Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Национальный Исследовательский Университет ИТМО
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

ИДЗ №3

Вариант: №17

Выполнил:	Назин Артем Аркадьевич
Группа:	P3107
Поток:	11.3
Преподаватель:	Ершов Александр Романович

Город Санкт-Петербург
2023

Содержание

Задание 1

Условие

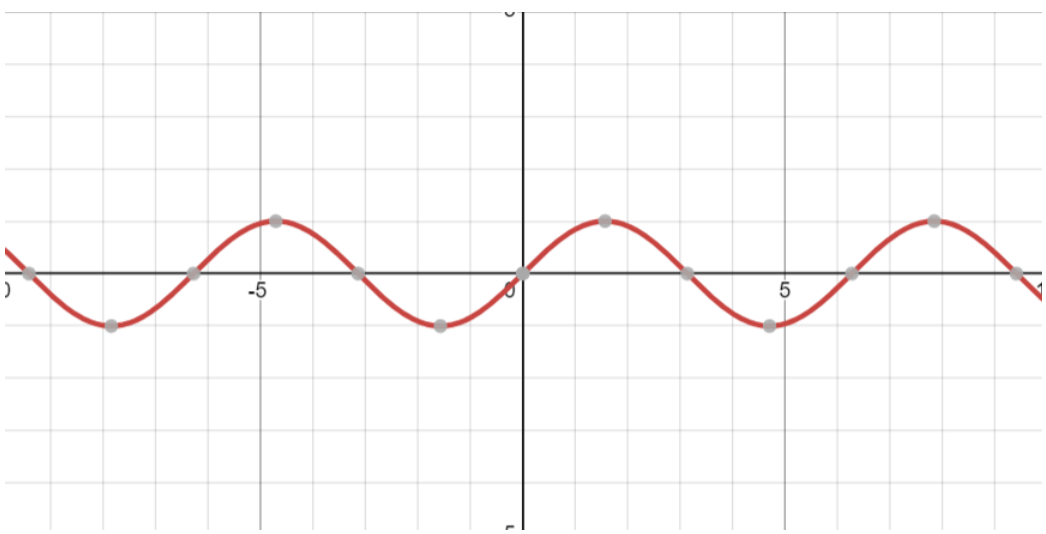
Построить эскиз графика данной функции, используя преобразования графика соответствующей элементарной функции. Указать область определения и область значений данной функции:

1. $y = 3\sin\left(2 + \frac{x}{2\pi}\right) - 5$
2. $y = \sqrt{\left(\frac{|6-2x|+x}{10-|5x-15|}\right)^2}$
3. $y = \log_4\left(2 + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

