

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Направление подготовки  
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

## Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №6  
Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Адамса.

**Работу**  
**выполнил:**  
Куц А.С.  
Группа:  
5030103/30001  
**Преподаватель:**  
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург  
2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Формулировка задачи и ее формализация</b>	<b>3</b>
1.1	Формализация задачи . . . . .	3
1.2	Поставленные задачи . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Алгоритм и условия применимости</b>	<b>3</b>
2.1	Условия применимости . . . . .	3
2.2	Алгоритм . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Предварительный анализ задачи</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Тестовый пример</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Модульная структура программы</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Численный анализ</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>Выводы</b>	<b>9</b>

# 1 Формулировка задачи и ее формализация

## 1.1 Формализация задачи

Найди численное решение ОДУ с заданной точностью  $\epsilon$  на заданном отрезке с заданным начальным условием.

## 1.2 Поставленные задачи

- Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Построить график ошибки на отрезке для этих решений.
- Построить график изменения шага по отрезку. Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.
- Построить зависимость фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, использовать логарифмическую шкалу по основанию 2. Оценить порядок метода.
- Внести погрешность 1%, 2%, 3%, 4%, 5% в начальное условие. Требуется вычислить относительную ошибку для каждого значения максимального возмущения и построить график. Эксперимент выполняется 20 раз, строится график типа боксплот, по оси x среднее фактическое возмущение данных в эксперименте.

# 2 Алгоритм и условия применимости

## 2.1 Условия применимости

Правая часть ОДУ должна быть достаточно гладкой, желательно должна иметь непрерывные производные до 4-го порядка включительно.

## 2.2 Алгоритм

Один шаг метода делаем по формулам:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$k_3 = f(x_{n-2}, y_{n-2})$$

$$y_{k+1} = y_n + \frac{h}{12}(23k_1 - 16k_2 + 5k_3)$$

Разгонные точки получаем с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

# 3 Предварительный анализ задачи

22 вариант включает в себя решение следующего ОДУ:

$$x^2 y' + xy + 1 = 0$$

На отрезке (1,3),  $y(1)=1$ . При этом известно точное решение:

$$xy = 1 - \ln(|x|)$$

# 4 Тестовый пример

Тестовый пример

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+y}{1+x}, \quad y(1)=1; \quad h=0.2;$$

$$x_1=1; \quad x_{n+1}=x_n+h$$

• Разгонные точки;

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

1)  $k_1 = 0.2 \cdot \left( -\frac{1+1}{1+1} \right) = -0.4$

$$k_2 = 0.2 \cdot \left( -\frac{1+1.1 \cdot (-0.4)}{1+1.1 \cdot (-0.4)} \right) \approx -0.2975$$

$$k_3 = 0.2 \cdot \left( -\frac{1+1.1 \cdot (-0.2975)}{1+1.1 \cdot (-0.2975)} \right) \approx -0.3128$$

$$k_4 = 0.2 \cdot \left( -\frac{1+1.1 \cdot (-0.3128)}{1+1.1 \cdot (-0.3128)} \right) \approx -0.218$$

$$y_1 = 1 - 0.3063 \approx 0.6937$$

2)  $k_1 = 0.2 \cdot \left( -\frac{1+1.2 \cdot 0.6937}{1+1.2 \cdot 0.6937} \right) \approx -0.218$

$$k_2 = 0.2 \cdot \left( -\frac{1+1.3 \cdot 0.5844}{1+1.3 \cdot 0.5844} \right) \approx -0.1498$$

$$k_3 = 0.2 \cdot \left( -\frac{1+1.3 \cdot 0.6038}{1+1.3 \cdot 0.6038} \right) \approx -0.1846$$

$$k_4 = 0.2 \cdot \left( -\frac{1+1.4 \cdot 0.5091}{1+1.4 \cdot 0.5091} \right) \approx -0.1556$$

$$y_2 = 0.6937 - 0.1839 \approx 0.5098$$

3)  $k_1 \approx -0.1556$

$$k_2 \approx -0.1328$$

$$k_3 \approx -0.1362$$

$$k_4 \approx -0.1168$$

$$y_3 \approx 0.5098 - 0.1356 \approx 0.3742$$

Рис. 1: Тестовый пример

• Метод Ягана - Бамберга 3-го порядка

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23f(x_n, y_n) - 16f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, y_{n-2}))$$

1)  $f(x_3, y_3) \approx -0,4609$

$f(x_2, y_2) \approx -0,5556$

$f(x_1, y_1) \approx -0,6931$

$$\underline{y_4} \approx 0,3744 + \frac{0,2}{12} (23 \cdot (-0,4609) - 16 \cdot (-0,5556) + 5 \cdot (-0,6931)) \approx 0,3744 - 0,0735 \approx \underline{0,3009}$$

