Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №2
Приближение табличных функций сплайнами и МНК.

Работу выполнил:
Куц А.С.
Группа:
5030103/30001
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Формализация задачи интерполяции табличных функций сплайнами заключается в построении кусочно-заданной функции, которая наилучшим образом приближает значения заданной функции. Для этого используется набор точек сетки и соответствующих значений функции. На каждом промежутке между узловыми точками находим полином определённой степени, коэффициенты которого определяются с помощью точек сетки и значений функции в этих точках.

1.2 Поставленные задачи

- Вычислить вручную на бумаге значения сплайна и фактической ошибки для 3 узлов в узлах и серединах между узлами. Получить сплайн в каноническом виде.
- Построить на одном графике функцию, сплайн для 3 вариантов небольшого числа узлов (5,7,10), отметить узлы. На другом графике построить функции поточечной ошибки для этих же сплайнов.
- Зависимость ошибки интерполяции от количества узлов. Требуется построить график максимальной ошибки на отрезке в зависимости от числа узлов: 3...100.
- Построить график зависимости максимальной ошибки от значения производной на краях отрезка, в интервал изменения производной включить точное значение производной и точку 0.

2 Алгоритм и условия применимости

2.1 Условия применимости

Критерии существования и единственности интерполяционного сплайна:

1. Для построения сплайна степени k необходима минимум $k+1$ точка.
2. x_i должны быть попарно различны.

2.2 Алгоритм

Делаем инерполяцию квадратичным сплайном, узлы интерполяции которого совпадают с узлами сплайна (одна сетка).

На каждом промежутке сплайн представляет из себя полином второй степени

$$S_{[x_{i-1},x_i]} = g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \tag{1}$$

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, таких, чтобы сплайн был интерполяционным нужно потребовать для g_i ряд условий:

$$\begin{cases} g_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ g_i(x_i) = y_i \\ g_i'(x_{i-1}) = d_0 \end{cases} \tag{2}$$

где d_0 - значение производной на левом крае отрезка интерполяции.

Из этих условий можно получить рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов a, b, c на каждом интервале:

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i - b_i h_i}{h_i^2} \tag{3}$$

$$b_{i+1} = b_i + 2a_i h_i, b_0 = d_0 \tag{4}$$

$$c_i = y_i \tag{5}$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$.

3 Предварительный анализ задачи

22 вариант включает в себя интерполяцию квадратичным сплайном двух следующих функций:

$$f(x) = x^2 - \sqrt{lg(x+3)} \tag{6}$$

$$g(x) = x^3 - 0.2x^2 + 0.4|x| + 1.4 \tag{7}$$

Для интерполирования функций выбран отрезок $[-1.5, 1.5]$.