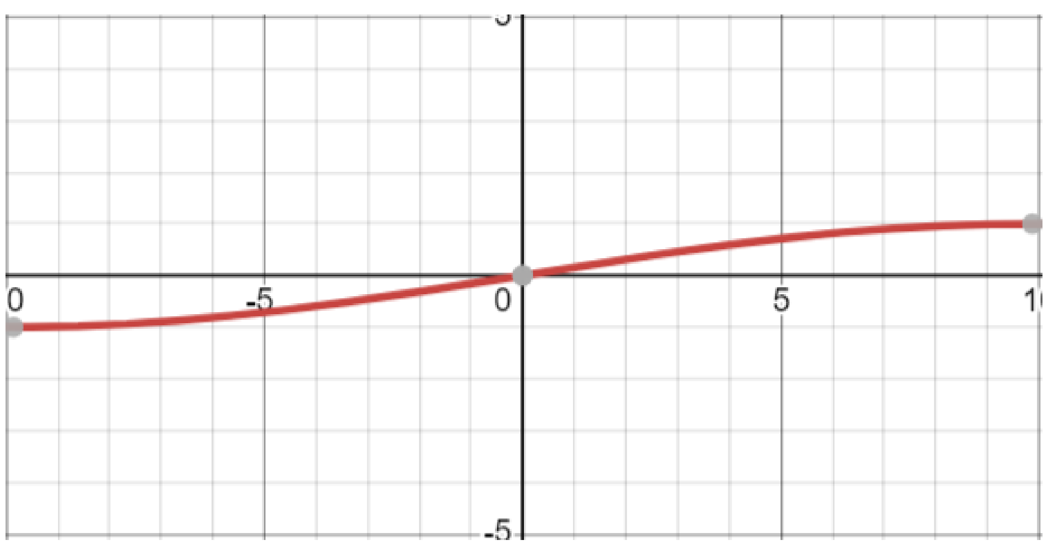
Ход решения

$$y = 3\sin\left(2 + \frac{x}{2\pi}\right) - 5 = 3\sin\left(\frac{(x+4\pi)}{2\pi}\right) - 5$$

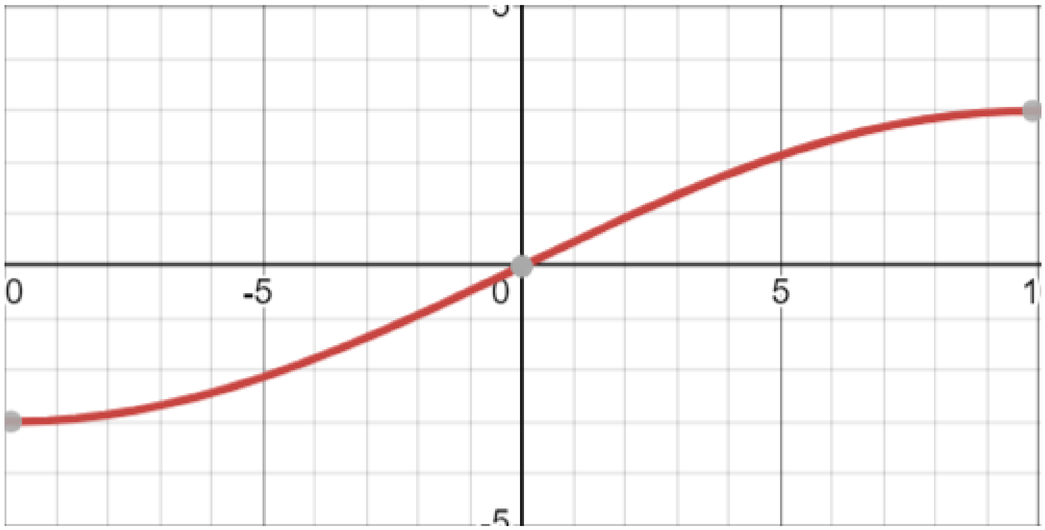
Построим базовую функцию: $y = \sin x$:



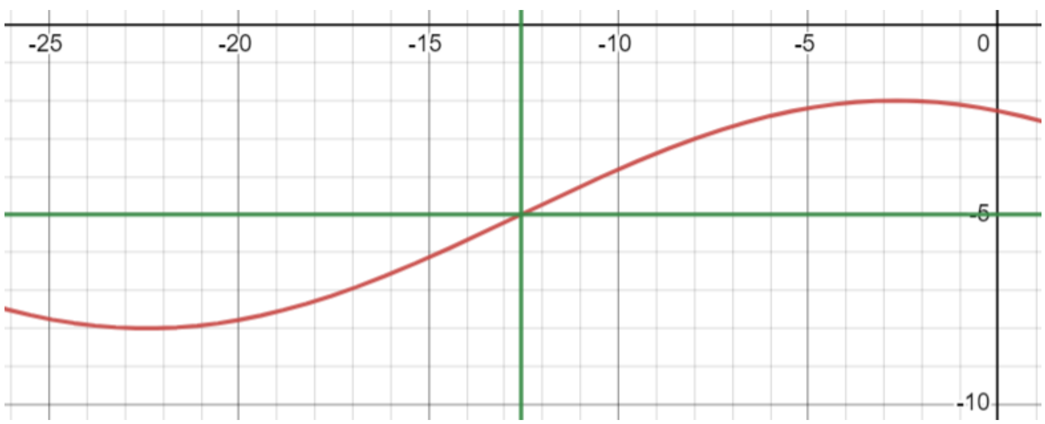
Изменим циклическую частоту: $y = \sin\left(\frac{x}{2\pi}\right)$:



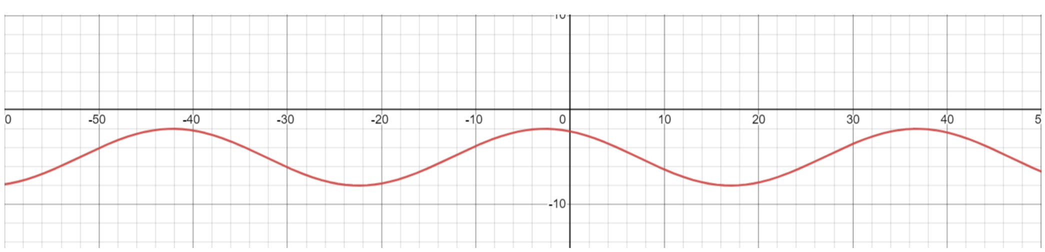
Растянем график в 3 раза по OY: $y = 3\sin\left(\frac{x}{2\pi}\right)$:



Построим график относительно новых осей: $y' = y + 5$ и $x' = x + 4\pi$:



В итоге, посредством элементарных преобразований мы получили график функции $y = 3\sin\left(2 + \frac{x}{2\pi}\right) - 5$:



Задание 4

Условие

Вычислить пределы:

1. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$$

2. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$$

3. $$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$$

4. $$\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(\cos\frac{\pi x}{a}+2\right)}{a^{\frac{a^2}{x^2}-\frac{a}{x}}-a^{\frac{a}{x}-1}}$$

5. $$\lim_{x\to 0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\frac{(\operatorname{cosec}^2 x)}{x}}$$

6. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}\pm 0}(0.5+\cos 3x)^{\sec x}$$

7. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2+\cos x\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x}$$

8. $$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-3)+\operatorname{arctg}(x^2-5)}{\ln(x-1)}$$

Ход решения

1.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$$

Вид неопределенности: $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2} = \lim_{x\to-1}\frac{(x^2-x-2)(x+1)}{(x^2-x-2)^2} = \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-x-2} = \lim_{t\to0}\frac{t-1+1}{(t-1)^2-(t-1)-2} =$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{t}{t^2-2t+1-t+1-2} = \lim_{t\to0}\frac{t}{t^2-3t} = \lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{t}}{\frac{t^2}{t}-\frac{3t}{t}} = \lim_{t\to0}\frac{1}{t-3} = -\frac{1}{3}$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$

2.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$$

Вид неопределенности: $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}} = \lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{9t+27}-3}{\sqrt{t+6}-\sqrt{2t+6}} = \lim_{t\to0}\frac{3\sqrt[3]{\frac{t}{3}+1}-3}{\sqrt{6}\sqrt{\frac{t}{6}+1}-\sqrt{6}\sqrt{\frac{t}{3}+1}} =$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{3(1+\frac{t}{9}+o(t))-3}{\sqrt{6}(1+\frac{t}{12}+o(t))-\sqrt{6}(1+\frac{t}{6}+o(t))} = \lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{3}+o(t)}{\frac{\sqrt{6}t}{12}-\frac{\sqrt{6}t}{6}+o(t)} = \lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{3}+o(t)}{-\frac{\sqrt{6}t}{12}+o(t)} =$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{3}+o(1)}{-\frac{\sqrt{6}}{12}+o(1)} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{\sqrt{6}}{12}} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

3.

$$\lim_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$$

Вид неопределенности: $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x} = \lim_{t\to0}\frac{1+\cos\pi t+\pi}{\operatorname{tg}^2\pi t+\pi} = \lim_{t\to0}\frac{1-\cos\pi t}{\operatorname{tg}^2\pi t} = \lim_{t\to0}\frac{1-(1-\frac{\pi^2t^2}{2}+o(t^2))}{(\pi t+o(t))^2} =$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2}+o(t^2)}{\pi^2t^2+o(t)\pi t+o(t^2)} = \lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2}+o(t^2)}{\pi^2t^2+o(t^2)} = \lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi^2}{2}+o(1)}{\pi^2+o(1)} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

4.