2)  $f(x_4, y_4) \approx -0,3890$

$f(x_3, y_3) \approx -0,4609$

$f(x_2, y_2) \approx -0,5556$

$$\underline{y_5} \approx 0,3009 + \frac{0,2}{12} (23 \cdot (-0,3890) - 16 \cdot (-0,4609) + 5 \cdot (-0,5556)) \approx 0,3009 - 0,0619 \approx \underline{0,2390}$$

Рис. 2: Тестовый пример



## 5 Модульная структура программы

```
def runge_kut_one_step(f, x, y, h, k_1=None):
```

- шаг метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Функция принимает:  $f$  - диф. уравнение,  $x$  - точку, в которой считаем новое приближение,  $y$  - прошлое приближение,  $h$  - длина шага,  $k_1$  - первый коэффициент метода. Функция возвращает новое приближение

```
def runge_kutta(f, x, y0, h0, eps):
```

- функция принимает:  $f$  - диф. уравнение,  $x$  - точка, в которой ищем приближение,  $y_0$  - начальное условие в точке  $a$ ,  $h_0$  - стартовый шаг,  $eps$  - заданная точность. Функция возвращает новое приближение с заданной точностью.

```
def adams_bashforth_one_step(f1, f2, f3, y_cur, h):
```

- функция принимает:  $f_1, f_2, f_3$  - значение диф.уравнения в последних трёх точках,  $y_{cur}$  - текущее приближение,  $h$  - длина шага. Функция возвращает новое приближение.

```
def adams_bashforth(f, a, b, y0, h0, step='adaptive', eps=None, step_safe=1):
```

- функция принимает:  $f$  - диф. уравнение,  $a$  и  $b$  - границы отрезка,  $y_0$  - начальное условие в точке  $a$ ,  $h_0$  - стартовый шаг,  $step$  - параметр (`adaptive` - адаптивное изменение шага, `fixed` - фиксированный шаг),  $eps$  - заданная точность,  $step\_safe$  - параметр (`True` - сохраняем шаг, `False` - не сохраняем). Функция возвращает численное решение с заданной точностью.

## 6 Численный анализ

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено исследование работы метода. Были построены графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Также были построены графики ошибок на отрезке для этих решений.

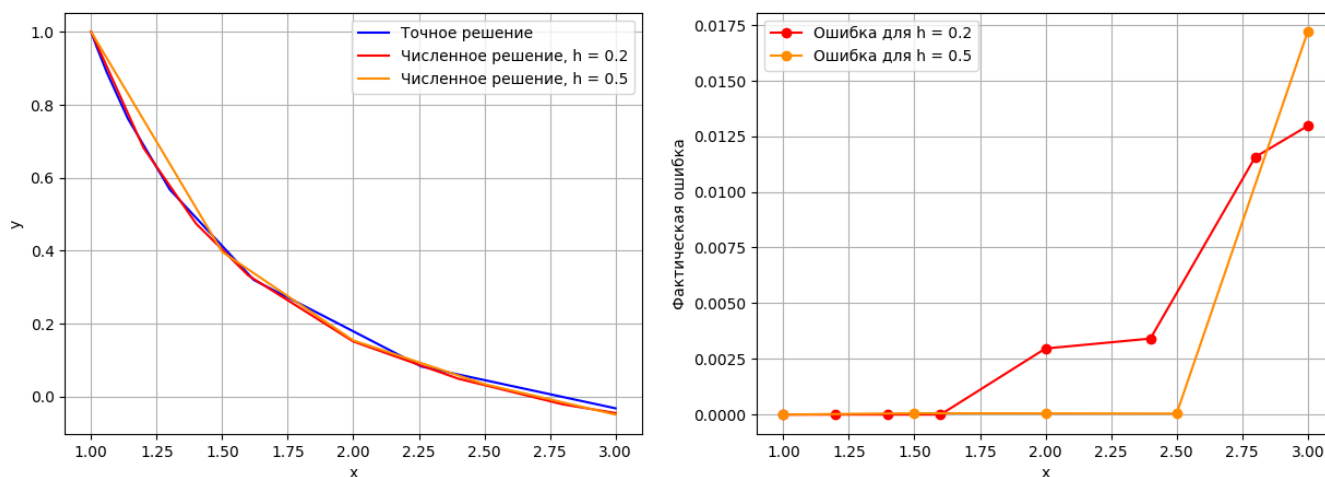


Рис. 3: Графики численных решений и ошибок для фиксированных значений шага на отрезке

По этим графикам видно, что для меньшего значения фиксированного шага получается более точное решение ОДУ.

