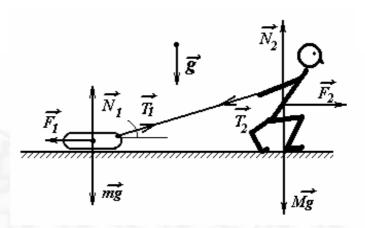
## Витебск 1990 г. (Решения)

**9-1**. Если попытаться тянуть сани горизонтально, то у нас ничего не получится: сила трения, удерживающая сани на льду  $(F_1 = \mu_1 Mg = 196\ H)$  слишком велика для того, чтобы человек мог

их сдвинуть  $(F_2 = \mu_2 Mg = 176 \ H)$  — он начнет проскальзывать раньше. Однако если тянуть нить не горизонтально, а под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту, то выполнение условий задачи возможно, т.к. при этом уменьшается



вес саней и увеличивается вес человека. Таким образом:

$$\mu_{l}N_{l} = \mu_{l}(Mg - T\sin\alpha) = T\cos\alpha \mu_{l}N_{l} = \mu_{l}(Mg - T\sin\alpha) = T\cos\alpha , \qquad (1)$$

где  $\left|\vec{T}_{l}\right|=\left|\vec{T}_{2}\right|=T$  - сила натяжения веревки,  $\mu_{l}$  и  $\mu_{2}$ ,  $N_{l}$  и  $N_{2}$ -- соответственно коэффициенты трения и силы реакции, относящиеся к саням и человеку.

Из (1) следует:

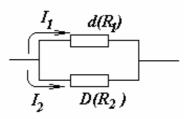
$$tg\alpha = \frac{\frac{\mu_{1}M}{\mu_{2}M} - 1}{\mu_{1} + \mu_{1}\frac{M}{m}} = \frac{\mu_{1}M - \mu_{2}m}{\mu_{1}\mu_{2}(M+m)} = 0.21.$$
 (2)

Таким образом, человек должен тянуть сани под углом большим чем  $\alpha = arctg(0.21) = 12^{\circ}$  к горизонту.

Из (2) видно, что при  $\mu_2 m > \mu_1 M$  угол становится отрицательным  $(tg\alpha < 0)$ , в этом случае тянуть сани можно горизонтально. Заметим, что сдвинуть сани возможно при любом малом  $\mu_2 \neq 0$ , но для этого важно, чтобы руки были сильными настолько, чтобы обеспечить необходимое значение T, которое мы, за отсутствием надобности не

вычисляли. (Верхняя оценка для T = mg, когда сани станут «невесомыми» для льда; в этом случае нить практически вертикальна.)

**9-2.** Для правильного решения задачи необходимо учитывать распределение токов между проволочками — в какой именно из них раньше будет достигнуть предельное значение тока.



$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{d^2}{D^2}.$$
 (1)

Из (1) следует, что при токе через  $R_2$  равном 5A (предельном), ток через  $R_1$  равен 1,25 A. Поэтому в первом варианте сборки предохранителя первой расплавится толстая проволочка (D=0,6 MM). В этот момент ток в цепи будет I=5 A+1,25 A=6,25 A- иными словами, после разрыва контакта в цепи  $R_2$  весь этот ток немедленно «сожжет» и тонкую проволочку, т.е. предохранитель выполнит свою функцию и полностью разомкнет цепь.

Во втором случае (соотношение (1) остается в силе) опять же первой расплавится толстая проволочка ( $R_2$ ) при токе 5A. При этом полный ток в цепи:

$$I = I_2 + 1.25 \cdot 20 = 30 A$$
.

После равнораспределения по тонким проволочкам:

$$I_I' = \frac{30}{20} A = 1,5 A.$$
 (2)

Как видим из (2) при таком токе тонкие проволочки еще уцелеют. Перегорят они при большом токе, а именно:

$$I_1'' = 1.8 A \cdot 20 = 36 A.$$

Таким образом, данные составные предохранители рассчитаны на токи 6,25 A и 36 A и работают по принципу: где «толсто», там и перегорает.

9-3. Прежде всего отметим, что начальный участок графика — почти прямолинейный, а это означает, что потери тепла тут малы. Это дает нам возможность оценить из графика мощность потерь тепла (т.е. количество отводимой по всей поверхности системы теплоты в единицу времени). Для этого сравним наклоны касательных в разных точках графика.

