Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №4
Решение интегралов с помощью квадратурных формул типа Гаусса.

Работу выполнил:
Куц А.С.
Группа:
5030103/30001
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Вычислить интеграл с помощью метода Радо (с одним фиксированным левым узлом) для 2, 3 слагаемых.

1.2 Поставленные задачи

- Ручной расчет провести для 1, 2 и 4х разбиений отрезка, оценить точность вычисления интеграла.
- Написать программу для вычисления приближенного значения интеграла с заданной точностью. Для достижения точности использовать подход, основанный на сравнении интегралов для формул для n и n+1, используем адаптивное разбиение исходного отрезка на части.
- Построить график зависимости фактической ошибки от заданной точности, отметить линию биссектрисы. Проверить заданную точность: 10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-16}.
- Уточнить значение интеграла с помощью поправки Ричардсона. Построить линию фактической ошибки для уточненного значения интеграла.
- Построить график зависимости числа итераций от заданной точности.
- Построить график фактической ошибки от длины отрезка разбиения, использовать логарифмический масштаб по основанию 2. По графику определить порядок точности применяемой формулы и вычислить константу.
- Модифицировать функцию, добавивь модуль или sign, для получения разрыва первой производной вблизи середины отрезка

2 Алгоритм метода

Строим квадратурную формулу метода Радо 2-го порядка по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_1 f(a) + w_2 f(x_2)$$

где $w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$

Строим квадратурную формулу метода Радо 3-го порядка по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_1 f(a) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

где $w_1 = \frac{2}{9}, w_2 = \frac{16+\sqrt{6}}{18}, w_3 = \frac{16-\sqrt{6}}{18}, x_2 = \frac{1-\sqrt{6}}{5}, x_3 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}$

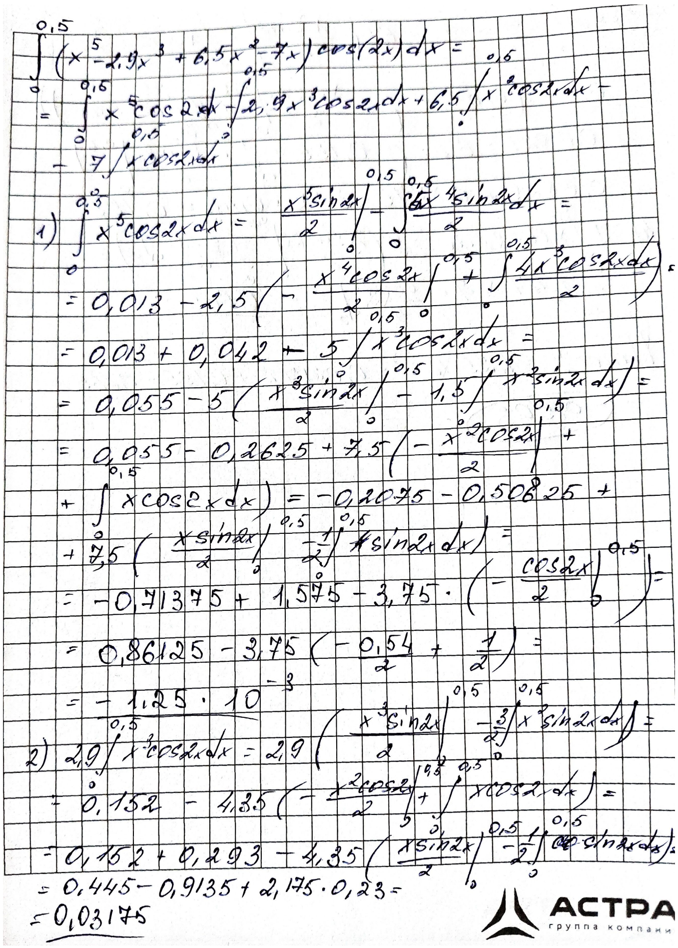
3 Предварительный анализ задачи

22 вариант включает себя интегрирование следующей функции:

$$(x^5 - 2.9x^3 + 6.5x^2 - 7x)\cos(2x)$$

Для интегрирования был выбран отрезок [0, 0.5].

