

Пример билета.

Билет 1.

1. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения, Даламбера, Коши.

2. а) Исследовать ряд на абсолютную сходимость при $p = 1$.

Найти все значения $p > 0$, при которых ряд

б) сходится абсолютно;

в) сходится условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^p$$

3. Пусть $f'(x) \in C[a, b]$, $f_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$. Доказать, что

$$f_n(x) \rightrightarrows^{[\alpha, \beta]} f'(x), \quad a < \alpha < \beta < b.$$

Список теорем.

1. Числовые ряды. Критерий Коши, необходимое условие сходимости. Простейшие свойства: линейность, группировка.

2. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения, Даламбера, Коши.

3. Интегральный признак сходимости. Сходимость рядов $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n \ln^{\gamma} n \dots}$.

4. Знакопеременные ряды. Условная сходимость. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле.

5. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов.

6. Теорема об абсолютной сходимости. Перестановки абсолютно сходящихся рядов. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

7. Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.

8* (только формулировки). Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Линейность, признак сравнения. Признаки Абеля и Дирихле.

9. Теоремы о предельном переходе и непрерывности функциональных последовательностей и рядов.

10. Теоремы об интегрировании функциональных последовательностей и рядов.

11. Теоремы о дифференцировании функциональных последовательностей и рядов.

12. Алгебраическая теорема Вейерштрасса.

13. Степенные ряды. Теорема Абеля о сходимости степенных рядов. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара.

14. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость степенных рядов внутри интервала сходимости. Вторая теорема Абеля и суммирование рядов методом Абеля.

15. Ряды Тейлора основных элементарных функций. Их сходимость. Единственность степенных рядов.

16. Задача о наилучшем приближении. Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье.

17. Ряд Фурье по тригонометрической системе. Лемма Римана (необходимое условие сходимости ряда Фурье).

18. Принцип локализации Римана и поточечная сходимость рядов Фурье (признак Дини).

19. Равномерная сходимость рядов Фурье и эффект Гиббса.

20. Метрические пространства. Открытые и замкнутые шары и множества. Ограниченность и замкнутость компактного множества.

21. Предел последовательности. Теорема о покоординатной сходимости и эквивалентности метрик в R^m .

22. Принцип Кантора о вложенных стягивающихся прямоугольниках и теорема Больцано-Вейерштрасса в R^m .

23. Лемма Гейне-Бореля о компактности в R^m .

Примеры задач

1. Доказать, что если верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $q > 1$ ряд расходится.

2. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

3. Сходится ли последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}?$$

4. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, и $a_n \leq c_n \leq b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ тоже сходится.

Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, если исходные ряды расходятся?

5. Пусть функция $f(x)$, $x \in [1; +\infty)$ убывает и положительна, а $\int_1^{\infty} f(t) dt$ расходится. Верно ли, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(k)}{\int_1^n f(t) dt} = 1?$$

6. Для функции $f(x)$

- а) найти область определения;
- б) исследовать на непрерывность;
- в) исследовать на дифференцируемость.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n.$$

7. Для функциональной последовательности

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2} + x, \quad x \in [0, 1],$$

- а) доказать поточечную сходимость на $[0, 1]$;
- б) исследовать ее на равномерную сходимость на $[0, 1]$;
- в) выяснить, справедливо или нет равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right),$$

если $x_0 = 0$, $x_0 = 1/2$.

8. Разложить функцию $y = 1$ в ряд Фурье по синусам на $(0, \pi)$. Пользуясь этим разложением, найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$