Далее было проведено исследование точности метода. Заданная точность достигалась на каждом шаге по правилу Рунге. Ниже приведён график изменения шага по отрезку.

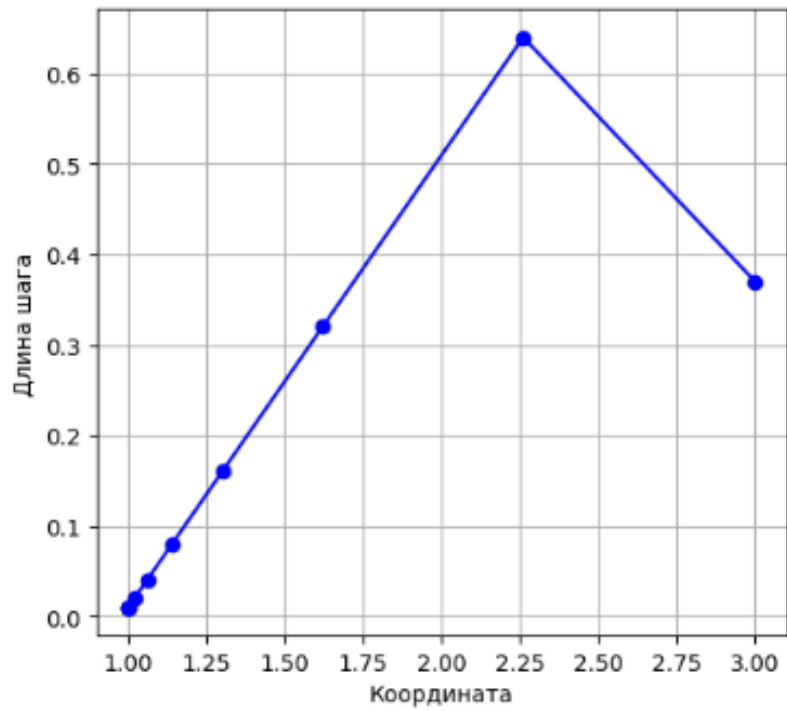


Рис. 4: Изменение шага по отрезку

Далее был построен график зависимости фактической погрешности от заданной точности. Набор точностей:  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^{-7}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-9}$ ,  $10^{-10}$ ,  $10^{-11}$ .

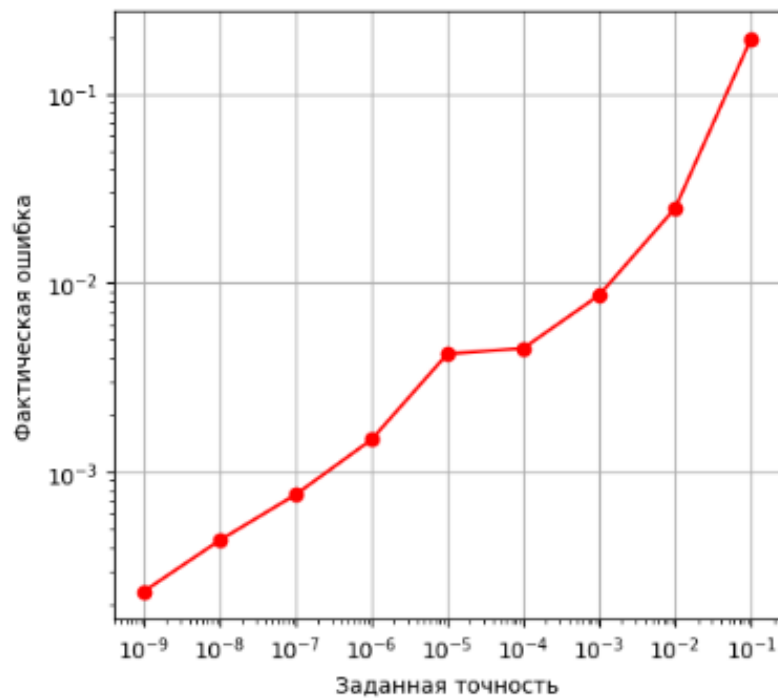


Рис. 5: Зависимость фактической ошибки от заданной точности

Далее было проведено исследование сходимости метода. Был построен график зависимости фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, при построении была использована логарифмическая шкала по основанию 2. Также была проведена линия биссектрисы.