Расчет значения определённого интеграла приведён на картинке ниже.



$$\int_0^{0,5}(x^5-2,9x^3+6,5x^2-7x)\cos(2x)\,dx=$$
$$=\int_0^{0,5}x^5\cos2x\,dx-\int_0^{0,5}2,9x^3\cos2x\,dx+6,5\int_0^{0,5}x^2\cos2x\,dx-7\int_0^{0,5}x\cos2x\,dx$$

1) $\int_0^{0,5}x^5\cos2x\,dx=\frac{x^5\sin2x}{2}\Big|_0^{0,5}-\int_0^{0,5}\frac{5x^4\sin2x}{2}dx=$

$=0,013-2,5\left(-\frac{x^4\cos2x}{2}\Big|_0^{0,5}+\int_0^{0,5}\frac{4x^3\cos2x\,dx}{2}\right)=$

$=0,013+0,042-5\int_0^{0,5}x^3\cos2x\,dx=$

$=0,055-5\left(\frac{x^3\sin2x}{2}\Big|_0^{0,5}-1,5\int_0^{0,5}x^2\sin2x\,dx\right)=$

$=0,055-0,2625+7,5\left(-\frac{x^2\cos2x}{2}\Big|_0^{0,5}+\int_0^{0,5}x\cos2x\,dx\right)=-0,2075-0,50625+$

$+7,5\left(\frac{x\sin2x}{2}\Big|_0^{0,5}-\frac{1}{2}\int_0^{0,5}\sin2x\,dx\right)=$

$=-0,71375+1,575-3,75\cdot\left(-\frac{\cos2x}{2}\Big|_0^{0,5}\right)=$

$=0,86125-3,75\left(-\frac{0,54}{2}+\frac{1}{2}\right)=$

$=-1,25\cdot10^{-3}$

2) $2,9\int_0^{0,5}x^3\cos2x\,dx=2,9\left(\frac{x^3\sin2x}{2}\Big|_0^{0,5}-\frac{3}{2}\int_0^{0,5}x^2\sin2x\,dx\right)=$

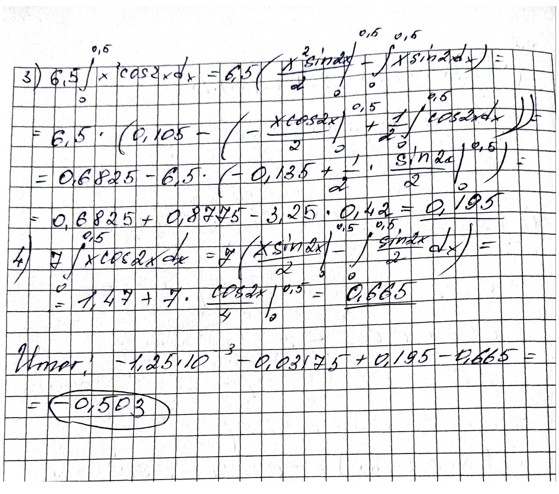
$=0,152-4,35\left(-\frac{x^2\cos2x}{2}\Big|_0^{0,5}+\int_0^{0,5}x\cos2x\,dx\right)=$

$=0,152+0,293-4,35\left(\frac{x\sin2x}{2}\Big|_0^{0,5}-\frac{1}{2}\int_0^{0,5}\sin2x\,dx\right)=$

$=0,445-0,9135+2,175\cdot0,23=$

$=0,03175$

Рис. 1: Ручной расчет



3) $6,5\int_0^{0,5}x^2\cos2x\,dx=6,5\left(\frac{x^2\sin2x}{2}\Big|_0^{0,5}-\int_0^{0,5}x\sin2x\,dx\right)=$

$=6,5\cdot\left(0,105-\left(-\frac{x\cos2x}{2}\Big|_0^{0,5}+\frac{1}{2}\int_0^{0,5}\cos2x\,dx\right)\right)=$

$=0,6825-6,5\cdot\left(-0,135+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin2x}{2}\Big|_0^{0,5}\right)=$

$=0,6825+0,8775-3,25\cdot0,42=0,195$

4) $7\int_0^{0,5}x\cos2x\,dx=7\left(\frac{x\sin2x}{2}\Big|_0^{0,5}-\int_0^{0,5}\frac{\sin2x}{2}dx\right)=$

