Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №3
Решение интегралов с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса.

Работу выполнил:
Куц А.С.
Группа:
5030103/30001
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Вычислить интеграл с помощью квадратурной формулы Ньютона-Котеса, построенной при помощи метода левых прямоугольников.

1.2 Поставленные задачи

- Ручной расчет провести для 1, 2 и 4х разбиений отрезка, оценить точность вычисления интеграла.
- Написать программу для вычисления приближенного значения интеграла с заданной точностью с помощью обобщенной формулы, для достижения заданной точности использовать правило Рунге.
- График зависимости фактической ошибки от заданной точности, отметить линию биссектрисы. Проверить заданную точность: 10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-16}.
- График зависимости числа итераций от заданной точности.
- График фактической ошибки от длины отрезка разбиения, использовать логарифмический масштаб по основанию 2. По графику определить порядок точности применяемой формулы и вычислить константу.

2 Алгоритм и условия применимости

2.1 Условия применимости

1. $p(x) \equiv 1$, где p - весовая функция
2. $x_k = a + ih, h = \frac{b-a}{n}$

2.2 Алгоритм

Строим квадратурную формулу для функции f на отрезке [a,b] по данной формуле

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

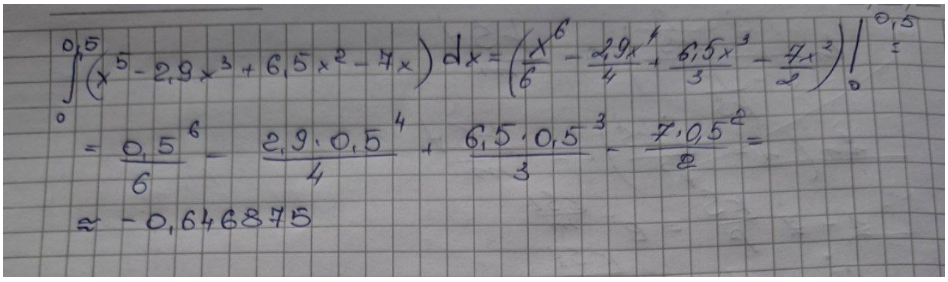
где $h = \frac{b-a}{n}$ - шаг разбиения, n - количество разбиений, $x_i = a + ih$ - точки разбиения.

3 Предварительный анализ задачи

22 вариант включает себя интегрирование следующей функции:

$$x^5 - 2.9x^3 + 6.5x^2 - 7x$$

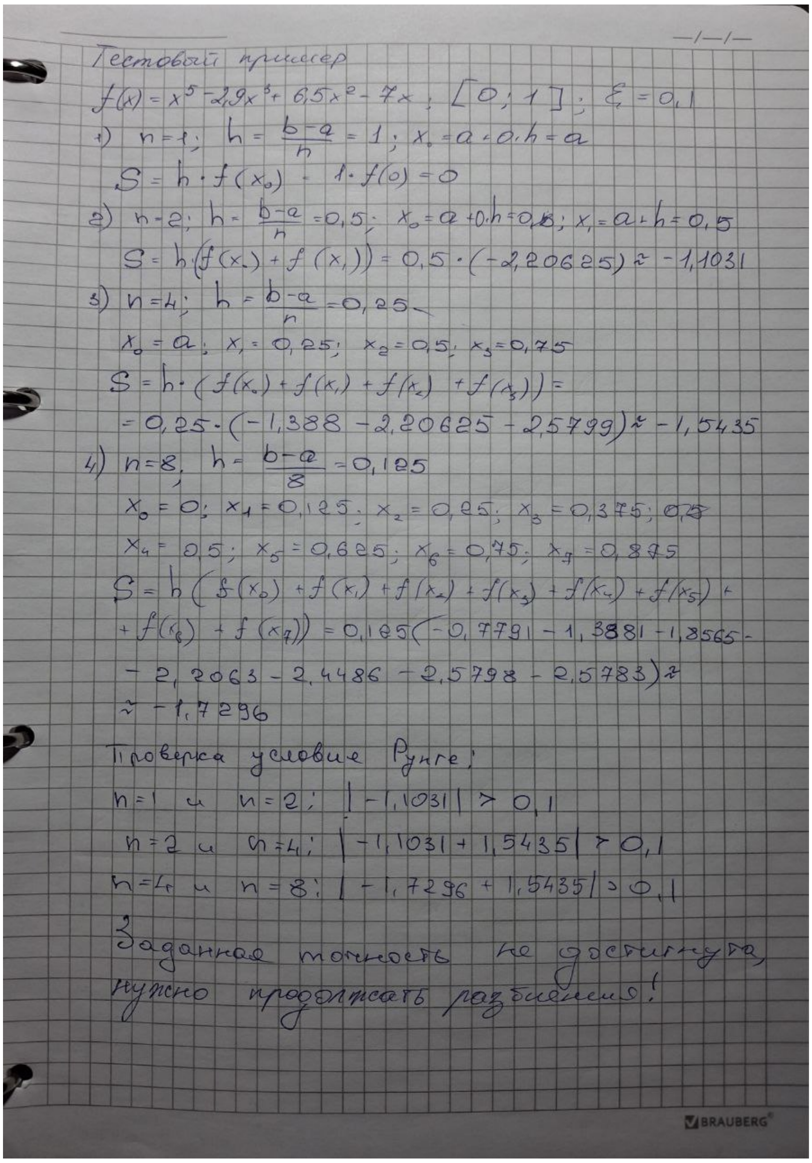
Для интегрирования был выбран отрезок [0, 0.5]. Ниже представлен ручной расчёт значения определённого интеграла в данных пределах интегрирования.



$$\int_0^{0,5}(x^5-2,9x^3+6,5x^2-7x)\,dx=\left(\frac{x^6}{6}-\frac{2,9x^4}{4}+\frac{6,5x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0,5}=$$
$$=\frac{0,5^6}{6}-\frac{2,9\cdot0,5^4}{4}+\frac{6,5\cdot0,5^3}{3}-\frac{7\cdot0,5^2}{2}=$$
$$\approx-0,646875$$

Рис. 1: Ручной расчёт значения определённого интеграла

4 Тестовый пример



Тестовый пример

$f(x)=x^5-2,9x^3+6,5x^2-7x$; $[0;1]$; $\varepsilon=0,1$

1) $n=1$; $h=\frac{b-a}{n}=1$; $x_0=a+0\cdot h=a$

$S=h\cdot f(x_0)=1\cdot f(0)=0$

2) $n=2$; $h=\frac{b-a}{n}=0,5$; $x_0=a+0\cdot h=0,0$; $x_1=a+h=0,5$

$S=h(f(x_0)+f(x_1))=0,5\cdot(-2,20625)\approx-1,1031$

3) $n=4$; $h=\frac{b-a}{n}=0,25$

$x_0=a$; $x_1=0,25$; $x_2=0,5$; $x_3=0,75$

$S=h\cdot(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))=$
$=0,25\cdot(-1,388-2,20625-2,5799)\approx-1,5435$

4) $n=8$, $h=\frac{b-a}{8}=0,125$

$x_0=0$; $x_1=0,125$; $x_2=0,25$; $x_3=0,375$;
$x_4=0,5$; $x_5=0,625$; $x_6=0,75$; $x_7=0,875$

$S=h(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+$
$+f(x_6)+f(x_7))=0,125(-0,7791-1,3881-1,8565-$
$-2,2063-2,4486-2,5798-2,5783)\approx$
$\approx-1,7296$

Проверка условие Рунге:

$n=1$ и $n=2$: $|-1,1031|>0,1$

$n=2$ и $n=4$: $|-1,1031+1,5435|>0,1$

$n=4$ и $n=8$: $|-1,7296+1,5435|>0,1$

Заданная точность не достигнута, нужно продолжать разбиение!

