

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
Национальный Исследовательский Университет ИТМО  
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

**ИДЗ №3**  
Вариант: №17

Выполнил: Назин Артем Аркадьевич  
Группа: Р3107  
Поток: 11.3  
Преподаватель: Ершов Александр Романович

Санкт-Петербург  
2023

# Содержание

1	Задание 1	2
2	Задание 2	7
3	Задание 3	8
4	Задание 4	9
5	Задание 5	14
6	Задание 6	15
7	Задание 7	17

**P.S.** Данное ИДЗ выполнено в  $\text{\LaTeX}$  и является моим вторым опытом работы в нём после Лабы №6 по информатике, так что прошу прощения за тонну орфографических ошибок и очень кривое оформление местами

# Задание 1

## Условие

Построить эскиз графика данной функции, используя преобразования графика соответствующей элементарной функции. Указать область определения и область значений данной функции:

1.  $y = 3 \sin\left(2 + \frac{x}{2\pi}\right) - 5$

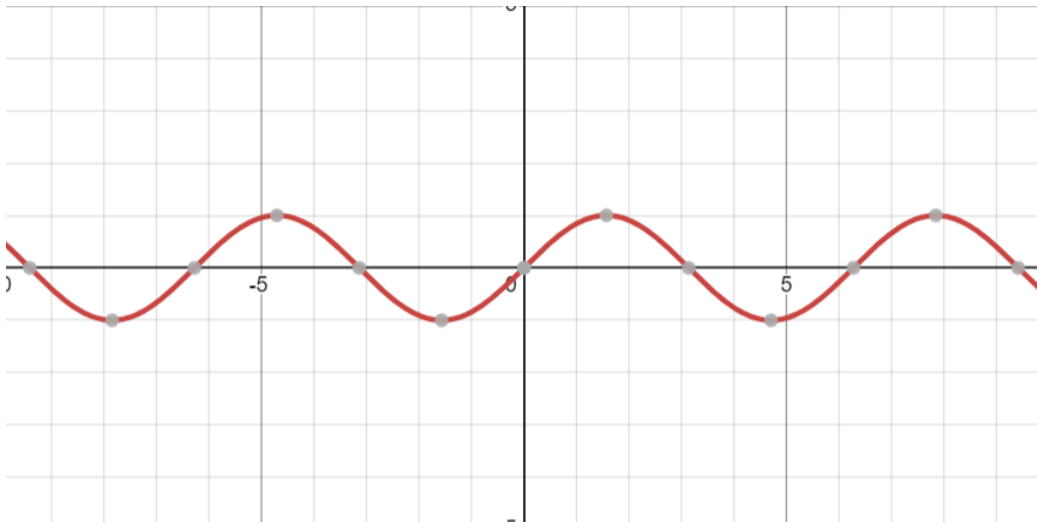
2.  $y = \sqrt{\left(\frac{|6-2x|+x}{10-|5x-15|}\right)^2}$

3.  $y = \log_4\left(2 + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

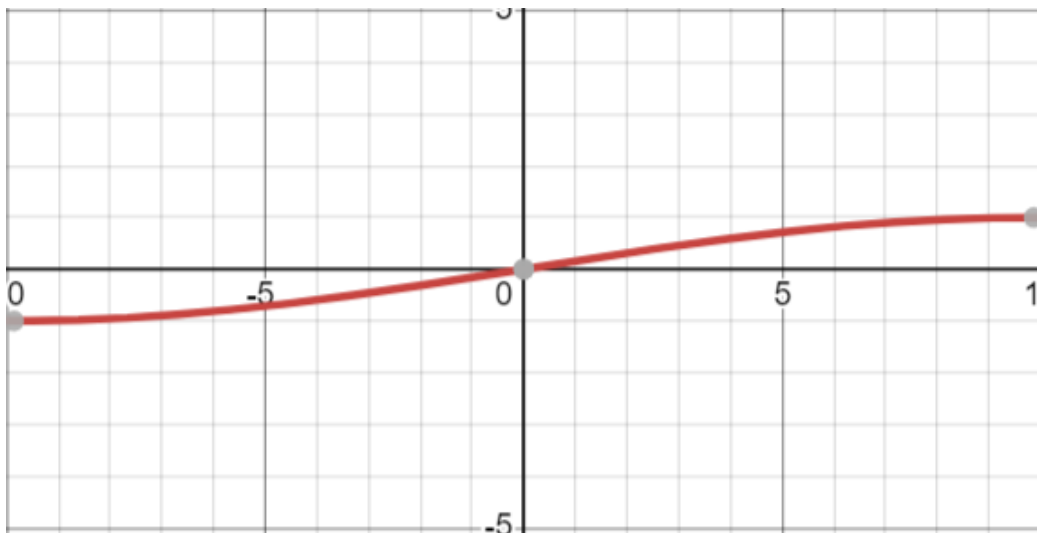
## Ход решения

1.  $y = 3 \sin\left(2 + \frac{x}{2\pi}\right) - 5 = 3 \sin\left(\frac{(x + 4\pi)}{2\pi}\right) - 5$