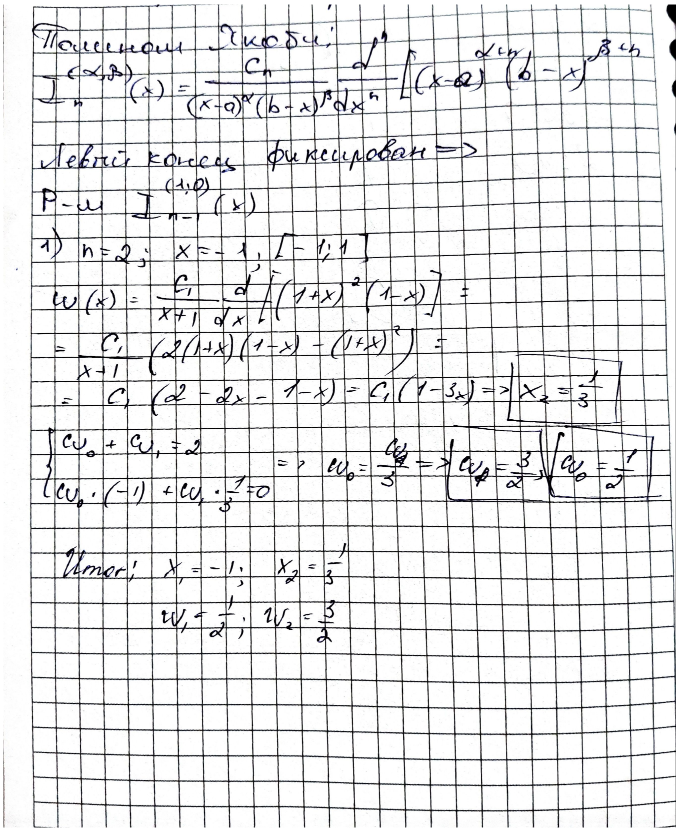
$=1,47+7\cdot\frac{\cos2x}{4}\Big|_0^{0,5}=0,665$

Итог: $-1,25\cdot10^{-3}-0,03175+0,195-0,665=$

$=-0,503$

Рис. 2: Ручной расчет

Расчёт узлов и весов для формул приведён далее.



Полином Якоби:

$$I_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{C_n}{(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{\alpha+n}(b-x)^{\beta+n}\right]$$

Левый конец фиксирован =>

Р-м $I_{n-1}^{(1;0)}(x)$

1) $n=2$; $x=-1$; $[-1;1]$

$$\omega(x) = \frac{C_1}{x+1}\frac{d}{dx}\left[(1+x)^2(1-x)\right] =$$

$$= \frac{C_1}{x+1}\left(2(1+x)(1-x)-(1+x)^2\right) =$$

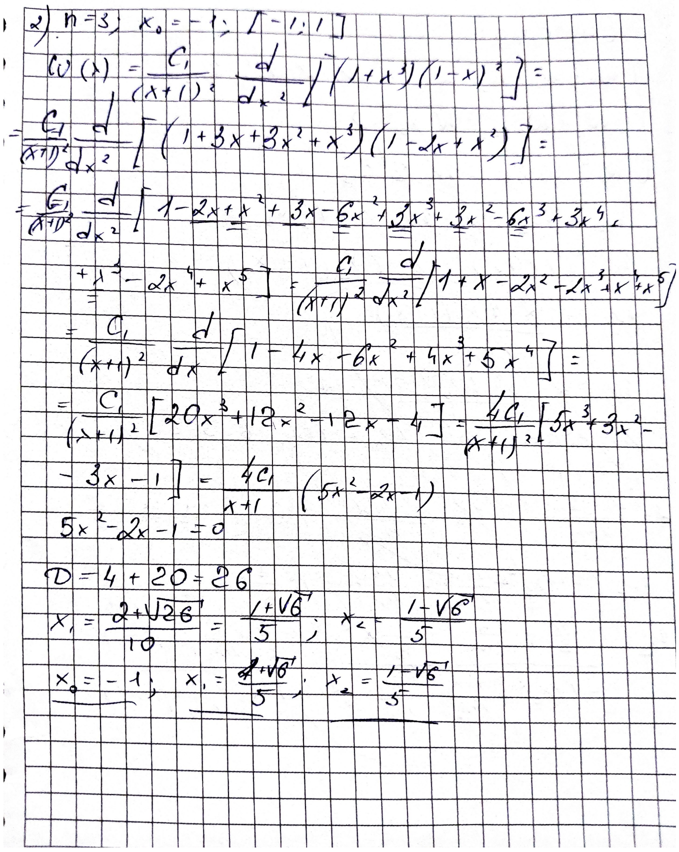
$$= C_1(2-2x-1-x) = C_1(1-3x) \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 = 2 \\ \omega_0 \cdot (-1) + \omega_1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega_1}{3} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{3}{2}} \boxed{\omega_0 = \frac{1}{2}}$$

