

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и
информатики»

Электронный конспект лекций по дисциплине
«Вычислительная математика»

факультет: ИВТ

группа: ИП-511

студент: Долгополова В.В.
Котлярова В.Б.

преподаватель: Рубан А.А.

Новосибирск
2017г.

Тема 1: Основные понятия курса

П.1 Характеристики алгоритмов:

- Погрешность
- Трудоемкость
- Требование памяти

П.2 Абсолютная и относительная погрешности:

x - приближенное значение некоторой величины

x_0 - точное

$\Delta x = |x - x_0|$ - абсолютная погрешность

$\delta x = \frac{\Delta x}{|x_0|} = \frac{\Delta x}{x_0}$ - относительная погрешность (должна быть $\ll 1$)

П.3 Изменение абсолютной и относительной погрешностей при арифметических операциях:

Теорема 1.1:

При сложении и вычитании приближенных величин абсолютные погрешности складываются (абсолютная погрешность суммы (разницы) не превосходит суммы абсолютных погрешностей).

Доказательство:

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$y = y_0 + \Delta y$$

$$x + y = (x_0 + y_0) \pm (\Delta x + \Delta y)$$

приближенное
значение суммы

точное значение
суммы

абсолютная погрешность суммы

Теорема 1.2:

При умножении (делении) приближенных величин относительные погрешности складываются (т.е. относительная погрешность произведения (частного) не превышает суммы относительных погрешностей).

Доказательство:

$$x = x_0 + \Delta x = x_0 \left(1 \pm \frac{\Delta x}{x_0}\right) = x_0 (1 \pm \delta x)$$

$$x = x_0 (1 \pm \delta x)$$

$$y = y_0 (1 \pm \delta y)$$

$$x \cdot y = x_0 \cdot y_0 (1 \pm \delta x \pm \delta y \pm \delta x \delta y)$$

Деление – доказать самостоятельно

$$\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} \left(\frac{1 \pm \delta x}{1 \pm \delta y} \right)$$

П.4 Изменение погрешности при вычислении функции:

Теорема 1.3:

$$f(x) = f(x_0 \pm \Delta x) = f(x_0) \pm f'(x_0) \Delta x$$

При вычислении функции абсолютная погрешность умножается на $|f'(x_0)|$

При вычислении степенной функции ($f(x) = x^\alpha$) относительная погрешность умножается в $|\alpha|$ раз.

Доказательство:

$$f(x) = x^\alpha$$

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = f(x_0) \pm \alpha \cdot x^{\alpha-1} \Delta x = x_0^\alpha (1 \pm \alpha \frac{\Delta x}{x_0})$$

Следствие 1.5:

При вычислении экспоненты

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = f(x_0) \pm f'(x_0)\Delta x = e^{x_0} \pm e^{x_0}\Delta x = e^{x_0}(1 \pm \Delta x)$$

относительная погрешность результата равна абсолютной погрешности аргумента.

Замечание 1.6:

Если многократно суммировать приближенные величины одного порядка, то абсолютная погрешность будет увеличиваться не в n раз, а в \sqrt{n} раз (так как количество “+” и “-” примерно равно (n слагаемых)).

П.5 Источники погрешности:

- ❖ Исходные данные
- ❖ Округление чисел при машинном вычислении
- ❖ Погрешность вычислительных методов

Тема 2: Методы решения СЛАУ

П.1 Точные и приближенные методы решения СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{\scriptsize} \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

В дальнейшем будем считать $n=k$

$$Ax=b \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \quad , \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Методы решения СЛАУ делятся на 2 группы: точные и приближенные

- Точные (т.е. методы, которые дают точное решение за конечное число шагов при условии, что все действия выполняются абсолютно точно).
- Приближенные (итерационные)
При применении этих методов точное решение никогда не будет получено, оно является пределом последовательности приближенных решений.

Точные методы: метод Гаусса, метод Крамера, метод обратной матрицы,...

Приближенные методы: метод простых итераций, метод Зейделя,...

1. Метод Гаусса:

Основная идея: привести исходную матрицу A к треугольному виду с помощью элементарных преобразований строк, после чего СЛАУ легко решается.

Метод состоит из двух частей:

1-ая часть – прямой ход: приведение матрицы к треугольному виду.

2-ая часть – обратный ход: решение СЛАУ с треугольной матрицей.

Прямой ход:

1)

$$\begin{aligned} & + 1 \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \\ & + 1 \left(\frac{-a_{31}}{a_{11}} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \\ & + 1 \left(\frac{-a_{n1}}{a_{11}} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & + 2 \left(\frac{-a_{32}}{a_{22}} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \\ & + 2 \left(\frac{-a_{n2}}{a_{22}} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.....

3)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}$$

.....

Нюансы метода Гаусса:

Если ведущий элемент (на диагонали) на каком либо этапе обратного хода равен нулю – переставим строки (строки смотрим ниже диагонали) так, чтобы ведущий элемент не был равен нулю. Если это невозможно, т.е. в j -ом столбце все строки с j -ой и вниз нулевые, тогда матрица A вырожденная.

2. Модификация метода Гаусса:

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента.

Единственное отличие модифицированного метода Гаусса от обычного состоит в том, что на каждом этапе прямого хода на место ведущего элемента ставим максимальный по модулю среди возможных, то есть среди элементов столбца, который находится не выше главной диагонали.

Пример решения СЛАУ модифицированным методом Гаусса:

Необходимо поменять строки местами таким образом, чтобы ведущим элементом был максимальный по модулю среди элементов данного столбца ниже главной диагонали.

В данном примере вторую строку нужно поставить на место первой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

После перестановки строк имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} (2) - 1/3(1) \\ (3) + 2/3(1) \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (3) + 5/4(2) \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} -2x_3 = -4 \\ \frac{-4}{3}x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ \frac{-4}{3}x_2 + 8 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ \frac{-4}{3}x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 + 0 - 12 = -9 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Замечания: метод Гаусса с выбором ведущего элемента работает лучше (точнее) чем обычный метод Гаусса (т.е. его точность выше). Погрешности при реализации метода Гаусса возникают при машинном округлении чисел, модифицированный метод Гаусса позволяет решать с той же точностью.

3. Трудоемкость метода Гаусса:

Прямой ход: три вложенных цикла

j от 1 до $n-1$ - по столбцу

i от $j+1$ до n - по строке

k от $j+1$ до $n+1$

Итого трудоемкость прямого хода $T(n) = n^3$

Обратный ход: два цикла

$T(n) = n^2$

П.2 Приближенные методы решения СЛАУ:

- В приближенных методах точные решения получаются как предел бесконечной последовательности приближений, который мы в некоторый момент времени обрываем (когда достигается заданная точность).

1. Справочный материал. Нормы векторов и матриц:

Пусть x – n -мерный вектор.

Нормой вектора называется число, удовлетворяющее следующим свойствам (аксиомам и нормам):

- $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x=0$ - Норма неотрицательна и равна нулю \Leftrightarrow когда вектор равен нулю.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Примеры норм: $x = (x_1, \dots, x_n)$

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ - первая норма
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ - вторая норма
- $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} (|x_i|)$ - бесконечная норма

Замечания:

- а) Фактически норма вектора есть ни что иное, как его длина.
- б) Мы живем в пространстве с нормой 2, но на практике обычно удобнее использовать 1-ую или бесконечную нормы.

Определение: Нормой матрицы A называется число, которое определяется таким образом:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Теорема 2.1:

Норма произведения не превосходит произведения норм.

Доказательство:

Имеем:

$$\begin{aligned} \|A \cdot B\| &= \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot Bx\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot (Bx)\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot Bx\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|Bx\|}{\|Bx\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot Bx\|}{\|Bx\|} \cdot \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \\ &= \max_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \cdot \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}$$

Следствие 2.2:

Норма k -ой степени

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k$$

Следующая цель – эффективно научиться считать нормы матрицы.

Теорема 2.3:

Легко вычисляются

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{по опр.}}{=} \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}| \quad (2.1)$$

максимальная сумма модулей элементов матрицы по столбцам.

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad (2.2)$$

максимальная сумма модулей элементов матрицы по строкам.

Доказательство формулы 2.2:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|Ax_i\|}{\max_i \|x_i\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \left\| \sum_j a_{ij} x_j \right\|}{\max_i \|x_i\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \sum_j |a_{ij}| \|x_j\|}{\max_i \|x_i\|} \leq \\ &= \max_{x \neq 0} \frac{(\max_i \sum_j |a_{ij}|) \cdot (\max_j \|x_j\|)}{\max_i \|x_i\|} \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \end{aligned}$$

Итак, мы доказали неравенство $\|A\|_{\infty} \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|$

для полного доказательства теоремы необходимо доказать второе неравенство (для этого достаточно определить вектор $\hat{x} \neq 0$, которого выполняется $\|A\hat{x}\|_{\infty} = \|A\|_{\infty} \cdot \|\hat{x}\|_{\infty}$ (*)).

если для некоторого вектора выполняется такое равенство, то: $\|A\|_{\infty} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{\|A\hat{x}\|_{\infty}}{\|\hat{x}\|_{\infty}}$

для окончательного доказательства остается определить вектор \hat{x} , для которого выполняется искомое равенство (*).

Для того чтобы определить искомый вектор \hat{x} со свойством (*), рассмотрим ту строку матрицы, в которой достигается максимальная сумма модулей элементов. Пусть это строка с номером i_0

$$i_0 : \sum_j |a_{i_0 j}| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

тогда положим соответствующую координату \hat{x}

$$\hat{x} = \begin{cases} +1, & a_{i_0 j} \geq 0 \\ -1, & a_{i_0 j} < 0 \end{cases}$$

Тогда координата с номером 0 получается умножением i_0 на столбец.

$$\|A\hat{x}\|_{\infty} \geq |(A\hat{x})_{i_0}| = \left| \sum_j a_{i_0 j} \cdot \hat{x}_j \right| = \sum_j |a_{i_0 j}|$$

$\|\hat{x}\|_{\infty} = 1$, с учетом этого факта получили искомое соотношение (*), что и доказывает формулу 2.2. Формулу 2.1 предлагается доказать самостоятельно.