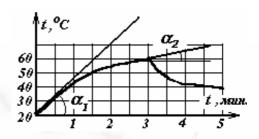
Например, при 60  $^{o}C$  тангенс угла наклона касательной уменьшается почти в 8 раз (т.е. 7/8 от поступающей энергии уходит наружу):

$$tg\alpha_2 \approx \frac{tg\alpha_I}{8}$$
.

Проводя аналогичные измерения при t=50 °C, найдем, что потери

составляют примерно половину поступающей энергии.

Примерный график, построенный малыми участками прямых по вышеприведенным оценкам, представлен на рисунке. Из него находим, что время остывания до 50



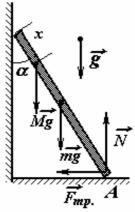
 $^{o}C$  – около 1/3 минуты, до 40  $^{o}C$  – чуть больше минуты.

При дальнейшем нагревании воды график, приведенный в условии задачи мог выйти на горизонтальный участок либо без кипения (мощность потерь сравнялась с малой мощностью нагревателя), либо с кипением (мощность потерь при температуре кипения меньше мощности нагревателя).

**9-4.** Пусть человек находится на расстоянии x от верхнего края лестницы. Тогда условия равновесия лестницы имеет вид

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha + Mgx\sin\alpha - Nl\sin\alpha + F_{mp}l\cos\alpha = 0. (1)$$

$$Mg + mg - N = 0, (2)$$



где (1) — суммарный момент сил, действующих на лестницу относительно точки A, (2) — сумма проекций сил на вертикальную ось. Сила трения покоя не превышает силы трения скольжения, поэтому

$$F_{mp.} < \mu N \tag{3}$$

Выражая из (1), (2) величины N и  $F_{mp}$ , подставляя их в (3), получим необходимое условие равновесия:

$$\mu \ge \frac{M + \frac{m}{2} - M\frac{x}{2}}{M + m} tg\alpha.$$

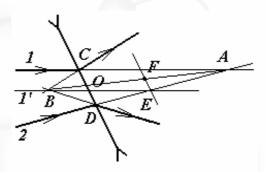
Как следует из этого неравенства сила трения достигает максимального значения, когда человек поднимается на вершину лестницы, т.е. при x=0 . Поэтому окончательный ответ задачи

$$\mu \ge \frac{M + \frac{m}{2}}{M + m} tg\alpha.$$

Отметим, что при M>>m ответ упрощается и приобретает знакомый вид

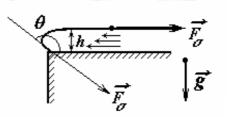
$$\mu \ge tg\alpha$$
.

9-5 Опираясь на принцип обратимости световых лучей, можем изменить направление хода луча на противоположное — при этом его положение не изменится. В нашем случае это удобно сделать с нижним лучом — тогда можем продлить сходящиеся лучи до



пересечения в точках A и B. После этого будем считать, что точка A — мнимый источник, а точка B — его мнимое изображение. Местоположение линзы найдем, соединяя точки излома лучей C и D . Пересечение отрезков CD и AB даст нам положение оптического центра O рассеивающей линзы. C помощью луча I (параллельного лучу I) найдем точку побочного фокуса E и положение главного фокуса линзы F. Таким образом, данная линза является рассеивающей (отрицательной), расположена на отрезке CD с главной оптической осью OF (F — главный фокус линзы).

**10-1.** Вырежем мысленно тонкий плоский слой воды, находящийся около отверстия, толщина которого (в направлении, нормальном плоскости чертежа) – a. По горизонтали на него действуют (слева) силы



поверхностного натяжения, (справа) сила давления воды. Соответственно первое условие равновесия выделенного участка воды запишется как:

$$\sigma \cdot a + \sigma \cdot a \cdot \cos \theta = \rho g \frac{h}{2} ha, \tag{1}$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения воды,  $\theta$  – краевой угол, h – искомая высота слоя воды из (1):

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma(1+\cos\theta)}{\rho g}} = 4.6\,\text{MM} \ . \tag{2}$$

**10-2.** Операция установки «нуля» омметра сводится к тому, что переменный резистор устанавливают в положение полного отклонения стрелки прибора, т.е.

$$R_{oбii} = \frac{1.5 B}{1 MA} = 1.5 \kappa O_M.$$

Теперь ясно, что при измерении резистора I Oм ток в цепи останется практически таким же, т.е. при обычной точности амперметра 1,5%-2,5% измененный мы не заметим, а, стало быть, данное сопротивление не измерим.

