Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №7
Решение краевой задачи для ОДУ 2-ого порядка.

Работу выполнил:
Куц А.С.
Группа:
5030103/30001
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация **3**
1.1 Формализация задачи . . . 3
1.2 Поставленные задачи . . . 3

2 Алгоритм и условия применимости **3**
2.1 Алгоритм . . . 3
2.2 Условия применимости . . . 4

3 Предварительный анализ задачи **4**

4 Модульная структура программы **4**

5 Тестовый пример **6**

6 Численный анализ **7**

7 Выводы **10**

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Дано линейное ОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами.

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x),$$

$$p(x), q(x), r(x), f(x) \in C([a, b]).$$

Даны граничные условия (ГУ)

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases}$$

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0, \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0.$$

Требуется найти функцию y(x), которая:

1. Удовлетворяет ОДУ внутри интервала (a, b)
2. Удовлетворяет заданным граничным условиям

1.2 Поставленные задачи

- Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Построить график ошибки на отрезке для этих решений.
- Построить график изменения шага по отрезку. Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.
- Построить зависимость фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, использовать логарифмическую шкалу по основанию 2. Оценить порядок метода.
- Внести погрешность 1%, 2%, 3%, 4%, 5% в начальное условие. Требуется вычислить относительную ошибку для каждого значения максимального возмущения и построить график. Эксперимент выполняется 20 раз, строится график типа боксплот, по оси x среднее фактическое возмущение данных в эксперименте.

2 Алгоритм и условия применимости

2.1 Алгоритм

Решение ищем в виде:

$$y = v + Cu$$

где v - решение неоднородного ОДУ с произвольными начальными условиями, а u - решение однородного ОДУ, соответсвующего неоднородному с начальными условиями:

$$u(a) = \alpha_1$$
$$u'(a) = -\frac{\alpha_0}{v(b)}$$

Постоянную C находим следующим образом:

$$C = \frac{B - \beta_0 v(b) - \beta_1 v'(b)}{\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)}$$

Решение ОДУ 2-го порядка сводим к решению системы двух ОДУ 1-го порядка. Решаем систему с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

2.2 Условия применимости

Значение выражения $\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)$ дожно быть отлично от 0

3 Предварительный анализ задачи

22 вариант включает в себя решение следующего ОДУ:

$$y'' + \cos(x)y' + \sin(x)y = 1 - \sin(x)$$

На отрезке $(0, \frac{\pi}{2})$. С граничными условиями:

$$\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 \neq 0, \beta_1 = 0$$

При этом известно точное решение:

$$y = \sin(x)$$

Я буду решать две системы такого вида:

Неоднородная задача: $\begin{cases} v' = v_1 \\ v_1' = (1 - \sin(x)) - \cos(x) - \sin(x)v_1 \end{cases}$

С начальными условиями: $v(a) = 0, v'(a) = 1$

Однородная задача: $\begin{cases} u' = u_1 \\ u_1' = -\cos(x) - \sin(x)u_1 \end{cases}$

С начальными условиями: $u(a) = \alpha_1, u'(a) = -\frac{\alpha_0}{v(b)}$

Приму $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1$

4 Модульная структура программы

```
def runge_kut_one_step(f, x, y, h, k_1=None):
```

- шаг метода Рунге-Кутта 4-го порядка. Функция принимает:

- f - диф. уравнение
- x - точку, в которой считаем новое приближение

- y - прошлое приближение
- h - длина шага
- k_1 - первый коэффициент метода.

