Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №1
Интерпретационные полиномы приближения табличных функций.

Работу выполнил:
Куц А.С.
Группа:
5030103/30001
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Формализация задачи интерполяции табличных функций заключается в нахождении полинома, который наилучшим образом приближает значения функции, заданные на сетке, на всем диапазоне значений независимой переменной. Для этого используется набор точек сетки и соответствующих значений функции. Цель заключается в уменьшении ошибки интерполяции. Исследование включает анализ влияния выбора количества точек сетки и типа сетки на интерполяцию.

1.2 Поставленные задачи

- Вычислить вручную на бумаге значения полинома и фактической ошибки для 3 узлов в узлах и серединах между узлами. Получить полином в каноническом виде.
- Построить на одном графике функцию, полином для 3 вариантов небольшого числа узлов (3,5,10), отметить узлы. На другом графике построить функции поточечной ошибки для этих же полиномов. Провести линию теоретической ошибки, построенной для одного из 3х полиномов.
- Зависимость ошибки интерполяции от степени интерполяционного полинома (количества узлов). Требуется построить график максимальной ошибки на отрезке в зависимости от числа узлов: 3...60.
- Выбрать две точки из проверочной сетки и вычислить в них модуль разности значений функции и полинома для полиномов, построенных по разному количеству узлов.

2 Алгоритм и условия применимости

2.1 Условия применимости

Критерии существования и единственности интерполяционного полинома:

1. Степень полинома должна быть на 1 меньше, чем количество точек.
2. x_i должны быть попарно различны.

2.2 Алгоритм

Высчитывается Чебышевская или равномерная сетка. В цикле от 0 до n - числа узлов вычисляется - разделенная разность $[y_0, ..., y_m]$. Далее, этот коэффициент умножается на $\prod_{i=0}^{m}(x - x_k)$, где x_k - k-й элемент сетки, а x - значение аргумента точки, в которой вычисляется значение полинома Ньютона.

Формула Ньютона для интерполирования вперёд
$P_n = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + ... = \sum_{i=0}^{n} y[x_{n-i}, x_{n-i+1}, ..., x_n] \prod_{k=n-i+1}^{n}(x - x_k)$

3 Предварительный анализ задачи

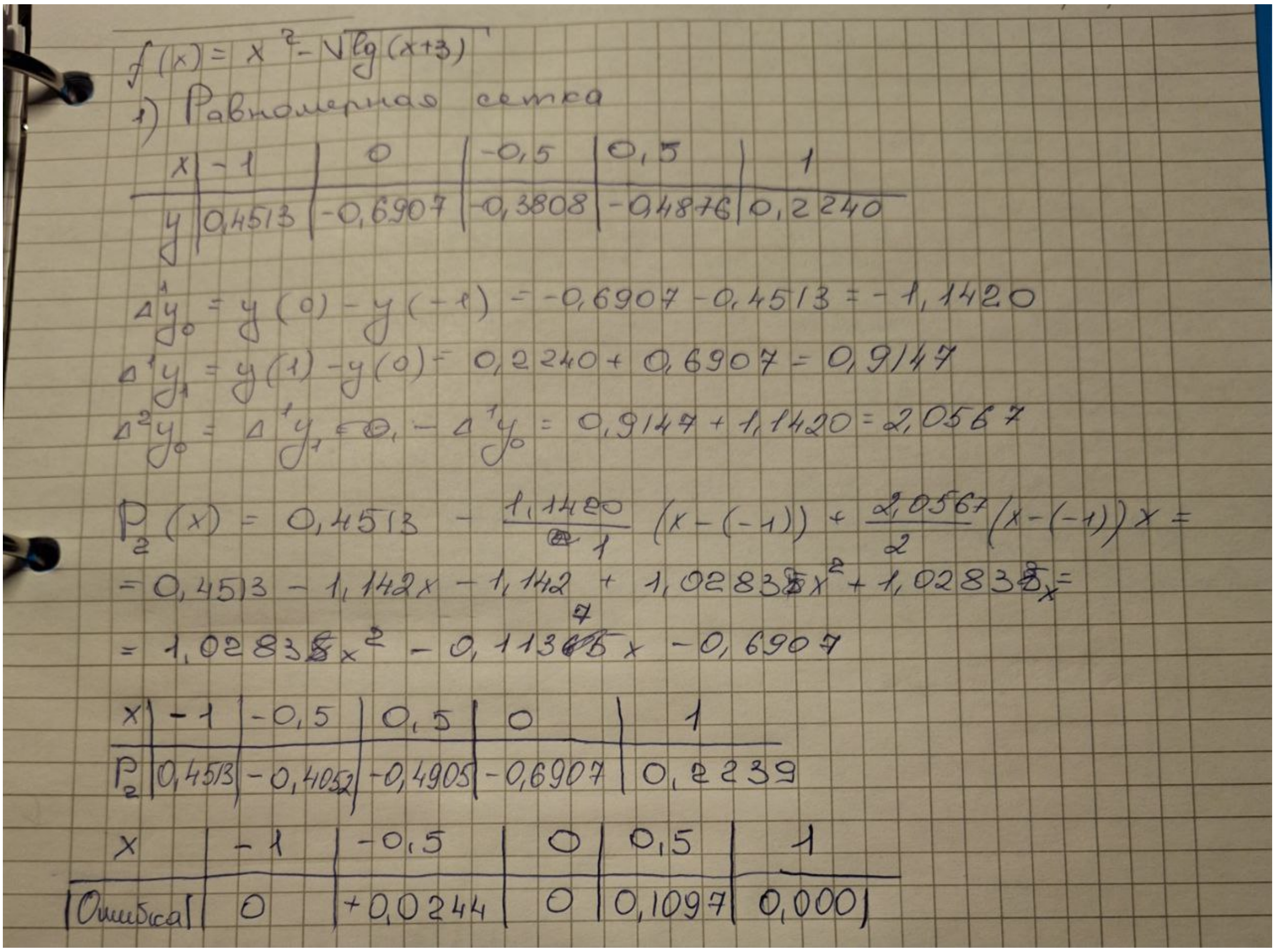
22 вариант включает в себя интерполяцию полиномом Ньютона вперёд двух следующих функций:

$$f(x) = x^2 - \sqrt{lg(x+3)} \tag{1}$$

$$g(x) = x^3 - 0.2x^2 + 0.4|x| + 1.4 \tag{2}$$

Для интерполирования функций выбран отрезок [2, 2]. Для каждой функции строится 2 вида сетки - равномерная и Чебышевская.