Резистор 1 кОм уменьшит ток до:

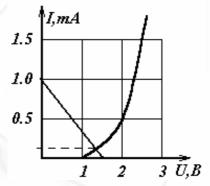
$$I_2 = \frac{1.5 B}{(1.5 + 1) \kappa O M} = 0.6 MA$$
,

т.е. практически до половины шкалы. Таким образом,  $l \kappa O_M$  – хорошо измеряемая величина в данном случае. При сопротивлении  $l MO_M (1000 \kappa O_M)$  ток:

$$I_3 = \frac{1.5 B}{(1000 + 1)\kappa O_M} = 0.0015 MA$$
.

Значение  $I_3$  также «поглощено» погрешностью прибора.

Ток в цепи с диодом определим графическим способом, построив вольтамперную характеристику (BAX) омметра на одном и том же графике с BAX диода. Поскольку ток в цепи одинаков, то точка пересечения графиков даст нам значения тока и напряжения в установившемся режиме.



Таким образом:

$$R = \frac{1.3 B}{0.1 MA} = 1.3 \kappa Om.$$

Значит отградуированный омметр и покажет данное сопротивление в цепи с кремниевым диодом.

использованный графический Подчеркнем, что прием эффективен достаточно при решении задач с различными нелинейными элементами: полупроводниковыми приборами, электрическими дугами и т.д.

**10-3.** Поле точечного заряда помещенного в центре проводящей сферы некоторой толщины, отличается от поля точечного заряда только в областях нахождения проводника: там оно «съедено» (вспомните принцип электростатической защиты). Таким образом, энергия полей в двух случаях отличаются только на энергию указанной области.

В условии задачи даны достаточно тонкие сферы — поэтому можно упростить расчет, считая плотность энергии поля постоянной по всему объему. В нашем случае:

$$\begin{split} \Delta W &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V = \frac{\varepsilon_0}{2} \Bigg[ \frac{Q}{4\pi \, \varepsilon_0 R^2} \Bigg]^2 4\pi \, R^2 \Delta \, R. \\ W_{_{HAH}} &= W_Q + W_{_{2Q}} - \frac{\varepsilon_0}{2} \Bigg[ \frac{Q}{4\pi \, \varepsilon_0 R^2} \Bigg]^2 4\pi \, R^2 \cdot \Delta \, R - \frac{\varepsilon_0}{2} \Bigg[ \frac{2Q}{4\pi \, \varepsilon_0 \, 9 \, R^2} \Bigg]^2 4\pi 9 \, R^2 \Delta \, R. \\ W_{_{KOH}} &= W_Q + W_{_{2Q}} - \frac{\varepsilon_0}{2} \Bigg[ \frac{2Q}{4\pi \, \varepsilon_0 R^2} \Bigg] 4\pi \, R^2 \Delta \, R - \frac{\varepsilon_0}{2} \Bigg[ \frac{Q}{4\pi \, \varepsilon_0 \, 9 \, R^2} \Bigg]^2 4\pi 9 \, R^2 \Delta \, R, \end{split}$$

где  $\Delta W$  — величина «съеденной» энергии поля,  $W_{_{\!H\!A\!H}}$  и  $W_{_{\!K\!O\!H}}$  соответственно начальное и конечное значение энергии системы. Согласно закону сохранения энергии:

$$W_{_{KOH}}=W_{_{HAH}}+A,$$

где A — искомое значение зарядов минимальной работы по перестановке местами.

В нашем случае:

$$A = -\frac{Q^2}{60 \pi \varepsilon_0 R}.$$

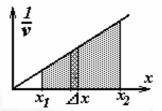
**10-4.** Данный вид движения не является ни равномерным, ни равноускоренным. Прямой ход решения содержит операцию интегрирования -материал, прием недоступный десятикласникам:

$$t = \int_{t_{I}}^{t_{2}} dt = \begin{cases} dt = \frac{dx}{v} = \frac{xdx}{b} \\ v = \frac{b}{x} \end{cases} = \int_{x_{I}}^{x_{2}} \frac{xdx}{b} = \frac{1}{b} \left. \frac{x^{2}}{2} \right|_{x_{I}}^{x_{2}} = \frac{x_{2}^{2} - x_{I}^{2}}{2b}. \tag{1}$$

Для решения задачи без применения интегрирования, необходимо построить график зависимости величины, обратной скорости, от