2.Метод простых итераций (МПИ):

Пусть дана СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей А, сделаем с ней следующие преобразования: поделим каждую строку матрицы на диагональный элемент (предполагается что все элементы не нулевые). Данное преобразование называется приведением матрицы к виду удобному для итерации.

После данных преобразований по диагонали получаются единицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\dots - \text{какие то произвольные элементы, получившиеся путем преобразования исходных, по выше описанному способу})$$

разобьем матрицу А на сумму матриц Е и С, где матрица Е – единичная матрица и матрица С – по диагонали нули.

$$A = E + C$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(где элементы матрицы С : a_{ij} - и есть элементы матрицы А)

Исходное СЛАУ преобразовано таким образом:

$$\begin{aligned} Ax=b \quad (E+C)x=b \\ x+Cx=b \Rightarrow x=b-Cx \quad (2.3) \end{aligned}$$

СЛАУ приведенное к виду удобному для итераций.
Рассмотрим итерационный процесс (2.4)

$$x^{(k+1)} = b - Cx^{(k)}$$

Из вектора $x^{(k)}$ - получаем следующий вектор $x^{(k+1)}$.

Стартовый вектор $x^{(0)}$ - обычный нулевой вектор.

Теорема 2.4:

Если итерационный процесс (2.4) сходится, то есть существует

$x^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$, то этот предельный вектор $x^{(\infty)}$ и будет точным решением исходного

СЛАУ (2.3)

Доказательство:

Рассмотрим формулу (2.4)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (b - Cx^{(k)}) = b - Cx^{(\infty)}$$

Необходимо исследовать важный вопрос: когда итерационный процесс (2.4) – сходится?

Ответ дает теорема 2.5

Теорема 2.5(достаточное условие сходимости):

Если $\|C\| < 1$, то итерационный процесс 2.4 сходится, и скорость его сходимости – геометрическая прогрессия со знаменателем $\|C\|$.

Доказательство:

$$x^{(1)} = b - Cx^{(0)}$$

$$x^{(2)} = b - Cx^{(1)} = b - C(b - Cx^{(0)}) = b - Cb + C^2x^{(0)}$$

$$x^{(3)} = b - Cx^{(2)} = b - C(b - Cb + C^2x^{(0)}) = b - Cb + C^2b - C^3x^{(0)}$$

$$x^{(4)} = b - Cx^{(3)} = b - C(b - Cb + C^2b - C^3x^{(0)}) = b - Cb + C^2b - C^3b + C^4x^{(0)}$$

.....

$$x^{(k)} = b - Cb + C^2b - C^3b + \dots - C^{k-1}b + C^kx^{(0)}$$

Для того чтобы доказать, что данная последовательность сходится, докажем, что норма разности $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| \rightarrow 0$, считаем, что $k > l$

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x^{(l)}\| &= \|b - Cb + C^2b - C^3b + \dots + (-1)^{k-1}C^{k-1}b + (-1)^kC^kx^{(0)} - (b - Cb + C^2b + \dots + \\ &+ (-1)^{l-1}C^{l-1}b + (-1)^lC^lx^{(0)})\| = \|(-1)^lC^lb + (-1)^{l+1}C^{l+1}b + \dots + (-1)^{k-1}C^{k-1}b + (-1)^kC^kx^{(0)} - \\ &- (-1)^lC^lx^{(0)}\| \leq \|C^lb\| + \|C^{l+1}b\| + \dots + \|C^{k-1}b\| + \|C^lx^{(0)}\| \leq \|C\|^l\|b\| + \|C\|^{l+1}\|b\| + \dots + \|C\|^{k-1}\|b\| + \\ &+ \|C\|^l\|x^{(0)}\| \\ &\quad \underbrace{0}_{\|C\|^l\|b\|} \quad \underbrace{0}_{\|C\|^k\|b\|} \quad \underbrace{0}_{\|C\|^k\|x^{(0)}\|} \quad \underbrace{0}_{\|C\|^l\|x^{(0)}\|} \\ &\quad \frac{\|C\|^l\|b\| - \|C\|^k\|b\|}{1 - \|C\|} + \|C\|^k\|x^{(0)}\| + \|C\|^l\|x^{(0)}\| \end{aligned} \quad (2.5)$$

Следствие 2.6:

Если $\|C\| < 1$, то $x^{(k)} \rightarrow x^{(\infty)}$ - точное решение исходного СЛАУ (сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \|C\|$), а именно, если взять стартовый

$$\text{вектор } x^{(0)} = 0, \text{ то } \|x^{(k)} - x^{(\infty)}\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|}. \quad (2.6)$$

Следствие 2.7 (оценка необходимого числа шагов для достижения заданной точности):

Если заданна погрешность ε , то, сделав N шагов, мы получим решение с заданной

точностью, т. е. $\|x^{(n)} - x^{(\infty)}\| < \varepsilon$

↓
точное

Доказательство:

Решаем неравенство из формулы (2.6):

$$\frac{\|C\|^k}{1-\|C\|} \|b\| < \varepsilon; \quad k \geq \log_{\|C\|} \frac{\varepsilon(1-\|C\|)}{\|b\|} = \ln \frac{\ln(\frac{\varepsilon(1-\|C\|)}{\|b\|})}{\ln\|C\|}; \quad N = \left\lceil \frac{\ln(\frac{\varepsilon(1-\|C\|)}{\|b\|})}{\ln\|C\|} \right\rceil + 1$$

Пример СЛАУ, решенной МПИ:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 = -7 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

Матрица A имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} :5 \\ :(-3) \\ :4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(приводим к виду удобному для итераций - делим каждую} \\ \text{строку матрицы так, чтобы получить единицы по главной} \\ \text{диагонали)} \end{matrix}$$

Получаем матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/5 & -1/5 & 3/5 \\ 1/3 & 1 & 0 & 7/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1 & 3/4 \end{array} \right)$$

Разбиваем матрицу A на сумму матриц E и C :

$$A = E + C:$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|_{\infty} = \max(1/5 + 1/5; 1/3; 1/4 + 1/4) = 1/2$$

$$\|B\|_{\infty} = \max(3/5; 7/3; 3/4) = 7/3$$

Первый шаг по МПИ (начальный вектор X - нулевой):

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X^1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Второй шаг МПИ:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -37/60 \\ 3/15 \\ 11/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73/60 \\ 32/15 \\ 1/60 \end{pmatrix}$$

.....

$$\text{количество шагов } N = \left(\frac{\ln\left(\frac{10^{-3}(1-1/2)}{7/3}\right)}{\ln 1/2} \right) + 1 = \frac{\ln(0,0002)}{\ln 0,5} + 1 = \frac{-8,52}{-0,69} + 1 \approx 13,3$$

Замечание 2.8:

Заметим, что условие $\|C\|_{\infty} < 1$ для матрицы C , полученной из матрицы A с помощью стандартной процедуры приведения к виду удобному для итераций, равносильно тому, что для исходной матрицы A выполняется условие диагонального преобразования по строкам, т.е. в каждой строке диагональный элемент строго больше суммы модулей.

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Доказательство:

Заметим, что:

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & , j \neq i \\ 0 & , j = i \end{cases}$$

$$\|C\|_{\infty} < 1 \quad , \forall i \sum_{j \neq i} |C_{ij}| = \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

П.3 Модификация МПИ – метод Зейделя.

Рассмотрим не матричную, а формальную запись МПИ: $x^{(k+1)} = b - Cx^{(k)}$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & 0 & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Итак, получаем следующие формулы для МПИ:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= b_1 - (0 \cdot x_1^{(k)} + C_{12} \cdot x_2^{(k)} + C_{13} \cdot x_3^{(k)} + \dots + C_{1n} \cdot x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= b_2 - (C_{21} \cdot x_1^{(k)} + 0 \cdot x_2^{(k)} + C_{23} \cdot x_3^{(k)} + \dots + C_{2n} \cdot x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= b_3 - (C_{31} \cdot x_1^{(k)} + C_{32} \cdot x_2^{(k)} + 0 \cdot x_3^{(k)} + \dots + C_{3n} \cdot x_n^{(k)}) \\ &\dots \dots \dots \\ x_n^{(k+1)} &= b_n - (C_{n1} \cdot x_1^{(k)} + C_{n2} \cdot x_2^{(k)} + C_{n3} \cdot x_3^{(k)} + \dots + 0 \cdot x_n^{(k)}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В методе Зейделя в отличие от МПИ при вычислении координат вектора $x^{(k+1)}$ будем использовать не только лишь координаты вектора $x^{(k)}$ с предыдущего шага, но и уже найденные координаты вектора $x^{(k+1)}$.

$$(2.8) \quad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_1 - (0 \cdot x_1^{(k)} + C_{12} \cdot x_2^{(k)} + C_{13} \cdot x_3^{(k)} + \dots + C_{1n} \cdot x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = b_2 - (C_{21} \cdot x_1^{(k+1)} + 0 \cdot x_2^{(k)} + C_{23} \cdot x_3^{(k)} + \dots + C_{2n} \cdot x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = b_3 - (C_{31} \cdot x_1^{(k+1)} + C_{32} \cdot x_2^{(k+1)} + 0 \cdot x_3^{(k)} + \dots + C_{3n} \cdot x_n^{(k)}) \\ \dots \dots \dots \\ x_n^{(k+1)} = b_n - (C_{n1} \cdot x_1^{(k+1)} + C_{n2} \cdot x_2^{(k+1)} + C_{n3} \cdot x_3^{(k+1)} + \dots + 0 \cdot x_n^{(k)}) \end{cases}$$

Метод Зейделя сходится при условии $\|C\|_{\infty} < 1$ (как и МПИ). Сходится немного быстрее, но в целом скорость сходимости, как и в МПИ, не хуже геометрической прогрессии со знаменателем $q = \|C\|$.

