsilon$, где ε - заданная точность вычисления решения. Затем шаг выбирают вдвое меньшим и останавливают вычисления, если разность полученных значений y_k со значениями, полученными при начальном выборе шага меньше ε. В противном случае шаг еще раз уменьшают вдвое и т.д.

Программная реализация

```
# # EXAMPLE 1 #
# def function(x, y):
#     return x
# # EXAMPLE 1 #


# # EXAMPLE 2 #
# def function(x, y):
#     return x + y
# # EXAMPLE 2 #

# # MAIN TASK #
def function(x, y):
    return (0.7 * (1 - y ** 2)) / ((1 + 1.0) * x ** 2 + y
** 2 + 1)


# # MAIN TASK #


def euler_method(func, n, h, x, y):
    for i in range(n):
        y += h * func(x, y)
        x += h
    return x, y


def runge_kutta_method(func, n, h, x, y):
    yn = 0
    for i in range(n):
        k1 = h * (func(x, y))
        k2 = h * (func((x + h / 2), (y + k1 / 2)))
        k3 = h * (func((x + h / 2), (y + k2 / 2)))
```

```
        k4 = h * (func((x + h), (y + k3)))
        k = (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
        yn = y + k
        y = yn
        x = x + h

    return x, yn


print("Метод Эйлера и Рунге-Кутта(4-го порядка)\n")

n = 10
h = 0.1
x = 0
y = 0

for i in range(7):
    print('++++++++++++++++++++++++++++++')
    print()
    print(f'h = {h:.10f}')
    print()

    point, answer = euler_method(function, n, h, x, y)
    print('Метод Эйлера')
    print(f'В точке {round(point)} Значение = ', "%.6f" %
answer)

    print()
    print('Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)')
    point, answer = runge_kutta_method(function, n, h, x,
y)
    print(f'В Точке {round(point)} Значение = ', "%.6f" %
answer)

    n *= 10
```

```
h /= 10
print()
print('++++++++++++++++++++++++++++++')
```

Полученные результаты

Тестовый пример 1

$y' = x, \quad y(0) = 0, \quad [0,1]$
Точность : 10^{-4}

Ответ:

Метод Эйлера и Рунге-Кутта(4-го порядка)

++++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.1000000000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.450000

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.500000

++++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0100000000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.495000

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.500000

++++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0010000000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.499500

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.500000

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0001000000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.499950

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.500000

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0000100000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.499995

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.500000

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0000010000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.499999

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.500000

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0000001000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.500000

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.500000

++++++++++++++++++++++++++++++

Исходя из тестов видно, что требуемая точность достигается при h = 0.0000001 для метода Эйлера и h = 0.1 для метода Рунге-Кутта. Это демонстрирует значительно большую точность метода Рунге-Кутта при решении задачи Коши.

Тестовый пример 2

$y' = x+y, \quad y(0) = 0, \quad [0,1]$

Точность : 10^{-3}

Ответ:

Метод Эйлера и Рунге-Кутта(4-го порядка)

++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.1000000000

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.593742

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718280

++++++++++++++++++++++++++++++

++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0100000000

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.704814

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718282

++++++++++++++++++++++++++++++

++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0010000000

Метод Эйлера

В точке 1 Значение = 0.716924

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.718282

++++++++++++++++++++++++++++++

++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0001000000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.718146

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.718282

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0000100000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.718268

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.718282

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0000010000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.718280

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.718282

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0000001000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.718282

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.718282

++++++++++++++++++++++++++++++

Исходя из тестов видно, что требуемая точность достигается при h = 0.0001 для метода Эйлера и h = 0.1 для метода Рунге-Кутта. Это демонстрирует значительно большую точность метода Рунге-Кутта при решении задачи Коши.