Итог: $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{3}$

$w_1 = \frac{1}{2}$; $w_2 = \frac{3}{2}$

Рис. 3: Расчет узлов и весов для n=2



2) $n=3$, $x_0=-1$; $[-1;1]$

$$\omega(x)=\frac{C_1}{(x+1)^2}\frac{d}{dx^2}\left[(1+x)^3(1-x)^2\right]=$$

$$=\frac{C_1}{(x+1)^2}\frac{d}{dx^2}\left[(1+3x+3x^2+x^3)(1-2x+x^2)\right]=$$

$$=\frac{C_1}{(x+1)^2}\frac{d}{dx^2}\left[1-2x+x^2+3x-6x^2+3x^3+3x^2-6x^3+3x^4+x^3-2x^4+x^5\right]=\frac{C_1}{(x+1)^2}\frac{d}{dx^2}\left[1+x-2x^2-2x^3+x^4+x^5\right]$$

$$=\frac{C_1}{(x+1)^2}\frac{d}{dx}\left[1-4x-6x^2+4x^3+5x^4\right]=$$

$$=\frac{C_1}{(x+1)^2}\left[20x^3+12x^2-12x-4\right]=\frac{4C_1}{(x+1)^2}\left[5x^3+3x^2-3x-1\right]=\frac{4C_1}{x+1}(5x^2-2x-1)$$

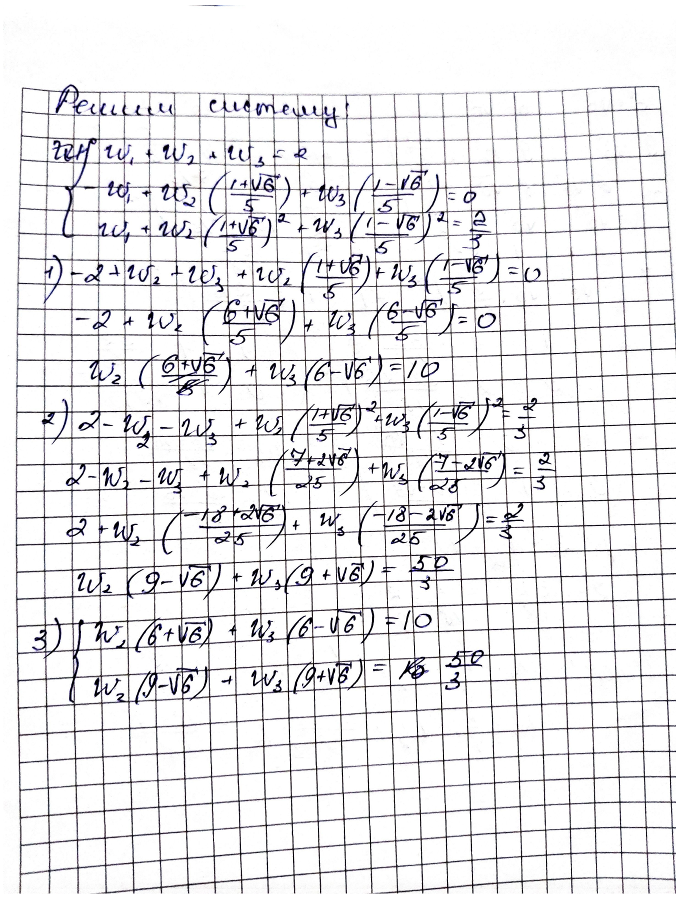
$$5x^2-2x-1=0$$

$$D=4+20=26$$

$$x_1=\frac{2+\sqrt{26}}{10}=\frac{1+\sqrt{6}}{5};\quad x_2=\frac{1-\sqrt{6}}{5}$$

$$x_0=-1,\quad x_1=\frac{1+\sqrt{6}}{5},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{6}}{5}$$

Рис. 4: Расчет узлов для n=3



Решим систему:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 2 \\ -w_1 + w_2\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right) + w_3\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right) = 0 \\ w_1 + w_2\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)^2 + w_3\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

1) $-2 + w_2 + w_3 + w_2\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right) + w_3\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right) = 0$

$-2 + w_2\left(\frac{6+\sqrt{6}}{5}\right) + w_3\left(\frac{6-\sqrt{6}}{5}\right) = 0$

$w_2\left(\frac{6+\sqrt{6}}{\cancel{5}}\right) + w_3(6-\sqrt{6}) = 10$

2) $2 - w_2 - w_3 + w_2\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)^2 + w_3\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)^2 = \frac{2}{3}$

$2 - w_2 - w_3 + w_2\left(\frac{7+2\sqrt{6}}{25}\right) + w_3\left(\frac{7-2\sqrt{6}}{25}\right) = \frac{2}{3}$

$2 + w_2\left(\frac{-18+2\sqrt{6}}{25}\right) + w_3\left(\frac{-18-2\sqrt{6}}{25}\right) = \frac{2}{3}$

$w_2(9-\sqrt{6}) + w_3(9+\sqrt{6}) = \frac{50}{3}$

3) $\begin{cases} w_2(6+\sqrt{6}) + w_3(6-\sqrt{6}) = 10 \\ w_2(9-\sqrt{6}) + w_3(9+\sqrt{6}) = \cancel{10}\ \frac{50}{3} \end{cases}$