Можно также использовать формулу из следствия 2.7.

Оценка трудоемкости решения СЛАУ различными методами:

Сравним метод Гаусса и МПИ:

Гаусс - $T = Cn^3$

МПИ - $T = Cn^2N$, где n – размер матрицы, N – количество итераций.

Если N велико, а n – мало, то метод Гаусса выгоднее.

Если же N – не очень большое, а n – велико (размер матрицы большой, но сходится довольно быстро), тогда выгоднее итерационный метод.

Замечание:

на практике метод Гаусса очень плохо работает с матрицами больших размеров, а итерационные методы одинаково успешно справляются с матрицами любых размеров. С другой стороны метод Гаусса работает всегда, а МПИ работает при условии $\|C\| < 1$, т.е. применим не для всех СЛАУ.

Вывод: для решения некоторых СЛАУ выгоднее использовать точные методы (метод Гаусса), а для некоторых – приближенные.

Тема 3. Методы решения нелинейных уравнений (НУ) и систем нелинейных уравнений (СНУ).

П.1 НУ и СНУ.

Будем рассматривать только системы, где количество уравнений совпадает с количеством неизвестных (как и в СЛАУ).

П.2 Простейшие методы решения НУ – метод половинного деления (МПД) или метод биссекций.

Алгоритм МПД:

1. Находим интервал a, b на котором функция меняет свой знак:

$f(a) \cdot f(b) < 0$ (имеет хотя бы один корень)

2. Делим интервал пополам точкой c :

$$c = \frac{a + b}{2}$$

3. Из 2-х полученных интервалов ($[a, c]$ и $[c, b]$) выбираем тот, на котором происходит смена знака:

$f(a) \cdot f(c) < 0$ - $[a, c]$

$f(c) \cdot f(b) < 0$ - $[c, b]$

4. Повторить пункт 2, если не достигли наперед заданной точности $\frac{|b - a|}{2} < \varepsilon$, иначе, если

$\frac{|b - a|}{2} \leq \varepsilon$, то идем на пункт 5.

5. В качестве точного решения берём $\frac{b + a}{2}$ (середина последнего интервала). От этой

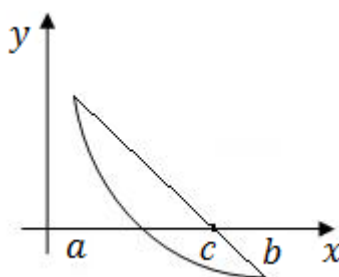
точки x расстояние до любой другой точки отрезка не превосходит $\varepsilon = \frac{|b - a|}{2}$.

Замечание:

В предложенном выше методе мы контролируем точность по x ($|x - x_{\text{точное}}| < \varepsilon$). Иногда, вместо этого требуется достигнуть заданной точности по y , т.е. $|f(x)| < \varepsilon$, но обычно, под точностью понимается точность по x .

П.3. Модификация МПД – Метод Хорд (МХ).

В отличие от МПД в МХ отрезок мы делим не пополам, а на отрезки, пропорциональные $f(a)$ и $f(b)$.



т.е. искомая точка С – точка пересечения прямой, проходящей через т. а и b, с Ох.

Уравнение прямой, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Пересечем эту прямую с Ох:

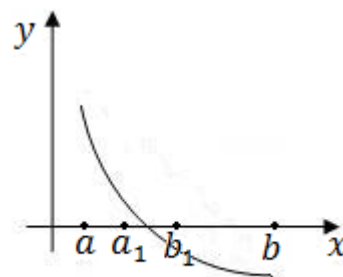
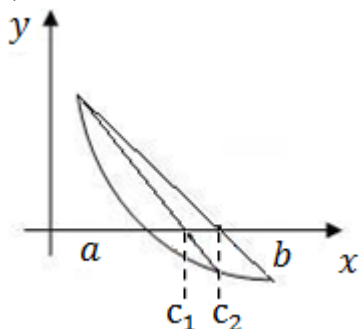
$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{-f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$(x - a)(f(b) - f(a)) = (b - a)(-f(a))$$

$$x = \frac{(b - a)(-f(a))}{f(b) - f(a)} + a = \frac{(b - a)(-f(a)) + af(b) - af(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{-bf(a) + af(a) + af(b) - af(a)}{f(b) - f(a)} =$$

$$= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (3.1)$$

Из 2-х новых интервалов $[a, c]$ и $[c, b]$ выбираем тот, на котором происходит смена знака (как и в МПД).



Как мы видим из рисунка, в МПД длина интервала уменьшается вдвое и стремится к нулю, в МХ этого не происходит – длина интервала не стремится к нулю. Один край интервала стоит на месте, а второй двигается к точному решению.

Критерий прерывания из МПД в МХ не работает, поэтому берем универсальный критерий прерывания:

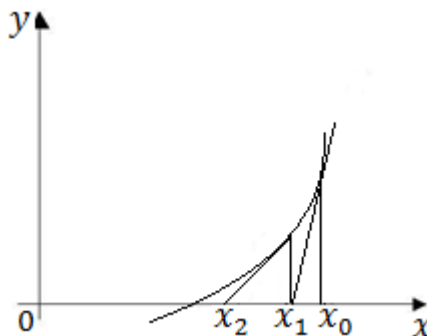
Если $|C^{(n)} - C^{(n-1)}| < \varepsilon$, то прекращаем вычисления. В качестве приближенного значения берём $x = C^{(n)}$.

В принципе, универсальный критерий прерывания можно использовать не только при решении МХ, но и при использовании других методов (в МПД, в итерационных методах решения СЛАУ). Недостаток – мы не можем гарантировать:

$$|C^{(n)} - C^{(n-1)}| < \varepsilon \Rightarrow |x_{\text{точное}} - C^{(n)}| < \varepsilon$$

и поэтому, если есть возможность избежать использования этого критерия прерывания, выгоднее использовать другой. Но, если ничего не остается, применяем универсальный критерий прерывания.

П.4 Метод Ньютона (метод касательных).



Алгоритм МН:

- 1) В качестве начального приближения $x^{(0)}$ берем точку, достаточно близкую к точному решению.
- 2) В этой точке проводим касательную к графику функций до пересечения с Ох – получаем $x^{(1)}$ и т.д.
- 3) Процедура повторяется, пока не будет достигнута заданная точность (универсальный критерий прерывания).

Формула метода Ньютона:

уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, находим точку пересечения с Ох

$$f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0$$

$$x = -\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} + x^{(0)} \quad (3.2)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

П.5 Скорости сходимости МПД, МХ, МН:

1) Скорость сходимости МПД:

На каждом шаге длина интервала уменьшается вдвое. Таким образом, через k шагов

достигается точность - $\frac{|b-a|}{2^{k+1}}$, решаем неравенство $\frac{|b-a|}{2^{k-1}} < \varepsilon$

$$\text{Необходимое число шагов: } N = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{2} \right\rceil + 1$$

То есть, МПД сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$ (для добавления одного верного десятичного знака – 3 шага).

2) Скорость сходимости МХ:

Теорема 3.1:

Если на интервале $[a, b]$ функция f – непрерывна и дифференцируема, ее производная на этом интервале имеет постоянный знак, т.е. f – либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает на всем интервале, то верна следующая оценка:

$$|x_{\text{точное}} - x^{(k)}| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x^{(k)} - x^{(k-1)}| \quad (3.3)$$

где $x^{(k)}$ – решение, найденное на k -ом шаге,

$$M_1 = \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| \quad m_1 = \min_{t \in [a, b]} |f'(t)|$$

Следствие 3.2:

Если $M_1 \leq 2 \cdot m_1$, то если $|x^{(k-1)} - x^{(k)}| < \varepsilon \Rightarrow |x_{\text{точное}} - x^{(k)}| < \varepsilon$ (так как $\frac{M_1 - m_1}{m_1} < 1$),

т.е. универсальный критерий прерывания работает корректно.

Теорема 3.3:

Скорость сходимости в МХ не хуже геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{M_1 - m_1}{m_1}, \text{ а именно имеет следующая оценка } |x^{(k)} - x_{\text{точное}}| < \left(\frac{M_1 - m_1}{m_1} \right)^k \cdot \text{const}$$

Комментарии:

Если M_1 и m_1 очень близки друг к другу, например - $M_1 < 1.1m_1$, то тогда

$$q = \frac{M_1 - m_1}{m_1} < 0.1 \text{ и скорость сходимости МХ будет выше, чем скорость сходимости МПД.}$$

Итак, выгодно, чтобы M_1 и m_1 были близки друг к другу, это будет так, если длина интервала будет стремиться к нулю, но в МХ это не так, это происходит в МПД, поэтому выгодно комбинировать МХ и МПД.