4 Тестовый пример



$f(x) = x^2 - \sqrt{lg(x+3)}$

1) Равномерная сетка

x	-1	0	-0,5	0,5	1
y	0,4513	-0,6907	-0,3808	-0,4876	0,2240

$\Delta^1 y_0 = y(0) - y(-1) = -0,6907 - 0,4513 = -1,1420$

$\Delta^1 y_1 = y(1) - y(0) = 0,2240 + 0,6907 = 0,9147$

$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0 = 0,9147 + 1,1420 = 2,0567$

$P_2(x) = 0,4513 - \frac{1,1420}{1}(x-(-1)) + \frac{2,0567}{2}(x-(-1))x =$

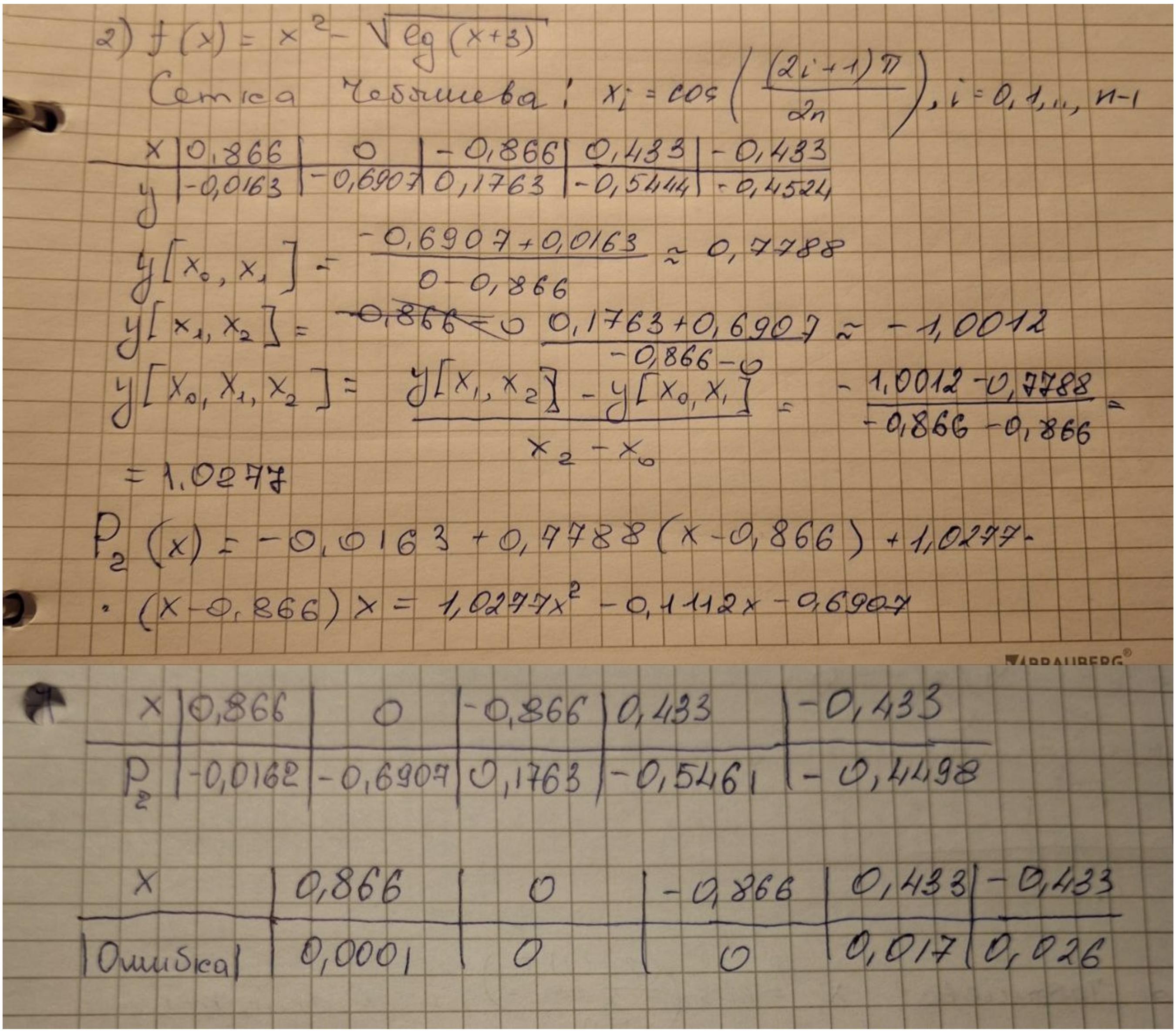
$= 0,4513 - 1,142x - 1,142 + 1,02835x^2 + 1,02835x =$

$= 1,02835x^2 - 0,11365x - 0,6907$

x	-1	-0,5	0,5	0	1
P_2	0,4513	-0,4052	-0,4905	-0,6907	0,2239

x	-1	-0,5	0	0,5	1
Ошибка	0	+0,0244	0	0,1097	0,0001

Рис. 1: Тестовый пример для f(x) на равномерной сетке



2) $f(x) = x^2 - \sqrt{\lg(x+3)}$

Сетка Чебышева: $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right), i = 0, 1, \dots, n-1$

x	0,866	0	−0,866	0,433	−0,433
y	−0,0163	−0,6907	0,1763	−0,5444	−0,4524

$y[x_0, x_1] = \frac{-0{,}6907 + 0{,}0163}{0 - 0{,}866} \approx 0{,}7788$

$y[x_1, x_2] = \cancel{-0{,}866 - 0}\ \frac{0{,}1763 + 0{,}6907}{-0{,}866 - 0} \approx -1{,}0012$

$y[x_0, x_1, x_2] = \frac{y[x_1, x_2] - y[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1{,}0012 - 0{,}7788}{-0{,}866 - 0{,}866} =$