Функция возвращает новое приближение

```
def runge_kutta(f, x, y0, h0, eps, step, eps, step_safe):
```

- Метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Функция принимает:

- f - диф. уравнение
- x - точка, в которой ищем приближение
- y0 - начальное условие в точке a
- h0 - стартовый шаг
- step - параметр (adaptive - адаптивное изменение шага, fixed - фиксированный шаг)
- eps - заданная точность
- step_safe - параметр (True - сохраняем шаги, False - не сохраняем)

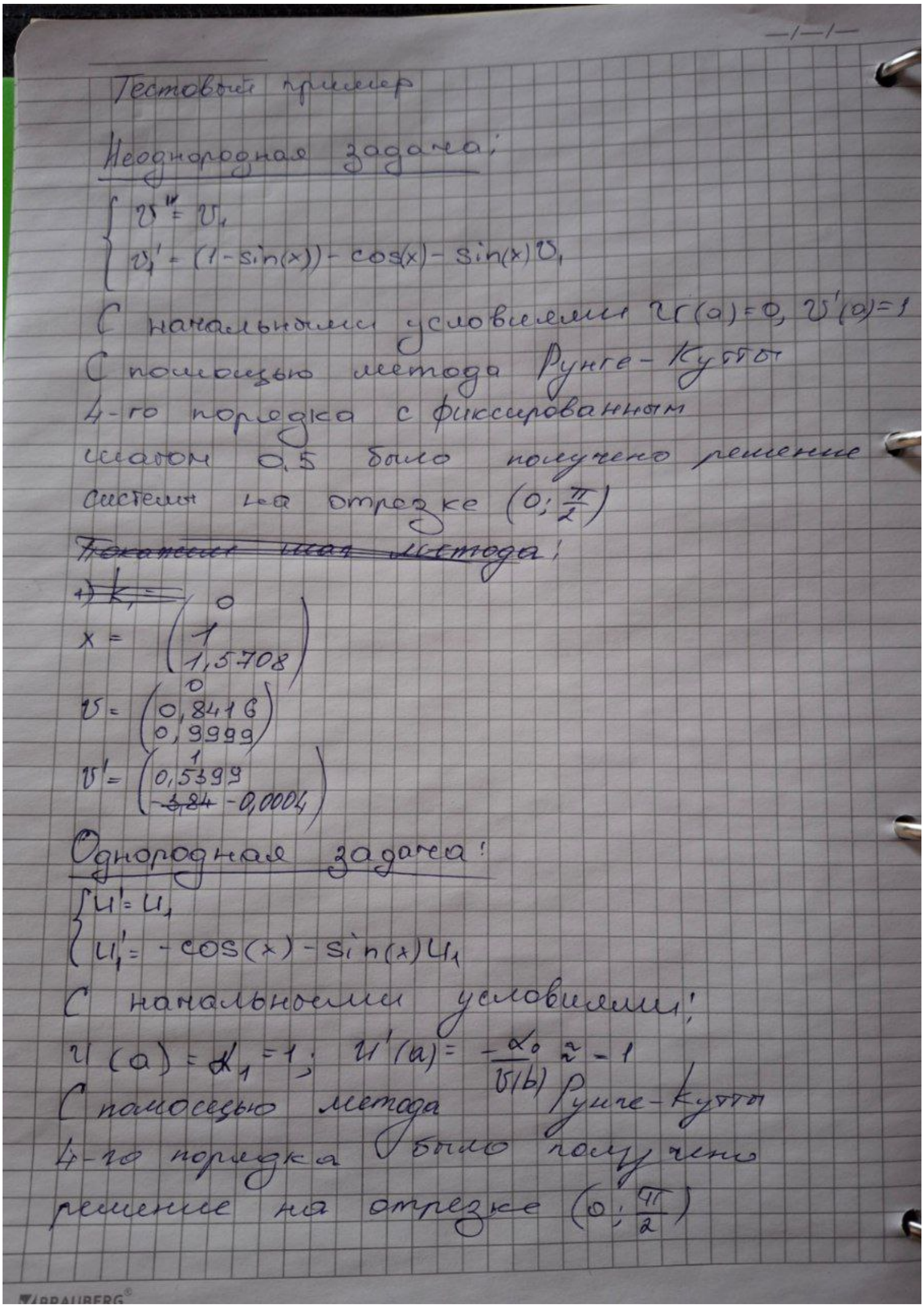
Функция возвращает новое приближение с заданной точностью.

```
def superposition(func, a, b, alpha, beta, gamma, h0, eps, step, step_safe
```

- метод суперпозиции (сведение к двум задачам Коши). Функция принимает:

- func - список функций-частей ОДУ p, q, r, f
- a - левая граница отрезка
- b - правая граница отрезка
- alpha - список коэффициентов α
- beta - список коэффициентов β
- gamma - список коэффициентов правой части ГУ
- h_0 - стартовый шаг
- eps - заданная точность
- step - параметр (adaptive - адаптивное изменение шаг, fixed - фиксированное значение шага)
- step_safe - параметр (True - сохраняем шаг, False - не сохраняем шаг)

5 Тестовый пример



Тестовый пример

Неоднородная задача:

$$\begin{cases} v' = v_1 \\ v_1' = (1-\sin(x)) - \cos(x) - \sin(x) v_1 \end{cases}$$

С начальными условиями $v(0)=0$, $v'(0)=1$

С помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка с фиксированным шагом 0,5 было получено решение системы на отрезке $(0; \frac{\pi}{2})$

~~Покажем шаг метода:~~

~~1) $k_1 =$~~

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1{,}5708 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}8416 \\ 0{,}9999 \end{pmatrix}$$

$$v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5399 \\ \cancel{3{,}84}\ -0{,}0004 \end{pmatrix}$$

Однородная задача:

$$\begin{cases} u' = u_1 \\ u_1' = -\cos(x) - \sin(x) u_1 \end{cases}$$

С начальными условиями:

$u(a) = \alpha_1 = 1$; $u'(a) = -\frac{\alpha_0}{v(b)} \approx -1$

С помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка было получено решение на отрезке $(0; \frac{\pi}{2})$