3) Скорость сходимости МН:**Теорема 3.4:**

Если функция $f(x)$ дважды непрерывна и дифференцируема на $[a, b]$ и f' , и f'' на нем не меняют свои знаки, т.е. монотонно возрастает или убывает и при этом не меняет характера выпуклости. Имеет место неравенство:

$$|x^{(k+1)} - x_{\text{точное}}| \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x^{(k)} - x_{\text{точное}}|^2 \quad (3.4)$$

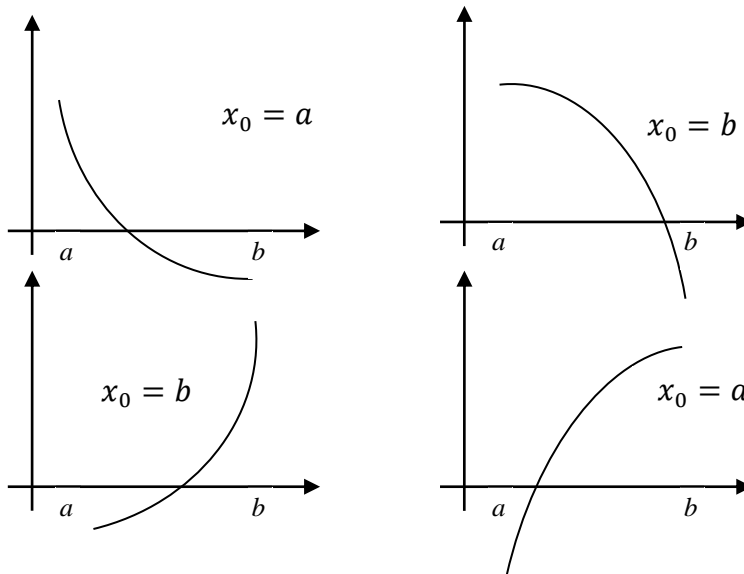
$$M_2 = \max_{t \in [a, b]} |f''(t)| \quad ; \quad m_1 = \min_{t \in [a, b]} |f'(t)|$$

Комментарии:

Квадрат обеспечивает удваивание числа верных знаков после каждой итерации. Таким образом, метод Ньютона работает гораздо быстрее, нежели МПД или МХ. МН имеет гипергеометрическую скорость сходимости.

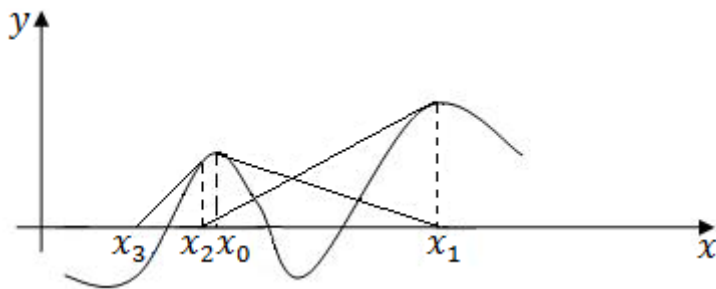
Тонкие места МН:

1) Какую из 2-х точек интервала $[a, b]$ выбрать в качестве начального приближения x_0 .



В качестве стартовой точки $x^{(0)}$ выгоднее брать точку, в которой знак 2-ой производной совпадает со знаком функции.

2) В отличие от МПД и МХ – МН сходится не всегда.



МН может и не сходиться(*)

будет сходиться, когда $x^{(0)}$ близко к корню, если $x^{(0)}$ выбрано неудачно (далеко от корня).

П.6 Многомерный вариант метода Ньютона:

МПД и МХ применимы только для решения НУ, метод Ньютона может быть легко видоизменен, и его можно применять для решения СНУ.

Рассмотрим СНУ n на n (n – уравнений, n – неизвестных):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$F(X)=0, \quad X=(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

При решении СНУ поступаем таким же образом, как и при решении НУ.

1) Выбираем стартовую точку $x^{(0)}$, достаточно близкую к корню.

2) В одномерном варианте мы заменяли функцию на касательную и приравнивали её к нулю. Аналогичным образом поступаем и для функции многих переменных, только там заменяем f' на дифференциал, т.е.:

$$f(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0$$

$$F(X) = F(X^{(0)}) + \partial F|_{X^{(0)}} \cdot (X - X^{(0)}) = 0$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{X^{(0)}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \dots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix}$$

Решаем данное уравнение относительно X :

$$F(X^{(0)}) + \partial F|_{X^{(0)}} \cdot (X - X^{(0)}) = 0$$

$$\partial F|_{X^{(0)}} \cdot (X - X^{(0)}) = -F(X^{(0)})$$

↓

W – матрица частных производных (матрица Якоби)

умножим на матрицу обратную матрице W слева:

$$X - X^{(0)} = -W^{-1}|_{X^{(0)}} \cdot F(X^{(0)}) \quad (3.5)$$

Окончательный вид формулы многомерного варианта метода Ньютона:

$$X^{(k+1)} = \underbrace{X^{(k)} - W^{-1}|_{X^{(k)}} \cdot F(X^{(k)})}_{Y^{(k)}} \quad (3.6)$$

Замечание:

есть 2 варианта реализации вычисления по формуле (3.6):

а) Явно вычислить обратную матрицу (например, с помощью присоединенной матрицы)

б) Заметим, что вектор $Y^{(k)}$ есть ни что иное, как решение СЛАУ

(3.7) $W^{-1}|_{X^{(k)}} \cdot Y^{(k)} = F(X^{(k)})$, поэтому мы можем не вычислять обратную матрицу, а только решить СЛАУ (3.7) (например методом Гаусса) и решение этой матрицы подставить в (3.7б) $X^{(k+1)} = X^{(k)} - Y^{(k)}$.

Пример решения СЛУ методом Ньютона:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

Приводим к виду $F(X)=0$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

$$F = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}, \text{ в качестве стартовой точки возьмем } X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Сделаем один шаг по многомерному методу Ньютона:

$$F(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1 \end{pmatrix} W|_{X^{(0)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} W^{-1}|_{X^{(0)}} = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 4/8 \\ 7/20 & 4/20 & -3/20 \\ 11/40 & -7/40 & 1/40 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} - W^{-1}|_{X^{(0)}} F(X^{(0)})$$

$$F(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 4/8 \\ 7/20 & 4/20 & -3/20 \\ 11/40 & -7/40 & 1/40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 1/2 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

||
 $X^{(1)}$

Затем находим $X^{(2)}$ и т.д., пока не будет достигнута заданная точность:

$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < \varepsilon$$

П.7 Вариации метода Ньютона:

7.1 Комбинированный метод (сочетание МН и МХ):

МН быстро сходится, но, увы, не всегда. МХ всегда сходится, но не быстро. Комбинируя оба метода, получаем метод, обладающий достоинствами МХ и МН, а именно – сходится всегда и очень быстро (со скоростью МН).

На каждом шаге КМ проводим хорду, и касательную, получаем новый интервал.

7.2 Видоизмененный метод Ньютона:

Иногда вычисление производной функции вызывает большие проблемы и чтобы на каждом шаге не вычислять производные, мы вычисляем производную один раз в точке $X^{(0)}$ и используем формулу видоизмененного МН:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{F(X^{(k)})}{F'(X^{(0)})} \quad (3.8)$$

Видоизмененный МН сходится хуже, чем обычный МН – со скоростью геометрической прогрессии. Эффекта удваивания числа верных знаков после каждой итерации в нем нет.

П.8 Метод итераций, решение НУ и СНУ:

8.1 Одномерный вариант МИ.

Предполагается, что НУ приведено к виду удобному для итераций.

$$x = u(x) \quad (3.9)$$

Запускаем итерационный процесс (3.10):

$$x^{(k+1)} = u(x^{(k)}) \quad (3.10)$$

Теорема 3.5:

Если итерационный процесс сходится, то сходится к точному решению НУ (3.9), при условии непрерывности функции u .

Доказательство:

в формуле (3.10) переходим к пределу

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} u(x^{(k)})$$

предел заносим внутрь, используя непрерывность функции u .

$$x^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} u(x^{(k)}) = u\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}\right) = u(x^{(\infty)})$$

Рассмотрим пример решения НУ:

$x^2 - 2 = 0$ приводим к виду удобному для итераций, добавим x с обеих сторон:

$$x = x^2 + x - 2 = u(x)$$

$$x^{(0)} = 1$$

$$x^{(1)} = u(x^{(0)}) = 0 \quad \text{процесс заиклился – не сходится}$$

$$x^{(2)} = -2$$

$$x^{(3)} = 0$$

Попробуем по-другому: перед тем, как прибавить x , разделим на 2.

$$x = \frac{x^2 + x}{2} + x = u(x)$$

запускаем итерационный процесс для данной функции u :

$$x^{(0)} = 1$$

$$x^{(4)} = -1.453$$

$$x^{(1)} = 1/2$$

$$x^{(5)} = -1.397$$

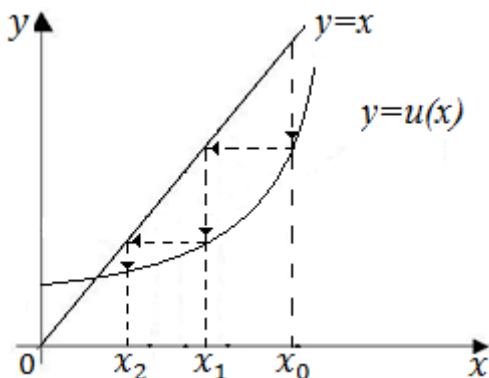
$$x^{(2)} = -3/8$$

$$x^{(6)} = -1.421$$

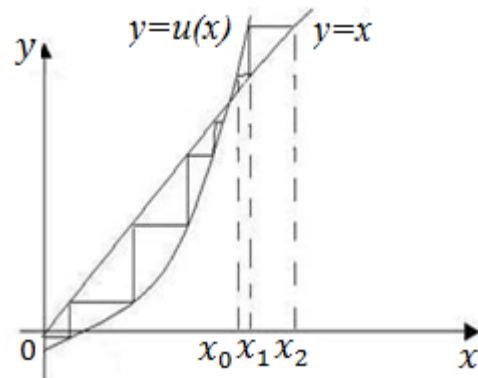
$$x^{(3)} = -1.304$$

данный итерационный процесс сходится к $-\sqrt{2} = x^{\infty}$.