4 Тестовый пример

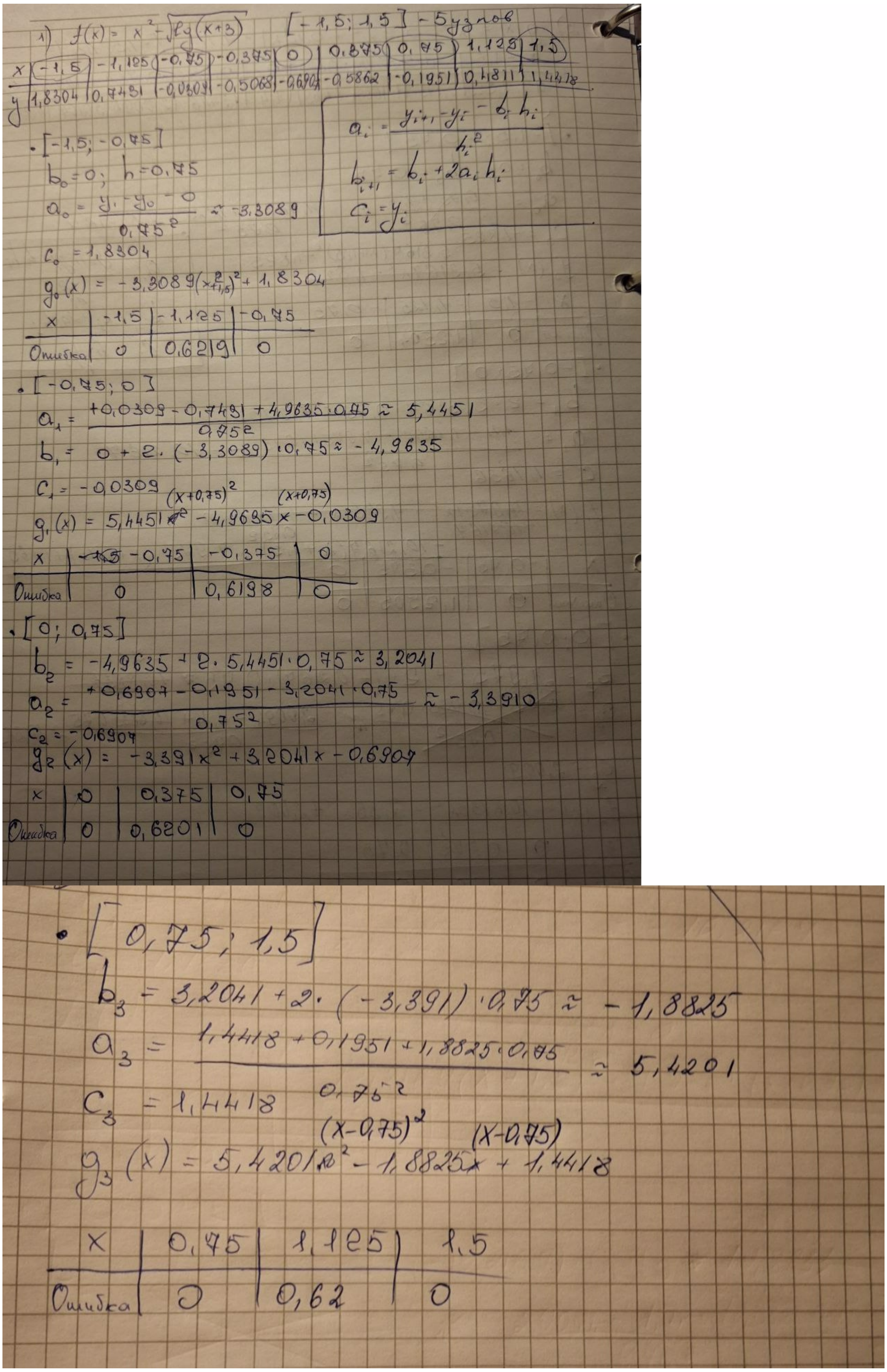

Рис. 1: Тестовый пример для функции f(x)