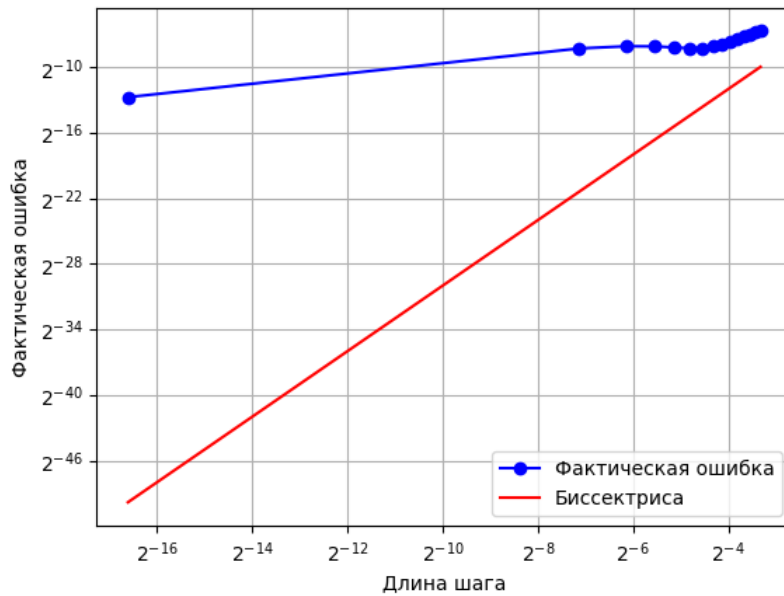


Рис. 6: Зависимость фактической ошибки от фиксированной длины шага

**Дополнительное исследование.** Была исследована зависимость относительной ошибки от возмущения начального условия. Я внёс погрешность 1%, 2%, 3%, 4%, 5% в начальное условие. Была вычислена относительная ошибка для каждого значения максимального возмущения и был построен график типа боксплот. Эксперимент был выполнен 20 раз.

Зависимость относительной ошибки решения ОДУ от возмущения начального условия

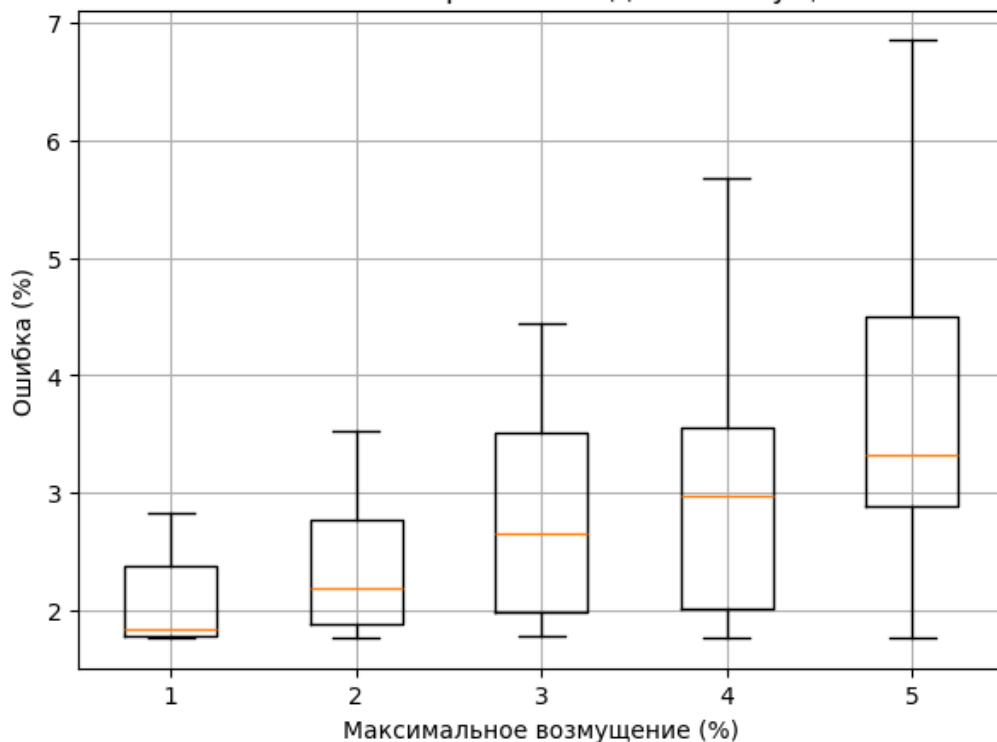


Рис. 7: Зависимость относительной ошибки решения ОДУ от возмущения начального условия

По данным графикам можно сказать о том, что при увеличении максимального возмущения среднее относительных ошибок растёт. При этом относительная ошибка небольшая, выбросы отсутствуют.



## 7 Выводы

В ходе лабораторной работы были проведены исследования метода Адамса-Башфорда 3-го порядка. В результате исследований были построены графики решений для двух различных фиксированных значений шага на отрезке, был построен график точного решения для сравнения.

В качестве дополнительного исследования была исследована зависимость относительной ошибки от возмущения начального условия.