Коллоквиум состоит из 4 частей

1. Формулировка определения и теоремы.
2. Доказательство теоремы.
3. Задача.
4. Ответы на дополнительные вопросы.

Примеры билетов.

Билет № 1

1. Сформулируйте определение действительного числа. Приведите пример действительного числа.

2. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности.

3. Задача. Доказать, что последовательность, стремящаяся к $+\infty$, обязательно достигает своей точной нижней грани.

Билет № 2

1. Сформулируйте аксиому непрерывности. Приведите пример множества, не удовлетворяющего этой аксиоме.

2. Лемма о двух милиционерах.

3. Задача. Доказать, что сумма сходящейся последовательности и ограниченной, есть ограниченная последовательность.

Билет № 3

1. Сформулируйте определение ограниченного снизу множества. Приведите пример не ограниченного снизу множества.

2. Теорема о переходе к пределу в неравенстве и лемма об отделимости от нуля.

3. Задача. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – числовые последовательности, определенные следующим образом: $x_1 = a$, $y_1 = b$, где a и b – произвольные вещественные числа, и при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + 2x_n}{3}.$$

Докажите, что существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и найдите их.

Часть 1. Нужно без подготовки сформулировать определение и теорему (пункты 1 и 2 в билете). По 30-60 секунд на формулировку определения и теоремы. В задаче тоже могут быть незнакомые слова, смысл которых надо понимать.

Если справились, забираете билет и идете 5 - 120 минут разбираетесь со следующими пунктами.

Часть 2. Доказать теорему, которая была на лекции. Или хотя бы часть. Или картинку нарисовать и подписать - очевидно. Пользоваться ничем и никем нельзя. Если строгое доказательство не помните, можно рассказать идею. За списывание будет 0 и клеймо на оставшиеся 2,7 семестра матанализа, а возможно и последующих курсов. Если с билетом не повезло и совсем никак можно попробовать рассказать доказательство теоремы, которую выберет преподаватель(за меньший балл).

Часть 3. Решить задачу. Исчерпывающего списка задач нет. Есть примеры для подготовки. Некоторые из них окажутся в билетах. Консультации, гугл и антидемидович в помощь. Для решения достаточно понимать все определения, знать доказательства теорем из части 2 и уметь мыслить.

Часть 4. После ответа на билет может возникнуть беседа по содержанию курса. Может потребуется сформулировать какую-то теорему, а возможно решить еще одну задачу. Вопросы могут никак не относиться к билету. Обычно эта часть используется преподавателем, чтобы поставить дополнительные баллы или убедить в необходимости пересдачи.

Вопросы вроде какая тема самая непонятная и что хорошо/плохо на лекциях/практиках на баллы не влияют, но могут быть важны преподавателю в качестве обратной связи.

Надолго задумываться над вопросами не стоит - за вами есть желающие ответить. При нахождении ошибки или дыры в рассуждениях, лучше отсесть, додумать неочевидные переходы или подробнее расписать решение.

Прохождение всех четырех частей приравнивается к школьной отметке отлично, а если совсем без запинок, то 15 баллов БРС.

После хорошо выполненной части 1 можно радоваться 3 балла есть.

Части 2 и 3 оцениваются в 3-9 баллов каждая, в зависимости от сложности.

Часть 4 может вносить положительное или отрицательное число в сумму и не ограничена по модулю.

Коллоквиум считается сданным, если набрано не менее 6 баллов.

На следующих страницах исчерпывающий список определений (часть 1) и теорем (часть 2) и примеры некоторых задач (часть 3).

Определения:

1. Действительное число.
2. Аксиома непрерывности действительных чисел.
3. Ограниченность множества. Ограниченность сверху, снизу.
4. Точная верхняя (нижняя) грань.
5. Последовательность вложенных отрезков.
6. Последовательность стягивающихся отрезков.
7. Последовательность.
8. Предел последовательности.
9. Сходящаяся последовательность.
10. Расходящаяся последовательность.
11. Ограниченная последовательность.
12. Бесконечно большая последовательность.
13. Бесконечно малая последовательность.
14. Монотонная последовательность (возрастающая, убывающая).
15. Число e.
16. Подпоследовательность.
17. Частичный предел.
18. Предельная точка.
19. Верхний (нижний) предел последовательности.
20. Фундаментальная последовательность.

Теоремы:

1. Теоремы о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани.
2. Теоремы о последовательности вложенных и стягивающихся отрезков (Принцип Кантора).
3. Принцип Архимеда и его следствие о плотности рациональных чисел.
4. Теоремы о единственности предела последовательности и ограниченности сходящейся последовательности.
5. Лемма о двух милиционерах.
6. Теоремы о пределе суммы, разности и произведении сходящихся последовательностей.
7. Теорема о пределе частного сходящихся последовательностей.
8. Теорема о переходе к пределу в неравенстве и лемма об отделимости от нуля.
9. Теорема о пределе монотонной последовательности.
10. Существование числа е.

11*. Приближение и иррациональность числа е.

12. Теоремы о частичных пределах (о сходимости всех подпоследовательностей и разбиении последовательности на конечное число подпоследовательностей).
13. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
14. Критерий Коши.

Примеры задач

2. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – числовые последовательности, определенные следующим образом: $x_1 = a,\ y_1 = b$, где a и b – произвольные вещественные числа, и при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + 2x_n}{3}.$$

Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и найдите его.

4. Докажите, что для сходимости монотонной последовательности необходимо и достаточно, чтобы сходилась хотя бы одна подпоследовательность.

6. Задача. Доказать, что последовательность, стремящаяся к $+\infty$, обязательно достигает своей точной нижней грани.

14. Доказать, что сумма сходящейся последовательности и ограниченной, есть ограниченная последовательность.

18. Докажите, что у любой неограниченной последовательности есть бесконечно большая подпоследовательность.

19. Последовательность называется последовательностью с ограниченным изменением, если существует постоянная C такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < C.$$

Докажите, что последовательность с ограниченным изменением сходится.

23. Пусть $\{x_n\}$ ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Докажите, что множество частичных пределов совпадает с отрезком $[\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n]$.

26. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Могут ли последовательности $\{x_n y_n\}$ и $\{y_n/x_n\}$ быть сходящимися?

32. Известно, что $x_n \geq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 2.$$

38. Постройте пример последовательности, для которой все члены данной числовой последовательности $1,\ 2, \cdots, n, \cdots$ являются частичными пределами.

42*.(задача очень сложная, в этом году ее не будет) Пусть последовательность удовлетворяет условиям $0 \leq x_{m+n} \leq x_n + x_m$. Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$.