расстояния, т.е. зависимость  $\frac{1}{y}(x)$ :

$$\frac{1}{v}(x) = \frac{x}{h}$$



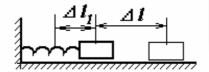
Рассматривая отмеченный на рисунке элементарный столбик, видим, что его площадь численно равна времени, которое требуется, чтобы преодолеть участок пути  $\Delta x_i$ 

$$\Delta t_i = \Delta x_i \cdot \frac{1}{v_i} = \Delta x_i \cdot \left(\frac{x_i}{b}\right);$$

Таким образом, площадь трапеции, затонированной на рисунке, и даст нам искомое время движения тела:

$$t = \sum_{i} \Delta t_{i} = \sum \Delta S_{i} = (x_{2} - x_{1}) \frac{1}{2} \left( \frac{x_{2} + x_{1}}{b} \right) = \frac{x_{2}^{2} - x_{1}^{2}}{2b}.$$

**10-5.** Для решения задачи воспользуемся законом сохранения энергии с учетом отрицательной работы силы трения. Предположим, что, миновав положение



равновесия, груз остановился на расстоянии  $\Delta l_{I}$  от него. Понятно, что  $\Delta l_{I} < \Delta l$ , т.к. работа силы трения уменьшила механическую энергию системы пружина — брусок (пружинного маятника). Работа силы трения при таком перемещении:

$$A_{mp} = -\mu mg(\Delta l + \Delta l_1)$$

Она же равна изменению механической энергии системы:

$$A_{mp} = \Delta E^{\text{mex}} = E_2^{\text{mex}} - E_1^{\text{mex}} \Rightarrow E_1^{\text{mex}} = E_2^{\text{mex}} - A_{mp}.$$

Раскрывая выражение для механической энергии получаем:

$$\frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{k\Delta l_I^2}{2} + \mu mg(\Delta l + \Delta l_I). \tag{1}$$

Преобразовав (1) к виду:

$$\frac{k}{2}(\Delta l^2 - \Delta l_I^2) = \frac{k}{2}(\Delta l - \Delta l_I)(\Delta l + \Delta l_I) = \mu mg(\Delta l_I + \Delta l),$$

найдем

$$\Delta l_I = \Delta l - \frac{2\mu mg}{k} \tag{2}$$

Представляя в (2) численные значения, получаем:  $\Delta l_1 = 7.3 c_M$ .

Рассуждая далее аналогично, заметим, что соотношение (3) сохранится и в последующем движении, только роль  $\Delta l$  будет играть уже  $\Delta l_1$ . Таким образом, после следующего колебания он отклонится от уже на  $\Delta l_2 = 6.3 \, cm$  и т.д.

Однако при малых отклонениях возможна ситуация, когда сила трения покоя сможет удержать груз на некотором расстоянии  $\Delta l^*$ 

$$\Delta l^* \le \frac{\mu mg}{k} = 0.5 c_{\mathcal{M}}. \tag{3}$$

Это обстоятельство приведет к тому, что пройдя из положения  $\Delta l_7 = 1,3\,c$ м в положение  $\Delta l_8 = 0,3\,c$ м груз замрет в этом положении и не сможет вернуться в точку равновесия. Таким образом, будучи отведенным вправо, груз совершит 8 «переходов» через начальное положение и остановится в 0,3 см правее его.

Анализируя (3) видим, что поведенный вариант решения справедлив при слабом трении, т.е. когда:

$$\Delta l >> \frac{2 \mu mg}{k}$$
.

Например, при  $\Delta l = \frac{2 \, \mu mg}{k}$ , груз вернется точно в положение равновесия и остановится там. А что будет в случае, если

$$\frac{\mu mg}{k} < \Delta l < \frac{2 \mu mg}{k}$$
.

Здесь, при решении необходимо учесть, что груз может остановиться и не дойдя до положения равновесия, т.е. закон сохранения энергии примет несколько иной вид:

$$\frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{k\Delta l_I^2}{2} + \mu mg(\Delta l - \Delta l_I)$$

(сравните с (1)).

Откуда следует, что:

$$\Delta l_1 = \frac{2\,\mu mg}{k} - \Delta l \,.$$

В этом случае груз остановится на расстоянии  $\Delta l_1$ , так ни разу добравшись до положения равновесия.

Наконец, если начальное смещение таково, что

$$\Delta l < \frac{\mu mg}{k}$$
,

то груз не сдвинется с места, поскольку силы трения покоя удержит его.

Подобные затухающие механические колебания отражают общие закономерности затухающих колебаний: их энергия переходит в теплоту (или иные формы энергии), предельное смещение после каждого колебания уменьшается по отношению к предыдущему, период этих колебаний больше периода свободных колебаний (из-за тормозящего действия силы трения).