Рис. 5: Расчет весов для n=3

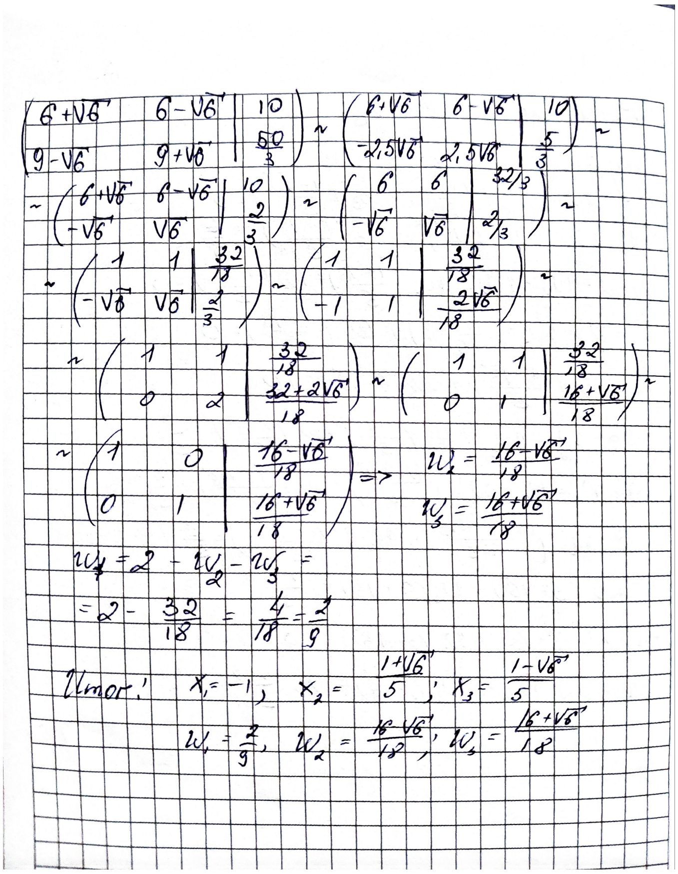
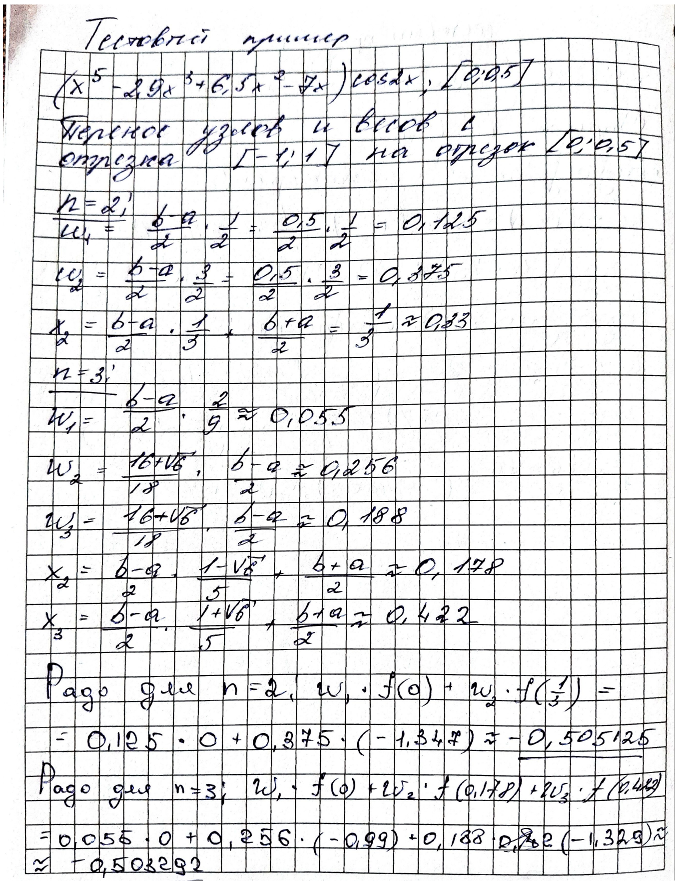


Рис. 6: Расчет весов для n=3

4 Тестовый пример



Тестовый пример

$(x^5-2,9x^3+6,5x^2-7x)\cos 2x$, $[0;0,5]$

Перенос узлов и весов с отрезка $[-1;1]$ на отрезок $[0;0,5]$

$n=2$;

$w_1 = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{0,5}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0,125$

$w_2 = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{0,5}{2}\cdot\frac{3}{2} = 0,375$

$x_2 = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{b+a}{2} = \frac{1}{3} \approx 0,33$