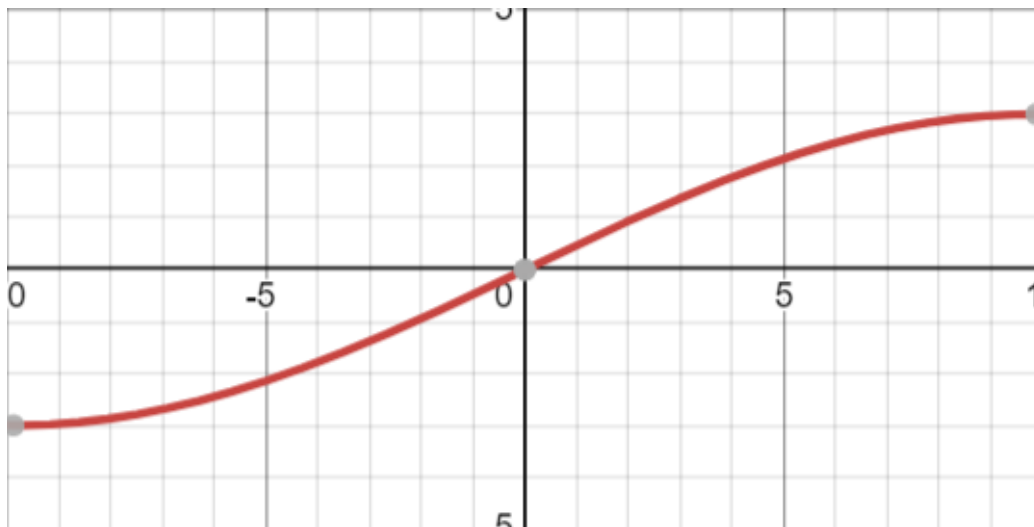
Построим базовую функцию:  $y = \sin x$ :



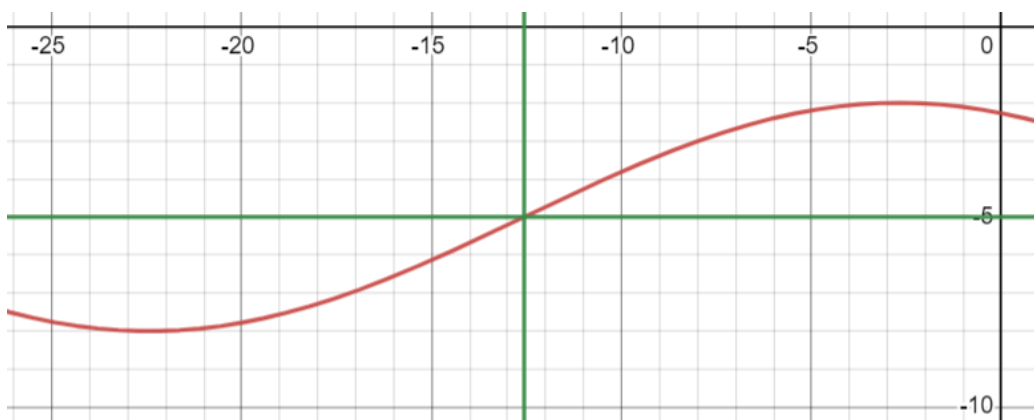
Изменим циклическую частоту:  $y = \sin\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ :



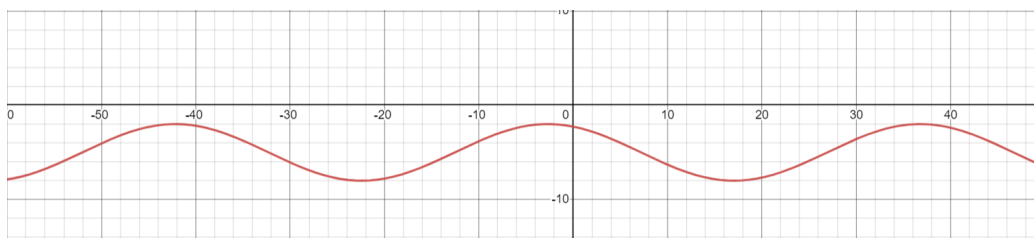
Растянем график в 3 раза по ОУ:  $y = 3 \sin\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ :



Построим график относительно новых осей:  $y' = y - 5$  и  $x' = x - 4\pi$ :



В итоге, посредством элементарных преобразований мы получили график функции  $y = 3 \sin\left(2 + \frac{x}{2\pi}\right) - 5$ :



$$2. \quad y = \sqrt{\left(\frac{|6-2x|+x}{10-|5x-15|}\right)^2} = \left|\left(\frac{|6-2x|+x}{10-|5x-15|}\right)\right|$$

Раскроем внутренние модули:

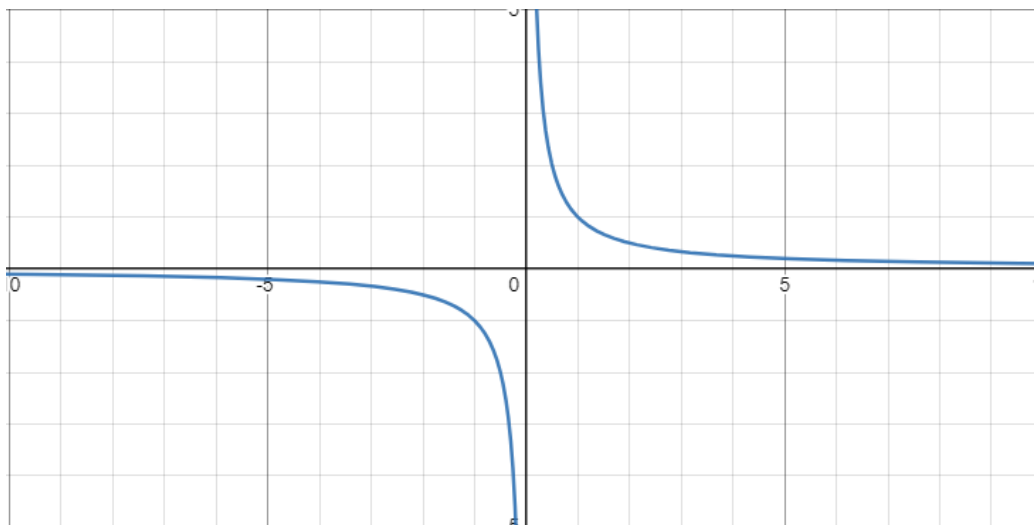
$$\begin{cases} \left|\frac{-x+6}{5x-5}\right|, x < 3 & (1) \\ \left|\frac{3x-6}{-5x+25}\right|, x \geq 3 & (2) \end{cases}$$

Теперь построим (1) и (2) без модулей:

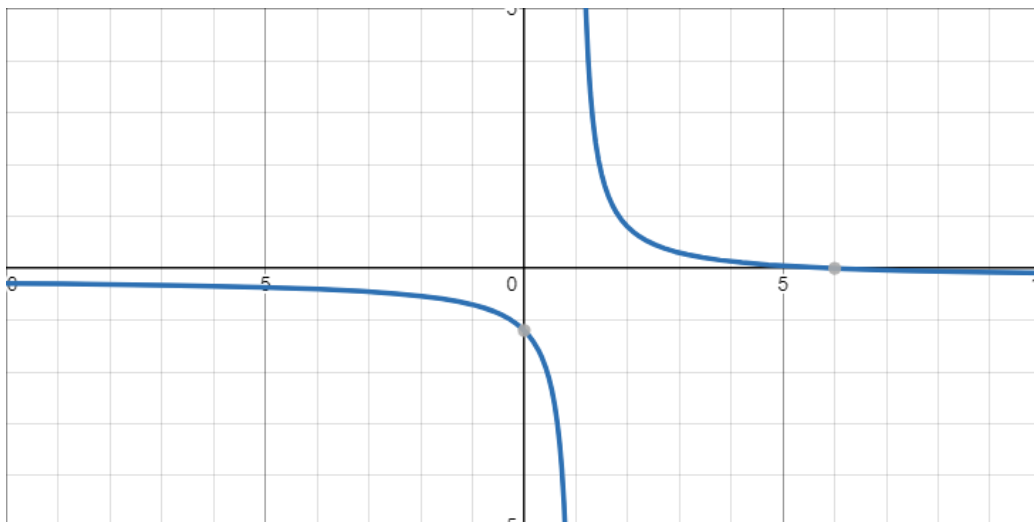
**(1):**

$$\frac{3x-6}{-5x+25} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{x-1}$$

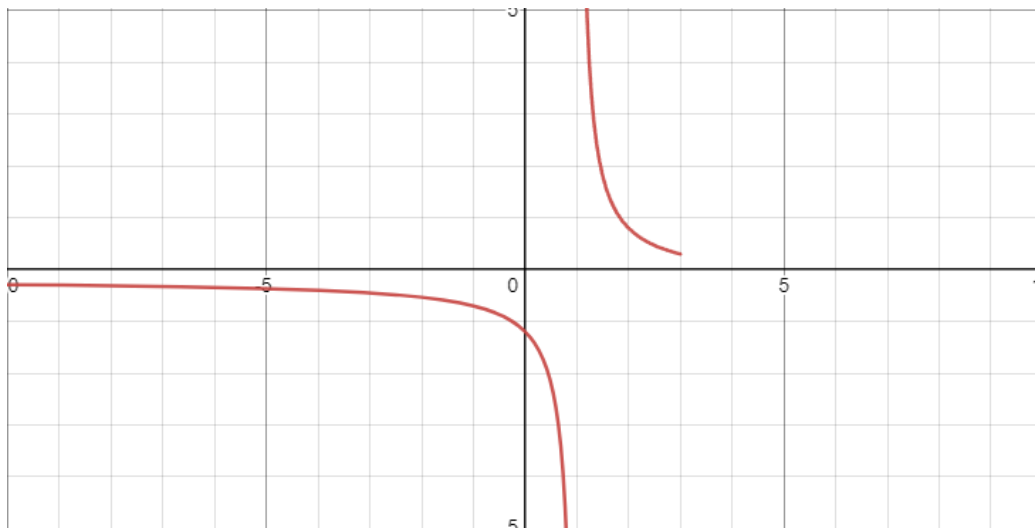
Для этого сначала построим базовый график  $\frac{1}{x}$ :



После сместим на +1 по x и  $-\frac{1}{5}$  по y:

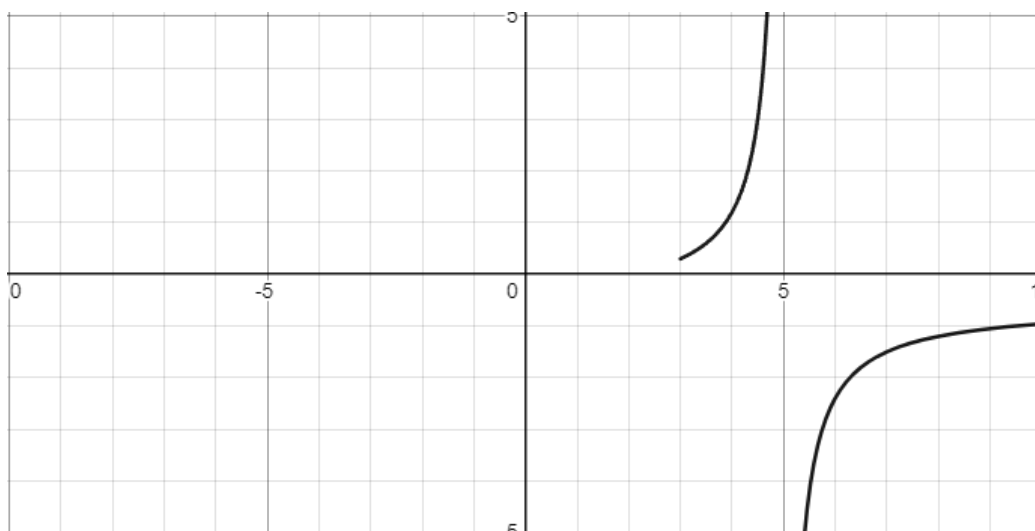


Уберем лишнее:

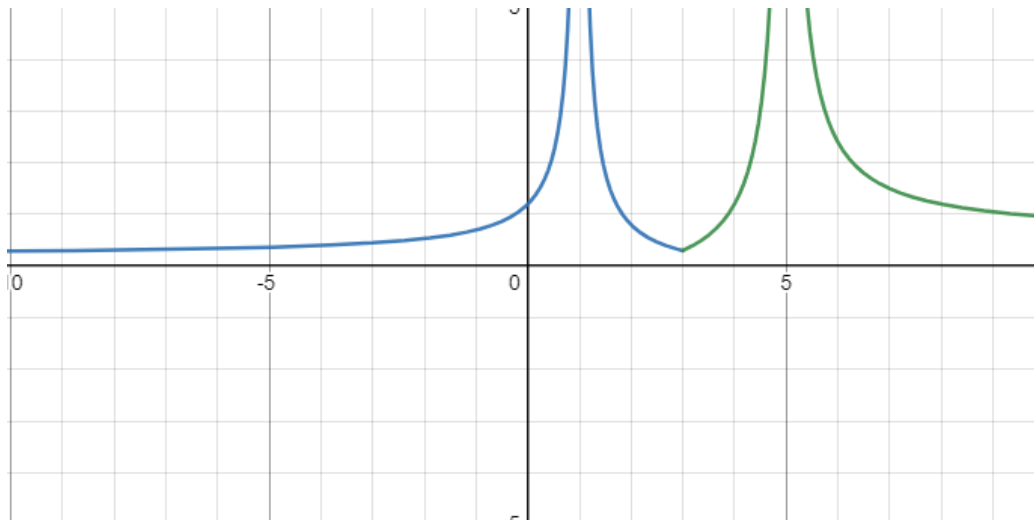


Аналогично для (2):

$$\frac{3x-6}{-5x+25} = -\frac{3}{5} + \frac{9}{-5(x-5)}$$



Совместим и отразим отрицательную часть относительно оси ОХ, то есть получим итоговый график:



$$3. \quad y = \log_4 \left( 2 + \sqrt{\frac{1}{x}} \right)$$

График этой функции построим, изучив предварительно ее свойства.

Функция определена для  $x > 0$  и монотонно убывает от  $+\infty$  до 0.5

Построим поочередно графики. Сначала  $\frac{1}{x}$  (красная линия), потом  $2 + \sqrt{\frac{1}{x}}$  (синяя линия), следом  $\log_4 \left( 2 + \sqrt{\frac{1}{x}} \right)$  (черная линия):



## Задание 2

### Условие

Доказать по определению предела функции в точке (по Коши):

$$\lim_{x \rightarrow 11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23$$

**Ход решения** Преобразуем выражение  $\left| \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} - 23 \right|$ :

$$\left| \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} - 23 \right| = \left| \frac{2x^2 - 21x - 11 - 23x + 253}{x - 11} \right| = \left| \frac{2x^2 - 44x + 242}{x - 11} \right| = \left| \frac{2(x - 11)^2}{x - 11} \right|$$

Так как при стремлении к 11,  $x$  в саму точку 11 не попадает, то:

$$\left| \frac{2(x - 11)^2}{x - 11} \right| = 2|x - 11|$$

Возьмем  $\varepsilon > 0$  и найдем решения неравенства:

$$\left| \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} - 23 \right| = 2|x - 11| < \varepsilon$$

$$|x - 11| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Получается, что из неравенства  $|x - 11| < \frac{\varepsilon}{2}$  следует  $\left| \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} - 23 \right| < \varepsilon$ , то есть выполнено определение предела по Коши для  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ . ч.т.д.