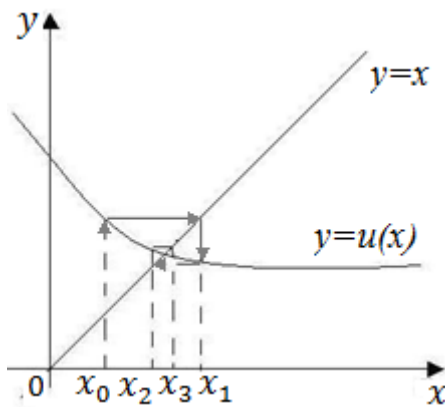
Графическая интерпретация МИ:



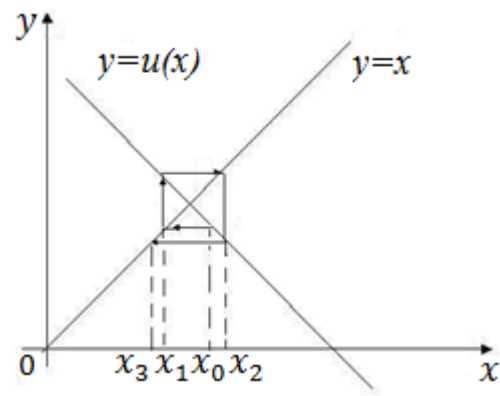
итерационный процесс сходится и
сходится монотонно (рис.1)



итерационный процесс расходится
монотонно (рис.2)



сходится не монотонно, по спирали
(рис.3)



расходится не монотонно, по спирали
(рис.4)

Заметим закономерности:

1) Если $u(x)$ возрастает, то итерационный процесс всегда ведет себя монотонно, при этом он может и сходиться и расходиться.

Если же $u(x)$ убывает, то итерационный процесс ведёт себя не монотонно, идет по спирали, при этом он может, как сходиться, так и расходиться.

2) Если $\|u'(x)\| < 1$ то итерационный процесс сходится (рис.1 и рис.3).

Если же $\|u'(x)\| > 1$, то итерационный процесс расходится (рис.2 и рис.4)

Метод итераций может применяться не только для решения НУ, но и для решения СНУ. Все происходит точно так же, т.е. СНУ приводим к виду удобному для итераций.

X – вектор, U – вектор функция.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ u_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = U(x^{(k+1)}) \quad (3.10)$$

Если итерационный процесс (3.10) то он сходится к точному решению - x^∞ .

Наша задача выяснить условия, при которых итерационный процесс сходится.

Ответ на этот вопрос даёт теорема 3.6.

Теорема 3.6:

Итерационный процесс 3.10 сходится, если отображение U – сжимающее, т.е. для любых X, Y $\|U(X) - U(Y)\| < C \cdot \|X - Y\|$ (3.11), где $C = \text{const}$, $C < 1$ (коэффициент сжатия).

Доказательство:

$$\|X^{(i+1)} - X^{(i)}\| = \|U(X^{(i)}) - U(X^{(i-1)})\| \leq C \|X^{(i)} - X^{(i-1)}\| = C \cdot (\|U(X^{(i-1)}) - U(X^{(i-2)})\|) \leq$$

$$\leq C^2 \|X^{(i-1)} - X^{(i-2)}\| = \dots \leq C^i \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \quad (*)$$

докажем $\|X^{(k)} - X^{(l)}\| \rightarrow 0$, при $k, l \rightarrow \infty$ тем самым покажем, что итерационный процесс сходится.

$$\|X^{(k)} - X^{(l)}\| = \|X^{(k)} - X^{(k-1)} + X^{(k-1)} - X^{(k-2)} + X^{(k-2)} - X^{(k-3)} + \dots + X^{(l+1)} - X^{(l)}\| \leq$$

$$\leq \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| + \|X^{(k-1)} - X^{(k-2)}\| + \dots + \|X^{(l+1)} - X^{(l)}\| \leq$$

$$\leq C^{k-1} \|X^{(1)} - X^{(0)}\| + C^{k-2} \|X^{(1)} - X^{(0)}\| + \dots + C^l \|X^{(1)} - X^{(0)}\| =$$

$$= (\text{по формуле геометрической прогрессии со знаменателем } C) = \frac{(C^k - C^l) \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\|}{C - 1}$$

$$= \frac{(C^l - C^k) \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\|}{1 - C} \rightarrow 0, (k, l \rightarrow \infty)$$

Как нетрудно заметить, мы попутно оценили скорость сходимости МИ. Сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем C , где C – коэффициент сжатия отображения U .

Теперь наша задача научиться оценивать C – коэффициент сжатия. Ответ на этот важный вопрос даёт теорема (3.7)

Теорема 3.7:

$$C \leq \max_{x \in D} \|W(X)\|$$

Для области D коэффициент сжатия отображения u – максимум нормы матрицы Якоби – матрицы частных производных отображения u .

$$C = \max_{x \in D} \left\| \left(\frac{\partial(u_i)}{\partial x_j} \right)_{i,j} \right\|$$

Таблица сравнительных характеристик методов решения НУ и СНУ:

	МПД	МХ	МН	МИ
Всегда ли работает (сходится)	Да	Да	Нет (сходится, когда $X^{(0)}$ близко к $X^{(\infty)}$)	Нет (сходится, если $ u' < 1$ или $\ W\ < 1$)
Скорость сходимости	Геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1/2$ $ x^{(k)} - x^{(\infty)} < \frac{b-a}{2^{k+1}}$	Геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1/2$ $ x^{(k)} - x^{(\infty)} < const \cdot q^k$	Сходится быстрее других методов после каждой итерации число верных знаков удваивается.	Геометрическая прогрессия со знаменателем C , где $C = \max_{x \in D} u'(x) = \max_{x \in D} \ W(X)\ $
Можно ли решить СНУ многомерным аналогом	Нет	Нет	Да	Да
Критерий прерывания	$\frac{b-a}{2} < \varepsilon$	Универсальный критерий прерывания $ X^{(k)} - X^{(k-1)} < \varepsilon$		

Замечания:

1) На самом деле во всех методах имеется конструктивная оценка скорости сходимости, с помощью которой мы можем вычислить N – необходимое количество шагов. Но на практике пользоваться этими оценками очень не удобно (т.к. приходится находить максимум и минимум производных). Поэтому в 3-х последних методах (МХ, МН, МИ) мы применяем универсальный критерий прерывания.

2) Во всех методах, кроме МН, скорость сходимости есть геометрическая прогрессия, поэтому для достижения одного верного десятичного знака нам потребуется $\log_{1/C} 10$ шагов, где C – знаменатель геометрической прогрессии. МН сходится быстрее, в нем число верных знаков примерно удваивается с каждым шагом.

Тема 4: Интерполяция.

П.1 Постановка задачи интерполяции, общий подход к её решению:

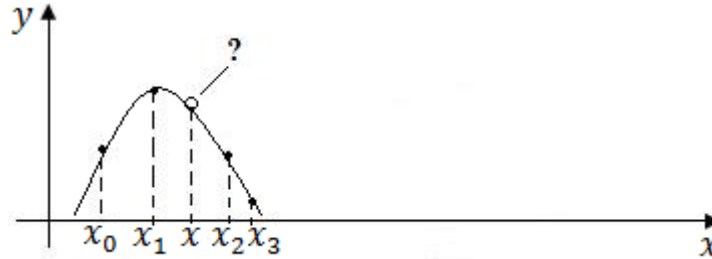
Пусть имеются точки $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ($n+1$ точка), в которых нам известны значения функции $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Задачи интерполяции: научиться вычислять значение функции в любой наперед заданной точке.

Комментарии: интерполяция иногда делится на два вида:

- 1) $x \in [x_0, x_n]$ - собственная интерполяция.
- 2) $x \notin [x_0, x_n]$ - экстраполяция.

Геометрическая интерпретация:



Общая идея интерполяции:

Заменяем неизвестную нам функцию f , на некоторую интерполирующую в узлах x_i $g(x_i)$ (т.е. $g(x_i) = f(x_i) = y_i$), которая легко вычисляется, т.е. функция g должна обладать двумя свойствами:

1. $g(x_i) = f(x_i) = y_i$
2. g – легко вычисляется в любой наперед заданной точке x .

Для этого поступаем следующим образом:

Фиксируем класс функций N , среди которых будем подбирать искомую функцию g . При этом класс N должен быть достаточно большим, чтобы g нашлась, но с другой стороны – достаточно маленьким, чтобы g была бы там единственной.

В зависимости от класса N интерполируемых функций будем говорить об интерполяции:

- а) полиномами
- б) сплайнами
- в) тригонометрическими функциями

П.2 Интерполяция многочленами.

2.1 Формула Лагранжа, интерполяционный многочлен:

Теорема 4.1:

Для любых $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ и $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ существует единственный многочлен $p \in P_n$ (т.е. многочлен p в степени $\leq n$) такой, что $p(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$

Доказательство:

Докажем сначала единственность многочлена p . Предположим, что существует два интерполирующих многочлена p_1 и p_2 . Имеем $p_1(x_i) = y_i$

$p_2(x_i) = y_i$, где $i = \overline{0, n}$. Рассмотрим многочлен $h = p_1 - p_2$, очевидно его степень не выше n , с другой стороны он имеет как минимум $(n+1)$ корней. Как известно из алгебры, у ненулевого многочлена степени n не более n корней, а наш многочлен h имеет $(n+1)$ корней, следовательно он тождественно равен 0. $h \equiv 0$ и $p_1 = p_2$. Докажем теперь существование многочлена p : рассмотрим для этого следующий набор многочленов

$$p_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i q_i(x_j) \quad (4.2a)$$

$$\text{где } q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (4.2b)$$

Заметим, что все q_i многочлены степени n , следовательно, $p_n(x)$ будет многочлен степени не выше n . Докажем, что $p_n(x)$ искомый, т.е. $p_n(x_i)=y_i$ для этого подсчитаем q_i в точках x_i

Заметим, что

$$q_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases} \quad (*)$$

Так как один из сомножителей в числителе занулится. Учитывая (*) приходим к выводу

$$p_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i q_i(x_j) = 0 + 1 \cdot y_j + 0 \dots + 0 = y_j, \text{ т.е. для данного многочлена (4.2) выполняется}$$

свойство интерполяции. Осталось заметить, что степень многочлена из формулы (4.2) не выше n .

