Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Национальный Исследовательский Университет ИТМО
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

ИДЗ №3

Вариант: №17

Выполнил:	Назин Артем Аркадьевич
Группа:	P3107
Поток:	11.3
Преподаватель:	Ершов Александр Романович

Санкт-Петербург
2023

Содержание

P.S. Данное ИДЗ выполнено в TEX и является моим вторым опытом работы в нём после Лабы №6 по информатике, так что прошу прощения за тонну орфографических ошибок и очень кривое оформление местами

Задание 1

Условие

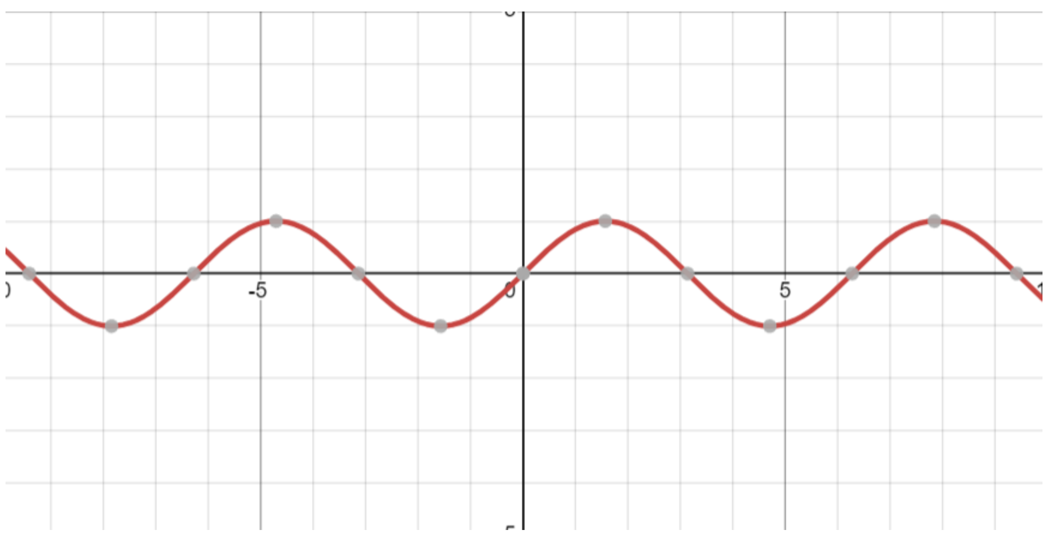
Построить эскиз графика данной функции, используя преобразования графика соответствующей элементарной функции. Указать область определения и область значений данной функции:

1. $y = 3\sin\left(2 + \frac{x}{2\pi}\right) - 5$
2. $y = \sqrt{\left(\frac{|6-2x|+x}{10-|5x-15|}\right)^2}$
3. $y = \log_4\left(2 + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

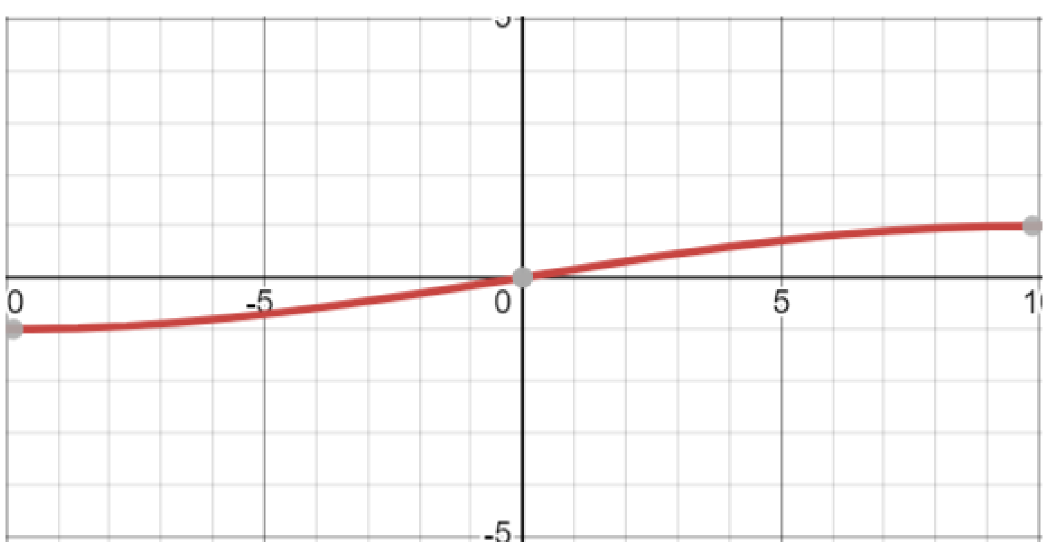
Ход решения

1. $y = 3\sin\left(2 + \dfrac{x}{2\pi}\right) - 5 = 3\sin\left(\dfrac{(x+4\pi)}{2\pi}\right) - 5$

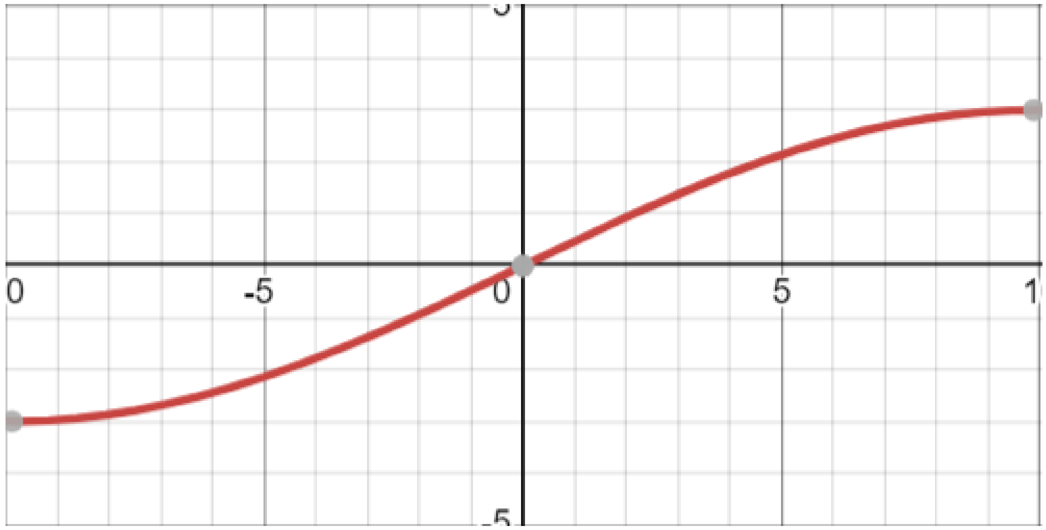
Построим базовую функцию: $y = \sin x$:



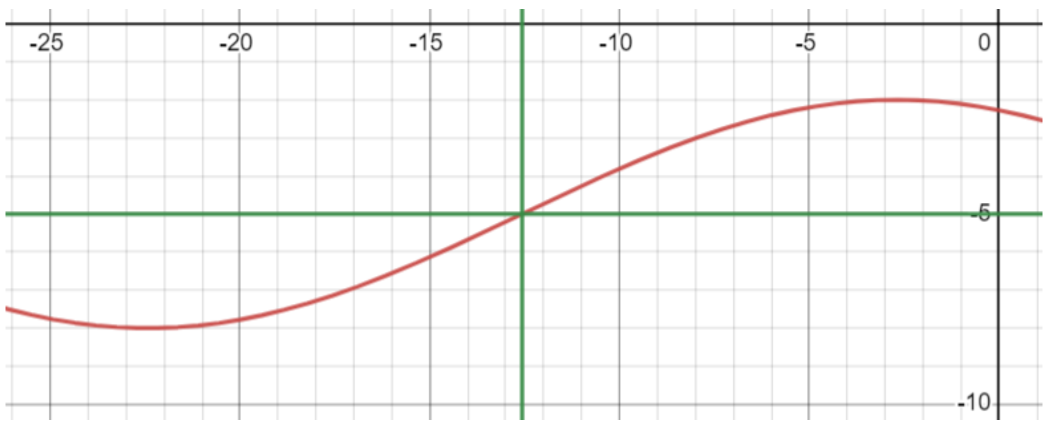
Изменим циклическую частоту: $y = \sin\left(\frac{x}{2\pi}\right)$:



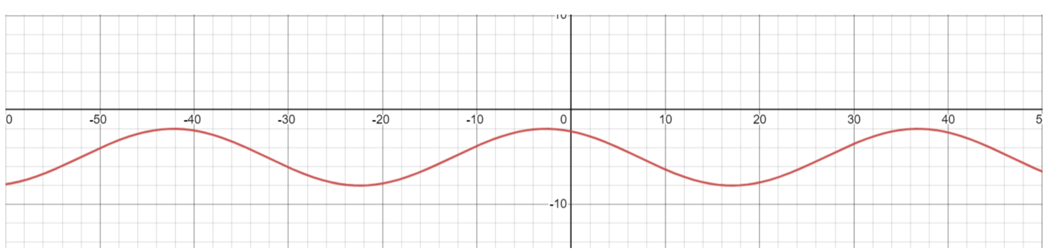
Растянем график в 3 раза по OY: $y = 3\sin\left(\frac{x}{2\pi}\right)$:



Построим график относительно новых осей: $y' = y - 5$ и $x' = x - 4\pi$:



В итоге, посредством элементарных преобразований мы получили график функции $y = 3\sin\left(2 + \frac{x}{2\pi}\right) - 5$:



2. $y = \sqrt{\left(\dfrac{|6-2x|+x}{10-|5x-15|}\right)^2} = \left|\left(\dfrac{|6-2x|+x}{10-|5x-15|}\right)\right|$

Раскроем внутренние модули:

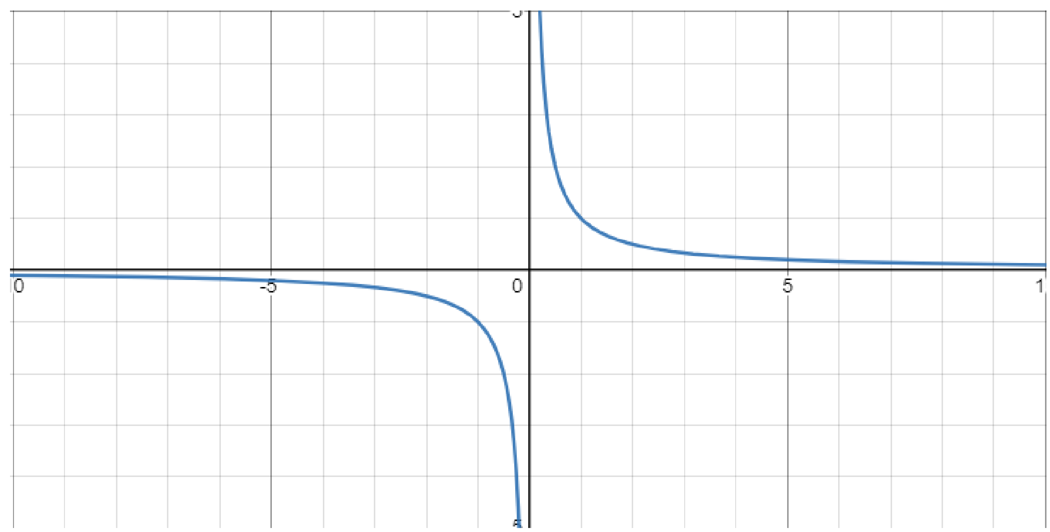
$$\begin{cases} \left|\frac{-x+6}{5x-5}\right|, x < 3 & (1) \\ \left|\frac{3x-6}{-5x+25}\right|, x \geq 3 & (2) \end{cases}$$

Теперь построим (1) и (2) без модулей:

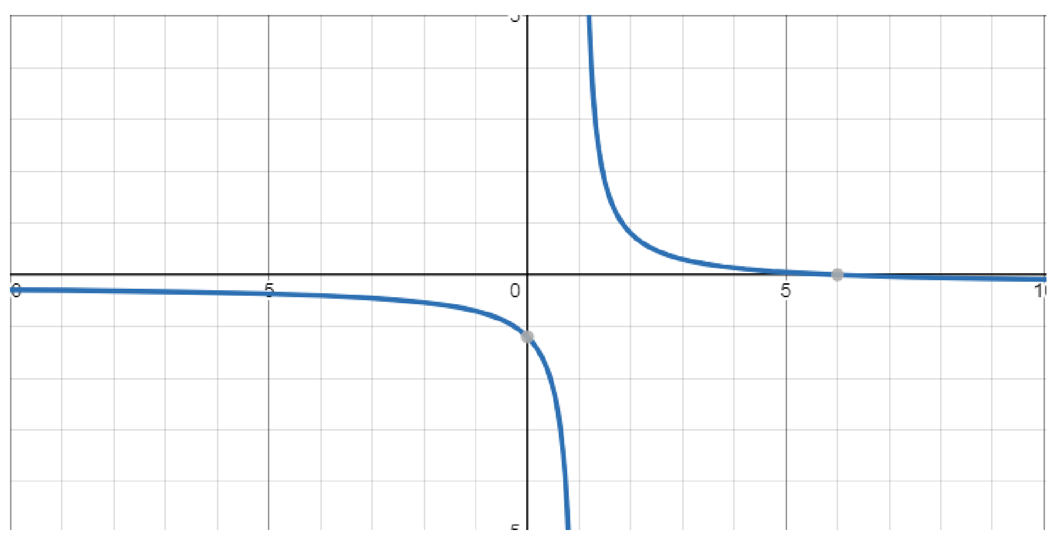
(1):

$\frac{3x-6}{-5x+25} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{x-1}$

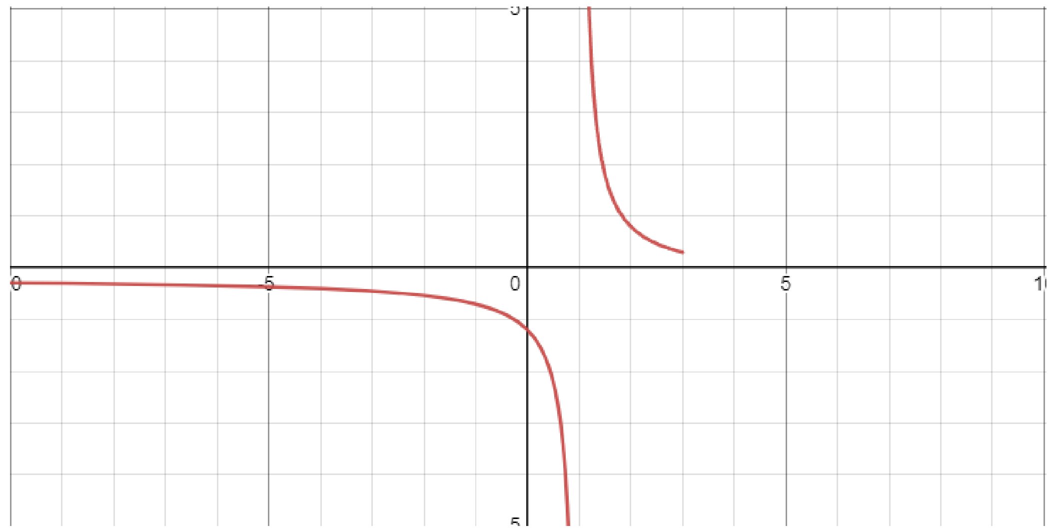
Для этого сначала построим базовый график $\frac{1}{x}$:



После сместим на $+1$ по x и $-\frac{1}{5}$ по y:

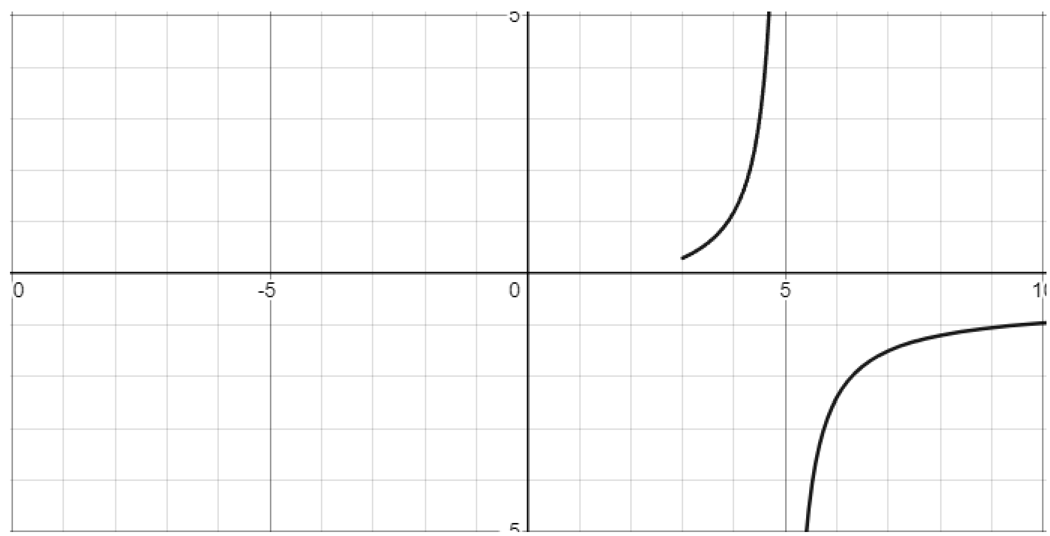


Уберем лишнее:

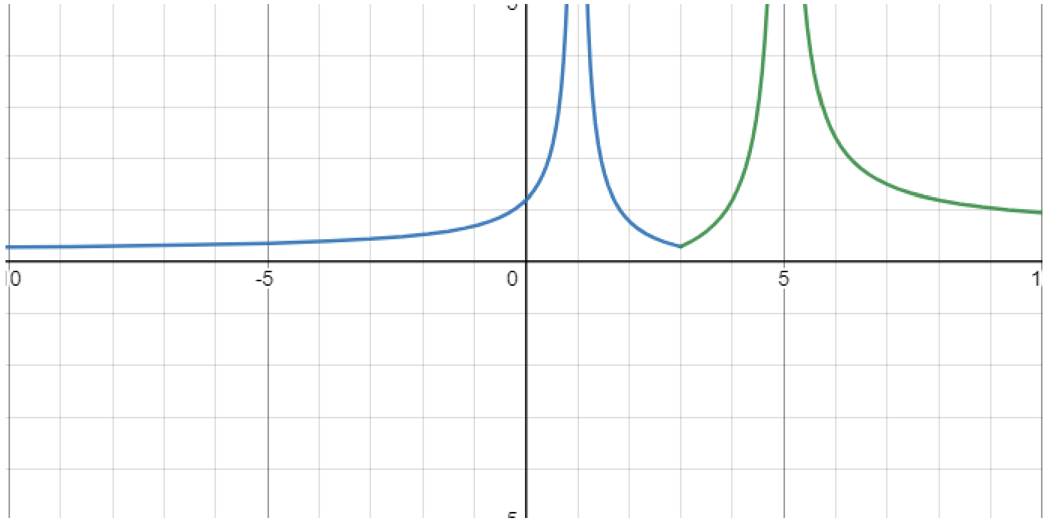


Аналогично для **(2):**

$\frac{3x-6}{-5x+25} = -\frac{3}{5} + \frac{9}{-5(x-5)}$



Совместим и отразим отрицательную часть относительно оси OX, то есть получим итоговый график:



3. $y = \log_4\left(2 + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

График этой функции построим, изучив предварительно ее свойства.
Функция определена для $x > 0$ и монотонно убывает от $+\infty$ до 0.5
Построим поочередно графики. Сначала $\frac{1}{x}$ (красная линия), потом $2 + \sqrt{\frac{1}{x}}$ (синия линия), следом $\log_4\left(2 + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$ (черная линия):

Задание 2

Условие

Доказать по определению предела функции в точке (по Коши):

$$\lim_{x\to 11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23$$

Ход решения Преобразуем выражение $\left|\frac{2x^2-21x-11}{x-11} - 23\right|$:

$$\left|\frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} - 23\right| = \left|\frac{2x^2 - 21x - 11 - 23x + 253}{x - 11}\right| = \left|\frac{2x^2 - 44x + 242}{x - 11}\right| = \left|\frac{2(x-11)^2}{x - 11}\right|$$

Так как при стремлении к 11, x в саму точку 11 не попадает, то:

$$\left|\frac{2(x-11)^2}{x - 11}\right| = 2\,|x - 11|$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем решения неравенства:

$$\left|\frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} - 23\right| = 2\,|x - 11| < \varepsilon$$

$$|x - 11| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Получается, что из неравенства $|x - 11| < \frac{\varepsilon}{2}$ следует $\left|\frac{2x^2-21x-11}{x-11} - 23\right| < \varepsilon$, то есть выполнено определение предела по Коши для $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. ч.т.д.

Задание 3

Условие

Доказать, что данный предел не существует:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{ctg}(1 + x^2)$$

Ход решения

Рассмотрим некоторые последвательности x_n удовлетворяющие первой части определения по Гейне, то есть такие что:

$$\begin{cases} x_n \in D(f) \text{ (Область определения)} \\ x_n \to +\infty \end{cases}$$

Например: $y_n = \sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi n - 1}$ и $a_n = \sqrt{\frac{3\pi}{4} + \pi n - 1}$. К тому же $n \geq 1 \Rightarrow y_n, a_n \geq 0$.

Получается $\operatorname{ctg}(1 + y_n^2) = \operatorname{ctg}\left(1 + \left(\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi n - 1}\right)^2\right) = \operatorname{ctg}\left(1 + \frac{\pi}{4} + \pi n - 1\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = const = 1$

А $\operatorname{ctg}(1 + a_n^2) = \operatorname{ctg}\left(1 + \left(\sqrt{\frac{3\pi}{4} + \pi n - 1}\right)^2\right) = \operatorname{ctg}\left(1 + \frac{3\pi}{4} + \pi n - 1\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} + \pi n\right) = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = const = -1$

То есть мы взяли две последовательности из определения по Гейне и получили, что они стремятся к разным числам, что напрямую этому определению противоречит, следовательно предела - нет. ч.т.д. Аналогично для $x \to -\infty$.

Задание 4

Условие

Вычислить пределы:

1. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$$

2. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$$

3. $$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$$

4. $$\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(\cos\frac{\pi x}{a}+2\right)}{a^{\frac{a^2}{x^2}-\frac{a}{x}}-a^{\frac{a}{x}-1}}$$

5. $$\lim_{x\to 0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\frac{(\operatorname{cosec}^2 x)}{x}}$$

6. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}\pm 0}(0.5+\cos 3x)^{\sec x}$$

7. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2+\cos x\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x}$$

8. $$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-3)+\operatorname{arctg}(x^2-5)}{\ln(x-1)}$$

Ход решения

1.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$$

Вид неопределенности: $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-x-2)(x+1)}{(x^2-x-2)^2}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-x-2}=\lim_{t\to0}\frac{t-1+1}{(t-1)^2-(t-1)-2}=$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{t^2-2t+1-t+1-2}=\lim_{t\to0}\frac{t}{t^2-3t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{t}}{\frac{t^2}{t}-\frac{3t}{t}}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t-3}=-\frac{1}{3}$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$

2.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$$

Вид неопределенности: $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{9t+27}-3}{\sqrt{t+6}-\sqrt{2t+6}}=\lim_{t\to0}\frac{3\sqrt[3]{\frac{t}{3}+1}-3}{\sqrt{6}\sqrt{\frac{t}{6}+1}-\sqrt{6}\sqrt{\frac{t}{3}+1}}=$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{3(1+\frac{t}{9}+o(t))-3}{\sqrt{6}(1+\frac{t}{12}+o(t))-\sqrt{6}(1+\frac{t}{6}+o(t))}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{3}+o(t)}{\frac{\sqrt{6}t}{12}-\frac{\sqrt{6}t}{6}+o(t)}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{3}+o(t)}{-\frac{\sqrt{6}t}{12}+o(t)}=$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{3}+o(1)}{-\frac{\sqrt{6}}{12}+o(1)}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{\sqrt{6}}{12}}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

3.

$$\lim_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$$

Вид неопределенности: $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{1+\cos\pi t+\pi}{\operatorname{tg}^2\pi t+\pi}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos\pi t}{\operatorname{tg}^2\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{1-(1-\frac{\pi^2t^2}{2}+o(t^2))}{(\pi t+o(t))^2}=$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2}+o(t^2)}{\pi^2t^2+o(t)\pi t+o(t^2)}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2}+o(t^2)}{\pi^2t^2+o(t^2)}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi^2}{2}+o(1)}{\pi^2+o(1)}=\frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

4.