**11-1.** Рассмотрим движение пузырька в вертикально расположенной трубке. Обудет подниматься под действием силы Архимеда:

$$F_A = \rho g V \,, \tag{1}$$

где  $\rho$  - плотность глицерина, V - объем пузырька, g - ускорение свободного падения.

Так как глицерин достаточно вязкая жидкость, то на пузырек будет действовать сила вязкого трения, пропорциональная скорости движение пузырька v -

$$F_c = -\beta v , \qquad (2)$$

где  $\beta$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров пузырька и вязкости глицерина. Таким образом, на основании второго закона Ньютона можно записать

$$ma = F_A - F_c - mg = \rho gV - \beta v - mg , \qquad (3)$$

где m - масса пузырька. Очевидно, что она крайне мала, поэтому можно положить ее равной нулю. Тогда из (3) следует, что подъем пузырькм будет проходить с постоянной скоростью

$$v_0 = \frac{\rho V}{\beta} g = kg \,, \tag{4}$$

где k - постоянный для данного пузырька коэффициент. Причем его значение можно найти используя приведенные в условии данные  $k = v_0 \ / \ g$  .

Рассмотрим движение пузырька в горизонтальной трубке, в системе отсчета, связанной с самой трубкой. Во время разгона эта система отсчета является неинерциальной, на пузырек и на глицерин действует сила инерции. Так как сила инерции пропорциональна массе тела, то ее действие полностью подобно действию силы тяжести, и уравнения, описывающие движение в такой системе отсчета, будут аналогичны уравнениям движения в поле тяжести, если только ускорение свободного падения заменить на величину - (-a), где a - ускорение системы отсчета относительно какой

нибудь инерциальной системы. Поэтому во время разгона на пузырек будет действовать сила Архимеда, направленная в ту же сторону (!), что и ускорение трубки (глицерин будет стремиться сместиться в противоположную сторону под действием силы инерции, заставляя тем самым двигаться пузырек). Скорость пузырька относительно трубки можно найти из уравнения аналогичному уравнению (4):

$$v = ka (5)$$

то есть скорость смещения пузырька пропорциональна ускорению трубки. Учитывая, что

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
 ,  $a = \frac{\Delta v_I}{\Delta t}$ ,

 $(v_1$  - скорость трубки в инерциальной системе отсчета), а в начальный момент разгона скорость пузырька равна нулю, получим

$$\Delta x = k v_I = \frac{v_0}{g} v_I \tag{6}$$

Для перехода от (5) к (6) необходимо просуммировать изменения скоростей и относительного смещения пузырька по всем интервалам времени.

Таким образом, смещение пузырька пропорционально скорости трубки, причем это смещение не зависит от характера изменения скорости (можно сказать, что такой прибор работает как измеритель скорости - спидометр). Расчеты по формуле (6) приводят к следующим результатам: при скорости  $20 \ m/c$  смещение равно  $2,0 \ cm$ , при скорости  $30 \ m/c$  смещение  $3,0 \ cm$ ; если трубку затормозить, то пузырек вернется в исходное положение.

**11-2.** Пусть масса всей смеси m,а диссоциировавших молекул — (km), где k — искомая часть диссоциировавших молекул. Молярная теплоемкость одноатомного газа:  $C_{\mu}^{l} = \frac{3}{2}R$ ; двухатомного:  $C_{\mu}^{2} = \frac{5}{2}R$  (соответственно, удельные теплоемкости  $C^{l} = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}$ ;  $C^{2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{R}{2\mu}$ , где  $\mu$  — молярная масса одноатомного газа. Для удельной теплоемкости смеси имеем:

$$C = \frac{1.5kR}{\mu} + 1.25 \frac{(1-k)R}{\mu}$$

По условию

$$C = C^2 \cdot 1,08.$$

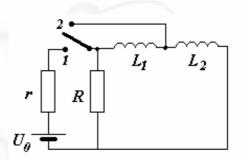
С учетом (1) и выражений для  $C^1$  и  $C^2$  найдем: k=0.4.

Таким образом, диссоциация увеличивает удельную теплоемкость газа, а, поскольку его масса при этом не меняется, запас внутренней энергии также возрастает (за счет внешнего источника).