Рис. 1: Тестовый пример

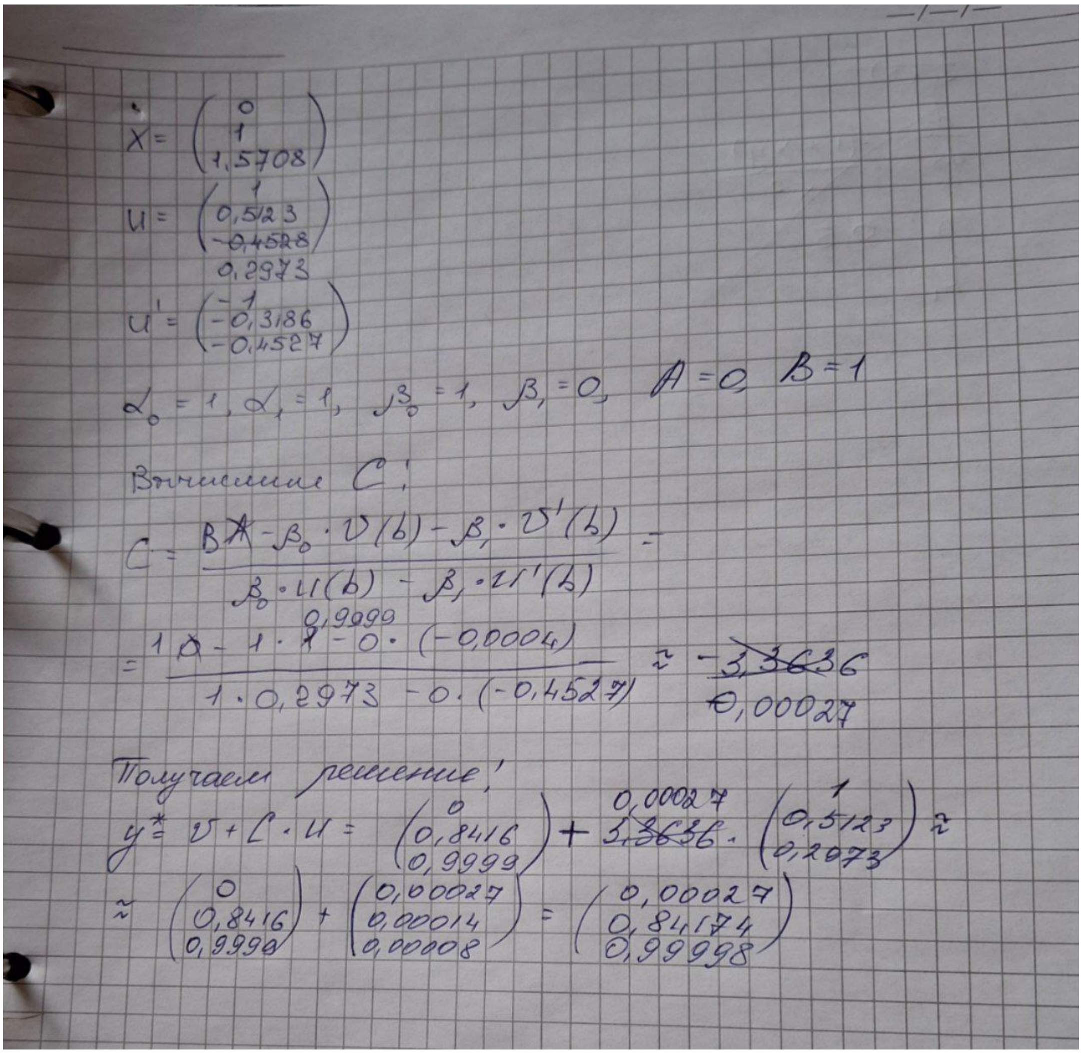


Рис. 2: Тестовый пример

6 Численный анализ

В ходе выполенения лабораторной работы было проведено исследование работы метода. Были построены графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Также были построены графики ошибок на отрезке для этих решений.

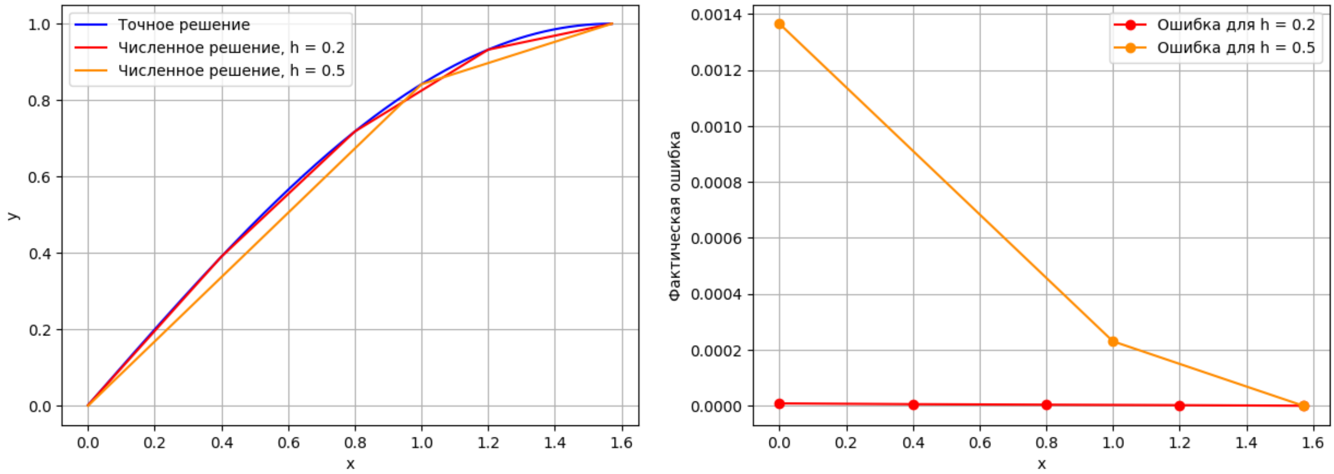


Рис. 3: Графики численных решений и ошибок для фиксированных значений шага на отрезке

По этим графикам видно, что для меньшего значения фиксированного шага получается более точное решение ОДУ.

Далее было проведено исследование точности метода. Заданная точность достигалась на каждом шаге по правилу Рунге. Ниже приведён график изменения шага по отрезку.