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(\cos\frac{\pi x}{a}+2)}{a^{\frac{a^2}{x^2}-\frac{a}{x}}-a^{\frac{a}{x}-1}}$$

Вид неопределенности: $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(\cos\frac{\pi x}{a}+2)}{a^{\frac{a^2}{x^2}-\frac{a}{x}}-a^{\frac{a}{x}-1}}=\lim_{x\to a}\frac{\ln(\cos\frac{\pi x}{a}+2)}{a^{\frac{a}{x}-1}\left(a^{\frac{a^2}{x^2}-\frac{2a}{x}+1}-1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos\frac{\pi(t+a)}{a}+2)}{a^{\frac{a}{t+a}-1}\left(a^{\frac{a^2}{(t+a)^2}-\frac{2a}{t+a}+1}-1\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos(\frac{\pi t}{a}+\pi)+2)}{a^{\frac{a-t-a}{t+a}}\left(a^{\frac{a^2}{(t+a)^2}-\frac{2at+2a^2}{(t+a)^2}+\frac{(t+a)^2}{(t+a)^2}}-1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(-\cos\frac{\pi t}{a}+2)}{a^{\frac{-t}{t+a}}\left(a^{\frac{a^2-2at-2a^2+t^2+2at+a^2}{(t+a)^2}}-1\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(-\cos\frac{\pi t}{a}+2)}{a^{\frac{-t}{t+a}}\left(a^{\frac{t^2}{(t+a)^2}}-1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(-(1-\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2))+2)}{\left(1-\frac{t}{t+a}\ln(a)+o(t)\right)\left((1+\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2))-1\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2))}{\left(1-\frac{t}{t+a}\ln(a)+o(t)\right)\left(\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2)\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)+o(\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2))}{\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2)-\frac{t^3}{(t+a)^3}\ln^2(a)-\frac{t}{t+a}o(t^2)+\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)o(t)+o(t)o(t^2)}$$

Заметим, что: $o\left(\dfrac{t^k}{(a+t)^n}\right)=o(t^k)$, где k,n $\in\mathbb{N}$ (ограниченная умножить на t^k)

Откуда: $$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)+o(\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2))}{\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2)-\frac{t^3}{(t+a)^3}\ln^2(a)-o(t^3)+o(t^3)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{2a^2}+o(t^2)}{\frac{t^2}{(t+a)^2}\ln(a)+o(t^2)-\frac{t^3}{(t+a)^3}\ln^2(a)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi^2}{2a^2}+o(1)}{\frac{1}{(t+a)^2}\ln(a)+o(1)-\frac{t}{(t+a)^3}\ln^2(a)}=\frac{\frac{\pi^2}{2a^2}}{\frac{1}{a^2}\ln(a)-0}=\frac{\pi^2}{2\ln(a)}$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{2\ln(a)}$

5.

$$\lim_{x\to 0}(2-5^{\arcsin x^3})^{\frac{(\operatorname{cosec}^2 x)}{x}}$$

Вид неопределенности: $[1^\infty]$

$$\lim_{x\to 0}(2-5^{(x^3+o(x^3))})^{\frac{1}{x\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}(2-5^{(x^3+o(x^3))})^{\frac{1}{x(x+o(x))^2}}=\lim_{x\to 0}(2-(1+(x^3+o(x^3))\ln 5+o(x^3+o(x^3))))^{\frac{1}{x^3+o(x^3)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1-x^3\ln 5+o(x^3))^{\left(\frac{1}{-x^3\ln 5+o(x^3)}\frac{-x^3\ln 5+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\left(\frac{-x^3\ln 5+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\left(\frac{-\ln 5+o(1)}{1+o(1)}\right)}=e^{-\ln 5}=\frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

6.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}(0.5+\cos 3x)^{\sec x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}(0.5+\cos 3x)^{\sec x} = \lim_{t\to 0\pm}\left(0.5+\cos\left(3t+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}} = \lim_{t\to 0\pm}(0.5+\sin 3t)^{\frac{1}{-\sin t}}$$

Рассмотрим отдельно при $t\to 0+$ и $t\to 0-$

$$\lim_{t\to 0-}(0.5+\sin 3t)^{\frac{1}{-\sin t}} = \lim_{t\to 0-}(0.5+3t+o(t))^{\frac{1}{-(t+o(t))}} = \lim_{t\to 0-}(0.5+3t+o(t))^{\infty} = \lim_{t\to 0-}(0.5)^{\infty} = 0$$

$$\lim_{t\to 0+}(0.5+\sin 3t)^{\frac{1}{-\sin t}} = \lim_{t\to 0+}(0.5+3t+o(t))^{\frac{1}{-(t+o(t))}} = \lim_{t\to 0+}(0.5+3t+o(t))^{-\infty} = \lim_{t\to 0+}(0.5)^{-\infty} = +\infty$$

Ответ для $x\to\frac{\pi}{2}-0$**:** 0**,**
для $x\to\frac{\pi}{2}+0$**:** $+\infty$

7.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2+\cos x\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2+\cos x\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x} = \lim_{t\to 0}\frac{2+\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{2}{2t+\pi-\pi}}{3+2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2-\sin t\sin\frac{2}{2t}}{3+2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos t}$$

Функция: $\sin\dfrac{1}{t}$ - ограниченная, а $\sin t$ - бесконечно малая

Следовательно их произведение - бесконечно малая

Откуда. подставив $t=0$, получим:

$$\frac{2-0}{3+2\left(0+\frac{\pi}{2}\right)\cos(0)} = \frac{2}{3+\pi}$$

Ответ: $\frac{2}{3+\pi}$

8.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-3)+\operatorname{arctg}(x^2-5)}{\ln(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}(x^2-3)+\operatorname{arctg}(x^2-5)}{\ln(x-1)} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(t^2+4t+4-3)+\operatorname{arctg}(t^2+4t+4-5)}{\ln(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(t^2+4t+1)+\operatorname{arctg}(t^2+4t-1)}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{f_1(t)+f_2(t)}{h(t)}$$

Раскроем *arctg* и *ln* до первого порядка по формуле Тейлора, для этого посчитаем производные:

$$f_1'(t) = \left(\operatorname{arctg}(t^2+4t+1)\right)' = \frac{2t+4}{1+(t^2+4t+1)^2}$$

$$f_2'(t) = \left(\operatorname{arctg}(t^2+4t-1)\right)' = \frac{2t+4}{1+(t^2+4t-1)^2}$$

$$h'(t) = (\ln(t+1))' = \frac{1}{t+1}$$

Подставим t_0:

$$f_1(0) = \operatorname{arctg}(0^2+4*0+1) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f_2(0) = \operatorname{arctg}(0^2+4*0-1) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$h(0) = \ln(0+1) = \ln(1) = 0$$

$$f_1'(0) = \frac{2*0+4}{1+(0^2+0*t+1)^2} = \frac{4}{1+1^2} = 2$$

$$f_2'(0) = \frac{2*0+4}{1+(0^2+0*t-1)^2} = \frac{4}{1+(-1)^2} = 2$$

$$h'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

Откуда:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_1(t)+f_2(t)}{h(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\pi}{4}+2t+o(t)\right)+\left(-\frac{\pi}{4}+2t+o(t)\right)}{0+t+o(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{4t+o(t)}{t+o(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{4+o(1)}{1+o(1)} = 4$$

Ответ: 4

Задание 5

Условие

Провести полное исследование функций и построить их графики.