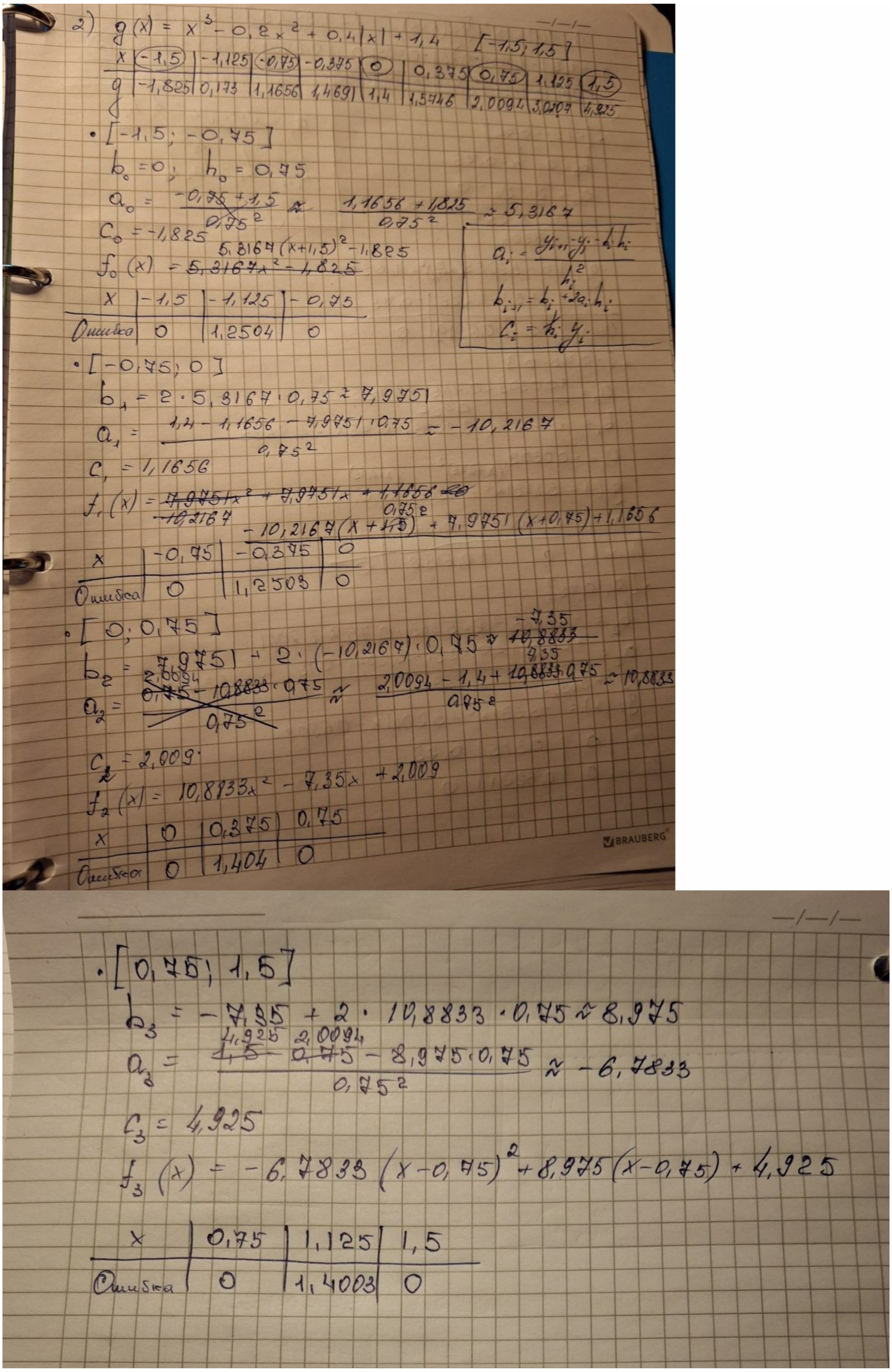

Рис. 2: Тестовый пример для функции g(x)

5 Модульная структура программы

```
def nodes(a, b, n, f):
```

- функция принимает a и b - границы отрезка, n - количество точек, f - функция, возвращает *xlist* - сетку и *ylist* - сеточную функцию.

```
quadratic_spline_interpolation(x_list, y_list, initial_derivative)
```

- функция принимает сетку, сеточную функцию и значение производной функции на левом крае отрезка интерполяции, возвращает список квадратичных функций, которые образуют сплайн.

6 Численный анализ

Вычисляется сетка, состоящая из n точек, строится n-1 квадратичная функция. Далее вычисляются значения каждой квадратичной функции в 100 точках, принадлежащих соответсвующему промежутку.

Приведу графики функций и соответствующих им сплайнов для 5, 7 и 10 узлов соответственно и графики поточечных ошибок для каждого из случаев.