## 11-3. До переключения силу тока в катушках найдем из условия:

$$I_0 = \frac{U_0}{r}.$$

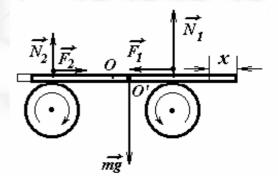
(В этом случае ток через R не идет, т.к. катушки шунтируют его). После переключения ток в катушке 1 сохранит свое значение, двигаясь по замкнутому контуру, а в катушке 2 спадет до нуля. Таким образом, в тепло перейдет  $U_{\theta}$  энергия этой катушки:



$$W = \frac{L_2 I_0^2}{2} = L_2 \frac{U_0^2}{2r^2}.$$

Теплота выделится на резисторе R, т.к. во втором положении ключа участок цепи с резистором r и источником тока разомкнут.

11-4. Причина возникновения колебаний становится явной рисунка. Сдвинем однородной стержень на расстояние вправо. Поскольку например, центр тяжести (точка на рисунке) стержня при ЭТОМ приблизится к правому цилиндру, то сила реакции опоры  $\vec{N}_I$  станет по величине больше  $\vec{N}_2$ 



$$\begin{cases} N_1 = mg \frac{l+2x}{2l} \\ N_2 = mg \frac{l-2x}{2l} \end{cases} \quad N_1 > N_2 \left(0 \le x \le \frac{l}{2}\right). \tag{1}$$

Уравнения (1) достаточно легко можно получить из условия равновесия стержня по вертикали (движение отсутствует) и отсутствия его вращения относительно центра масс. Так как цилиндры вращаются навстречу друг другу, то силы трения скольжения  $\vec{F}_l$  и  $\vec{F}_2$  также направлены навстречу друг другу. Их геометрическая сумма направлена к точке начального равновесия O и равна:

$$\Delta F = F_1 - F_2 = kN_1 - kN_2 = k(N_1 - N_2) = kmg\frac{2x}{l}$$
 (2)

Таким образом, уравнение движения стержня принимает хорошо известный вид:

$$ma = -kmg\frac{2x}{l},\tag{3}$$

Уравнение (3) описывает гармонические колебания с периодом

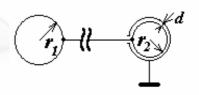
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2kg}} = \pi \sqrt{\frac{2l}{kg}} = 1.5c .$$

Интересно отметить, что приведенный пример гармонических колебаний не нуждается в традиционном критерии малости: в однородном гравитационном поле мы должны побеспокоится только о том, чтобы центр тяжести стержня не вышел за цилиндр:

$$x \le \frac{l}{2}.\tag{4}$$

При этом величина амплитуды ограничивается только нашими «техническими» возможностями при демонстрации, а не принципиальными теоретическими положениями, как это было в случае математического и пружинного маятников.

11-5. Перераспределение зарядов (т.е. электрический ток) в любой системе прекратится после выравнивания потенциалов всех ее частей. Строгий расчет приведенной системы (с учетом электроемкости провода, взаимного



влияния и т. д.) в общем случае достаточно сложен, однако особенности данной схемы дают нам возможность считать, что взаимным влиянием шаров можно пренебречь, а на поверхности концентрической проводящей оболочки будет индуцирован заряд обратной по знаку и равный по модулю заряду  $Q_2$  шара  $r_2$  (как в плоском конденсаторе). Пусть заряд шара  $r_1$  будет  $Q_1$ . Тогда по закону сохранения заряда:

$$Q = Q_1 + Q_2. (1)$$

Потенциал  $\varphi_l$  первого шара:

$$\varphi_{I} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{Q_{I}}{r_{I}},$$

второго (по принципу суперпозиции потенциалов):

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{Q_2}{r_2} - \frac{Q_2}{r_2 + d} \right) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{r_2(r_2 + d)} \approx \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{r_2^2}.$$

Из условия  $\varphi_1 = \varphi_2$  получаем второе уравнение:

$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2} \cdot \frac{d}{r_2}.$$
 (2)

Решая систему уравнений (1)-(2) имеем:

$$\begin{cases}
Q_{1} = \frac{r_{1}d}{r_{1}d + r_{2}^{2}}Q \\
Q_{2} = \frac{r_{2}^{2}}{r_{1}d + r_{2}^{2}}Q
\end{cases}$$
(3)

Заметим, что при  $d \to 0$  система (3) дает:

$$\begin{cases} Q_l = 0 \\ Q_2 = Q \end{cases} \tag{4}$$

что может быть прокомментировано следующим образом: электроемкость сферического конденсатора значительно возрастает, что позволяет ему сконденсировать на себе практически весь электрический заряд.