1. $$\begin{cases} x = \frac{3t^2+1}{3t} \\ y = t + \frac{t^2}{3} \end{cases}$$

2. $$y = \arccos\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{5}$$

3. $$y = (1-x)e^{3x+1}$$

Ход решения

1. $$\begin{cases} x = \frac{3t^2+1}{3t} \\ y = t + \frac{t^2}{3} \end{cases}$$

   Найдем область определения функции $D(f)$:
   $y(t)$ - существует всегда, рассмотрим чему не может равняться $x(t)$:
   $x(t) = \frac{3t^2+1}{3t} = t + \frac{1}{3t}$ - не достигает каких-то значений около нуля, найдем их через локальный минимум/максимум:
   $x'(t) = 1 - \frac{1}{3t^2}$ - не существует в нуле как и сама функция $x(t)$, $x'(t) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3t^2} = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$
   Подставив различные значения, получим, что: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ - лок. минимум, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ - лок. максимум
   $x(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $x(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
   То есть $D(f) = (-\infty, -\frac{2}{\sqrt(3)}] \cup [\frac{2}{\sqrt(3)}, +\infty)$
   Найдем сначала асимптоты кривой. Будем искать наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$. Переменная x стремится к бесконечности, когда $t \to 0$ или $t \to \pm\infty$. При $t \to \pm\infty$ переменная y тоже будет стремится к бесконечности, при этом:

   $$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{3t(3t+t^2)}{3(3t^2+1)} = \lim_{t\to\infty}\frac{3t^2+t^3}{3t^2+1} = \infty$$

   И к тому же $x \to \infty$, значит, при стремленни $t \to \infty$ нет ни наклонной, не вертикальной асимптоты.
   Расмотим случай $t \to \pm 0$:

   $$\lim_{t\to 0+}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0+}\frac{3t^2+t^3}{3t^2+1} = \frac{0+0}{0+1} = 0$$

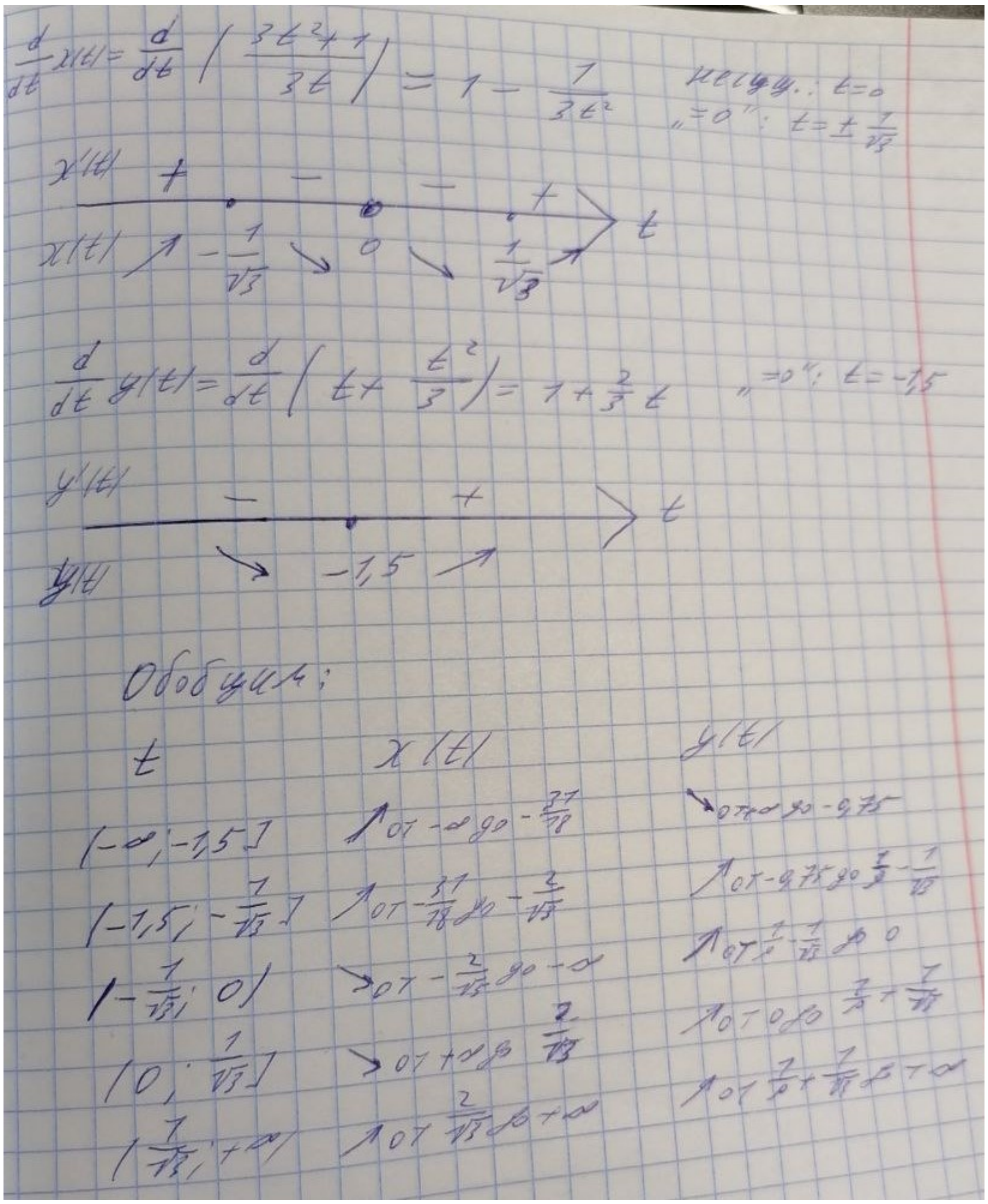
$$\lim_{t \to 0-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to 0-} \frac{3t^2 + t^3}{3t^2 + 1} = 0$$

При этом:

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{t \to 0} t + \frac{t^2}{3} = 0$$

То есть при $t \to 0$ есть горизонтальная асимптота $y = 0$

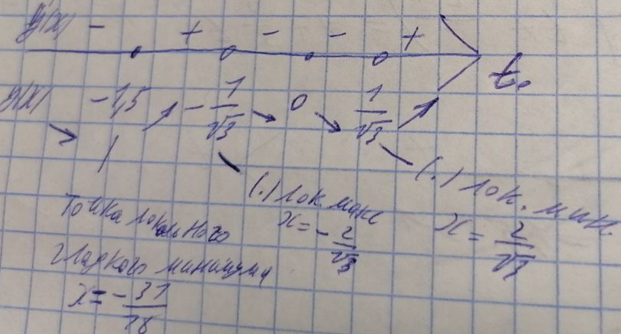
Исследуем производные функций $y(t)$ и $x(t)$, для того, чтобы понять, как ведет себя функция:

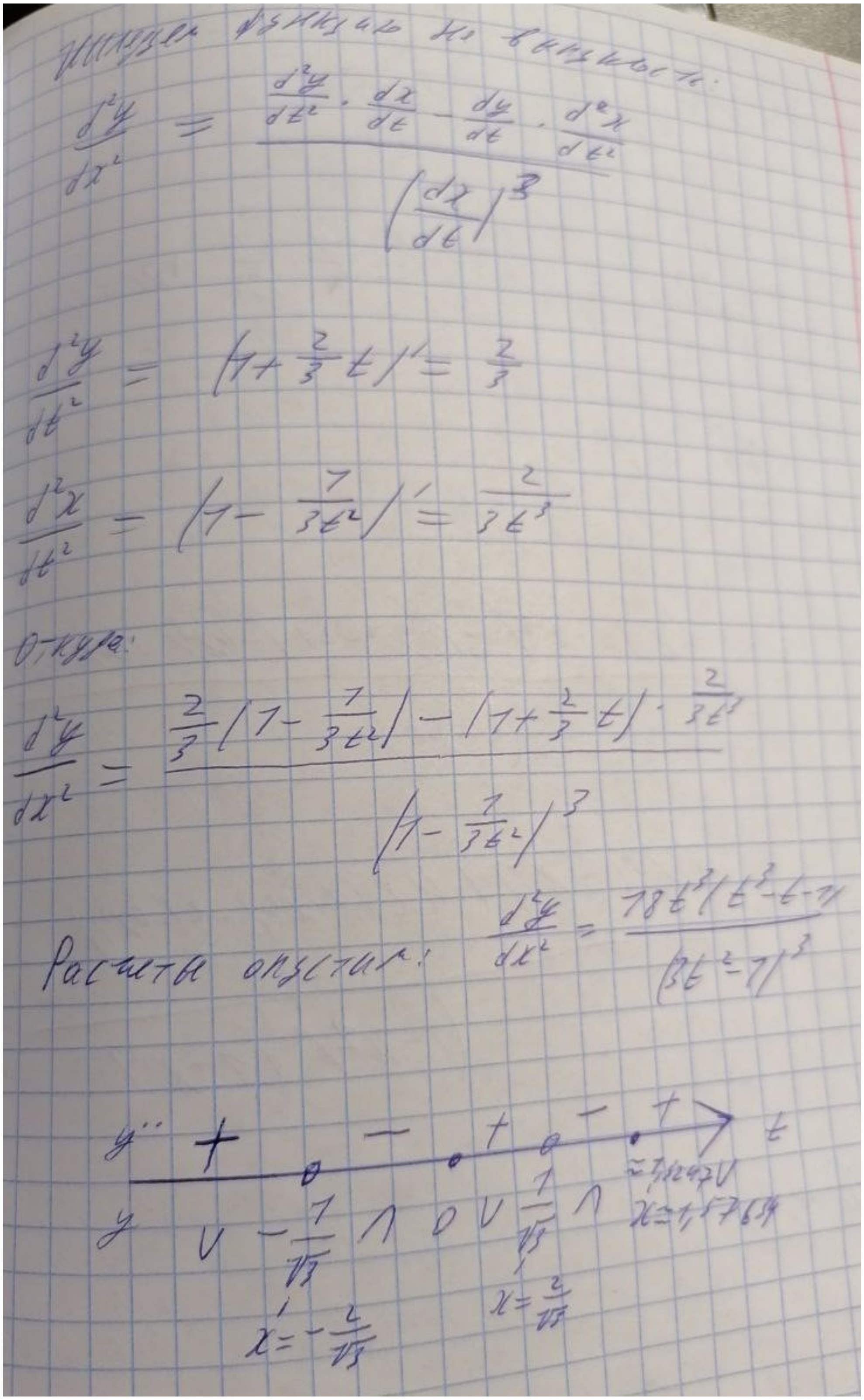


Найдем производную $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t_0)} = \frac{1+\frac{2}{3}t_0}{1-\frac{1}{3t_0^2}} = \frac{\frac{3+2t_0}{3}}{\frac{3t_0^2-1}{3t_0^2}} = \frac{(3+2t_0)t_0^2}{3t_0^2-1} = \frac{2t_0^3+3t_0^2}{3t_0^2-1}$$

Найдем экстремумы:





Исследуем функцию на выпуклость:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(1+\frac{2}{3}t\right)' = \frac{2}{3}$$

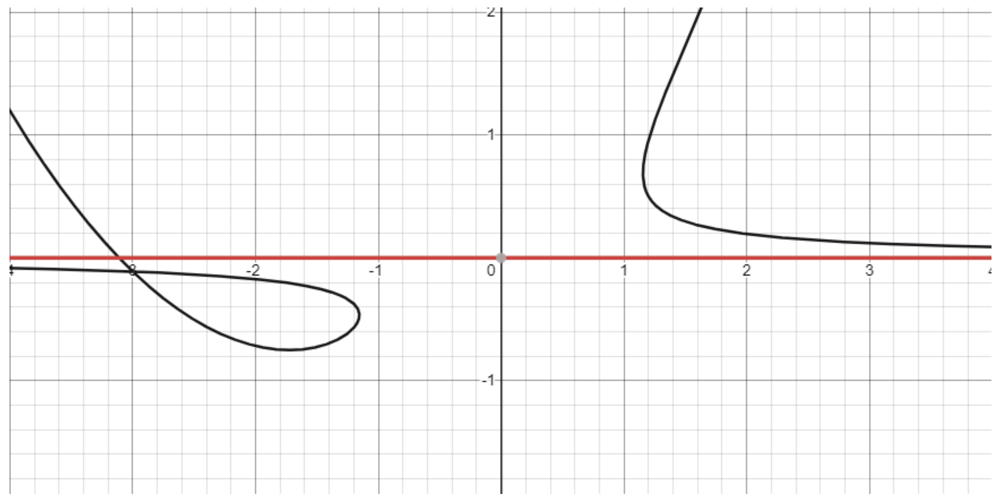
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(1-\frac{1}{3t^2}\right)' = \frac{2}{3t^3}$$

Откуда:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3t^2}\right) - \left(1+\frac{2}{3}t\right)\cdot\frac{2}{3t^3}}{\left(1-\frac{1}{3t^2}\right)^3}$$

Расчеты опустим: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18t^3(t^3-t-1)}{(3t^2-1)^3}$

После проведенных вычислений становится понятно, что функция не является четной/нечетной или периодической. Построим её график:



2.

$$y = \arccos\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{5}$$

Найдем область определения функции $D(f)$:

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \le 1 \Rightarrow |2x| \le 1 + x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2x \le 1 + x^2 \\ 2x \ge -1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le (1-x)^2 \\ 0 \ge -(1+x)^2 \end{cases}$$

Что выполняется всега, $D(f) = \mathbb{R}$

Функция не является ни четной, ни нечетной, а также не является периодичной.

Исследуем ее на монотонность и экстремумы. Для этого найдем производную:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2x^2-2}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{5} = \frac{(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} \cdot \frac{2x^2-2}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{|x-1||x+1|} \cdot \frac{2x^2-2}{1+x^2} - \frac{2}{5}$$

Найдем точки "подозреваемые"на экстремум:

Случай 1 (y' - не существует): $|x-1||x+1| = 0$

Откуда $x = 1$ или $x = -1$

Случай 2 ($y' = 0$):

$$\frac{1}{|x-1||x+1|} \cdot \frac{2x^2-2}{1+x^2} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\frac{x^2-1}{1+x^2} = \frac{|x-1||x+1|}{5}$$

$$5x^2 - 5 = |x^4 - 1|$$

$$\begin{cases} |x| \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} 5x^2 - 5 = x^4 - 1 \\ 5x^2 - 5 = -x^4 + 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = -6 \end{array} \right. \end{cases}$$

Итого $x = \pm 1, \pm 2$

По ~~desmos~~ методу интервалов отпределим, что -1 и 2 - точки лок. максимума, 1 и -2 - точки лок. минимума

Найдем асимптоты функции:

При $x \to \infty$, y тоже $\to \infty$, других асимптот нет, так как $\arccos \frac{2x}{1+x^2}$ - что-то ограниченное, а $-\frac{2x}{5} \to \infty$ только при $x \to \infty$

Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$ для $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arccos \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{5}}{x} = 0 + \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

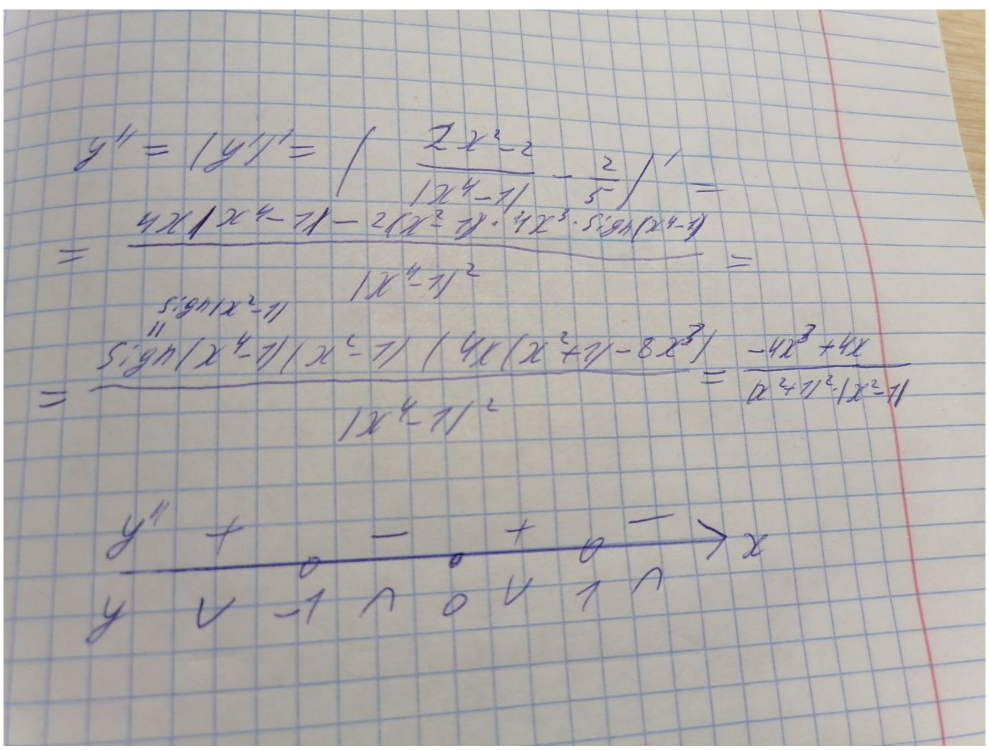
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\arccos \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{5}}{x} = 0 + \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