$= 1{,}0277$

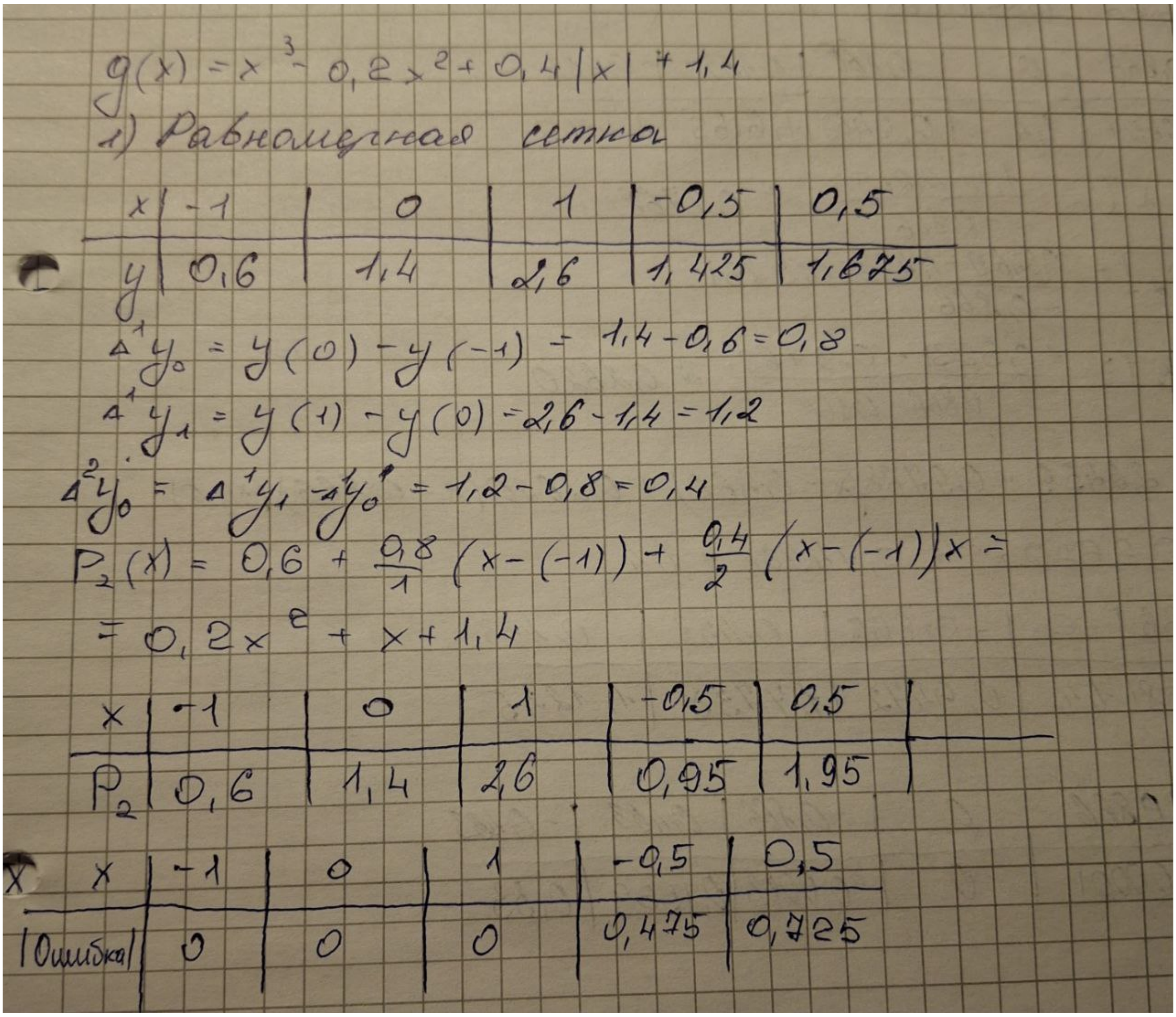
$P_2(x) = -0{,}0163 + 0{,}7788(x - 0{,}866) + 1{,}0277 \cdot$