$n=3$;

$w_1 = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{2}{9} \approx 0,055$

$w_2 = \frac{16+\sqrt{6}}{18}\cdot\frac{b-a}{2} \approx 0,256$

$w_3 = \frac{16+\sqrt{6}}{18}\cdot\frac{b-a}{2} \approx 0,188$

$x_2 = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{6}}{5} + \frac{b+a}{2} \approx 0,178$

$x_3 = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{6}}{5} + \frac{b+a}{2} \approx 0,422$

Радо для $n=2$; $w_1\cdot f(0) + w_2\cdot f(\frac{1}{3}) =$

$= 0,125\cdot 0 + 0,375\cdot(-1,347) \approx -0,505125$

Радо для $n=3$; $w_1\cdot f(0) + w_2\cdot f(0,178) + w_3\cdot f(0,422)$

$= 0,055\cdot 0 + 0,256\cdot(-0,99) + 0,188\cdot(-1,329) \approx$

$\approx -0,503292$

Рис. 7: Ручной расчёт

5 Модульная структура программы

```
def radau_quadrature_2(f, a, b, fa):
```

- Метод Радо 2-го порядка, функция принимает:

- f - подынтегральная функция,
- a - левая граница отрезка,
- b - правая граница отрезка,
- fa - значение функции на левом крае отрезка (фиксированный узел).

Функция возвращает значение определённого интеграла.

```
def radau_quadrature_3(f, a, b, fa):
```

- Метод Радо 3-го порядка, функция принимает:

- f - подынтегральная функция,

- a - левая граница отрезка,
- b - правая граница отрезка,
- fa - значение функции на левом крае отрезка (фиксированный узел).

Функция возвращает значение определённого интеграла.

```
def adaptive_integration(f, a, b, eps, iterations=0, fa=None):
```

- Адаптивный метод интеграла, функция принимает:

- f - подынтегральная функция,
- a - левая граница отрезка,
- b - правая граница отрезка,
- eps - заданная точность,
- iterations - счётчик числа итераций, по умолчанию 0.
- fa - значение функции на левом крае отрезка, по умолчанию None.

Функция возвращает значение определённого интеграла с заданной точностью и число итераций для достижения заданной точности

6 Численный анализ

В ходе выполенения лабораторной работы было проведено исследование зависимости фактической ошибки от заданной точности. Набор точностей: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ Ниже приведён график зависимости фактической ошибки от заданной точности.

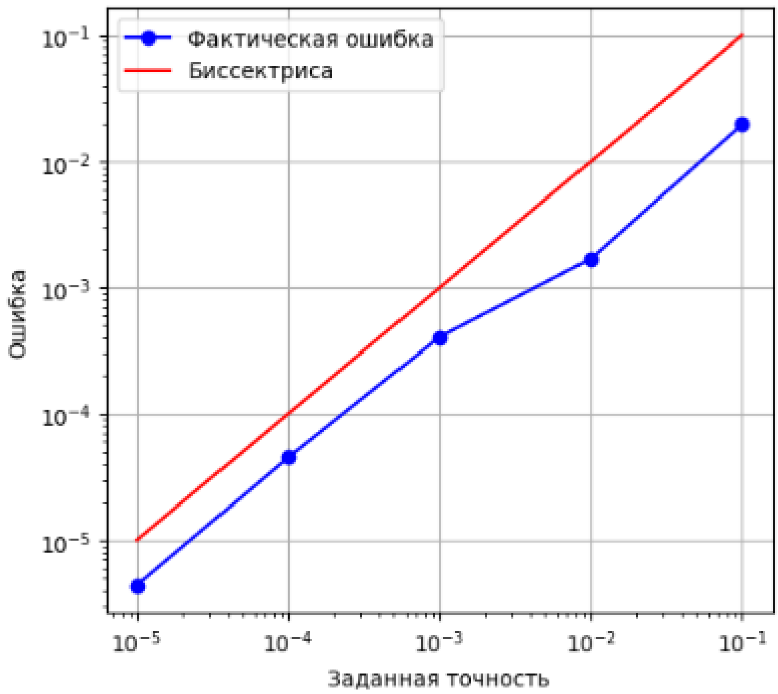


Рис. 8: Зависимость фактической ошибки от заданной точности

График, построенный по результатам эксперимента находится ниже линии биссектрисы, что говорит о том, что метод достигает заданной точности.

Также было проведено исследование зависимости числа итераций от заданной точности. Ниже приведён график, построенный по результатам эксперимента.