Рис. 2: Тестовый пример

5 Модульная структура программы

```
def left_rectangle_integral(f, a, b, n, f_dict):
```

- функция принимает f - подынтегральную функцию a и b - границы отрезка, n - количество разбиений, fdict - словарь со значениями функции в точках разбиения, возвращает integral - приближенное значение функции.

```
def runge_rule_integral(f, a, b, eps):
```

- функция принимает f - подынтегральную функцию, a и b - границы отрезка, eps - заданную точность, возвращает приближенное значение интеграла, вычисленное с заданной точностью по правилу Рунге.

```
def adaptive_integration(f, a, b, eps, max_depth=1000, depth=0):
```

-дополнительное исследование (адаптивный метод интегрирования). f - функция, a и b - пределы интегрирования, eps - заданная точность, maxdepth - максимальная глубина рекурсии, depth - текущая глубина рекурсии.

6 Численный анализ

В ходе выполенения лабораторной работы было проведено исследование зависимости фактической ошибки от заданной точности. Набор точностей: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$. Ниже приведён график зависимости фактической ошибки от заданной точности.

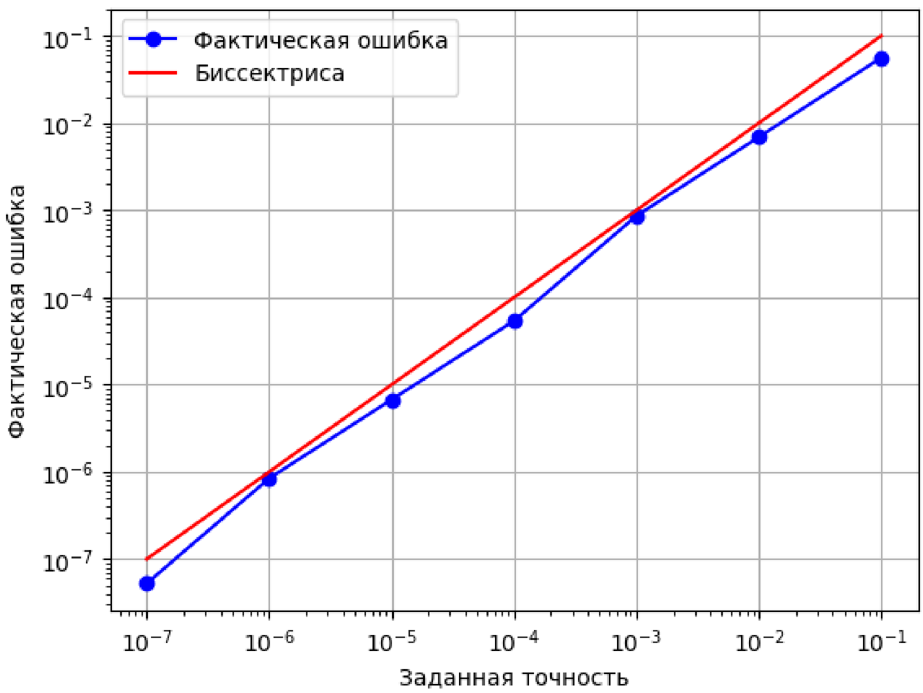


Рис. 3: Зависимость фактической ошибки от заданной точности

График, построенный по результатам эксперимента находится ниже линии биссектрисы, что говорит о том, что метод достигает заданной точности.

Также было проведено исследование зависимости числа итераций от заданной точности. Ниже приведён график, построенный по результатам эксперимента.

