Домашняя работа №3

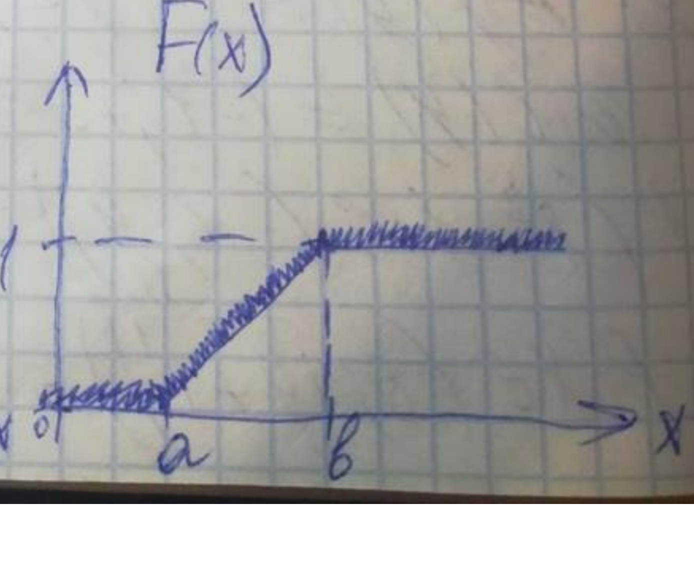
1). Функция распределения рав непрерывного распр.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}, \quad x \in (a; b)$$

Плотность распределения равна константе

$$f(x) = c = \frac{1}{b-a}, \quad x \in (a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \quad x > b \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \le b \end{cases}$$

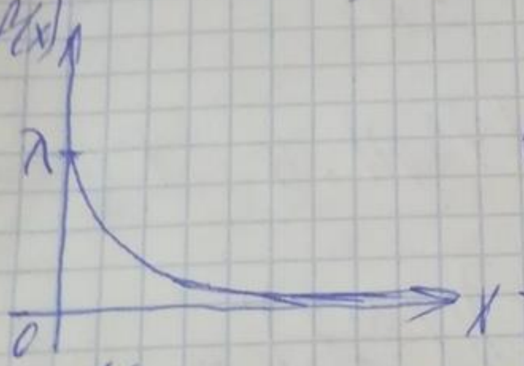


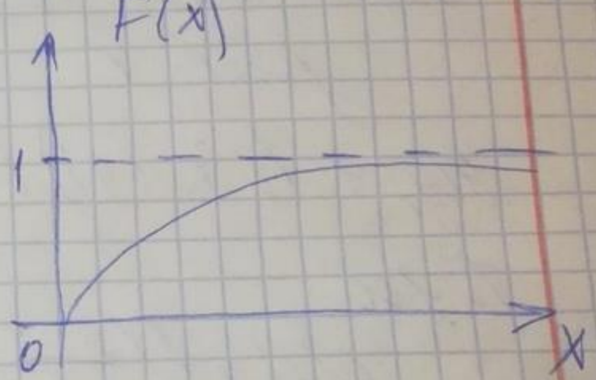
Функция распределения для показательного распр.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$$

Плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$





Математическое ожидание

$M(x)=\frac{1}{\lambda}$ – показат. распр.

$M(x)=\frac{a+b}{2}$ – равномерное распр.

2) Функция распределения и плотность для $X(\lambda=5)$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-5x}, & x\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 5e^{-5x}, x\geq 0\end{cases}$$

Т.к. $y=-5x+3$

$\Rightarrow x=\frac{3-y}{5}$

Плотность распределения для Y:

$g(y)=f(\psi^{-1}(y))\,|\psi^{-1\prime}(y)|$, где $\psi^{-1}(y)=x$

Тогда

$$g(y)=f\left(\frac{3-y}{5}\right)\left|\left(\frac{3-y}{5}\right)'\right|=$$

$$=f\left(\frac{3-y}{5}\right)\cdot\frac{3}{5}$$

Условие $\frac{3-y}{5}\in[0;\infty)$ равносильно $y\in(-\infty;3]$

Тогда $f\left(\frac{3-y}{5}\right)=5e^{-5y}$, $y\in(-\infty;3]$

$f\left(\frac{3-y}{5}\right)=0$, $y\notin(-\infty;3]$

В итоге

$$g(y)=\begin{cases}0, y>3\\ 3e^{-5y}\ \frac{3}{5}\\ \quad y\ \ 3e^{-5y}, y\le 3\end{cases}$$