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(\cos\frac{\pi x}{a}+2\right)}{a^{\frac{a^2}{x^2}-\frac{a}{x}}-a^{\frac{a}{x}-1}}$$

Вид неопределенности: $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(\cos\frac{\pi x}{a}+2\right)}{a^{\frac{a^2}{x^2}-\frac{a}{x}}-a^{\frac{a}{x}-1}}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(\cos\frac{\pi x}{a}+2\right)}{a^{\frac{a}{x}-1}\left(a^{\frac{a^2}{x^2}-\frac{2a}{x}+1}-1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\cos\frac{\pi(t+a)}{a}+2\right)}{a^{\frac{a}{t+a}-1}\left(a^{\frac{a^2}{(t+a)^2}-\frac{2a}{t+a}+1}-1\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\cos\left(\frac{\pi t}{a}+\pi\right)+2\right)}{a^{\frac{a-t-a}{t+a}}\left(a^{\frac{a^2}{(t+a)^2}-\frac{2at+2a^2}{(t+a)^2}+\frac{(t+a)^2}{(t+a)^2}}-1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(-\cos\frac{\pi t}{a}+2\right)}{a^{\frac{-t}{t+a}}\left(a^{\frac{a^2-2at-2a^2+t^2+2at+a^2}{(t+a)^2}}-1\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(-\cos\frac{\pi t}{a}+2\right)}{a^{\frac{-t}{t+a}}\left(a^{\frac{t^2}{(t+a)^2}}-1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(-\left(1-\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)\right)+2\right)}{\left(1-\frac{t}{t+a}\ln(a)+o(t)\right)\left(\left(1+\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2)\right)-1\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)\right)}{\left(1-\frac{t}{t+a}\ln(a)+o(t)\right)\left(\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2)\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)+o\left(\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)\right)}{\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2)-\frac{t^3}{(t+a)^3}\ln^2(a)-\frac{t}{t+a}o(t^2)+\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)o(t)+o(t)o(t^2)}$$

Заметим, что: $o\left(\dfrac{t^k}{(a+t)^n}\right)=o(t^k)$, где k,n $\in\mathbb{N}$ (ограниченная умножить на t^k)

Откуда: $$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)+o\left(\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)\right)}{\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2)-\frac{t^3}{(t+a)^3}\ln^2(a)-o(t^3)+o(t^3)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)}{\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2)-\frac{t^3}{(t+a)^3}\ln^2(a)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi^2}{2a^2}+o(1)}{\frac{1}{(t+a)^2}\ln(a)+o(1)-\frac{t}{(t+a)^3}\ln^2(a)}=\frac{\frac{\pi^2}{2a^2}}{\frac{1}{a^2}\ln(a)-0}=\frac{\pi^2}{2\ln(a)}$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{2\ln(a)}$

5.

$$\lim_{x\to 0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\frac{(\operatorname{cosec}^2 x)}{x}}$$

Вид неопределенности: $[1^\infty]$

$$\lim_{x\to 0}\left(2-5^{(x^3+o(x^3))}\right)^{\frac{1}{x\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\left(2-5^{(x^3+o(x^3))}\right)^{\frac{1}{x(x+o(x))^2}}=\lim_{x\to 0}\left(2-\left(1+(x^3+o(x^3))\ln 5+o(x^3+o(x^3))\right)\right)^{\frac{1}{x^3+o(x^3)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-x^3\ln 5+o(x^3)\right)^{\left(\frac{1}{-x^3\ln 5+o(x^3)}\frac{-x^3\ln 5+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\left(\frac{-x^3\ln 5+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\left(\frac{-\ln 5+o(1)}{1+o(1)}\right)}=e^{-\ln 5}=\frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

