

Программа экзамена по курсу «Алгебра и геометрия»
Весенний семестр, 2025 год.

Формат экзамена

Каждый билет состоит из одного теоретического вопроса и двух задач. Ответ на теоретический вопрос должен содержать определения и доказательства фактов. Среди двух задач, одна является более простой (вопрос 2 в билете), а одна является более сложной (вопрос 3).

Процедура ответа

1. На экзамен надо прийти со своей чистой бумагой.
2. Обязательная часть экзамена состоит из теоретического вопроса, решения простой задачи и ответов на дополнительные вопросы. Эта часть экзамена оценивается в 70 баллов.
3. Дополнительные вопросы могут включать определения, формулировки теорем, а также простые задачи, решение которых не предполагает никаких вычислений или рассуждений в несколько ходов. *Пример задачи: существует ли многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами и корнем $x = i$ кратности 2 и простым корнем $x = -i$?*
4. Если за обязательную часть экзамена набрано менее 50 баллов, экзамен заканчивается.
5. Для решения второй задачи (третий вопрос в билете) можно взять дополнительное время на подготовку.
6. Если за практические занятия набрано по крайней мере 70 баллов, то простая задача автоматически засчитывается.
7. Баллы за активность на лекциях по умолчанию равны 1/10 от баллов за практические занятия, но могут быть пересмотрены в сторону увеличения.
8. Если за практические занятия набрано менее 40 баллов, то сдается только обязательная часть экзамена.
9. Через час с момента получения билета надо быть готовы ответить хотя бы один вопрос из билета.

Список теоретических вопросов, выносящихся на экзамен

1. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел и кольцом целых чисел. Критерий Эйзенштейна.
2. Кольцо многочленов. Простейшие свойства многочленов. Деление многочленов с остатком.
3. Делимость многочленов. Свойства отношения делимости. Отношение ассоциированности.

4. Наибольший общий делитель многочленов. Теорема существования. Ассоциированность НОД.
5. Выражение НОД через исходные многочлены.
6. Взаимно простые многочлены и их свойства.
7. Алгебраически замкнутые поля. Разложение многочленов над алгебраически замкнутым полем.
8. Неприводимые многочлены и их свойства. Теорема о разложении в произведение неприводимых многочленов. Каноническое разложение.
9. Многочлены над полем рациональных чисел и кольцом целых чисел. Примитивные многочлены и их свойства.
10. Значение многочлена. Корни многочлена. Теорема Безу. Равенство многочленов, совпадающих как функции.
11. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
12. Алгоритм Кронекера.
13. Производная многочлена и ее свойства. Кратные множители многочлена. Алгоритм выделения кратных множителей.
14. Разложение многочленов на неприводимые множители над полем действительных чисел.
15. Лексикографический порядок на множестве N^k и его свойства.
16. Симметрические многочлены. Представление симметрического многочлена через основные симметрические многочлены
17. Перестановки. Инверсии и четность перестановки. Транспозиции в перестановках. Подстановки. Четность подстановки.
18. Определение определителя квадратной матрицы. Свойства определителя квадратной матрицы.
19. Минорный ранг матрицы.
20. Понятие минора матрицы. Теорема Лапласа.
21. Полуразпавшиеся и разпавшиеся матрицы. Определитель полуразпавшейся и квазидиагональной матриц.
22. Определитель произведения квадратных матриц.
23. Крамеровы системы линейных уравнений. Формулы Крамера.
24. Критерий обратимости матрицы в терминах её определителя. Формула для обратной матрицы.
25. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования. Характеристический многочлен линейного преобразования. Условия существования собственных векторов линейного преобразования.
26. Инвариантные подпространства линейного преобразования. Матрица линейного преобразования, имеющего собственные инвариантные подпространства.
27. Сопряженное отображение. Свойства сопряженного отображения. Единственность сопряженного отображения.
28. Дважды сопряженное отображение. Существование сопряженного отображения.

29. Взаимосвязь между инвариантными подпространствами линейного преобразования и сопряженного к нему. Понятие нормального линейного преобразования и свойства его собственных векторов.
30. Теорема о структуре нормального линейного преобразования (случай разложимости характеристического многочлена на линейные множители).
31. Изометрические операторы и их свойства.
32. Самосопряженные линейные преобразования и их свойства. Строение матрицы самосопряженного линейного преобразования.
33. Сингулярное представление линейного отображения.
34. Билинейные и квадратичные функции. Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Эквивалентные формы и матрицы.
35. Квадратичные функции и формы. Связь с симметричными билинейными функциями и формами. Эквивалентность квадратичных функций и форм.
36. Приведение вещественной квадратичной формы к главным осям.
37. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Приведение формы к каноническому виду. Единственность нормального вида над полем комплексных чисел.
38. Закон инерции вещественных квадратичных форм.
39. Знакоопределённые вещественные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
40. Эллипс.
41. Директориальное свойство эллипса.
42. Гипербола.
43. Директориальное свойство гиперболы.
44. Парабола
45. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.
46. Цилиндрические поверхности.
47. Конические поверхности.
48. Параболоиды.
49. Гиперболоиды.
50. Приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду.
51. Эллипсоид
52. Корневые подпространства.
53. Существование жорданова базиса для линейного оператора. Жорданова форма матрицы.