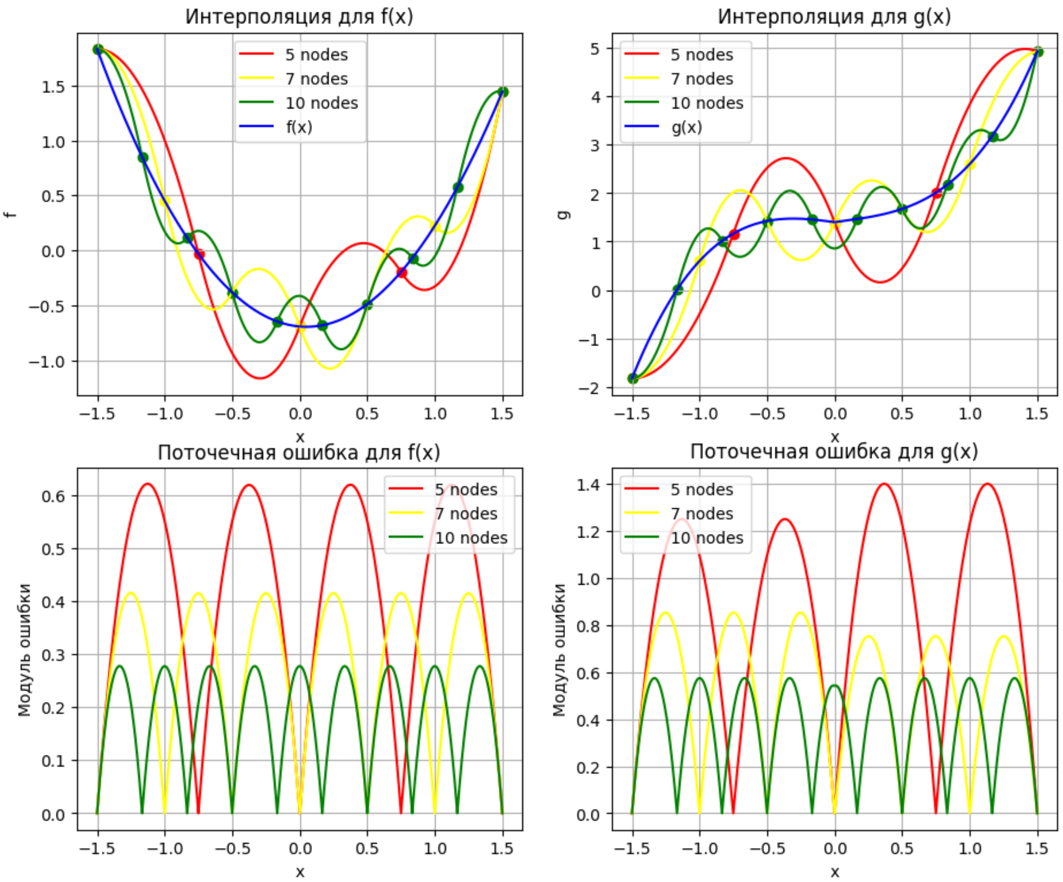

Рис. 3: Исследование интерполяции квадратичными спайнами

Далее приведу графики зависимости максимальной ошибки интерполяции квадратичными сплайнами от числа узлов для обеих функций.

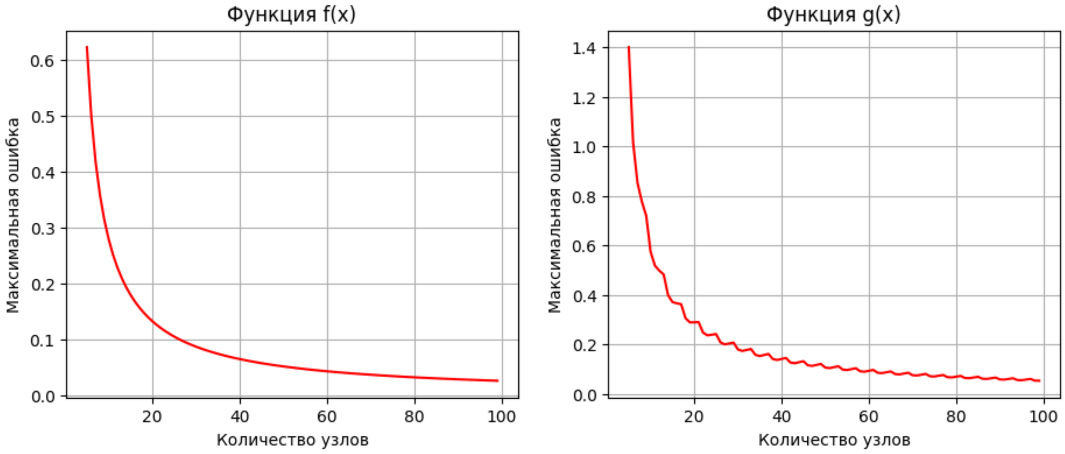

Рис. 4: Зависимость максимальной ошибки на отрезке от числа узлов

Также в ходе исследования я рассмотрел зависимость максимальной ошибки от значения производной на левом крае отрезка интерполяции для обеих функций. В эксперименте значение производной менялось от точного до нуля.

$f'(-1.5) \approx -3.3449$

$g'(-1.5) \approx 6.9499$

Приведу графики, полученные в результате исследования.

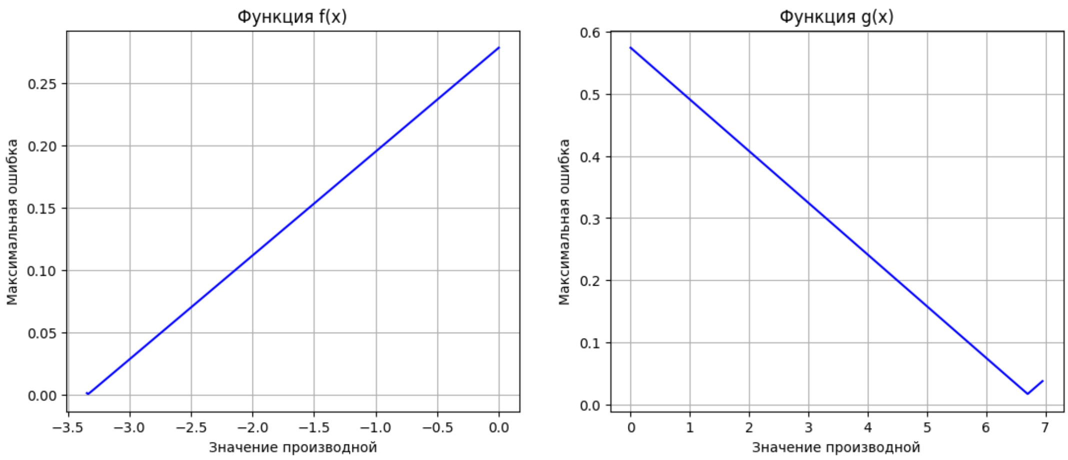

Рис. 5: Зависимость максимальной ошибки в зависимости от значения производной на левом крае отрезка