6.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}(0.5+\cos 3x)^{\sec x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}(0.5+\cos 3x)^{\sec x} = \lim_{t\to 0\pm}\left(0.5+\cos\left(3t+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}} = \lim_{t\to 0\pm}(0.5+\sin 3t)^{\frac{1}{-\sin t}}$$

Рассмотрим отдельно при $t\to 0+$ и $t\to 0-$

$$\lim_{t\to 0-}(0.5+\sin 3t)^{\frac{1}{-\sin t}} = \lim_{t\to 0-}(0.5+3t+o(t))^{\frac{1}{-(t+o(t))}} = \lim_{t\to 0-}(0.5+3t+o(t))^{\infty} = \lim_{t\to 0-}(0.5)^{\infty} = 0$$

$$\lim_{t\to 0+}(0.5+\sin 3t)^{\frac{1}{-\sin t}} = \lim_{t\to 0+}(0.5+3t+o(t))^{\frac{1}{-(t+o(t))}} = \lim_{t\to 0+}(0.5+3t+o(t))^{-\infty} = \lim_{t\to 0+}(0.5)^{-\infty} = +\infty$$

Ответ для $x\to\frac{\pi}{2}-0$**:** 0**,**
для $x\to\frac{\pi}{2}+0$**:** $+\infty$

7.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2+\cos x\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2+\cos x\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x} = \lim_{t\to 0}\frac{2+\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{2}{2t+\pi-\pi}}{3+2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2-\sin t\sin\frac{2}{2t}}{3+2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos t}$$

Функция: $\sin\dfrac{1}{t}$ - ограниченная, а $\sin t$ - бесконечно малая

Следовательно их произведение - бесконечно малая

Откуда. подставив $t=0$, получим:

$$\frac{2-0}{3+2\left(0+\frac{\pi}{2}\right)\cos(0)} = \frac{2}{3+\pi}$$

Ответ: $\frac{2}{3+\pi}$

8.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-3)+\operatorname{arctg}(x^2-5)}{\ln(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-3)+\operatorname{arctg}(x^2-5)}{\ln(x-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(t^2+4t+4-3)+\operatorname{arctg}(t^2+4t+4-5)}{\ln(t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(t^2+4t+1)+\operatorname{arctg}(t^2+4t-1)}{\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{f_1(t)+f_2(t)}{h(t)}$$

Раскроем *arctg* и *ln* до первого порядка по формуле Тейлора, для этого посчитаем производные:

$$f_1'(t)=\left(\operatorname{arctg}(t^2+4t+1)\right)'=\frac{2t+4}{1+(t^2+4t+1)^2}$$

$$f_2'(t)=\left(\operatorname{arctg}(t^2+4t-1)\right)'=\frac{2t+4}{1+(t^2+4t-1)^2}$$

$$h'(t)=(\ln(t+1))'=\frac{1}{t+1}$$

Подставим t_0:

$$f_1(0)=\operatorname{arctg}(0^2+4*0+1)=\operatorname{arctg}(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$f_2(0)=\operatorname{arctg}(0^2+4*0-1)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$h(0)=\ln(0+1)=\ln(1)=0$$

$$f_1'(0)=\frac{2*0+4}{1+(0^2+0*t+1)^2}=\frac{4}{1+1^2}=2$$

$$f_2'(0)=\frac{2*0+4}{1+(0^2+0*t-1)^2}=\frac{4}{1+(-1)^2}=2$$

$$h'(0)=\frac{1}{0+1}=1$$

Откуда:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_1(t)+f_2(t)}{h(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\pi}{4}+2t+o(t)\right)+\left(-\frac{\pi}{4}+2t+o(t)\right)}{0+t+o(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{4t+o(t)}{t+o(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{4+o(1)}{1+o(1)}=4$$