## Задание 3

### Условие

Доказать, что данный предел не существует:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{ctg}(1 + x^2)$$

### Ход решения

Рассмотрим некоторые последовательности  $x_n$  удовлетворяющие первой части определения по Гейне, то есть такие что:

$$\begin{cases} x_n \in D(f) \text{ (Область определения)} \\ x_n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Например:  $y_n = \sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi n - 1}$  и  $a_n = \sqrt{\frac{3\pi}{4} + \pi n - 1}$ . К тому же  $n \geq 1 \Rightarrow y_n, a_n \geq 0$ .

$$\text{Получается } \operatorname{ctg}(1 + y_n^2) = \operatorname{ctg}\left(1 + \left(\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi n - 1}\right)^2\right) = \operatorname{ctg}\left(1 + \frac{\pi}{4} + \pi n - 1\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{const} = 1$$

$$\text{А } \operatorname{ctg}(1 + a_n^2) = \operatorname{ctg}\left(1 + \left(\sqrt{\frac{3\pi}{4} + \pi n - 1}\right)^2\right) = \operatorname{ctg}\left(1 + \frac{3\pi}{4} + \pi n - 1\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} + \pi n\right) = \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{const} = -1$$

То есть мы взяли две последовательности из определения по Гейне и получили, что они стремятся к разным числам, что напрямую этому определению противоречит, следовательно предела - нет. ч.т.д. Аналогично для  $x \rightarrow -\infty$ .

## Задание 4

### Условие

Вычислить пределы:

1.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(\cos \frac{\pi x}{a} + 2)}{a^{\frac{a^2}{x^2} - \frac{a}{x}} - a^{\frac{a}{x} - 1}}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5^{\arcsin x^3})^{\frac{(\operatorname{cosec}^2 x)}{x}}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} (0.5 + \cos 3x)^{\sec x}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 + \cos x \sin \frac{2}{2x - \pi}}{3 + 2x \sin x}$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 3) + \operatorname{arctg}(x^2 - 5)}{\ln(x - 1)}$$

## Ход решения

1.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$$

Вид неопределенности:  $\left[ \frac{0}{0} \right]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x - 2)(x + 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - x - 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 1 + 1}{(t - 1)^2 - (t - 1) - 2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2 - 2t + 1 - t + 1 - 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2 - 3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{t}}{\frac{t^2}{t} - \frac{3t}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t - 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $-\frac{1}{3}$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$$

Вид неопределенности:  $\left[ \frac{0}{0} \right]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{9t + 27} - 3}{\sqrt{t+6} - \sqrt{2t+6}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3\sqrt[3]{\frac{t}{3} + 1} - 3}{\sqrt{6}\sqrt{\frac{t}{6} + 1} - \sqrt{6}\sqrt{\frac{t}{3} + 1}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3(1 + \frac{t}{9} + o(t)) - 3}{\sqrt{6}(1 + \frac{t}{12} + o(t)) - \sqrt{6}(1 + \frac{t}{6} + o(t))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{3} + o(t)}{\frac{\sqrt{6}t}{12} - \frac{\sqrt{6}t}{6} + o(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{3} + o(t)}{-\frac{\sqrt{6}t}{12} + o(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{-\frac{\sqrt{6}}{12} + o(1)} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{\sqrt{6}}{12}} = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$$

Вид неопределенности:  $\left[ \frac{0}{0} \right]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos \pi t + \pi}{\operatorname{tg}^2 \pi t + \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \pi t}{\operatorname{tg}^2 \pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{\pi^2 t^2}{2} + o(t^2))}{(\pi t + o(t))^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi^2 t^2}{2} + o(t^2)}{\pi^2 t^2 + o(t)\pi t + o(t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi^2 t^2}{2} + o(t^2)}{\pi^2 t^2 + o(t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi^2}{2} + o(1)}{\pi^2 + o(1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{1}{2}$

4.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(\cos \frac{\pi x}{a} + 2)}{a^{\frac{a^2}{x^2} - \frac{a}{x}} - a^{\frac{a}{x} - 1}}$$

Вид неопределенности:  $\left[ \frac{0}{0} \right]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(\cos \frac{\pi x}{a} + 2)}{a^{\frac{a^2}{x^2} - \frac{a}{x}} - a^{\frac{a}{x} - 1}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(\cos \frac{\pi x}{a} + 2)}{a^{\frac{a}{x} - 1} \left( a^{\frac{a^2}{x^2} - \frac{2a}{x} + 1} - 1 \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos \frac{\pi(t+a)}{a} + 2)}{a^{\frac{a}{t+a} - 1} \left( a^{\frac{a^2}{(t+a)^2} - \frac{2a}{t+a} + 1} - 1 \right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\frac{\pi t}{a} + \pi) + 2)}{a^{\frac{a-t-a}{t+a}} \left( a^{\frac{a^2}{(t+a)^2} - \frac{2at+2a^2}{(t+a)^2} + \frac{(t+a)^2}{(t+a)^2} - 1 \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(-\cos \frac{\pi t}{a} + 2)}{a^{\frac{-t}{t+a}} \left( a^{\frac{a^2-2at-2a^2+t^2+2at+a^2}{(t+a)^2} - 1} \right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(-\cos \frac{\pi t}{a} + 2)}{a^{\frac{-t}{t+a}} \left( a^{\frac{t^2}{(t+a)^2} - 1} \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(-(1 - \frac{\pi^2 t^2}{2a^2} + o(t^2)) + 2)}{\left( 1 - \frac{t}{t+a} \ln(a) + o(t) \right) \left( \left( 1 + \frac{t^2}{(t+a)^2} \ln(a) + o(t^2) \right) - 1 \right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\pi^2 t^2}{2a^2} + o(t^2))}{\left( 1 - \frac{t}{t+a} \ln(a) + o(t) \right) \left( \frac{t^2}{(t+a)^2} \ln(a) + o(t^2) \right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi^2 t^2}{2a^2} + o(t^2) + o(\frac{\pi^2 t^2}{2a^2} + o(t^2))}{\frac{t^2}{(t+a)^2} \ln(a) + o(t^2) - \frac{t^3}{(t+a)^3} \ln^2(a) - \frac{t}{t+a} o(t^2) + \frac{t^2}{(t+a)^2} \ln(a) o(t) + o(t) o(t^2)} \end{aligned}$$

