

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Направление подготовки
"01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №5

Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Рунге-Кутты.

Работу

выполнил:

Куц А.С.

Группа:

5030103/30001

Преподаватель:

Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Формулировка задачи и ее формализация	3
1.1	Формализация задачи	3
1.2	Поставленные задачи	3
2	Алгоритм и условия применимости	3
2.1	Условия применимости	3
2.2	Алгоритм	3
3	Предварительный анализ задачи	3
4	Модульная структура программы	3
5	Численный анализ	4
6	Выводы	7

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Найди численное решение ОДУ с заданной точностью ϵ на заданном отрезке с заданным начальным условием.

1.2 Поставленные задачи

- Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Построить график ошибки на отрезке для этих решений.
- Построить график изменения шага по отрезку. Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.
- Построить зависимость фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, использовать логарифмическую шкалу по основанию 2. Оценить порядок метода.
- Проверить работоспособность своей программы для решения систем ОДУ. Создать линейную нежесткую систему (с малым S') с матрицей 5×5 . Начальное условие взять случайным от 0 до 1. Построить графики численных решений для двух значений шага на отрезке.

2 Алгоритм и условия применимости

2.1 Условия применимости

Правая часть ОДУ должна быть достаточно гладкой, желательно должна иметь непрерывные производные до 4-го порядка включительно.

2.2 Алгоритм

Один шаг метода делаем по формулам:

$$\begin{aligned}K_1 &= f(x_k, y_k) \\K_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1) \\K_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2) \\K_4 &= f(x_k + h, y_k + hK_3) \\y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)\end{aligned}$$

3 Предварительный анализ задачи

22 вариант включает в себя решение следующего ОДУ:

$$x^2 y' + xy + 1 = 0$$

На отрезке $(1,3)$, $y(1)=1$. При этом известно точного решение:

$$xy = 1 - \ln(|x|)$$

4 Модульная структура программы

```
def runge_kutta_one_step(f, x, y, h):
```

- шаг метода Рунге-Кутты 4-го порядка Функция принимает: f - диф. уравнение, x - точку, в которой считаем новое приближение, y - прошлое приближение, h - длина шага Функция возвращает новое приближение

```
def runge_kutta(f, a, b, y0, h0, step='adaptive', eps):
```

- функция принимает: f - диф. уравнение, a - левая граница отрезка, b - правая граница отрезка, y_0 - начальное условие в точке a , h_0 - стартовый шаг, $step$ - параметр (`adaptive` - адаптивное изменение шага, `fixed` - фиксированное значение шага), eps - заданная точность. Функция возвращает численное решение на заданном отрезке

5 Численный анализ

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено исследование работы метода. Были построены графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Также были построены графики ошибок на отрезке для этих решений.

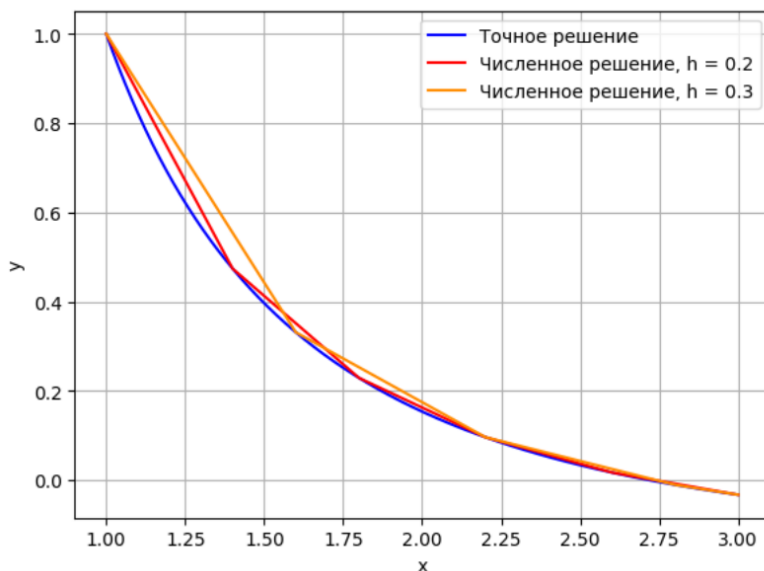


Рис. 1: Графики численных решений для фиксированных значений шага на отрезке

Ниже представлены графики ошибок на отрезке для этих решений.