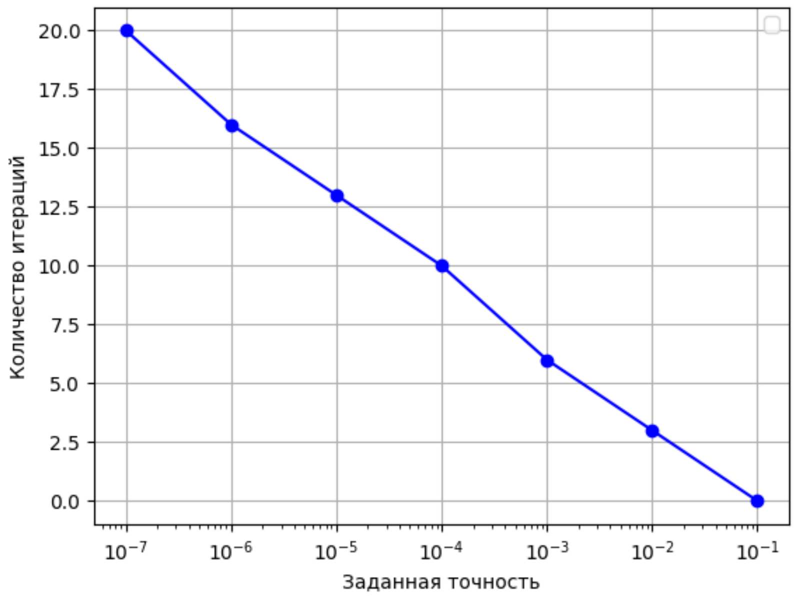


Рис. 4: Зависимость числа итераций от заданной точности

По графику видно, что для достижения большей точности требуется большее число итераций.

Было проведено исследование зависимости фактической ошибки от длины отрезка разбиения. Набор количеств разбиений: $2, 2^2, 2^3, 2^4, ...2^{20}$.

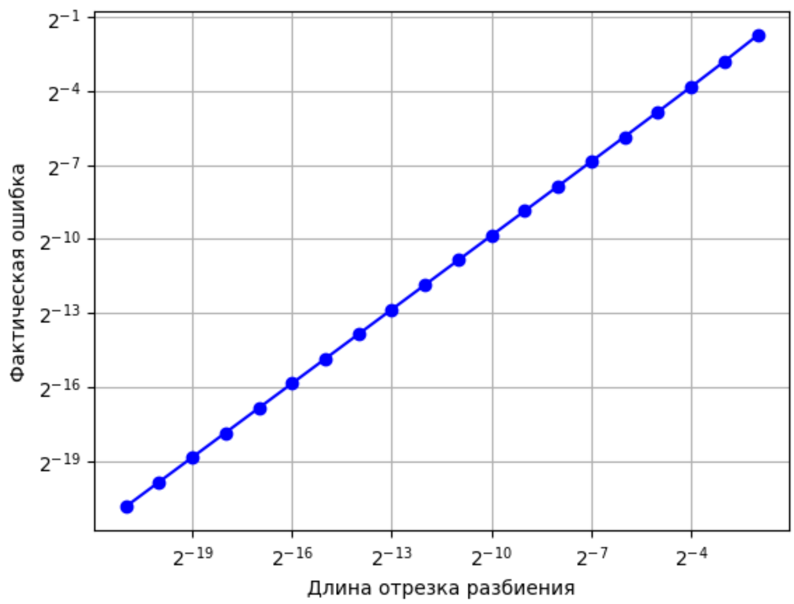


Рис. 5: Зависимость фактической ошибки от длины отрезка разбиения

По графику видно, что с уменьшением длины отрезка разбиения уменьшается фактическая ошибка. По данному графику можно определить порядок точности применяемого метода и вычислить константу.

С помощью функции scipy.stats.linregress библиотеки Scipy был вычислен коэффициент наклона прямой ≈ 1.003, который соответствует порядку метода и координата пересечения прямой с осью ординат, которая равна $\log_2 C \approx 0.1898$. Константу определим, как $C \approx 2^{0.1898} \approx 1.1406$.

В качестве дополнительного исследования был запрограммирован адаптивный метод интегрирования на основе метода левых прямоугольников с помощью рекурсии. Были проведены исследования и построен график зависимости длины шага по отрезку и минимальной длины шага от заданной точности.