При этом найдем b:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\arccos \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{5} - \left(-\frac{2x}{5}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\arccos \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{5} - \left(-\frac{2x}{5}\right)\right) = \lim_{x\to-\infty} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

То есть полученная асимптота: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{\pi}{2}$ Исследуем функцию на выпуклость/вогнутость:

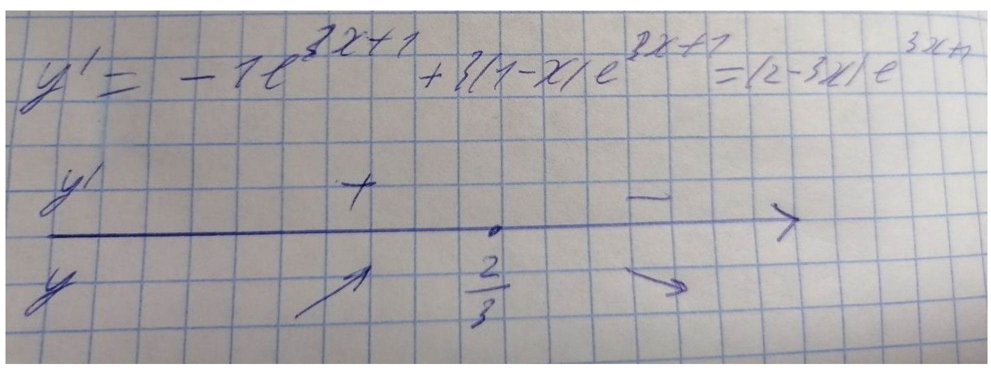


Построим график:

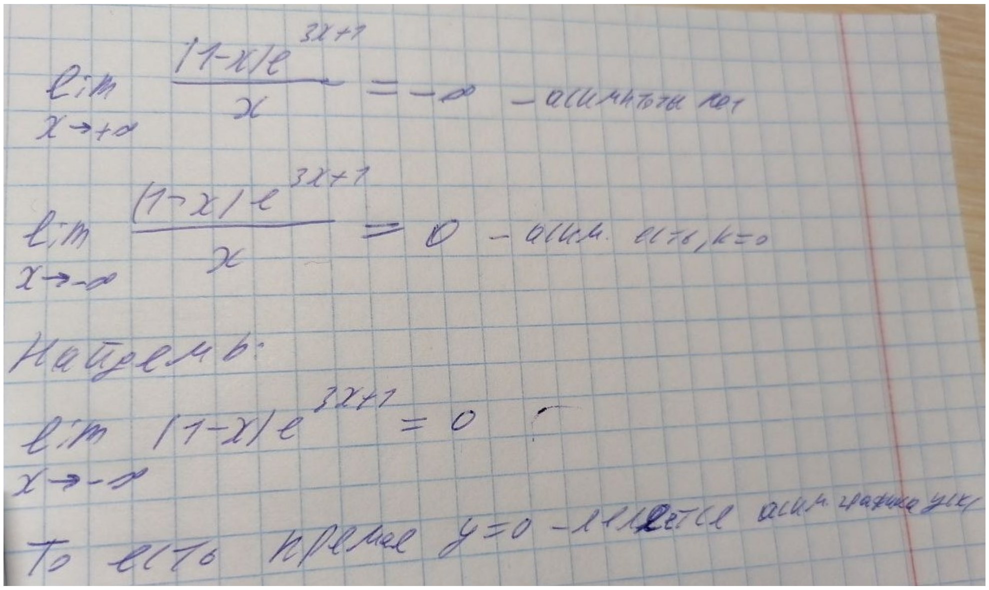
3.

$y = (1 - x)e^{3x+1}$

Область определения функции: $\mathbb{R}$
Функция не является ни четной, ни нечетной, а также не является периодичной.
Исследуем ее на монотонность и экстремумы. Для этого найдем производную:



После, найдем асимптоты к графику:



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)e^{3x+1}}{x} = -\infty$$ — асимптоты нет

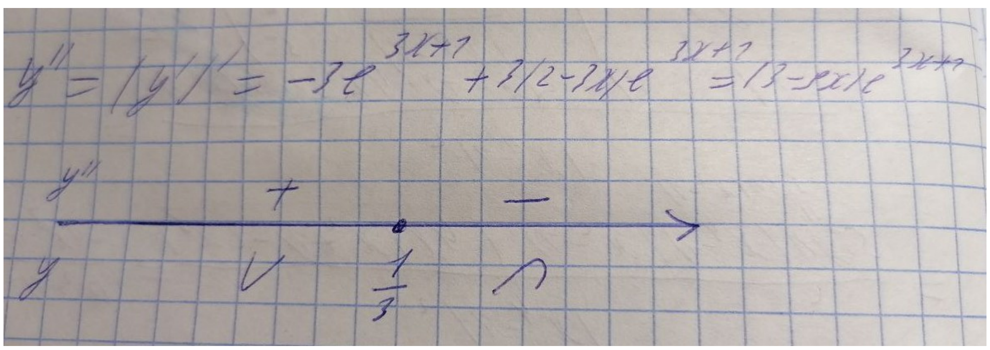
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x)e^{3x+1}}{x} = 0$$ — асим. есть, $k=0$

Найдем b:

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{3x+1} = 0$$

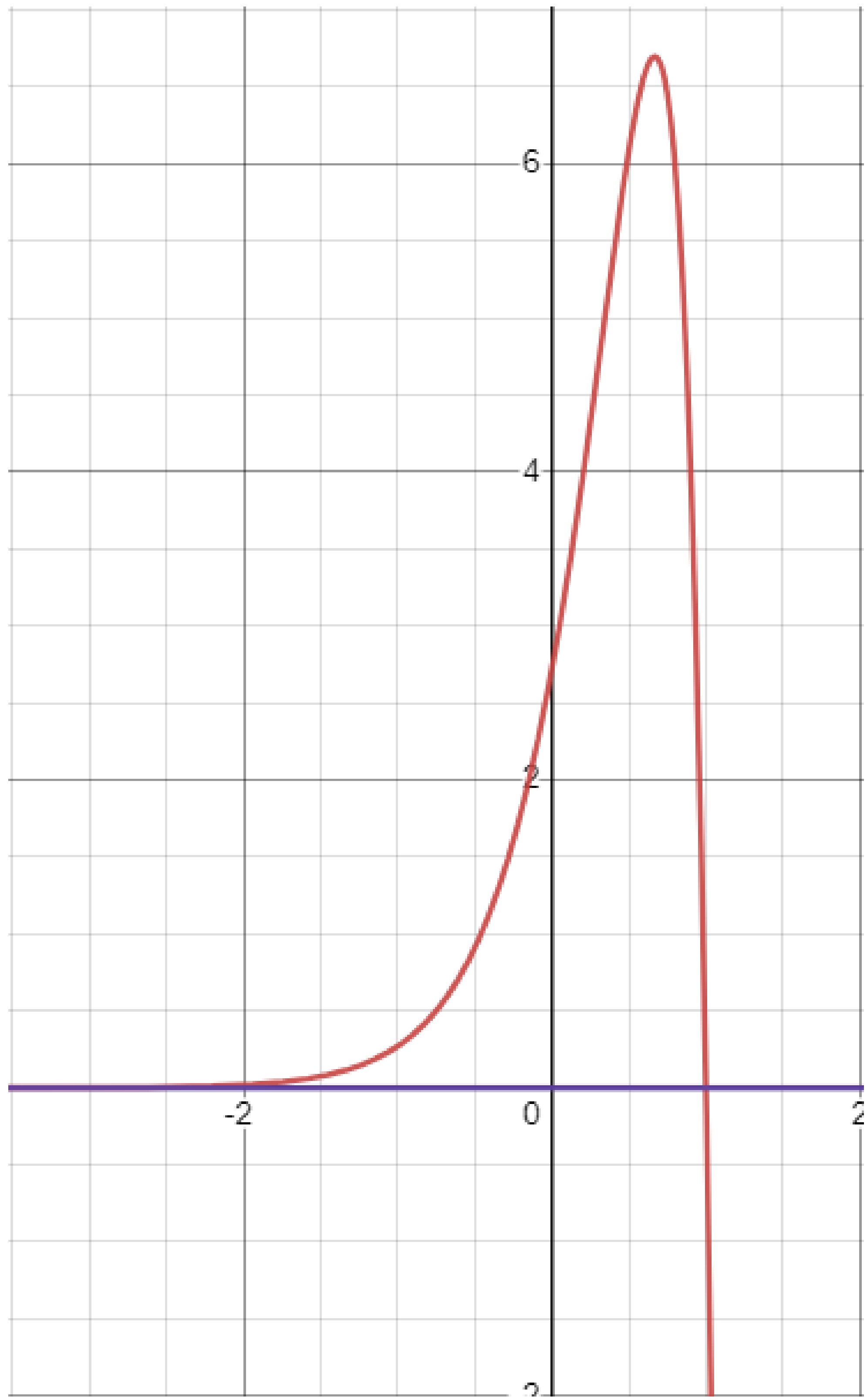
То есть прямая $y=0$ — является асим. графика $y(x)$