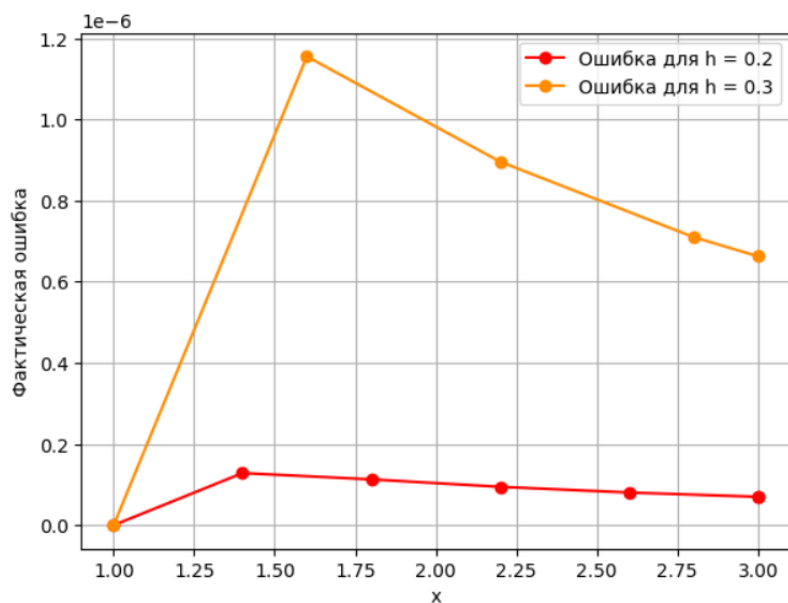


Рис. 2: Графики ошибок на отрезке для решений

По этим графикам видно, что для меньшего значения фиксированного шага получается более точное решение ОДУ.

Далее было проведено исследование точности метода. Заданная точность достигалась на каждом шаге по правилу Рунге. Ниже приведён график изменения шага по отрезку.

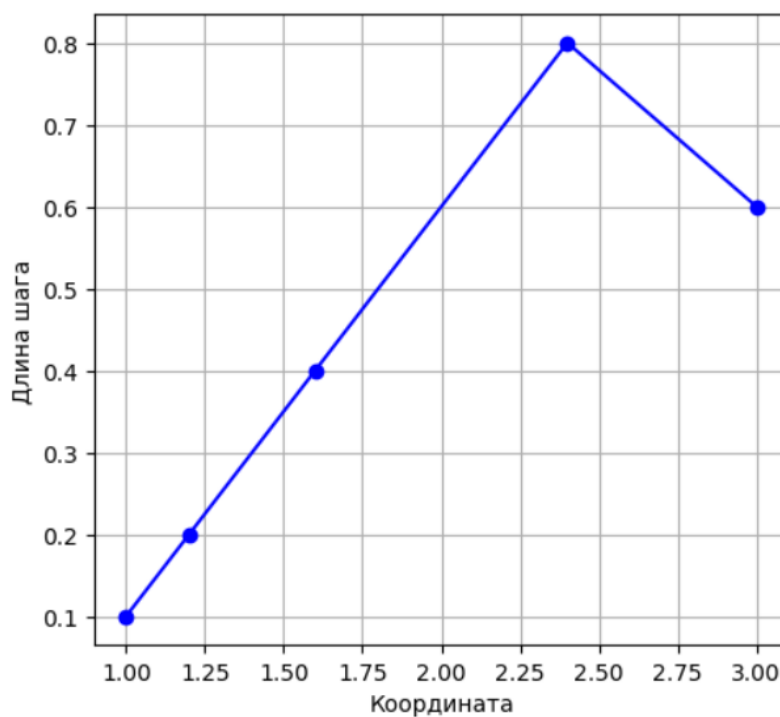


Рис. 3: Изменение шага по отрезку

Далее был построен график зависимости фактической погрешности от заданной точности. Набор точностей: 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} , 10^{-7} , 10^{-8} , 10^{-9} , 10^{-10} , 10^{-11} .