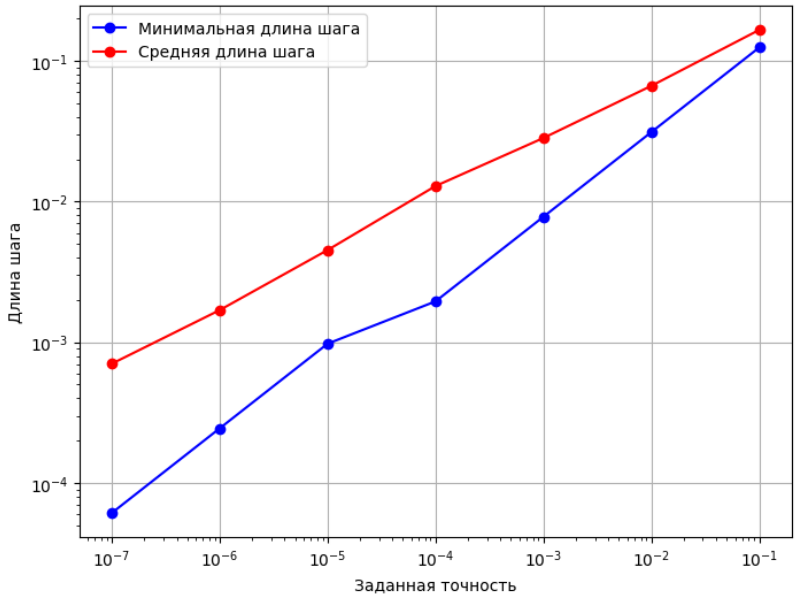


Рис. 6: Зависимость длины шага по отрезку и минимальной длины шага от заданной точности

Также был построен график зависимости длины шага от координаты. Для построения графика был выбран отрезок $[0, 2]$, точность 0.1.

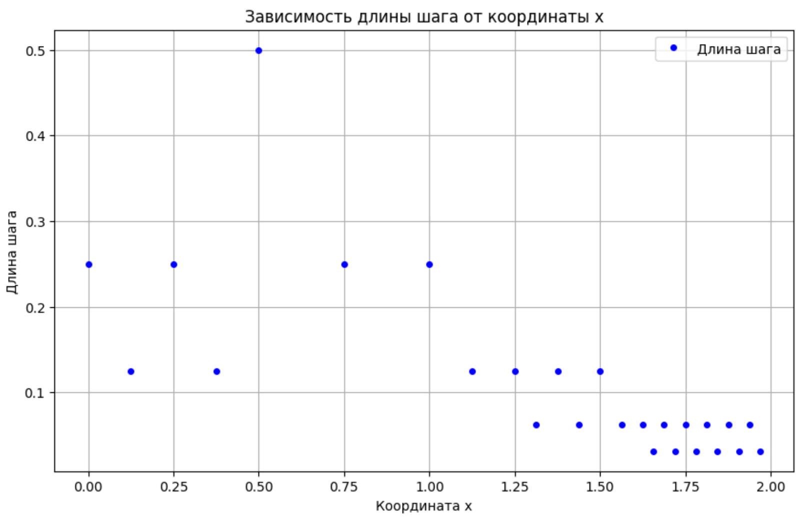


Рис. 7: Зависимость длины шага от координаты x

График наглядно показывает адаптивное изменения шага с координатой. На тех отрезках, где точность достигается быстрее, шаг уменьшается несильно

7 Выводы

В ходе лабораторной работы были проведены исследования метода левых прямоугольников вычисления определённых интегралов. В результате исследований был построен график зависимости фактической ошибки от заданной точности, график зависимости числа итераций от заданной точности и график зависимости фактической ошибки от длины отрезка разбиения. В ходе исследований было показано, что порядок метода равен 1.

Также был исследован адаптивный метод вычисления определенных интегралов и построены графики зависимости длины шага по отрезку и минимальной длины шага от заданной точности. Видно, что при малой точности эти величины довольно близки друг к другу, с ростом точности они обе уменьшаются и начинают отличаться на несколько порядков. График зависимости длины шага от координаты хорошо демонстрирует суть адаптивного метода.