$\cdot (x - 0{,}866)x = 1{,}0277x^2 - 0{,}1112x - 0{,}6907$

x	0,866	0	−0,866	0,433	−0,433
P_2	−0,0162	−0,6907	0,1763	−0,5461	−0,4498

x	0,866	0	−0,866	0,433	−0,433
|Ошибка|	0,0001	0	0	0,017	0,026

Рис. 2: Тестовый пример для f(x) на сетке Чебышева



$g(x) = x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4|x| + 1{,}4$

1) Равномерная сетка

x	-1	0	1	-0,5	0,5
y	0,6	1,4	2,6	1,425	1,675

$\Delta^1 y_0 = y(0) - y(-1) = 1{,}4 - 0{,}6 = 0{,}8$

$\Delta^1 y_1 = y(1) - y(0) = 2{,}6 - 1{,}4 = 1{,}2$

$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0 = 1{,}2 - 0{,}8 = 0{,}4$

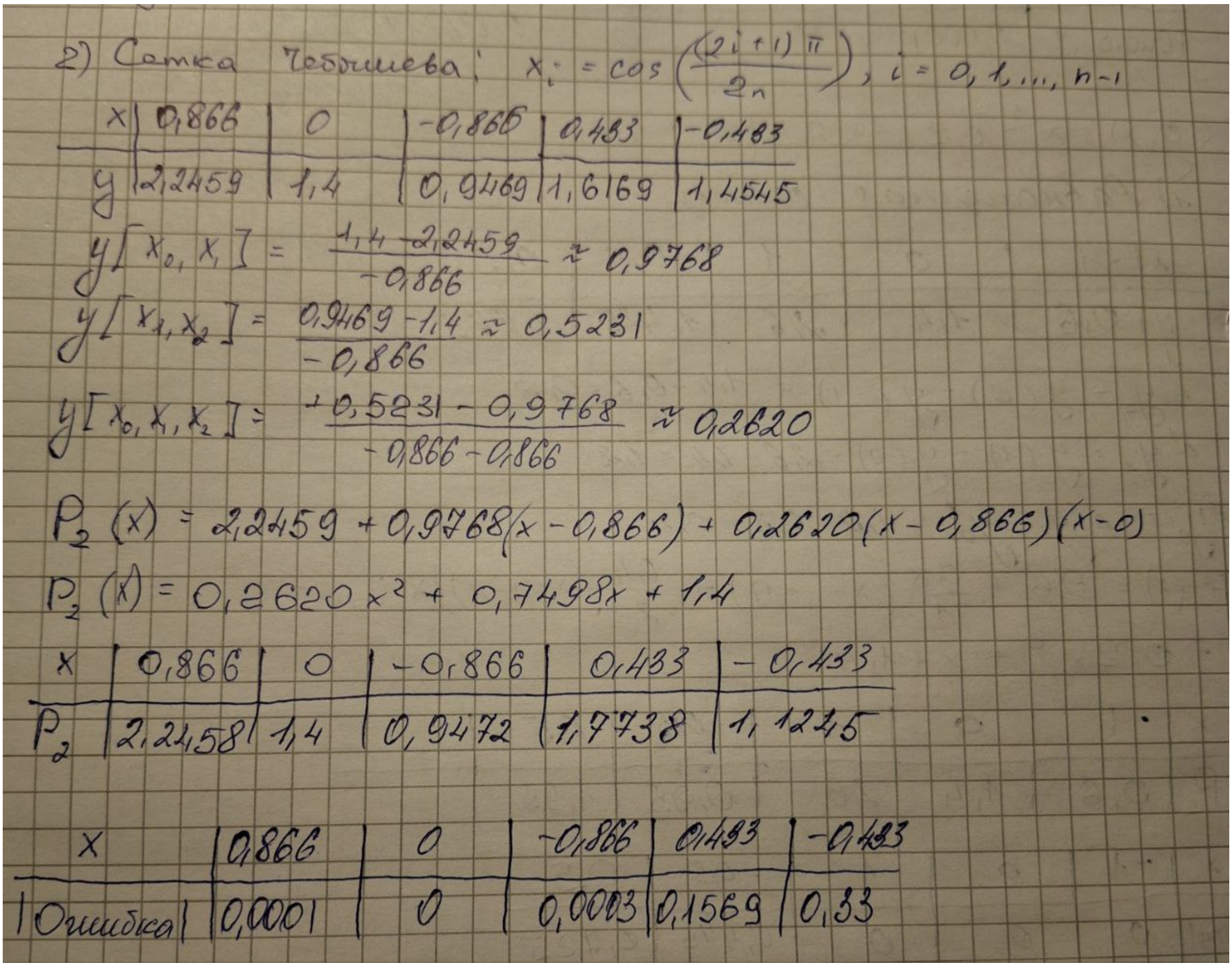
$P_2(x) = 0{,}6 + \frac{0{,}8}{1}(x-(-1)) + \frac{0{,}4}{2}(x-(-1))x =$

$= 0{,}2x^2 + x + 1{,}4$

x	-1	0	1	-0,5	0,5
P_2	0,6	1,4	2,6	0,95	1,95

x	-1	0	1	-0,5	0,5
|Ошибка|	0	0	0	0,475	0,725

Рис. 3: Тестовый пример для g(x) на равномерной сетке



2) Сетка Чебышева: $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

x	0,866	0	-0,866	0,433	-0,433
y	2,2459	1,4	0,9469	1,6169	1,4545

$y[x_0, x_1] = \frac{1,4 - 2,2459}{-0,866} \approx 0,9768$

$y[x_1, x_2] = \frac{0,9469 - 1,4}{-0,866} \approx 0,5231$

$y[x_0, x_1, x_2] = \frac{0,5231 - 0,9768}{-0,866 - 0,866} \approx 0,2620$

$P_2(x) = 2,2459 + 0,9768(x - 0,866) + 0,2620(x - 0,866)(x - 0)$

$P_2(x) = 0,2620x^2 + 0,7498x + 1,4$

x	0,866	0	-0,866	0,433	-0,433
P_2	2,2458	1,4	0,9472	1,7738	1,1225

x	0,866	0	-0,866	0,433	-0,433
Ошибка	0,0001	0	0,0003	0,1569	0,33

Рис. 4: Тестовый пример для g(x) на сетке Чебышева

5 Модульная структура программы

```
def nodes(a, b, n, f, p):
```

- функция принимает a и b - границы отрезка, n - количество точек, f - функция, p - параметр (1 - равномерная сетка, 2 - Чебышевская сетка), возвращает *xlist* - сетку и *ylist* - сеточную функцию.

```
def polynomial(x, x_list, y_list):
```

- функция принимает точку, сетку и сеточную функцию, возвращает значение полинома в точке x, построенного на сетке.

```
def separated_differences(x_list, y_list):
```

- функция принимает сетку и сеточную функцию, возвращает разделённые разности, которые участвуют в построении полинома

6 Численный анализ

Строятся 2 вида сетки: равномерная и Чебышевская. Далее, для определенного числа узлов n вычисляются значения полинома в 1000 точках (построение проверочной сетки).

Приведу графики функций и соответствующих им полиномов для 3, 5 и 10 узлов на равномерной и Чебышевской сетках, графики поточечных ошибок для каждого из случаев и графики теоретических ошибок для полиномов, построенных для 3 узлов.