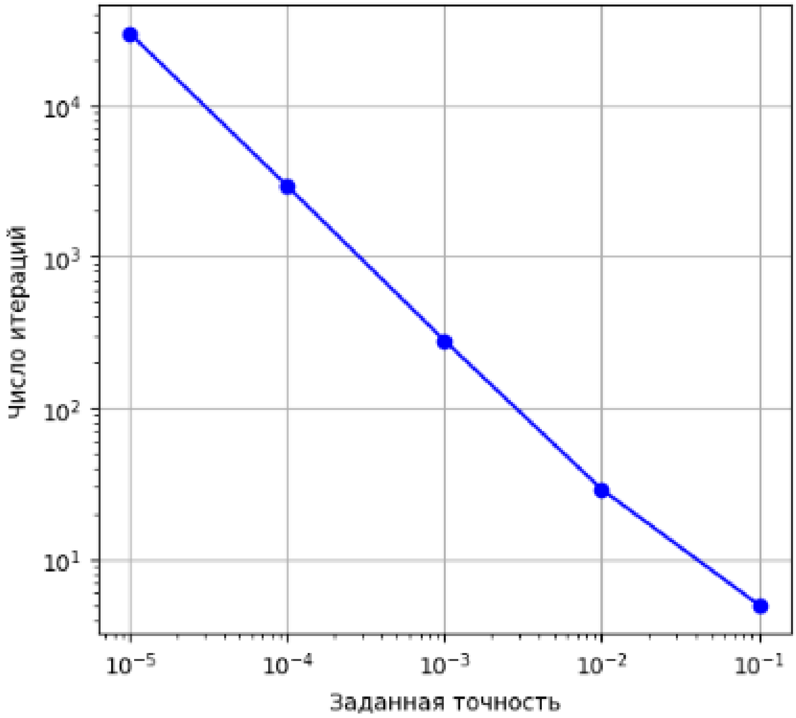


Рис. 9: Зависимость числа итераций от заданной точности

По графику видно, что для достижения большей точности требуется большее число итераций.

Далее была исследована зависимость фактической ошибки от заданной точности с поправкой Ричардсона.

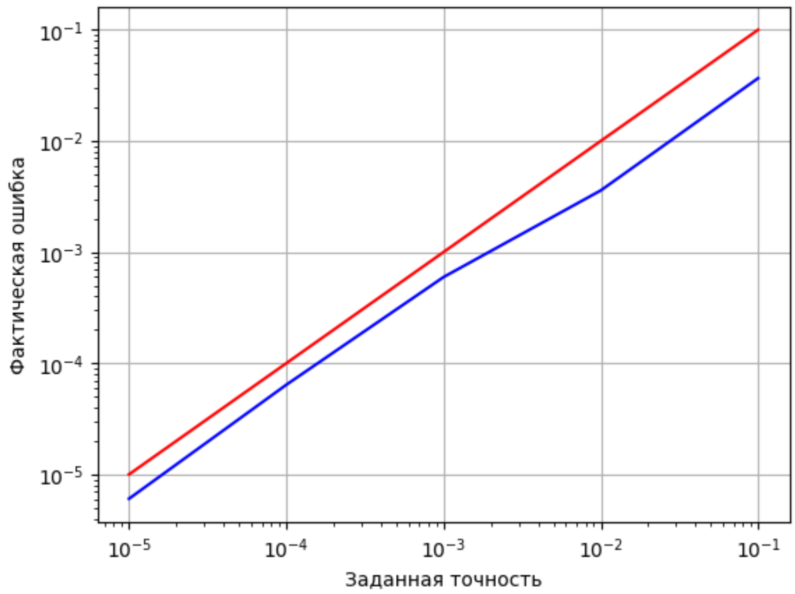


Рис. 10: Зависимость фактической ошибки от заданной точности с поправкой Ричардсона

Также была исследована зависимость фактической ошибки от длины отрезка разбиения.