Заметим, что:  $o\left(\frac{t^k}{(a+t)^n}\right) = o(t^k)$ , где  $k, n \in \mathbb{N}$  (ограниченная умножить на  $t^k$ )

$$\begin{aligned} \text{Откуда: } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi^2 t^2}{2a^2} + o(t^2) + o(\frac{\pi^2 t^2}{2a^2} + o(t^2))}{\frac{t^2}{(t+a)^2} \ln(a) + o(t^2) - \frac{t^3}{(t+a)^3} \ln^2(a) - o(t^3) + o(t^3)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi^2 t^2}{2a^2} + o(t^2)}{\frac{t^2}{(t+a)^2} \ln(a) + o(t^2) - \frac{t^3}{(t+a)^3} \ln^2(a)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi^2}{2a^2} + o(1)}{\frac{1}{(t+a)^2} \ln(a) + o(1) - \frac{t}{(t+a)^3} \ln^2(a)} = \frac{\frac{\pi^2}{2a^2}}{\frac{1}{a^2} \ln(a) - 0} = \frac{\pi^2}{2 \ln(a)} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{\pi^2}{2 \ln(a)}$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5^{\arcsin x^3})^{\frac{(\operatorname{cosec}^2 x)}{x}}$$

Вид неопределенности:  $[1^\infty]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5^{(x^3 + o(x^3))})^{\frac{1}{x \sin^2 x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5^{(x^3 + o(x^3))})^{\frac{1}{x(x+o(x))^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - (1 + (x^3 + o(x^3)) \ln 5 + o(x^3 + o(x^3))))^{\frac{1}{x^3 + o(x^3)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^3 \ln 5 + o(x^3))^{\left( \frac{1}{-x^3 \ln 5 + o(x^3)} \cdot \frac{-x^3 \ln 5 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\left( \frac{-x^3 \ln 5 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\left( \frac{-\ln 5 + o(1)}{1 + o(1)} \right)} = e^{-\ln 5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{1}{5}$

6.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} (0.5 + \cos 3x)^{\sec x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} (0.5 + \cos 3x)^{\sec x} = \lim_{t \rightarrow 0 \pm} \left( 0.5 + \cos \left( 3t + \frac{3\pi}{2} \right) \right)^{\frac{1}{\cos \left( \frac{\pi}{2} + t \right)}} = \lim_{t \rightarrow 0 \pm} (0.5 + \sin 3t)^{\frac{1}{-\sin t}}$$

Рассмотрим отдельно при  $t \rightarrow 0+$  и  $t \rightarrow 0-$

$$\lim_{t \rightarrow 0-} (0.5 + \sin 3t)^{\frac{1}{-\sin t}} = \lim_{t \rightarrow 0-} (0.5 + 3t + o(t))^{\frac{1}{-(t+o(t))}} = \lim_{t \rightarrow 0-} (0.5 + 3t + o(t))^{\infty} = \lim_{t \rightarrow 0-} (0.5)^{\infty} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (0.5 + \sin 3t)^{\frac{1}{-\sin t}} = \lim_{t \rightarrow 0+} (0.5 + 3t + o(t))^{\frac{1}{-(t+o(t))}} = \lim_{t \rightarrow 0+} (0.5 + 3t + o(t))^{-\infty} = \lim_{t \rightarrow 0+} (0.5)^{-\infty} = +\infty$$

**Ответ для  $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ : 0,**

**для  $x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$ :  $+\infty$**

7.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 + \cos x \sin \frac{2}{2x-\pi}}{3 + 2x \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 + \cos x \sin \frac{2}{2x-\pi}}{3 + 2x \sin x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 + \cos \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{2}{2t+\pi-\pi}}{3 + 2 \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( t + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{2 - \sin t \sin \frac{2}{2t}}{3 + 2 \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \cos t}$$

Функция:  $\sin \frac{1}{t}$  - ограниченная, а  $\sin t$  - бесконечно малая

Следовательно их произведение - бесконечно малая

Откуда. подставив  $t = 0$ , получим:

$$\frac{2 - 0}{3 + 2 \left( 0 + \frac{\pi}{2} \right) \cos (0)} = \frac{2}{3 + \pi}$$

**Ответ:**  $\frac{2}{3+\pi}$

8.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 3) + \operatorname{arctg}(x^2 - 5)}{\ln(x - 1)} \\ & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 3) + \operatorname{arctg}(x^2 - 5)}{\ln(x - 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(t^2 + 4t + 4 - 3) + \operatorname{arctg}(t^2 + 4t + 4 - 5)}{\ln(t + 1)} = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(t^2 + 4t + 1) + \operatorname{arctg}(t^2 + 4t - 1)}{\ln(t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(t) + f_2(t)}{h(t)} \end{aligned}$$