А следом, исследуем на выпуклость/вогнутость:



$$y'' = (y')' = -3e^{3x+1} + 3(2-3x)e^{3x+1} = (3-9x)e^{3x+1}$$

Построим график:

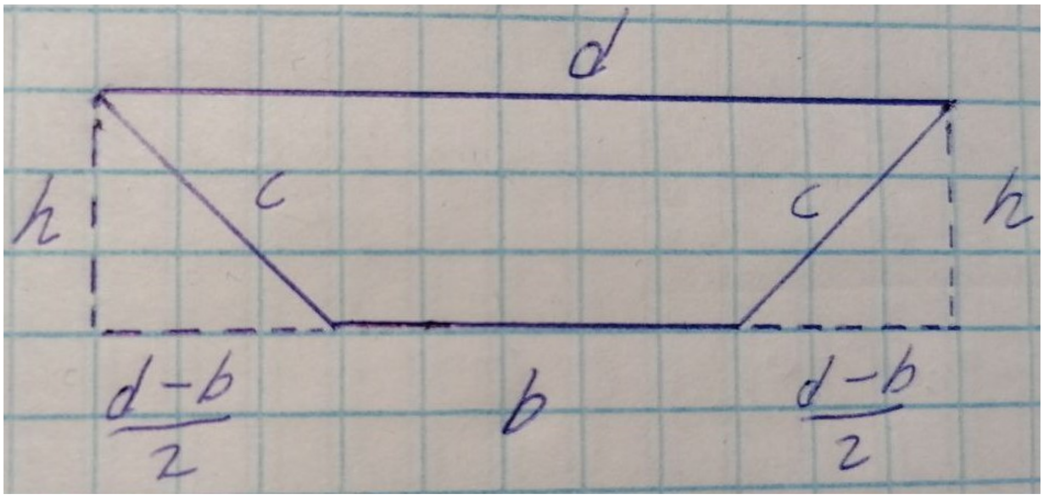

6
4
2
-2
0
2
-2

Задание 6

Условие

Из полосы жести шириной a требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого должно иметь форму равнобочной трапеции. Дно желоба имеет ширину b. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

Ход решения



Где $c = \frac{a-b}{2}$.

По теореме Пифагора: $c^2 = h^2 + \left(\frac{d-b}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{d-b}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{(a-b)^2-(d-b)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}$

Площадь трапеции: $S = \frac{b+d}{2} \cdot h = \frac{b+d}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}$

Желоб будет вмещать наибольший объем воды при фиксированной длине, если площадь сечения (трапеции) будет максимальной, найдем это максимальное значение с помощью производной:

$S' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}} + \frac{b+d}{2} \cdot \frac{-2d+2b}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}}$

Из построения видно, что если $d \to a-$ то объем воды $= 0$. К тому же, если $d \to 0+$ то трапеция будет стремится к треугольнику, у которого площадь явно меньше. Значит, максимальное значение $S(d)$ будет в какой-нибудь точке локального максимума, найдем их:

Случай 1 ($S'(d)$ - не существует):

То есть $\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4} \le 0 \Rightarrow -d^2 + 2db + a^2 - 2ab \le 0 \Rightarrow -(d-a)(d+a-2b) \le 0 \Rightarrow (d-a)(d+a-2b) \ge 0$

Откуда, по методу интервалов получим, что либо $d \ge a$, либо $d \le 2b - a$.

Первое невозможно так как если $d \ge a$, то трапецию не построишь (даже если боковые стороны "выпрямим" к основанию, то их все равно не хватит, чтобы достать до концов отрезка длиной d).

А $d \le 2b - a \Leftrightarrow b + 2c \le 2b - d \Leftrightarrow c \le \frac{b-d}{2} \Rightarrow c^2 \le \left(\frac{b-d}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{d-b}{2}\right)^2 + h^2 \le \left(\frac{b-d}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 \le 0$ - чего не может быть.

Случай 2 ($S'(d) = 0$):

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}+\frac{b+d}{2}\cdot\frac{-2d+2b}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}}=0$$

$$\sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}=\frac{b+d}{2}\cdot\frac{d-b}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}\right)^2=\frac{(d^2-b^2)}{4}$$

$$a^2-2ab-d^2+2db=(d^2-b^2)$$

$$2d^2-2bd-(a-b)^2=0$$

Решим квадратное уравнение относительно d:

$D = 4b^2 + 8(a-b)^2$ - сумма квадратов всегда неотрицательна

$$d_1 = \frac{2b+\sqrt{4b^2+8(a-b)^2}}{4}$$

$d_2 = \dfrac{2b-\sqrt{4b^2+8(a-b)^2}}{4}$ - явно меньше нуля, чего не может быть

Итого $d = \frac{2b+\sqrt{4b^2+8(a-b)^2}}{4}$, докажем, что это максимум взяв, например $S'\left(\frac{b}{2}\right)$ и $S'\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}+b\right)$
Расчеты, пожалуй опустим ;)

Ответ: $d = \frac{2b+\sqrt{4b^2+8(a-b)^2}}{4}$

Задание 7

Условие

Вычислить пределы с помощью формулы Тейлора:

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e\sqrt[3]{1-4x^2}}{(1/x)\arcsin 2x - 2\operatorname{ch} x^2}$$

2.

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{e^x/(x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)}$$

Ход решения

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e\sqrt[3]{1-4x^2}}{(1/x)\arcsin 2x - 2\operatorname{ch} x^2}$$

Разложим по формуле Тейлора до второго(местами третьего) порядка:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} - e\left(1 - \frac{4x^2}{3} + o(x^2)\right)}{(1/x)\left(2x + \frac{8x^3}{6} + o(x^3)\right) - 2(1 + o(x^2))} = \lim_{x\to 0} \frac{e \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} - e + \frac{4ex^2}{3} + o(x^2)}{2 + \frac{8x^2}{6} + o(x^2) - 2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - e + \frac{4ex^2}{3} + o(x^2)}{\frac{8x^2}{6} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{ex^2}{2} + \frac{4ex^2}{3} + o(x^2)}{\frac{4x^2}{3} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5ex^2}{6} + o(x^2)}{\frac{4x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{5e}{8}$$

Ответ: $\frac{5e}{8}$

2.

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{e^x/(x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{e^x/(x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{\frac{1}{\arcsin x^3} \cdot \frac{e^x \arcsin x^3}{x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{e^x \arcsin x^3}{x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x}}$$

Разложим по формуле Тейлора до таких порядков, чтобы получилось $o(x^3)$:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{(1+o(1))(x^3+o(x^3))}{x\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + (x+o(x))^3}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{x^3+o(x^3)}{x\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) - x + \frac{x^3}{6} + x^3 + o(x^3)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}} = e^1 = e$$

Ответ: e