Как будет проходить коллоквиум?

Сначала вы должны вытянуть листочек с производной и двумя интегралами (замена и по частям) и написать ответы за 3 минуты. Это надо делать перед преподавателем, ничем пользоваться нельзя. Если ответ правильный, вы вытягиваете основной билет, формулируете теорему и понятия, которые есть в билете. Если все удалось, вы идете готовиться и можете как на экзамене один раз 5 минут воспользоваться своими конспектами. В билете будет один теоретический вопрос и одна задача. Если вы не выучили таблицу первообразных, не умеете считать производные или не знаете, что такое интегрирование по частям, стоит еще подготовиться и прийти сдавать в следующий раз. Та же ситуация, если вы не знаете формулировки основных теорем и свойств интегралов.

Определения.

1. Неопределенный интеграл.

2. Первообразная. Таблица первообразных.

3. Элементарные функции. Классы функций, неопределенные интегралы от которых выражаются через элементарные.

4. Интегральная сумма. Определенный интеграл по Риману.

5. Сумма Дарбу. Интеграл Дарбу.

6. Классы интегрируемых по Риману функций.

7. Интеграл с переменным верхним пределом.

8. Спрямляемая кривая. Длина кривой.

9. Мера Жордана, измеримое множество.

10. Формулы вычисления длины кривой (параметрической, явной и в полярной системе координат), площади (криволинейной трапеции и в полярной системе координат), объема через сечения.

Теоремы.

1. Неопределенный интеграл. Теорема о классе первообразных. Линейность неопределенных интегралов. Интегрирование по частям и замена переменных в неопределенном интеграле.

2. Классы функций, первообразные которых выражаются через элементарные: рациональные, тригонометрические, дифференциальный бином.

3. Определенный интеграл по Риману. Необходимое условие интегрируемости функции.

4. Критерий интегрируемости функции по Риману через суммы Дарбу для всех разбиений.

5. Критерий 2 интегрируемости функции по Риману через суммы Дарбу для одного разбиения.

6. Классы интегрируемых по Риману функций: монотонные, непрерывные.

7. Аддитивность интеграла по множеству. Линейность определенного интеграла.

8. Интегрирование неравенств. Невырожденность определенных интегралов.

9. Интегрируемость сложной функции. Интегрируемость квадрата, произведения, модуля.

10. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

11. Замена переменных в определенном интеграле, интегрирование по частям. Формула Тейлора в интегральной форме.

12. Первая и вторая теоремы о среднем.

13. Длина кривой. Вычисление длины гладкой кривой через определенный интеграл. Длина кривой в полярных координатах.

14. Определение измеримого множества. Вычисление площади плоской фигуры через определенный интеграл. Формула площади в полярных координатах.

15. Приближенные вычисления определенных интегралов. Погрешность формул левых и средних прямоугольников, формулы трапеций.

2. Простые производные и интегралы

Дается 3 минуты. Нужно написать ответ (область определения необязательно). Примеры производных

$$(\ln(\cos(1-x)+3))', \quad \left(\operatorname{tg}(2^{3x}+x^2)\right)', \quad \left(\arcsin(x+\sqrt{1-x^2})\right)'.$$

Ничего упрощать не нужно. Ответом считается выражение, не содержащее производных.

Примеры интегралов

$$\int 2x(1+x^2)^{216}dx, \quad \int \frac{3x^2}{(1-2x^3)^3}dx, \quad \int \sqrt{3x+2}\ dx, \quad \int \frac{\ln(4x+3)}{4x+3}\ dx,$$

$$\int \cos(5x-1)dx, \quad \int \operatorname{tg}(6x)dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^2(7x)}, \quad \int \frac{1+\operatorname{ctg}(8x)}{\sin^2(8x)}\ dx$$

$$\int \frac{1+\operatorname{arctg} 9x}{1+81x^2}dx, \quad \int \frac{dx}{10x^2-1}, \quad \int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-11x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{12x^2-1}},$$

$$\int xe^{-x}dx, \quad \int x\sin x\ dx, \quad \int \ln x\ dx, \quad \int x\ln x\ dx, \quad \int x\operatorname{arctg} x dx,$$

$$\int x\ d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right), \quad \int \ln x\ d\left(x^2\right), \quad \int x\ d\left(\sin x\right), \quad \int x^2\ d\left(\frac{1}{2x(1+x^2)}\right).$$

3. Примеры теоретических задач.

1. Докажите, что среди первообразных четной функции найдется нечетная, а всякая первообразная нечетной функции обязательно будет четной.

2. Доказать, что если f непрерывна и периодическая (с периодом T), то ее первообразная есть сумма линейной функции (возможно константы) и периодической с тем же периодом.

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, за исключением конечного числа точек $x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n$. Докажите, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

4. Вычислить по определению (рассматривая предел интегральных сумм)

$$\int_a^b x^n\ dx, \quad 0<a<b, \quad n\in\mathbb{N}.$$

5. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$, и для каждой непрерывной на $[-1,1]$ четной функции $g(x)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ g(x)\ dx = 0,$$

то функция $f(x)$ нечетна.

6. Докажите, что

$$\left|\int_x^{x+1}\sin(t^2)\ dt\right| \le \frac{1}{x}, \quad x>0.$$