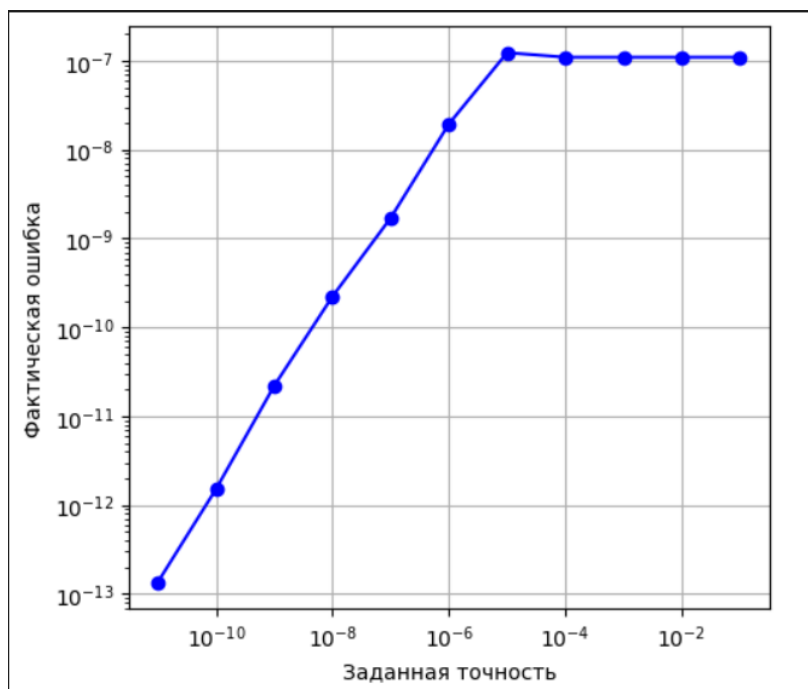


Рис. 4: Зависимость фактической ошибки от заданной точности

По данному графику видно, что в методе достигается заданная точность, причём фактическая ошибка на несколько порядков меньше заданной точности.

Далее было проведено исследование сходимости метода. Был построен график зависимости фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, при построении была использована логарифмическая шкала по основанию 2.

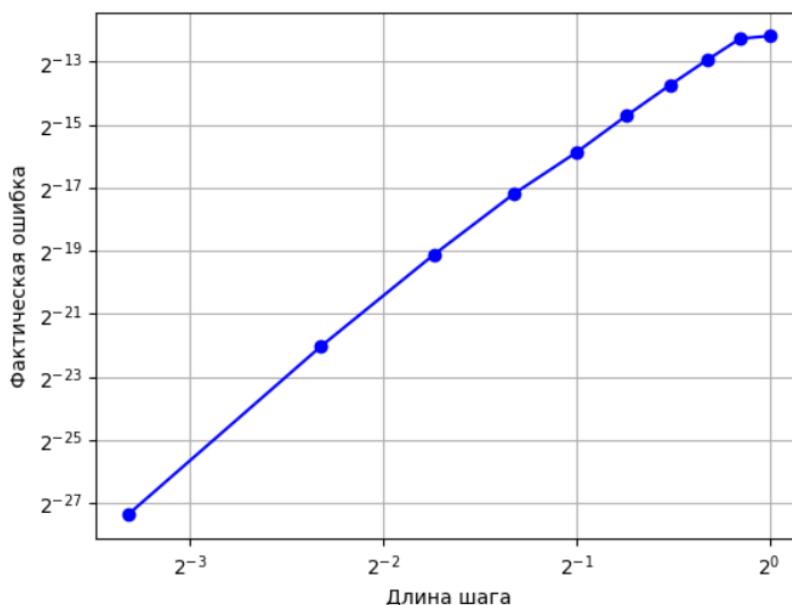


Рис. 5: Зависимость фактической ошибки от фиксированной длины шага

С помощью функции `scipy.stats.linregress` библиотеки Scipy был вычислен коэффициент наклона прямой ≈ 4.6215 , что примерно соответствует порядку метода.