Частные случаи интерполяционного многочлена Лагранжа:

$n=1$ (интерполируем по двум точкам)

$$p_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$n=2$ (интерполируем по трем точкам)

$$p_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$n=3$ (интерполируем по четырем точкам)

$$p_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Замечание:

Интерполяционный многочлен из формулы (4.2) называют интерполяционным многочленом Лагранжа. Вообще говоря, интерполяционный многочлен единственен, как доказано в теореме 4.1, но вариантов для вычисления этого многочлена (формул) существует много. Все они выдадут в одной точке один и тот же результат, но вариантов для вычисления будет много. Каждый из этих вариантов имеет свои достоинства и недостатки.

Рассмотрим следующий вариант вычисления интерполяционного многочлена.

2.2 Схема Эйткена:

Теорема 3.2:

если (1) $p_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x)$ - многочлен, интерполирующий функцию f в точках $x_0 \dots x_{n-1}$ (степени не выше $n-1$), а (2) $p_{x_1, x_2 \dots x_n}(x)$ - многочлен, интерполирующий функцию в точках $x_1 \dots x_n$ (степени не выше $n-1$), то многочлен $p_{x_0, x_1 \dots x_n}(x)$ - многочлен, интерполирующий функцию в точках $x_0 \dots x_n$ (степени не выше n) может быть вычислена по формуле:

$$p_{x_0, x_1 \dots x_n}(x) = \frac{p_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x)(x-x_n) - p_{x_1, x_2 \dots x_n}(x)(x-x_0)}{x_0 - x_n} \quad (4.3)$$

Доказательство:

Заметим, что многочлен $p_{x_0, x_1 \dots x_n}(x)$ имеет степень не выше n , так как каждый из многочленов (1) и (2) имел степень не больше чем $(n-1)$, мы домножали на многочлен первой степени.

Осталось проверить, что данный многочлен в узлах интерполяции задает значения y_i .

$$p_{x_0, x_1 \dots x_n}(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$$

Рассмотрим три возможности:

1. Проверим, что свойства интерполяции выполняются в крайних точках x_0 и x_n :

$$a) p_{x_0, x_1 \dots x_n}(x_0) = \frac{p_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x_0)(x_0 - x_n) - p_{x_1, x_2 \dots x_n}(x_0)(x_0 - x_0)}{x_0 - x_n} = \frac{y_0(x_0 - x_n) - p_{x_1 \dots x_n}(x_0) * 0}{x_0 - x_n} = y_0$$

$$б) p_{x_0, x_1 \dots x_n}(x_n) = \frac{p_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x_n)(x_n - x_n) - p_{x_1, x_2 \dots x_n}(x_n)(x_n - x_0)}{x_0 - x_n} = y_n$$

2. Проверим, что (4.3)-интерполирующий, если i – не крайние точки:

$$p_{x_0, x_1 \dots x_n}(x_i) = \frac{p_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x_i)(x_i - x_n) - p_{x_1, x_2 \dots x_n}(x_i)(x_i - x_0)}{x_0 - x_n} = \frac{y_i((x_i - x_n) - (x_i - x_0))}{x_0 - x_n} = y_i$$

Замечание:

В теореме 4.2 приведем другой способ вычисления интерполяционного многочлена, существование и единственность которого были доказаны в теореме 4.1. В теореме 4.1 была формула Лагранжа, в теореме 4.2 схема Эйткена.

Обобщим формулу из теоремы 4.2:

$$p_{x_k, x_1 \dots x_l}(x) = \frac{p_{x_k, x_1 \dots x_{l-1}}(x)(x - x_l) - p_{x_{k+1}, x_2 \dots x_l}(x)(x - x_k)}{x_k - x_l} \quad (4.4)$$

На основании (4.4) и очевидного наблюдения $p_{x_i}(x) = y_i$ (т.к. мы должны подобрать многочлен 0-ой степени, значение которого в т. $x_i = y_i$), приходим к следующей картине для вычисления интерполяционного многочлена:

$$\begin{array}{l} y_0 = p_{x_0}(x) \\ y_1 = p_{x_1}(x) \\ y_2 = p_{x_2}(x) \\ y_3 = p_{x_3}(x) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} p_{x_0 x_1}(x) \\ p_{x_1 x_2}(x) \\ p_{x_2 x_3}(x) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} p_{x_0 x_1 x_2}(x) \\ p_{x_1 x_2 x_3}(x) \end{array} \rightarrow p_{x_0 x_1 x_2 x_3}(x) \quad (4.5)$$

(4.5) – схема Эйткена вычисления интерполяционного многочлена, все слияния производятся по формуле (4.4).

Оценим трудоёмкость вычисления интерполяционного многочлена по формуле Лагранжа и по схеме Эйткена:

1) Формула Лагранжа:

$(n+1)$ слагаемых, в каждом $2n$ умножений +1 деление + $2n$ (+/-). Итого

$$\tau \approx 2n^2 (\text{умножений}) + 2n^2 (+/-) + n(\text{делений})$$

2) Схема Эйткена:

Слияний на первом этапе – $(n-1)$, на втором $(n-2)$, ..., итого $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$

В каждом действии $4(+/-) + 2(*) + 1(/)$ таким образом, $\frac{n^2}{2}$ действий.

$$\tau \approx n^2 (\text{умножений}) + 2n^2 (+/-) + \frac{n^2}{2} (\text{делений}) \approx 3.5n^2$$

С одной стороны в формуле Лагранжа количество операций немного больше, но в схеме Эйткена на порядок больше делений.

1. Главное достоинство схемы Эйткена состоит в том, что вычисления по этой схеме можно оборвать в любой момент, при этом мы получим многочлен, который интерполирует функцию не во всех точках, а лишь в некоторых, но его значение будет близко к И.М. В формуле Лагранжа прерывать вычисления раньше времени нельзя.

2. Схема Эйткена более устойчива к вычислительным погрешностям. Поэтому можно прибавлять по одному узлу интерполяции слева и справа, пока не достигнем заданной точности (универсальный критерий прерывания).

2.3 Погрешности интерполяционного многочлена:

При интерполировании возникает два типа погрешностей:

1. Погрешность усечения (возникает из-за замены функции на интерполирующий многочлен);
2. Погрешность округления (возникает из-за того, что значения интерполируемой функции f в узлах интерполяции известны не точно, а приближенно, с некоторой погрешностью η)
Обычно возникает из-за того, что значения функции в точках x_i округляются.

Замечание: если мы округляем до 4-х знаков, то погрешность $5 \cdot 10^{-5}$.

Теорема 4.3(оценка $\varepsilon_{\text{усеч.}}$ при интерполировании многочлена):

$\varepsilon_{\text{усеч.}}$ с учетом знака для интерполирующего многочлена (остаточный член И.М.)

$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$, может быть вычислен по формуле

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0) \dots (x-x_n), \quad \text{где } f(x) - \text{точное значение, } p_n(x) -$$

приблизительное значение, $f^{(n+1)}$ - $(n+1)$ производная, с некоторая точка $c \in [(x_0, x_n), x]$ - наименьший интервал, который содержит все узлы интерполяции и точку x .

Функция f должна быть $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируема.

Доказательство:

Рассмотрим $\Pi(x) = (x-x_0) \dots (x-x_n)$ со старшим коэффициентом, равным 1.

Введем функцию $u(x) = r_n(x) - k\Pi(x)$, где k некоторая const подобранная специальным образом, для этого фиксируем точку \bar{x} , не совпадающую ни с одним узлом интерполяции

$$k = \frac{r_n(\bar{x})}{\Pi(\bar{x})}, \quad \text{то есть подбираем } k \text{ так, чтобы } u(\bar{x}) = 0$$

$$u(x) = f(x) - p_n(x) - \frac{r_n(\bar{x})}{\Pi(\bar{x})} \Pi(x)$$

$$u(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) - k * 0 = 0 \quad i = \overline{0, n}$$

$$u(\bar{x}) = r_n(\bar{x}) - \frac{r_n(\bar{x})}{\Pi(\bar{x})} \Pi(\bar{x}) = 0$$

Следовательно, функция u на интервале $[x_0, x_n, x]$ обращается в 0, как минимум $(n+2)$ раза.

Тогда, ее производная u' обращается в 0, как минимум $(n+1)$ раз. u'' как минимум n раз.

Следовательно, $u^{(n+1)}$ обращается на этом интервале хотя бы один раз в 0, т.е. существует

$$c \in [(x_0, x_n), \bar{x}]$$

$$u^{(n+1)}(c) = 0$$

$$u^{(n+1)}(c) = (f(c) - p_n(c))^{(n+1)} - k(\Pi(\bar{x}))^{(n+1)} = f^{(n+1)}(c) - \underbrace{p_n(c)^{(n+1)}}_{0 \text{ т.к. } (n+1) \text{ производная равна } 0} - k(n+1)! = 0$$

$$k(n+1)! - \text{т.к. этот многочлен степени } (n+1)$$

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{r_n(\bar{x})}{\Pi(\bar{x})} (n+1)!$$

$$r_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Pi(\bar{x})$$

Заменим \bar{x} на x и получим формулу.

Следствие 4.4:

$$\varepsilon_{\text{усеч.}} = |r_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)\dots(x-x_n)| \quad (4.7)$$

$$\text{где } M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$$

Замечание:

(4.7) – удобна тем, что в ней нет точки c , местоположение которой мы не знаем.

Пример:

Вычислена и оценка $\varepsilon_{\text{усеч}}$ в узлах

$x_0=100, x_1=121, x_2=144, y_0=10, y_1=11, y_2=12$.