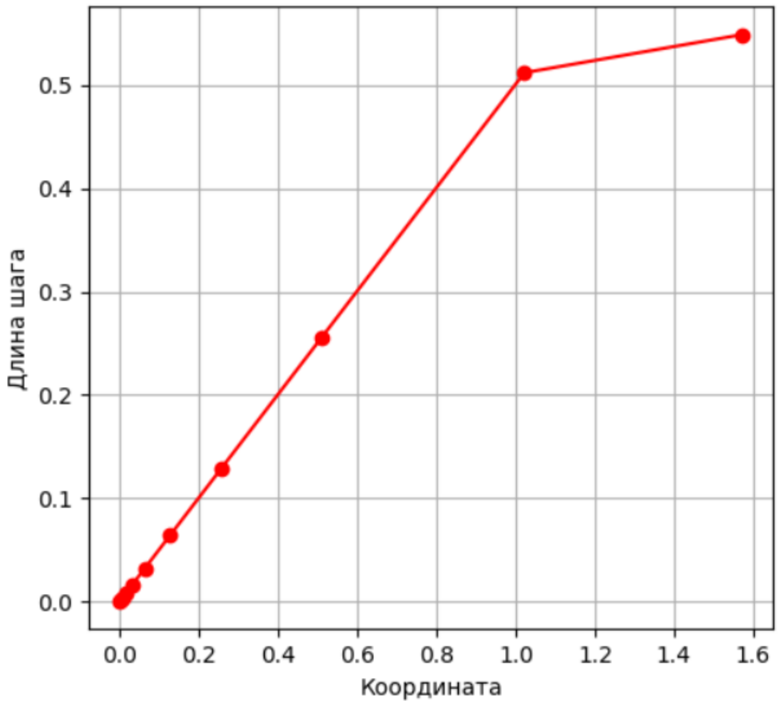


Рис. 4: Изменение шага по отрезку

Далее был построен график зависимости фактической погрешности от заданной точности. Набор точностей: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11}$.

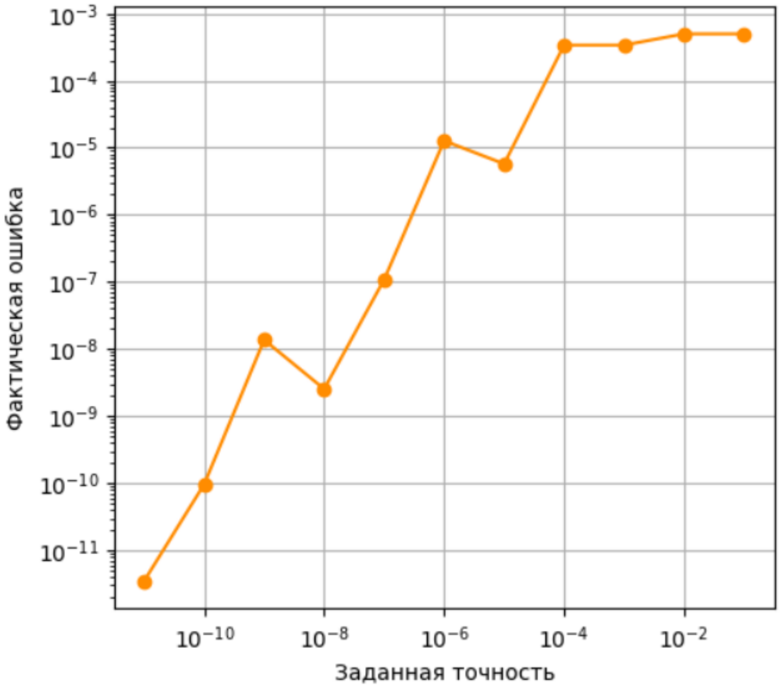


Рис. 5: Зависимость фактической ошибки от заданной точности

По графику видно, что с увеличением заданной точности уменьшается фактическая ошибка.

Далее было проведено исследование сходимости метода. Был построен график зависимости фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, при построении была использована логарифмическая шкала по основанию 2. Также была проведена линия биссектрисы.