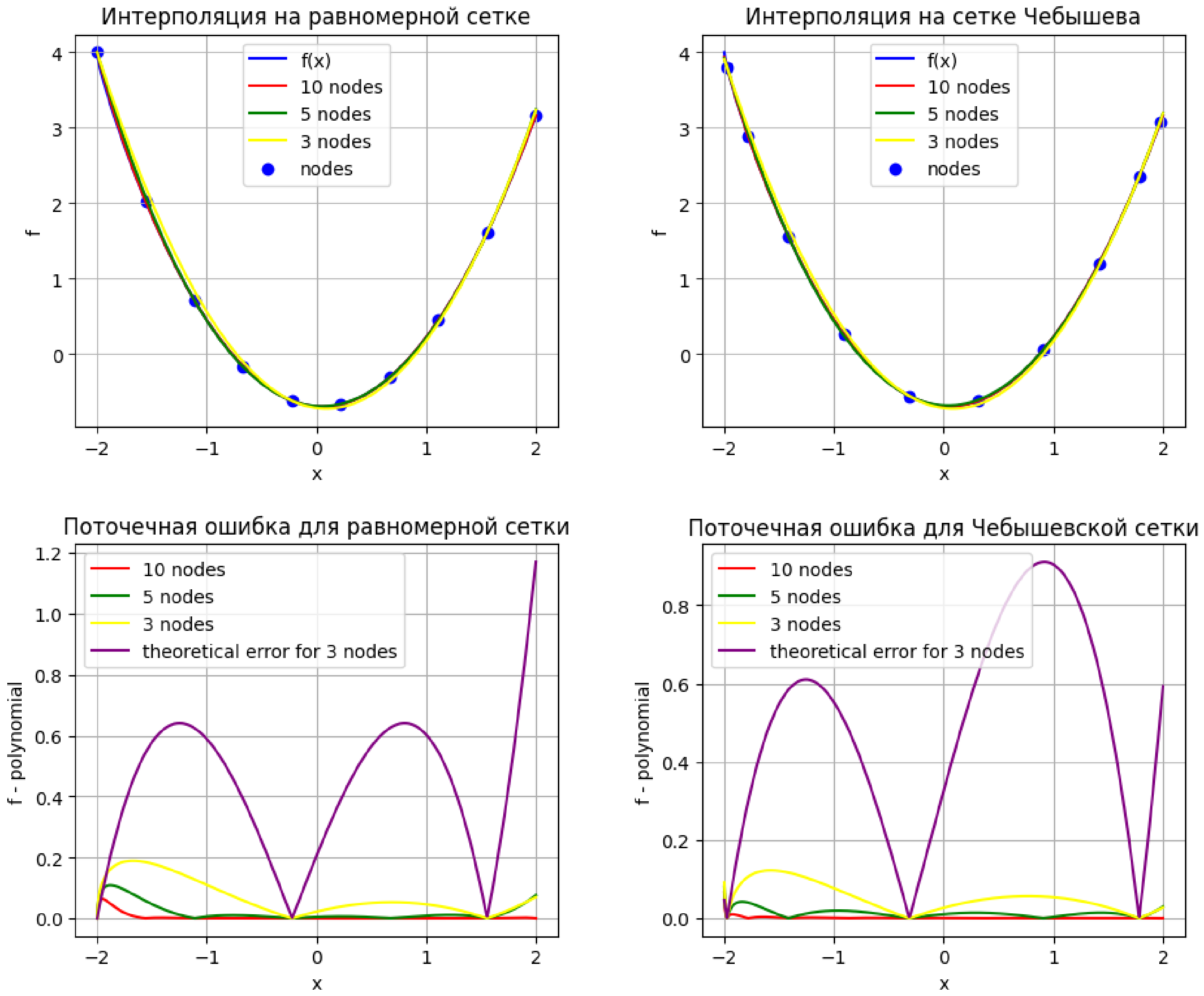


Рис. 5: Исследование для функции f(x)

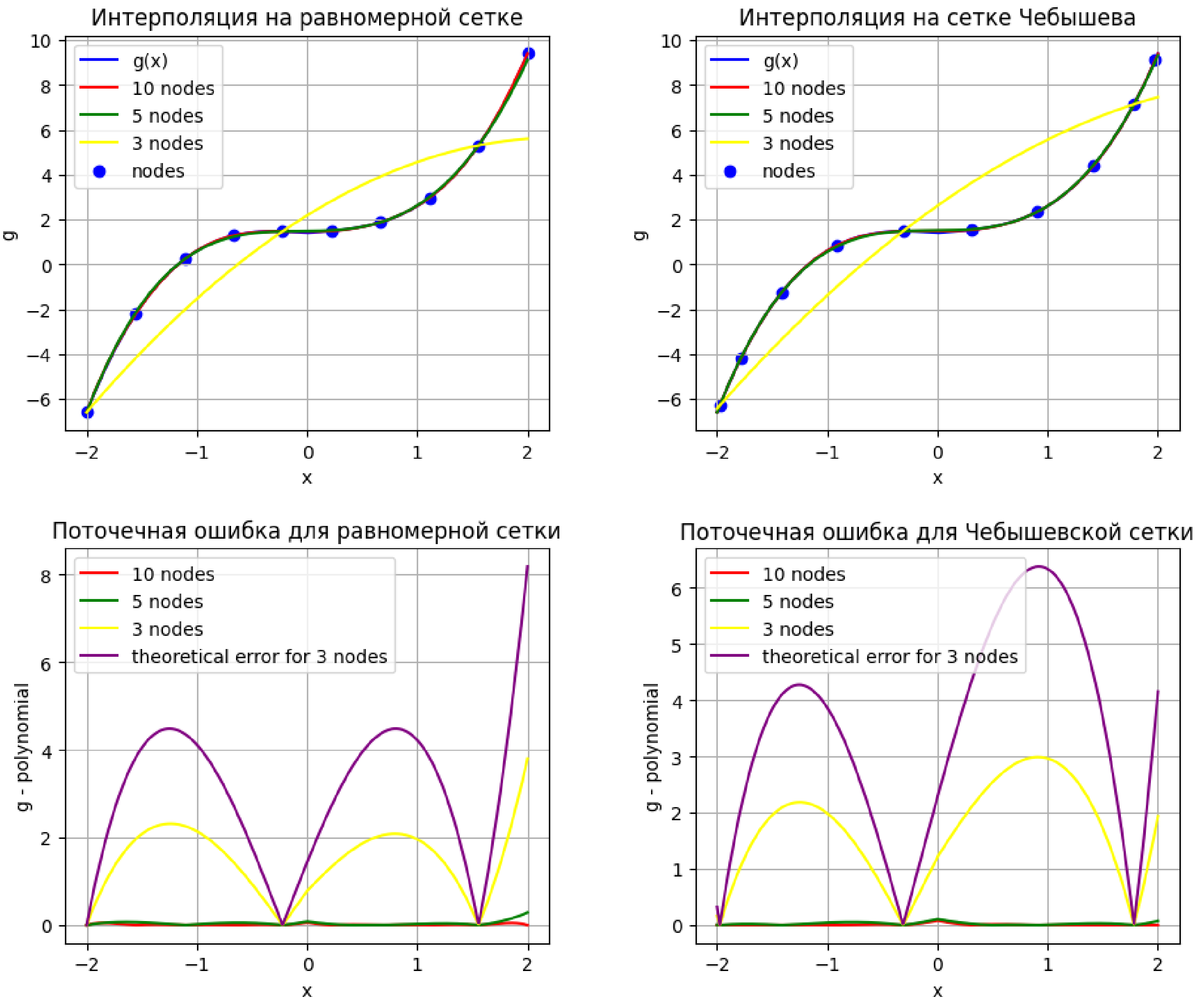


Рис. 6: Исследование для функции g(x)