Дополнительное исследование: исследование зависимости ошибки интерполяции при возмущении данных. В значение функции в точках сетки вносятся возмущения максимальной величины $1\%, 2\%, 3\%, 4\%, 5\%$. Возмущения вносятся в каждую точку случайно. Требуется вычислить относительную ошибку по всему отрезку для каждого значения максимального возмущения. Эксперимент выполнялся 20 раз, строился график типа боксплот.

Далее приведу графики зависимости ошибки интерполяционного полина при возмущении данных для двух функций.

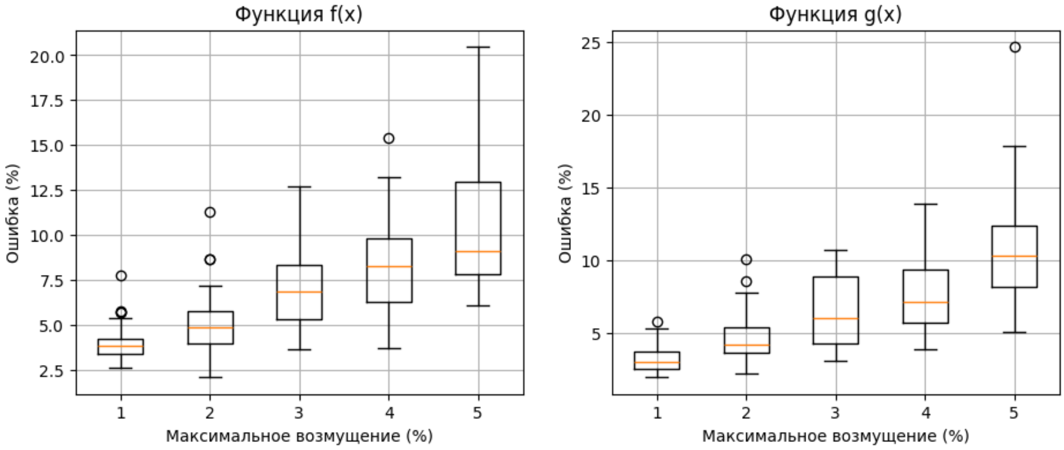

Рис. 6: Зависимость ошибки интерполяции при возмущении данных

7 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы особенности интерполяции квадратичным сплайном. На основе проведённых исследований можно сделать следующие выводы:

1. **Зависимость максимальной ошибки от числа узлов:** С ростом числа узлов максимальная ошибка интерполяции монотонно убывает. На графике зависимости максимальной ошибки интерполяции от числа узлов для функции g(x) заметны небольшие осцилляции, это связано с видом функции, т.к на аналогичном графике для функции f(x) мы подобного не наблюдаем.

2. **Зависимость максимальной ошибки от значения производной на левом крае отрезка интерполяции:** С приближением значения производной на левом крае отрезка интерполяции к точному значению максимальная ошибка интерполяции убывает по линейному закону. Это говорит нам о важности правильного выбора граничных условий для квадратичного сплайна.

3. **Влияние возмущения данных:** исследование проводилось для интерполяции на 30 узлах. На каждом интервале интерполяции вычислялась относительная ошибка в 500 точках. В результате эксперимента можно сделать вывод о том, что возмущение данных ведёт к росту относительной ошибки интерполяции. Если мы будем увеличивать максимальное возмущение, то это приведёт к увеличению разброса относительных ошибок (расчет высота боксплота и размах усов), причем медианное значение относительной ошибки будет расти.

4. **Сравнение с полиномиальной интерполяцией:**

   - С ростом числа узлов растёт максимальная ошибка полиномиальной интерполяции, для интерполяции сплайнами максимальная ошибка монотонно убывает с ростом числа узлов.
   - Интерполяция сплайнами обладает меньшей вычислительной сложностью, чем полиномиальная интерполяция.
   - В случае малого числа узлов полиномиальная интерполяция будет более точна, это можно увидеть, сравнив графики поточечных ошибок для малого числа узлов.

- Оба вида интерполяции подвержены росту относительной ошибки при возмущении входных данных, однако стоит отметить, что интерполяция сплайнами носит локальный характер. В случае, если у нас будут возмущения входных данных только на определнном интервале, это приведёт к росту ошибки только на этом интервале.