Раскроем  $\operatorname{arctg}$  и  $\ln$  до первого порядка по формуле Тейлора, для этого посчитаем производные:

$$f_1'(t) = (\operatorname{arctg}(t^2 + 4t + 1))' = \frac{2t + 4}{1 + (t^2 + 4t + 1)^2}$$

$$f_2'(t) = (\operatorname{arctg}(t^2 + 4t - 1))' = \frac{2t + 4}{1 + (t^2 + 4t - 1)^2}$$

$$h'(t) = (\ln(t + 1))' = \frac{1}{t + 1}$$

Подставим  $t_0$ :

$$f_1(0) = \operatorname{arctg}(0^2 + 4 * 0 + 1) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f_2(0) = \operatorname{arctg}(0^2 + 4 * 0 - 1) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$h(0) = \ln(0 + 1) = \ln(1) = 0$$

$$f_1'(0) = \frac{2 * 0 + 4}{1 + (0^2 + 0 * t + 1)^2} = \frac{4}{1 + 1^2} = 2$$

$$f_2'(0) = \frac{2 * 0 + 4}{1 + (0^2 + 0 * t - 1)^2} = \frac{4}{1 + (-1)^2} = 2$$

$$h'(0) = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

Откуда:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(t) + f_2(t)}{h(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\pi}{4} + 2t + o(t)\right) + \left(-\frac{\pi}{4} + 2t + o(t)\right)}{0 + t + o(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t + o(t)}{t + o(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 + o(1)}{1 + o(1)} = 4$$

**Ответ:** 4

## Задание 5

### Условие

Провести полное исследование функций и построить их графики.

1.

$$\begin{cases} x = \frac{3t^2+1}{3t} \\ y = t + \frac{t^2}{3} \end{cases}$$

2.

$$y = \arccos \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{5}$$

3.

$$y = (1-x)e^{3x+1}$$

### Ход решения

1.

$$\begin{cases} x = \frac{3t^2+1}{3t} \\ y = t + \frac{t^2}{3} \end{cases}$$

Найдем область определения функции  $D(f)$ :

$y(t)$  - существует всегда, рассмотрим чему не может равняться  $x(t)$ :

$x(t) = \frac{3t^2+1}{3t} = t + \frac{1}{3t}$  - не достигает каких-то значений около нуля, найдем их через локальный минимум/максимум:

$x'(t) = 1 - \frac{1}{3t^2}$  - не существует в нуле как и сама функция  $x(t)$ ,  $x'(t) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3t^2} = 0 \Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

Подставив различные значения, получим, что:  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  - лок. минимум,  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  - лок. максимум

$$x(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}, x(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{То есть } D(f) = (-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty)$$

Найдем сначала асимптоты кривой. Будем искать наклонные асимптоты в виде  $y = kx + b$ . Переменная  $x$  стремится к бесконечности, когда  $t \rightarrow 0$  или  $t \rightarrow \pm\infty$ . При  $t \rightarrow \pm\infty$  переменная  $y$  тоже будет стремиться к бесконечности, при этом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t(3t + t^2)}{3(3t^2 + 1)}$$

2.

$$y = \arccos \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{5}$$

3.

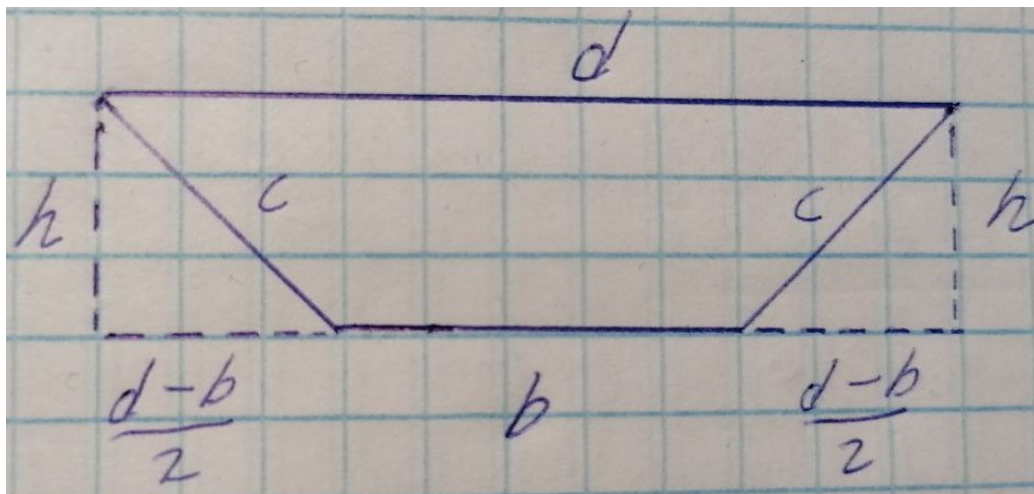
$$y = (1-x)e^{3x+1}$$

## Задание 6

### Условие

Из полосы жести шириной  $a$  требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого должно иметь форму равнобокой трапеции. Дно желоба имеет ширину  $b$ . Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

### Ход решения



Где  $c = \frac{a-b}{2}$ .