Далее приведу графики зависимости максимальной ошибки от числа узлов для разных полиномов, построенных на разных сетках и соответствующих разным функциям, также приведу графики зависимости ошибки в двух выбранных точках от количества узлов.

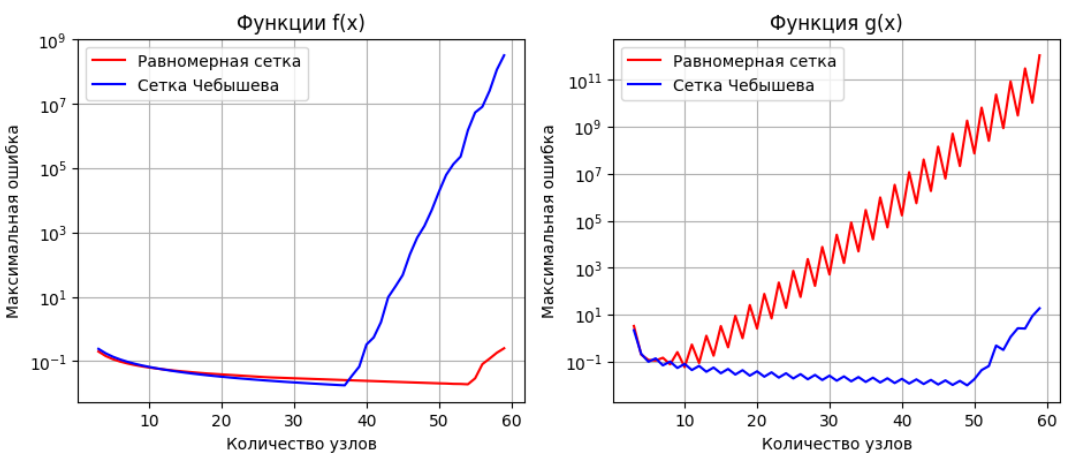


Рис. 7: Зависимость максимальной ошибки на отрезке от числа узлов

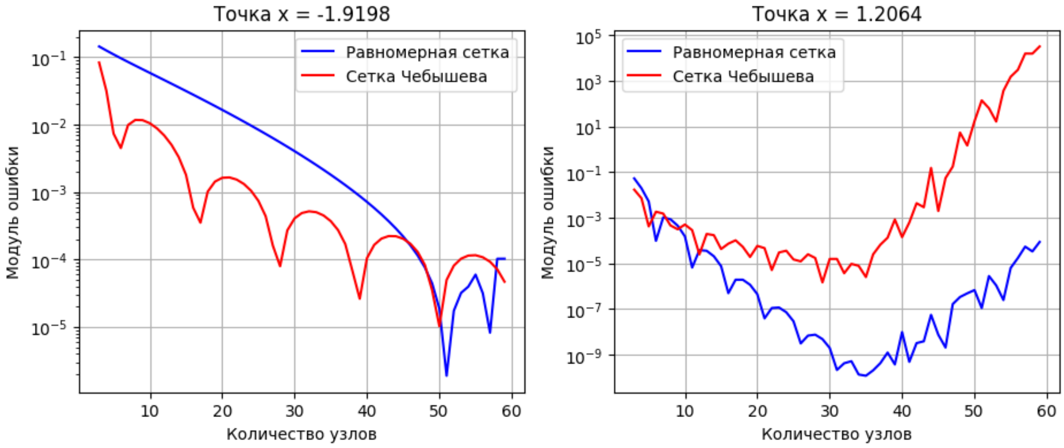


Рис. 8: Зависимость ошибки в выбранных точках от количества узлов для f(x)

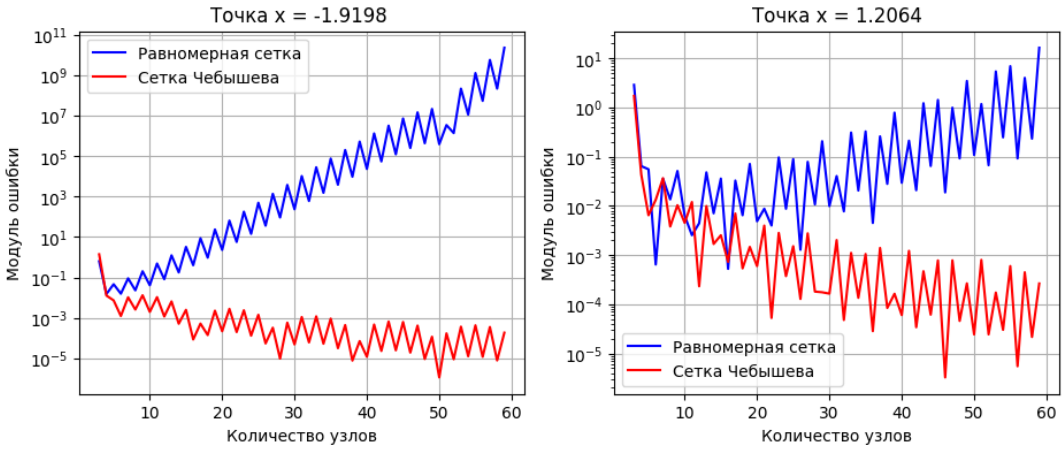


Рис. 9: Зависимость ошибки в выбранных точках от количества узлов для g(x)

Дополнительное исследование: исследование зависимости ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных. В значение функции в точках сетки для построения полинома вносятся возмущения. Возмущения вносятся в каждую точку случайно. Требуется вычислить относительную ошибку по всему отрезку для каждого значения максимального возмущения. Эксперимент выполнялся 20 раз, строился график типа бокcплот.