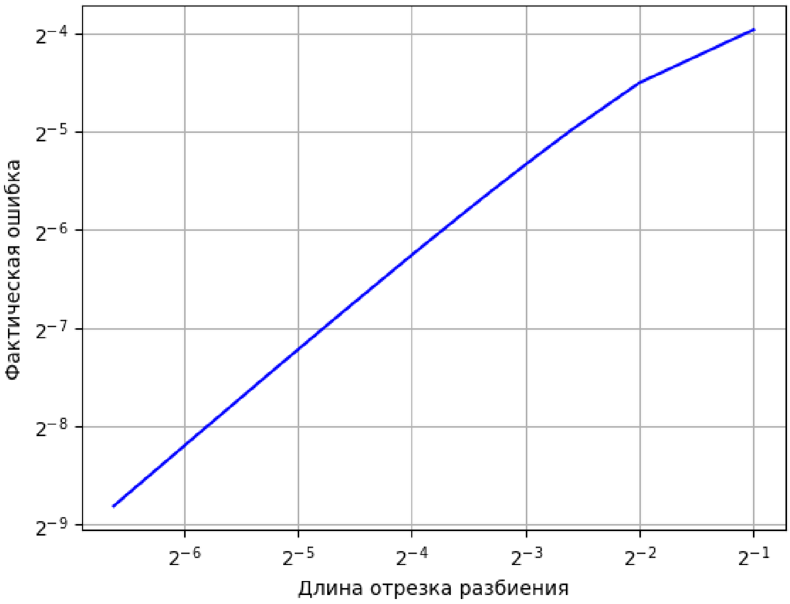


Рис. 11: Зависимость фактической ошибки от длины отрезка разбиения.

По графику видно, что с уменьшением длины отрезка разбиения уменьшается фактическая ошибка.

В качестве дополнительного исследования была исследована работа метода на подынтегральной функции с разрывом первой производной. Для примера я использовал следующую функцию:

$$(x^5 - 2.9x^3 + 6.5x^2 - 7x)\cos(2x)\left|x - \frac{b+a}{2}\right|$$

Были построены графики зависимости фактической ошибки от заданной точности и числа итераций от заданной точности.

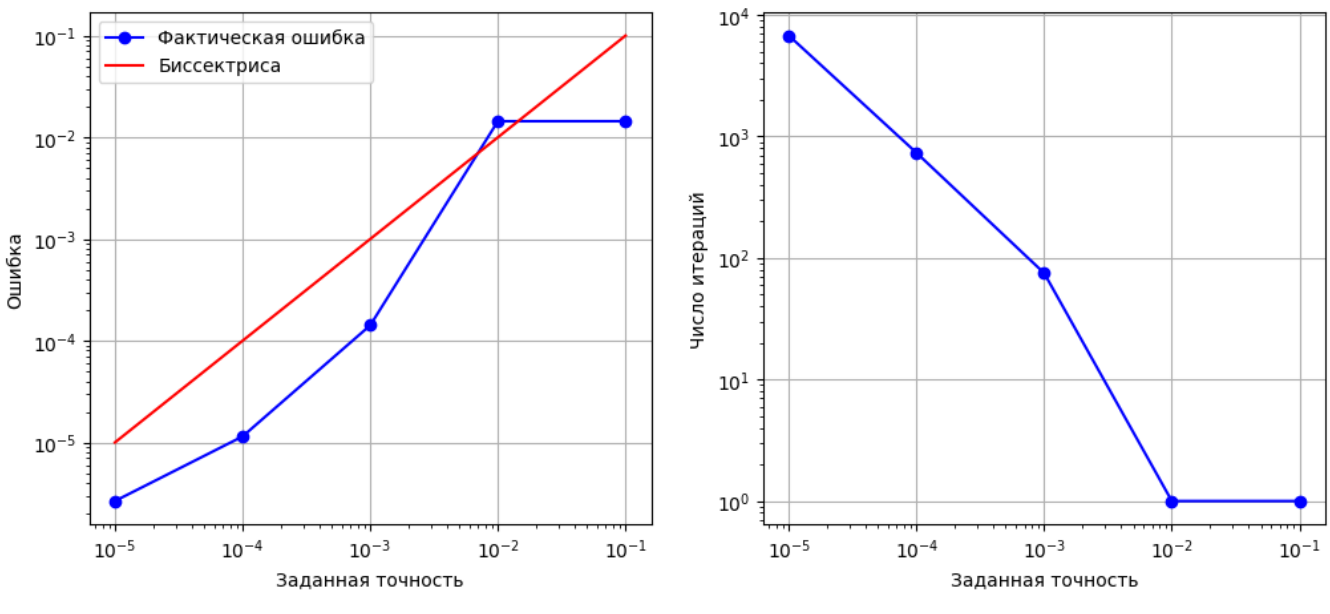


Рис. 12: Зависимость фактической ошибки от заданной точности и числа итераций от заданной точности

По графику фактической ошибки от заданной точности видно, что метод для функций с разрывом первой производной может вести себя странно, точность может как достигаться, так и не достигаться.

7 Выводы

В ходе лабораторной работы были проведены исследования метода адаптивного метода вычисления определённых интегралов с помощью метода Радо для 2 и 3 слагаемых. В результате исследований был построен график зависимости фактической ошибки от заданной точности, график зависимости числа итераций от заданной точности, график зависимости фактической ошибки от заданной точности с поправкой Ричардсона и график зависимости фактической ошибки от длины отрезка разбиения.