Функция распределения для Y:

$$\int_{3} 0\,dy+\int_{-\infty}^{3} 3e^{-5y}dy=0+\cancel{\left(-\frac{3}{3e^{5y}}\right)}\Big|_{-\infty}^{3}=$$

$$=\int_{-\infty}^{3} 3e^{-5y}dy=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{3}3e^{-5y}dy=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{3e^{-5y}}{5}\right)\Big|_{a}^{3}=\lim_{a\to\infty}-\frac{3}{5}e^{-15}-\underbrace{\frac{3}{5}e^{-5a}}_{\to 0}=$$

$$=-\frac{3}{5}e^{-15}$$

Тогда, $F(x)=\begin{cases}-\frac{3}{5}e^{-15}, y\le 3\\ 0, y>3\end{cases}$

Математическое ожидание

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy=-\frac{3}{5}e^{-15}\approx-1{,}84\cdot10^{-7}$$

3) Плотность распределения для x

$[\overset{a}{0}; \overset{b}{\pi}]$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\ x>b\\ \frac{1}{\pi}, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

$y=\cos x=\psi(y)$

На интервале $(0;\pi]$ функция $y=\cos x$ монотонна

Обратная к $y=\cos x=\psi(y)$ функция
$\psi(y)=x=\arccos y$

Искомая плотность распределения $g(y)$:

$$g(y)=f(\psi(y))|\psi'(y)|$$

Учитывая, что $f(x)=\frac{1}{\pi}$, находим

$$f(\psi)=\frac{1}{\pi}$$

$$\psi'(y)=(\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$|\psi'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$F(y) \in (0;\pi)$ равносильно $\Psi(y) \in (-1;1)$.

Тогда,

$$g(y) = \begin{cases} 0, & a \le x, x > b \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & a < x \le b \end{cases}$$

Вычислим функцию распределение для y:

$$F(y) = \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{1}{\pi}\arccos y \Big|_a^b =$$

не опр.

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arccos T - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\arccos T}{\pi} - \frac{1}{2} \approx$$

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y > b, y \le a \\ -\frac{1}{2}, & \overset{0}{a} < y \le b \end{cases}$$

Вероятность попадание Y в интервале $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$:

$$P\left(-\frac{1}{2} \le Y < \frac{1}{2}\right) = \left| F\left(\frac{1}{2}\right) - \underset{0}{F\left(-\frac{1}{2}\right)} \right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2} = 0,5$

4) A) $x \in [1;2]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1;2] \\ 1, & x \in [1;2] \end{cases}$$

Искомую плотность распределения для y вычислим по формуле: $g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|$

Из уравнения $y = x^2 + 2$ найдем обратную функцию $x = \psi(y)$

$$x = \sqrt{y-2}$$

На отрезке $[1;2]$ функция $y = x^2 + 2$ монотонна, тогда $f(x) = f(\psi(y)) = 1$

$$\psi'(y) = (\sqrt{y-2})' = \frac{1}{2\sqrt{y-2}}$$

$\psi(y) \in [1;2]$ равносильно $y \in [3;6]$

Следовательно,

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [3;6] \\ \frac{1}{2\sqrt{y-2}}, & y \in [3;6] \end{cases}$$

Функция распределения находится по формуле

$$G(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} (t)\,dt$$

Тогда,

$$G(y)=\int_6^y \frac{1}{2\sqrt{y-2}}\,dy=\sqrt{y-2}\,\Big|_6^y=$$

$$=\sqrt{y-2}-2 \Rightarrow y\in[3;6]$$

$G(y)=0 \quad , y\notin[3;6]$

5) $x\in[-2;-1]$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[-2;-1]\\ 1, & x\in[-2;-1]\end{cases}$$

Искомая плотность:

$$p(y)=f(\psi(y))\,|\psi'(y)|$$

$\psi(y)=\sqrt{y-2} \qquad \psi'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y-2}}$

$\psi(y)\in[-2;-1]$ равносильно $y\in[3;6]$

Функция распределения совпадает с найденной в пункте А.