Найдем $\sqrt{115}$, используя интерполяцию по трем точкам.

$$p_2(115) = 10 \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} + 11 \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} + 12 \frac{(115-121)(115-100)}{(144-100)(144-121)} = 10.7228$$

$$\varepsilon_{\text{реальное}} = 1 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Оценим } \varepsilon_{\text{усеч}}: \quad \varepsilon_{\text{усеч}} \leq \frac{M_3}{3!} |(115-100)(115-121)(115-144)| = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$f''' = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$M_3 = \max \left| \frac{3}{8} x^{-5/2} \right| = \frac{3}{8} 10^{-5}$$

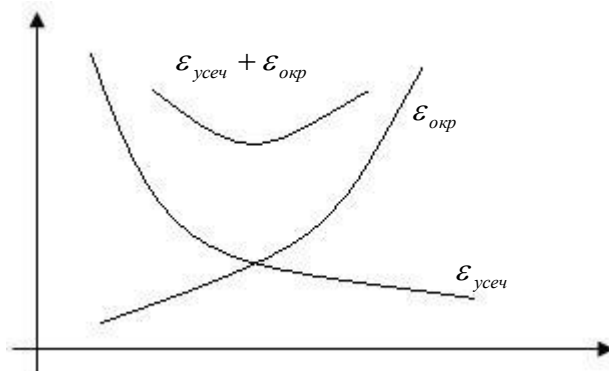
$\varepsilon_{\text{окр}} = 0$, т.к. значения функции в узлах интерполяции были известны точно.

$$\varepsilon_{\text{реальное}} = 10^{-3} \leq \varepsilon_{\text{усеч}} + \varepsilon_{\text{окр}} = 2 \cdot 10^{-3}$$

Замечание:

Заметим, что с увеличением числа узлов интерполяции $\varepsilon_{\text{окр}}$ быстро стремится к ∞ , а

$$\varepsilon_{\text{усеч}} \rightarrow 0$$



Необходимо, чтобы $\varepsilon_{\text{усеч}} + \varepsilon_{\text{окр}}$ были бы малы. Для этого число узлов интерполяции должно быть не слишком маленьким (т.к. $\varepsilon_{\text{усеч}}$ будет велико), но и не слишком большим (т.к. $\varepsilon_{\text{окр}}$ будет велико).

Если же узлов много, то возьмем ближайшие значения, а остальные откинем.

2. 4. Конечные разности.

Формулы Ньютона интерполяционного многочлена.

Конечной разностью функции $y=f(x)$ называется функция $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, где h – фиксированный шаг. Конечные разности иногда называются конечными разностями первого порядка.

Функция обозначается: $\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$

Принимаем $\Delta^0 f(x) = f(x)$

Считаем:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta(\Delta f(x))) = \Delta(f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)) =$$

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f(x+n-k)h$$

Таблица конечных разностей:

Если функция $f(x)$ задана своими значениями y_i в равноотстоящих узлах x_i с шагом h , $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$, то конечные разности в точках x_i удобно вычислять с помощью таблицы конечных разностей.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

$x_i = x_0 + ih = 0 + i \cdot 1$, $i = \overline{0, 5}$

x	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-1	3	8	12	0	0
1	2	11	20	12	0	
2	13	31	32	12		
3	44	63	44			
4	107	107				
5	214					

Наблюдения:

1. Каждый раз длина столбца уменьшается на 1, при $n=5$ доходим до Δ^5 .
2. Конечная разность похожа на производную, в нашем случае – многочлен третьей степени, поэтому Δ^3 не нулевые (следующие – нулевые)

Теорема 4.4 (о связи между конечной разностью и производной):

Если функция f , n – раз непрерывно дифференцируема, то

$$\Delta^n f(x) = h^n f^n(\xi), \text{ где точка } \xi \in [x_0, x_n]$$

Комментарии:

При $n=1$ это в чистом виде теорема Лагранжа из курса мат.анализа.

Удобно записывать формулу интерполяционного многочлена через конечные разности (1-ую и 2-ую формулы Ньютона интерполяционного многочлена)

Первая формула Ньютона ИМ:

$$(4.9) P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)\dots(q-n+1), \text{ где } q = \frac{x-x_0}{h}$$

Вторая формула Ньютона ИМ:

$$(4.10) P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q+1)\dots(q+n-1), \text{ где } q = \frac{x-x_n}{h}$$

y – убывает, т.к. столбец уменьшается.

Комментарии:

1. В 1-ой формуле Ньютона Δ берем из нулевой строки таблицы конечных разностей.
2. Во 2-ой формуле Ньютона Δ берем из нижней побочной диагонали в таблице конечных разностей.
3. И 1-ая и 2-ая формулы Ньютона могут быть оборваны, если мы возьмем в 1-ой формуле Ньютона не $(n+1)$ слагаемых, а $(k+1)$ (до Δ^k), то мы получим интерполяционный многочлен, который интерполирует функцию в $(k+1)$ крайних точках (от x_0 до x_k). Аналогичным образом и со 2-ой формулой Ньютона (т.е. возьмем не $(n+1)$ слагаемых, а $(k+1)$ (до Δ^k), то мы получим интерполяционный многочлен, который интерполирует функцию в $(k+1)$ крайних точках (от x_n до x_{n-k})).
4. И в том и в другом случае мы можем оборвать вычисления раньше времени, используя универсальный критерий прерывания.

5. При добавлении одного нового слагаемого, в 1-ой формуле Ньютона мы добавляем один новый узел интерполяции, двигаясь слева направо, а во 2-ой формуле Ньютона – справа налево.

Погрешности формул Ньютона ИМ:

Т.к. формула Ньютона один из вариантов вычисления ИМ, то формулы для $\varepsilon_{\text{усеч}}$ и $\varepsilon_{\text{окр}}$ можем взять прежние.

$$\varepsilon_{\text{окр}} \leq 2^{n-1} \eta$$

По теореме 4.3:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{усеч}} &= \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} (x-x_0) \dots (x-x_n) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-x_0}{h} = q \\ x-x_0 = hq \\ x-x_1 = h(q-1) \end{array} \right\} = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} hq \cdot h(q-1) \dots h(q-n) = \\ & \text{по теореме 4.4} \approx \Delta^{(n+1)} y_0 \\ &= \frac{h^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} q(q-1) \dots (q-n) = \frac{\Delta^{(n+1)} y_0}{(n+1)!} q(q-1) \dots (q-n) \quad \text{где} \quad q = \frac{x-x_0}{h} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Комментарии:

Как мы видим из формулы (4.11) $\varepsilon_{\text{усеч}}$ в формуле Ньютона есть ничто иное как первое отбрасываемое слагаемое. Таким образом, при вычислении по формуле Ньютона, мы постоянно оцениваем $\varepsilon_{\text{усеч}}$ и в нужный момент мы можем прервать вычисления.

2.5. Центральные формулы для интерполяционного многочлена – формулы Бесселя и Стирлинга.

Формулы Ньютона (4.9), (4.10) – односторонние, а Бесселя и Стирлинга – центральные, т.е. в этих формулах, при добавлении новых слагаемых, узлы интерполяции добавляются справа и слева от точки X, поэтому удобны при практическом вычислении.

В формуле Стирлинга интерполяция проходит по $(2n+1)$ точке:

$(x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} p_{2n}(x) &= y_0 + \frac{q}{1!} \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1^2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \\ &+ \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{5!} \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!} \Delta^6 y_{-3} + \dots + \\ &+ \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2) \dots (q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{2} + \frac{q(q^2-1^2) \dots (q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}, \end{aligned}$$

$$\text{где } q = \frac{x-x_0}{h} \quad (4.12)$$

В формуле Бесселя интерполяция проходит по $(2n+2)$ точкам:

$(x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$

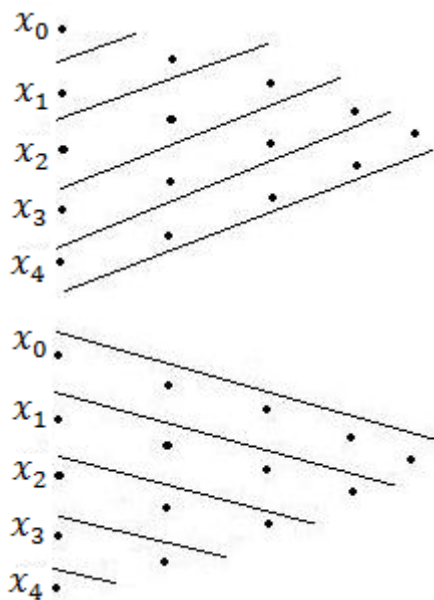
$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{y_0 + y_1}{2} + p \Delta y_0 + \frac{p^2 - (1/2)^2}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{p(p^2 - (1/2)^2)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\ &+ \frac{(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{p(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \\ &+ \frac{(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2)(p^2 - (5/2)^2)}{6!} \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \frac{p(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2)(p^2 - (5/2)^2)}{7!} \Delta^7 y_{-3} + \\ &+ \dots + \frac{(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2) \dots (p^2 - ((2n-1)/2)^2)}{2n!} \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\ &+ \frac{p(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2) \dots (p^2 - ((2n-1)/2)^2)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$p = \frac{(x - (x_0 + x_1)/2)}{h}$$

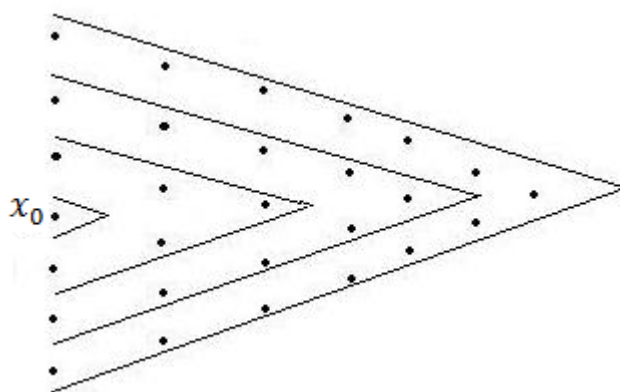
Комментарии:

В формулах Бесселя и Стирлинга слагаемые добавляются попарно, при добавлении новой пары, добавляются два новых узла интерполяции: 1 слева и 1 справа, поэтому вычисления по этим формулам можно обрывать раньше времени.