Дополнительное исследование. Была проверена работоспособности программы для решения систем ОДУ. Я создал линейную нежесткую систему с матрицей 5×5 . Начальное условие было выбрано случайным от 0 до 1.

Матрица системы выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -2.6838 & -0.3795 & -0.3500 & -1.1508 & -0.7553 \\ -0.3795 & -4.2177 & -3.3631 & -1.4739 & -0.4436 \\ -0.3500 & -3.3631 & -7.0622 & -1.4197 & -0.3185 \\ -1.1508 & -1.4739 & -1.4197 & -2.2962 & -0.8470 \\ -0.7553 & -0.4436 & -0.318519 & -0.8470 & -2.7398 \end{pmatrix}$$

Также было получено решение с помощью функции `scipy.integrate.solveivp` для сравнения. Ниже приведены соответствующие графики.

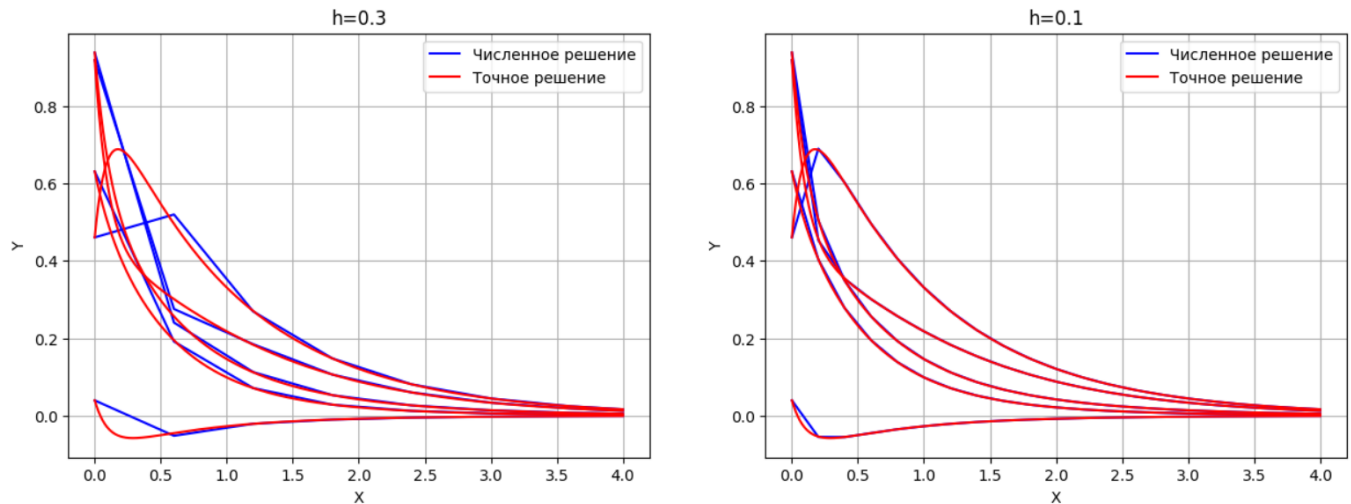


Рис. 6: Сравнение численного и точного решений системы ОДУ для разных значений шага

По данным графикам можно судить о применимости метода к решению систем ОДУ.

6 Выводы

В ходе лабораторной работы были проведены исследования метода Рунге-Кутты 4-го порядка. В результате исследований были построены графики решений для двух различных фиксированных значений шага на отрезке, был построен график точного решения для сравнения. Анализируя полученные графики, можно сказать о том, что с уменьшением значения шага, решение становится более точным.

Также были построены зависимости фактической ошибки от заданной точности и длины шага от координаты.

По построенному графику зависимости фактической ошибки от фиксированной длины шага определили порядок метода.

В качестве дополнительного исследования была исследована применимость метода для решения систем ОДУ.