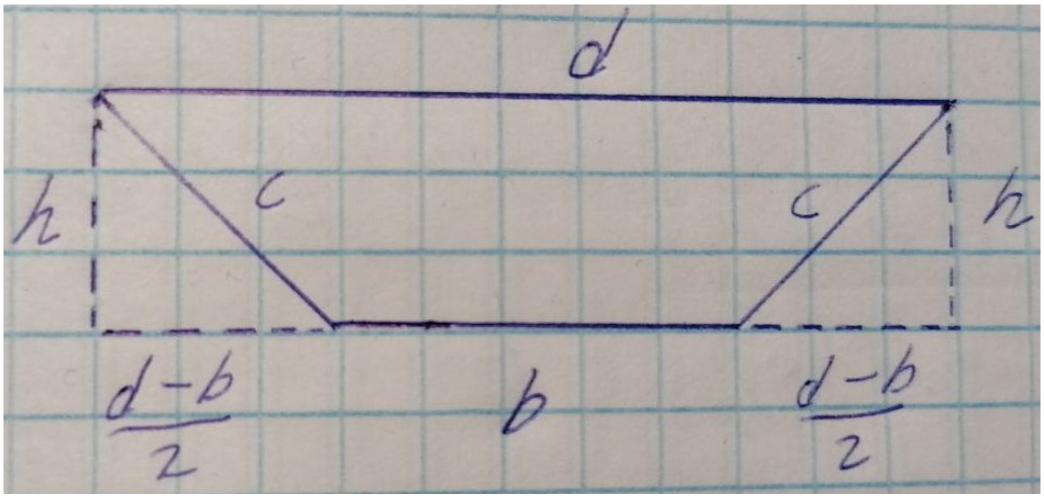
Ответ: 4

Задание 6

Условие

Из полосы жести шириной a требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого должно иметь форму равнобочной трапеции. Дно желоба имеет ширину b. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

Ход решения



Где $c = \frac{a-b}{2}$.

По теореме Пифагора: $c^2 = h^2 + \left(\frac{d-b}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{d-b}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{(a-b)^2-(d-b)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}$

Площадь трапеции: $S = \frac{b+d}{2} \cdot h = \frac{b+d}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}$

Желоб будет вмещать наибольший объем воды при фиксированной длине, если площадь сечения (трапеции) будет максимальной, найдем это максимальное значение с помощью производной:

$S' =$

Ответ: e

Задание 7

Условие

Вычислить пределы с помощью формулы Тейлора:

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e\sqrt[3]{1-4x^2}}{(1/x)\arcsin 2x - 2\operatorname{ch} x^2}$$

2.

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{e^x/(x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)}$$

Ход решения

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e\sqrt[3]{1-4x^2}}{(1/x)\arcsin 2x - 2\operatorname{ch} x^2}$$

Разложим по формуле Тейлора до второго(местами третьего) порядка:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} - e\left(1 - \frac{4x^2}{3} + o(x^2)\right)}{(1/x)\left(2x + \frac{8x^3}{6} + o(x^3)\right) - 2(1+o(x^2))} = \lim_{x\to 0} \frac{e\cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} - e + \frac{4ex^2}{3} + o(x^2)}{2 + \frac{8x^2}{6} + o(x^2) - 2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - e + \frac{4ex^2}{3} + o(x^2)}{\frac{8x^2}{6} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{ex^2}{2} + \frac{4ex^2}{3} + o(x^2)}{\frac{4x^2}{3} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5ex^2}{6} + o(x^2)}{\frac{4x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{5e}{8}$$

Ответ: $\frac{5e}{8}$

2.

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{e^x/(x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{e^x/(x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{\frac{1}{\arcsin x^3}\cdot\frac{e^x \arcsin x^3}{x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{e^x \arcsin x^3}{x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x}}$$

Разложим по формуле Тейлора до таких порядков, чтобы получилось $o(x^3)$:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{(1+o(1))(x^3+o(x^3))}{x\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + (x+o(x))^3}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{x^3+o(x^3)}{x\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) - x + \frac{x^3}{6} + x^3 + o(x^3)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}} = e^1 = e$$

Ответ: e