По теореме Пифагора:  $c^2 = h^2 + \left(\frac{d-b}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{d-b}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{(a-b)^2 - (d-b)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 - 2ab - d^2 + 2db}{4}}$

Площадь трапеции:  $S = \frac{b+d}{2} \cdot h = \frac{b+d}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - 2ab - d^2 + 2db}{4}}$

Желоб будет вмещать наибольший объем воды при фиксированной длине, если площадь сечения (трапеции) будет максимальной, найдем это максимальное значение с помощью производной:

$$S' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - 2ab - d^2 + 2db}{4}} + \frac{b+d}{2} \cdot \frac{-2d+2b}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - 2ab - d^2 + 2db}{4}}}$$

Из построения видно, что если  $d \rightarrow a-$  то объем воды = 0. К тому же, если  $d \rightarrow 0+$  то трапеция будет стремиться к треугольнику, у которого площадь явно меньше. Значит, максимальное значение  $S(d)$  будет в какой-нибудь точке локального максимума, найдем их:

Случай 1 ( $S'(d)$  - не существует):

То есть  $\frac{a^2 - 2ab - d^2 + 2db}{4} \leq 0 \Rightarrow -d^2 + 2db + a^2 - 2ab \leq 0 \Rightarrow -(d-a)(d+a-2b) \leq 0 \Rightarrow (d-a)(d+a-2b) \geq 0$

Откуда, по методу интерваллов получим, что либо  $d \geq a$ , либо  $d \leq 2b - a$ .

Первое невозможно так как если  $d \geq a$ , то трапецию не построишь (даже если боковые стороны "выпрямим" к основанию, то их все равно не хватит, чтобы достать до концов отрезка длиной  $d$ ).

$A d \leq 2b - a \Leftrightarrow b + 2c \leq 2b - d \Leftrightarrow c \leq \frac{b-d}{2} \Rightarrow c^2 \leq \left(\frac{b-d}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{d-b}{2}\right)^2 + h^2 \leq \left(\frac{b-d}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 \leq 0$  - чего не может быть.



Случай 2 ( $S'(d) = 0$ ):

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - 2ab - d^2 + 2db}{4}} + \frac{b+d}{2} \cdot \frac{-2d+2b}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{a^2 - 2ab - d^2 + 2db}{4}} = \frac{b+d}{2} \cdot \frac{d-b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-2ab-d^2+2db}{4}}}$$

$$\left( \sqrt{\frac{a^2 - 2ab - d^2 + 2db}{4}} \right)^2 = \frac{(d^2 - b^2)}{4}$$

$$a^2 - 2ab - d^2 + 2db = (d^2 - b^2)$$

$$2d^2 - 2bd - (a-b)^2 = 0$$

Решим квадратное уравнение относительно  $d$ :

$D = 4b^2 + 8(a-b)^2$  - сумма квадратов всегда неотрицательна

$$d_1 = \frac{2b + \sqrt{4b^2 + 8(a-b)^2}}{4}$$

$$d_2 = \frac{2b - \sqrt{4b^2 + 8(a-b)^2}}{4} \text{ - явно меньше нуля, чего не может быть}$$

Итого  $d = \frac{2b + \sqrt{4b^2 + 8(a-b)^2}}{4}$ , докажем, что это максимум взяв, например  $S'\left(\frac{b}{2}\right)$  и  $S'\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}} + b\right)$

Расчеты, пожалуй опустим ;)

**Ответ:**  $d = \frac{2b + \sqrt{4b^2 + 8(a-b)^2}}{4}$

## Задание 7

### Условие

Вычислить пределы с помощью формулы Тейлора:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt[3]{1-4x^2}}}{(1/x) \arcsin 2x - 2 \operatorname{ch} x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{e^x / (x \sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)}$$

### Ход решения

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt[3]{1-4x^2}}}{(1/x) \arcsin 2x - 2 \operatorname{ch} x^2}$$

Разложим по формуле Тейлора до второго (местами третьего) порядка:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} - e^{\left(1 - \frac{4x^2}{3} + o(x^2)\right)}}{(1/x) \left(2x + \frac{8x^3}{6} + o(x^3)\right) - 2(1 + o(x^2))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} - e + \frac{4ex^2}{3} + o(x^2)}{2 + \frac{8x^2}{6} + o(x^2) - 2 + o(x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - e + \frac{4ex^2}{3} + o(x^2)}{\frac{8x^2}{6} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{ex^2}{2} + \frac{4ex^2}{3} + o(x^2)}{\frac{4x^2}{3} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5ex^2}{6} + o(x^2)}{\frac{4x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{5e}{8} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{5e}{8}$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{e^x / (x \sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{e^x / (x \sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin x^3\right)^{\frac{1}{\arcsin x^3} \cdot \frac{e^x \arcsin x^3}{x \sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{e^x \arcsin x^3}{x \sqrt[3]{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x}}$$

Разложим по формуле Тейлора до таких порядков, чтобы получилось  $o(x^3)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{(1+o(1))(x^3+o(x^3))}{x \sqrt[3]{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)+(x+o(x))^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x^3+o(x^3)}{x \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)-x+\frac{x^3}{6}+x^3+o(x^3)}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}} = e^1 = e$$

**Ответ:**  $e$