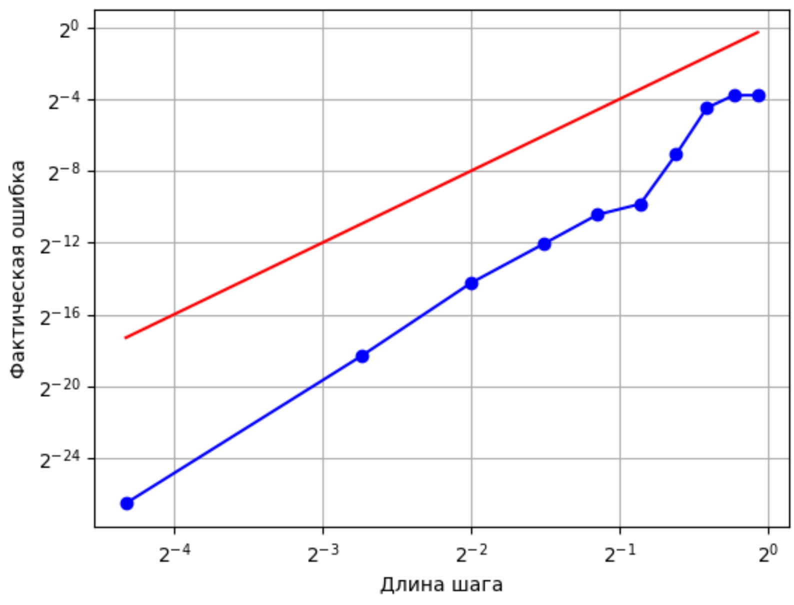


Рис. 6: Зависимость фактической ошибки от факсированной длины шага

Дополнительное исследование. Была исследована зависимость относительной ошибки от возмущения начального условия. Я внёс погрешность 1%, 2%, 3%, 4%, 5% в правую часть граничных условий. Была вычислена относительная ошибка для значений максимального возмущения и был построен график типа боксплот. Эксперимент был выполнен 20 раз.

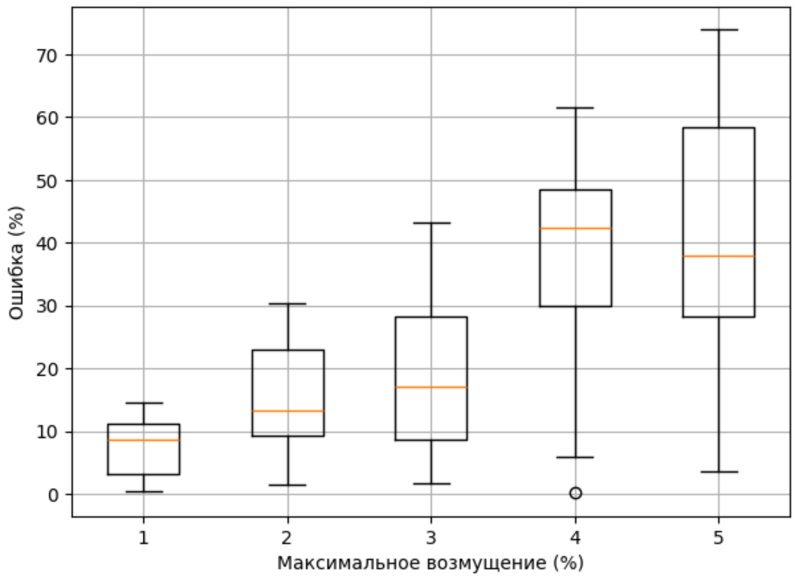


Рис. 7: Зависимость относительной ошибки решения ОДУ от возмущения начального условия

По данным графикам можно сказать о том, что при увеличении максимального возмущения среднее относительных ошибок растёт, размех распределения увеличивается. При этом относительная ошибка получается существенной, что свидетельствует о том, что метод неустойчив к возмущениям входных данных.

7 Выводы

В ходе лабораторной работы были проведены исследования модифицированного метода суперпозиции (сведение к двум задачам Коши). В результате исследований были построены графики решений для двух различных фиксированных значений шага на отрезке, был построен график точного решения для сравнения.

Был построен график зависимости фактической ошибки от заданной точности, была исследована сходимость метода.

В качестве дополнительного исследования была исследована зависимость относительной ошибки от возмущения начального условия.