Сравнительный анализ различных формул вычисления ИМ.

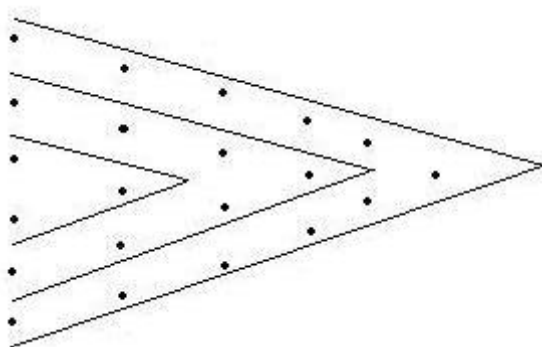


Так происходит интерполяция по 1-ой формуле Ньютона, при добавлении слагаемого, добавляется 1 узел интерполяции (слева направо).

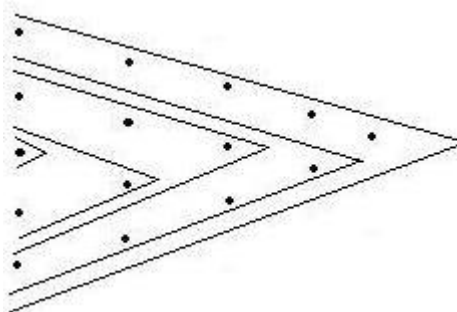


Формула Стирлинга.

Вторая формула Ньютона добавляется по одному узлу – справа налево.



Формула Бесселя.



Достоинство всех картинок объединяет в себе схема Эйткена – в ней узлы интерполяции мы можем добавлять как угодно.

П.3 Интерполяция кубическими сплайнами.

3.1. Определение кубического Сплайна.

Кубическим сплайном на сетке x_0, x_1, \dots, x_n называется функция $s(x)$, которая обладает следующими свойствами:

1. на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$, где $1 \leq i \leq n$, функция $s(x)$ является кубическим многочленом (на каждом интервале свой многочлен).
2. на всем интервале $[x_0, x_n]$ $s(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция
3. на краях интервала вторая производная обращается в ноль (краевое условие).
 $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$
- 3'. для периодических кубических сплайнов.
 $s''(x_0) = s''(x_n) = 0; s'(x_0) = s'(x_n) = 0$

Исследуем вопрос: любую ли функцию можно проинтерполировать кубическим сплайном и всегда ли это можно сделать единственным образом?

Имеем n участков интерполяции, на каждом – свой кубический многочлен, который задается четырьмя коэффициентами. Итого, имеем $4n$ коэффициентов, которые нам необходимо найти, для этого нам потребуется столько же уравнений (т.е. $4n$ уравнений).

Исходя из условий кубического сплайна:

(подсчет уравнений, которых нам дают условия кубического сплайна)

n участков $[x_{i-1}, x_i]$, на границах должны выполняться условия интерполяции

$s(x_{i-1}) = s_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$; $s(x_i) = s_i(x_i) = y_i$ - на каждом участке 2 условия, итого получаем $2n$ условий.

Вспомним второе условие кубического сплайна, т.е. наша функция дважды непрерывно дифференцируема. Внутри участков это, очевидно, выполняется (т.к. $s = s_i$ - кубический многочлен). Необходимо проверить непрерывность s , s' и s'' только лишь на границах интервалов, т.е. рассмотрим точку x_i - в ней стыкуются два интервала: $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$

соответственно кубические сплайны: s_i и s_{i+1}

Предел слева должен быть равен пределу справа для s , s' и s'' , т.е.

~~$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i)$~~ - не пишем т.к. оно уже было посчитано в условии интерполяции.

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i)$$

$$s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i)$$

+ два условия из пункта 3. Итого, $4n$ условий.

3.2. Свойства кубического Сплайна

Теорема 4.5:

Среди всех функций, интерполирующих функцию f в точках x_i , где $i = \overline{0, n}$ именно кубический сплайн обладает наименьшей энергией изгиба, т.е. для него достигается

минимум интеграла энергии. $I(y) = \int_{x_0}^{x_n} (y''(x))^2 dx$ - интеграл энергии.

Следствие 4.6

Из математического анализа известно, что радиус кривизны функции $y(x)$:

$$R(x) = \left[\frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} \right]^{-1} = k(x)^{-1} \quad (k(x) - \text{кривизна изгиба}).$$

Как известно из физики,

энергия изгиба гибкой линейки, принявшей очертание графика функций $y(x)$, вычисляется

$$\text{по формуле: } I(y) = \int_{x_0}^{x_n} \frac{\gamma(x) k^2(x)}{2} dx = c \int_{x_0}^{x_n} k^2(x) dx = c \int_{x_0}^{x_n} \frac{(y'')^2}{(1 + (y')^2)^3} dx \approx c \int_{x_0}^{x_n} (y'')^2 dx$$

γ - коэффициент жесткости линейки

(предположим $y' \approx 0$)

$$\text{Таким образом, энергия изгиба линейки } \approx c \int_{x_0}^{x_n} (y'')^2 dx = I(y).$$

Как мы знаем из физики, любая физическая система, в том числе и линейка, стремится минимизировать свою энергию, следовательно, гибкая линейка, пропущенная через точки (x_i, y_i) $i = \overline{0, n}$, (теорема 4.5) примет очертание кубического сплайна. Отсюда и происходит само слово сплайн (spline – рейка, которую используют чертежники).

Очевидно, что кривизна линейки есть функция непрерывная, следовательно, s , s' и s'' непрерывны – это условие 2 из определения кубического сплайна. Также понятно, что на краях кривизна линейки будет нулевая – отсюда берется условие 3.

3.3. Формулы для вычисления кубического сплайна.

С одной стороны мы можем составить $4n$ уравнений для $4n$ коэффициента кубического многочлена (см. пункт 3.1).

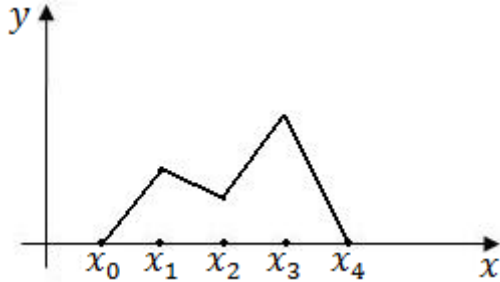
На практике подобный подход не используется, выгоднее идти другим путём (уравнений и неизвестных будет меньше).

Другой вариант вычисления кубического сплайна.

Введём следующие моменты: $s''(x_i) = M_i \quad i = \overline{0, n}$, с помощью их и будем вычислять кубический сплайн.

$M_0 = M_n = 0$ из 3-го условия.

Т.к. $s(x)$ кусочно-кубический многочлен, то $s''(x)$ – кусочно-линейная функция, которая при этом непрерывна.



Очевидно, что на i -ом участке $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$s''_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} M_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} M_i = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad h_i = x_i - x_{i-1} \quad (4.14)$$

h_i - длина i -ого интервала.

Чтобы получить $s_i(x)$ проинтегрируем $s''_i(x)$ дважды:

$$s'_i(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + c_1$$

$$s_i(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + c_1 x + c_2$$

Осталось только подставить константы интегрирования - c_1 и c_2 . Для этого необходимо вспомнить условия интерполяции на краях участков.

$$\begin{cases} s_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ s_i(x_i) = y_i \end{cases}$$

Подставив эти условия в формулу для s_i , получим 2 уравнения для констант c_1 и c_2 , решив систему, подставим в формулу и получим:

$$s_i(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(y_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad (4.15)$$

Теперь для расчета кубического сплайна необходимо найти неизвестные моменты M_i .

Мы уже знаем $M_0 = M_n = 0$, остается найти моменты M_1, \dots, M_{n-1} . Для этого необходимо ограничения 1,2,3, налагаемые на кубический сплайн.

Условие интерполяции использовали при нахождении констант c_1 и c_2 (оно же непрерывность s). Непрерывность s' мы тоже уже использовали, когда писали формулы для кусочно-линейной функции s'' . Остается использовать условие непрерывности s' , т.е.

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i) \quad i = \overline{1, n-1} \quad (4.16)$$

Получим $(n-1)$ недостающее уравнение для $(n-1)$ неизвестного (для M_1, \dots, M_{n-1}).

Как нетрудно убедиться, эти условия превращаются в СЛАУ (4.17) для нахождения M :

$CM=d$ (4.17), где

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} \quad - \text{ столбец неизвестных.}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} \end{pmatrix} \quad - \text{ квадратная трёх диагональная матрица.}$$

Элементы матрицы C вычисляются по формуле:

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{h_i+h_{i+1}}{3} & i=j & \text{(главная диагональ)} \\ \frac{h_{i+1}}{6} & j=i+1 & \text{(верхняя диагональ)} \\ \frac{h_i}{6} & j=i-1 & \text{(нижняя диагональ)} \\ 0 & |i-j|>1 \end{cases}$$

$$d_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}, \quad (i=\overline{1, n-1}) \quad - \text{ вектор правых частей.}$$

Таким образом, для вычисления кубического сплайна необходимо:

1. Составить СЛАУ по формуле (4.17) (размером $(n-1) \times (n-1)$)
2. Решить эту СЛАУ, находя моменты M_1, \dots, M_{n-1} , добавить к ним $M_0 = M_n = 0$.
3. Найдя моменты M_i , подставить их в формулу (4.15) для нахождения кубического сплайна (перед этим нужно найти i -номер интервала, в котором лежит точка x , т.е. $x_{i-1} \leq x \leq x_i$).

Замечание:

При интерполяции кубическими сплайнами сетка не обязана быть равностоящей, как

требуется, например, в формуле Ньютона И.М., но весьма желательно $\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \leq 4$