Далее приведу графики зависимости ошибки интерполяционного полина при возмущении данных для двух функций на равномерной сетке и сетке Чебышева.

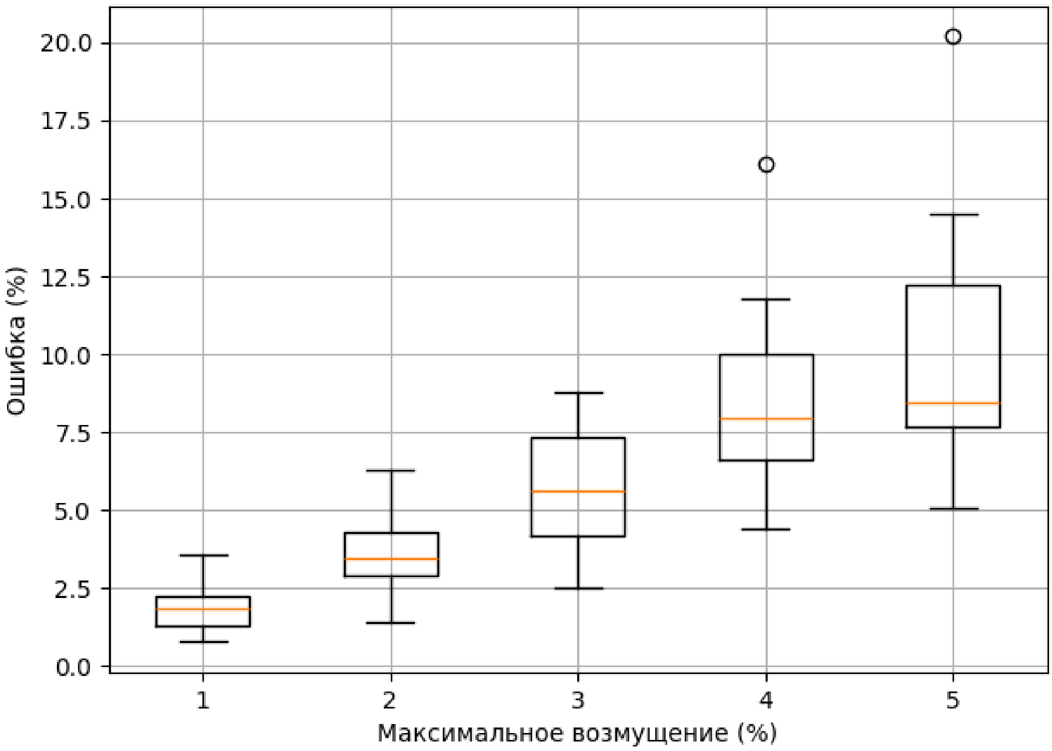


Рис. 10: Зависимость ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных для f(x) на равномерной сетке

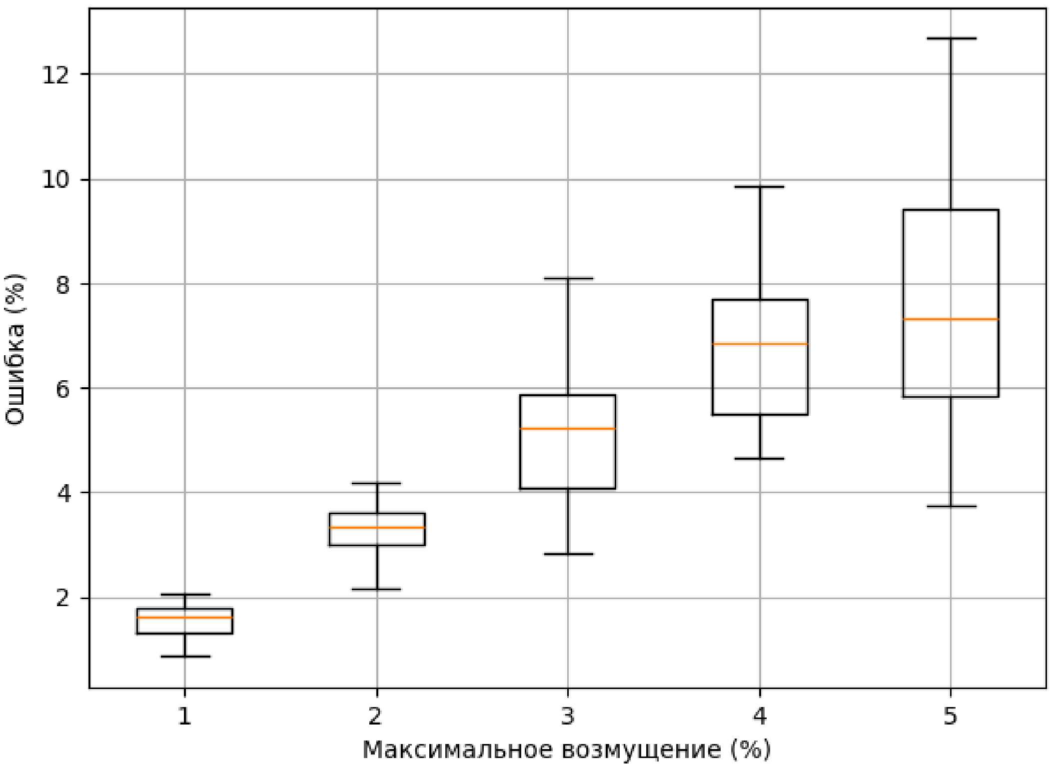


Рис. 11: Зависимость ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных для f(x) на сетке Чебышева