ЗАДАНИЕ
Вариант 7
ЗАДАНИЕ. С помощью метода Эйлера, а затем метода Рунге-Кутта найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке [0; 1].

$$y' = \frac{a\left(1 - y^2\right)}{(1+m)x^2 + y^2 + 1}, \; y(0) = 0,$$

где значения параметров a и m принимают следующие значения для вариантов k.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	2.0
a	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.0

$$y' = \frac{a\left(1 - y^2\right)}{(1+m)x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 0, \qquad где \quad m = 1.0, \;\; a = 0.7$$

Ответ:

Метод Эйлера и Рунге-Кутта(4-го порядка)

++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.1000000000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.448969

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.426957

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0100000000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.429154

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.426957

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0010000000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.427177

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.426957

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0001000000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.426979

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.426957

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0000100000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.426959

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)

В Точке 1 Значение = 0.426957

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

h = 0.0000010000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.426958

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.426957

++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++

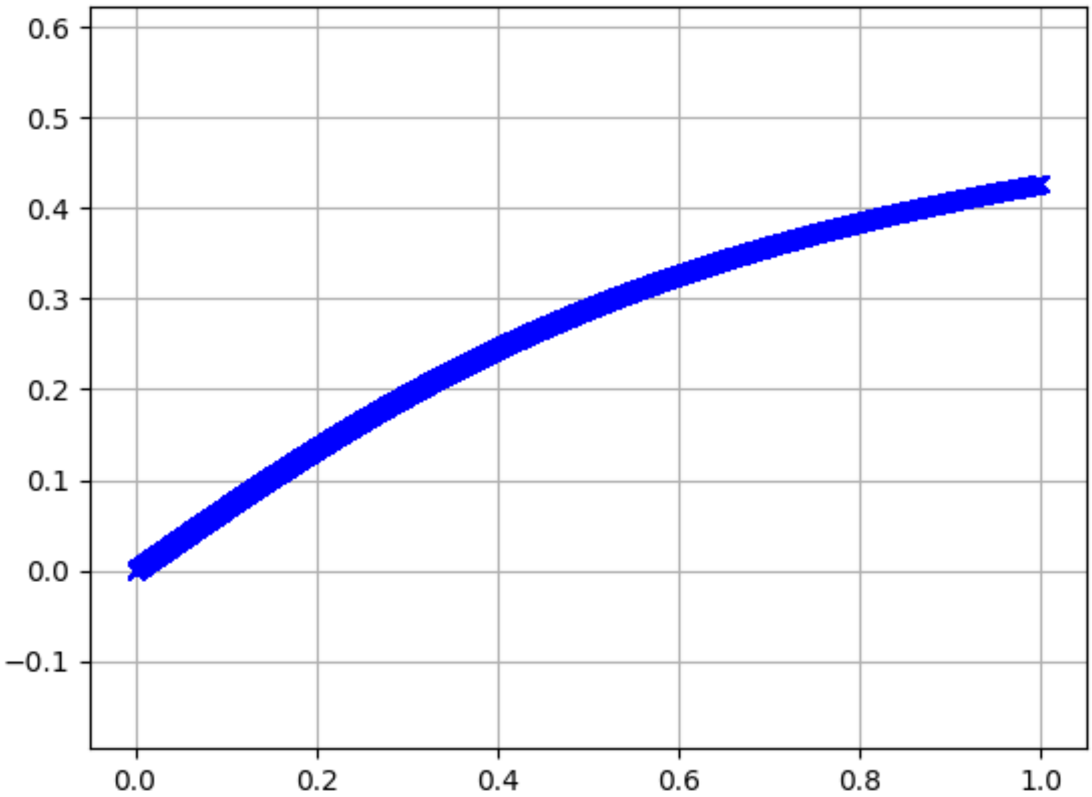
h = 0.0000001000

Метод Эйлера
В точке 1 Значение = 0.426957

Метод Рунге-Кутта(4-го порядка)
В Точке 1 Значение = 0.426957

++++++++++++++++++++++++++++++

Исходя из тестов видно, что требуемая точность достигается при h = 0.0001 для метода Эйлера и h = 0.1 для метода Рунге-Кутта. Это демонстрирует значительно большую точность метода Рунге-Кутта при решении задачи Коши.


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы были освоены метод Эйлера, метод Рунге-Кутта четвёртого порядка для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы, сравнена трудоёмкость методов.