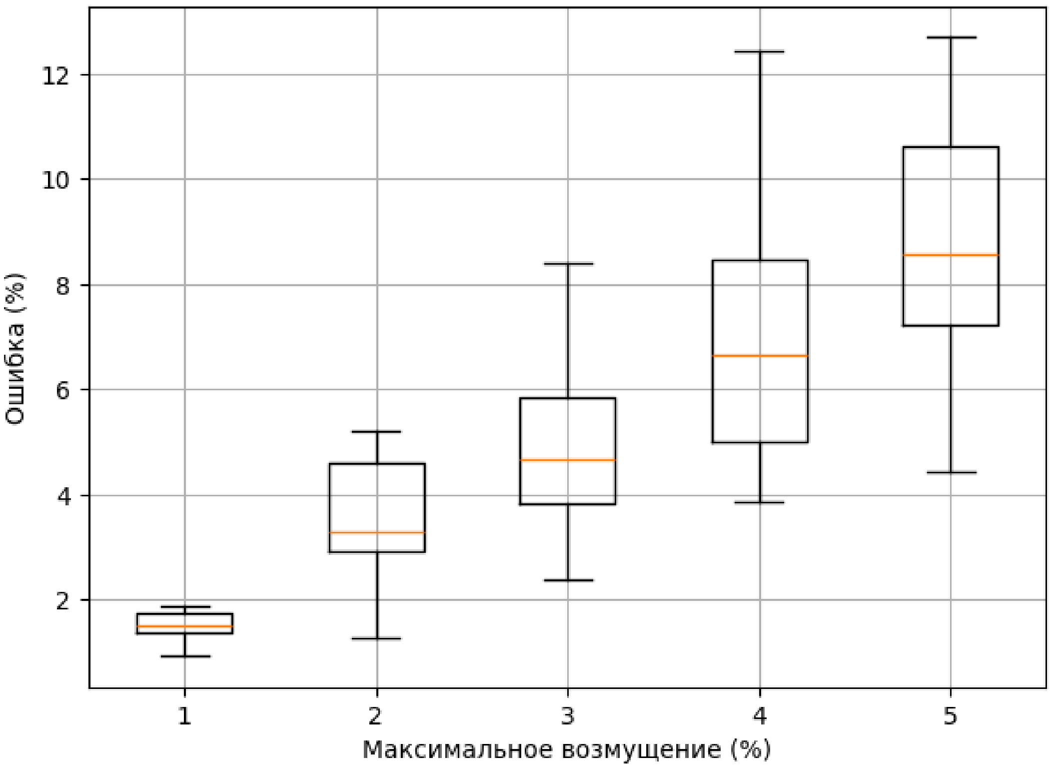


Рис. 12: Зависимость ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных для g(x) равномерной сетке

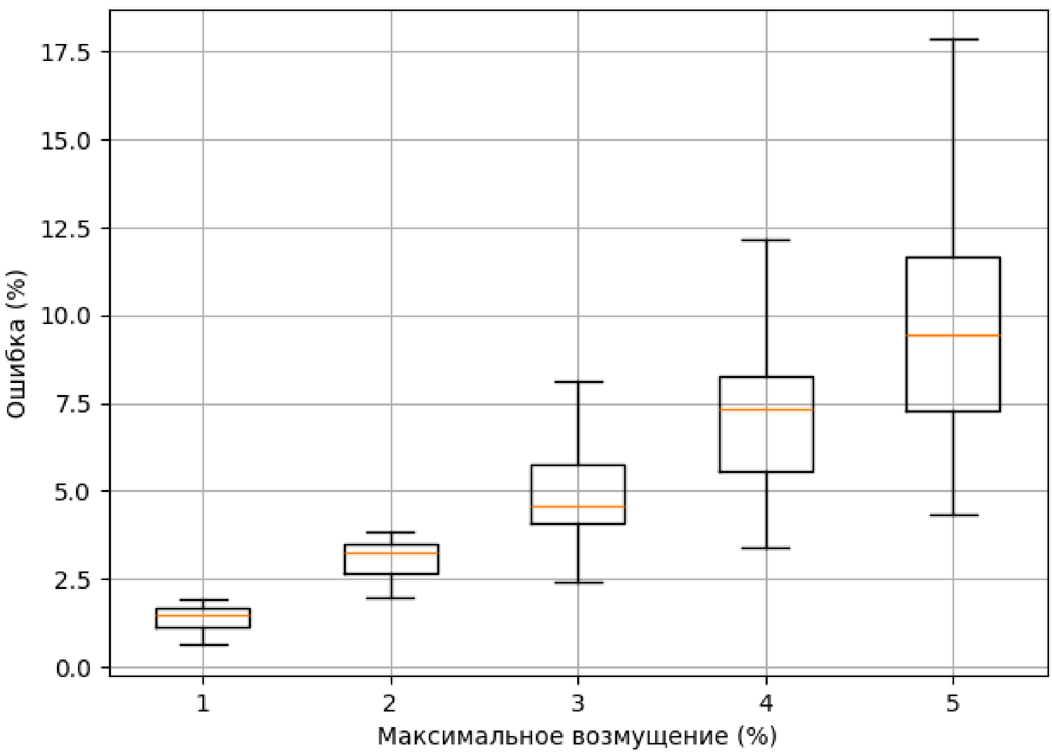


Рис. 13: Зависимость ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных для g(x) на сетке Чебышева

7 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы особенности интерполяции полиномом Ньютона вперёд на равномерной и Чебышевской сетках . На основе проведённых исследований можно сделать следующие выводы:

1. **Точность интерполяции:**
   - На равномерной сетке с увеличением числа узлов точность интерполяции возрастает, однако вблизи краёв отрезка наблюдается рост ошибки даже с увеличением количества узлов.
   - На сетке Чебышева ошибка интерполяции распределяется более равномерно по всему отрезку, что подтверждает её преимущество для уменьшения максимальной ошибки.

2. **Зависимость ошибки от числа узлов:**
   - Для обеих сеток с увеличением числа узлов максимальная ошибка интерполяции уменьшается, однако на равномерной сетке этот процесс менее устойчив.
   - На сетке Чебышева сходимость интерполяционного полинома к исходной функции происходит быстрее, что подтверждается графиками зависимости максимальной ошибки от числа узлов.

3. **Влияние возмущения данных:** на равномерной сетке возмущения данных приводят к более значительным ошибкам по сравнению с сеткой Чебышева, однако для сетки Чебышева можно наблюдать существенные выбросы для максимального возмущения 5%.