Алгебра - 8 класс

Арифметический квадратный корень

«корень из а» - число, квадрат которого равен а

пр: $2^2=(-2)^2=4 \;\Rightarrow\; \pm 2 -$ это корни из 4

«арифметический корень из а» - неотрицательное число, квадрат которого равен а

$\boldsymbol{(\sqrt{a})^2=a}$ $\quad a\geq 0, \sqrt{a}\geq 0$

пр: $\sqrt{0}=0;\ \sqrt{1}=1;\ \sqrt{4}=2;\ \sqrt{9}=3;\ \sqrt{0{,}16}=0{,}4$

пр: $\sqrt{6}\approx\sqrt{6{,}25}=2{,}5;\ \sqrt{11}\approx\sqrt{10{,}89}=3{,}3$

пр: $(\sqrt{2})^2=2;\ \sqrt{2}=1{,}41\ldots$ *(иррациональное число)*

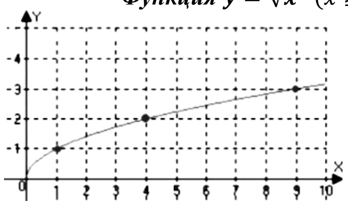
свойства: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}\quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad \sqrt{a^{2n}}=|a^n|$

пр: $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

от иррациональности (корней) в знаменателе принято «избавляться»

пр: $\left.\frac{3}{\sqrt{2}}\right|_{\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ *пр:* $\left.\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right|_{\cdot(1-\sqrt{x})}=\frac{(1-\sqrt{x})^2}{1^2-(\sqrt{x})^2}=\frac{1-2\sqrt{x}+x}{1-x}$

Функция $\boldsymbol{y=\sqrt{x}}$ $\;(x\geq 0)$



Квадратные уравнения

формула корней квадратного уравнения:

$ax^2+bx+c=0$

$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$

$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$

дискриминант:

$D>0\Rightarrow$ *два корня*

$D=0\Rightarrow$ *один корень*

$D<0\Rightarrow$ *нет корней (действительных)*

пр: $2x^2-x-3=0$

$a=2\quad b=-1\quad c=-3$

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25$

$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=-1;\frac{3}{2}$

теорема Виета: $\quad x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

разложение на множители:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

метод выделения полного квадрата:

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$

$a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

биквадратные уравнения: $ax^4+bx^2+c=0$

решают заменой переменной $t=x^2$

Рациональные дроби

рациональная дробь ~ содержит переменную в знаменателе

основное свойство дроби - если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить или разделить на одно и то же выражение (не равное нулю), то получится равная дробь

$\frac{A}{B}=\left.\frac{A}{B}\right|_{\cdot C}=\frac{AC}{BC}\qquad \frac{A}{B}=\left.\frac{A}{B}\right|_{:C}=\frac{A:C}{B:C}\qquad (C\neq 0)$

действия с рациональными дробями

сложение и вычитание:

$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{D}=\left.\frac{A}{C}\right|_{\cdot D}\pm\left.\frac{B}{D}\right|_{\cdot C}=\frac{AD\pm CB}{CD}$

или $\quad\frac{A}{CE}\pm\frac{B}{DE}=\left.\frac{A}{CE}\right|_{\cdot D}\pm\left.\frac{B}{DE}\right|_{\cdot C}=\frac{AD\pm CB}{CDE}$

умножение и деление:

$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$

полезно помнить, что:

$-\frac{A}{B}=\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}$ $\quad$ $-\frac{A+B}{C}=-\frac{A}{C}-\frac{B}{C}$ $\quad$ $\frac{A}{B}\cdot C=\frac{AC}{B}$

$\frac{1}{A-B}=-\frac{1}{B-A}$ $\quad$ $-\frac{A-B}{C}=-\frac{A}{C}+\frac{B}{C}$ $\quad$ $\frac{A}{B}:C=\frac{A}{BC}$

пр: $\frac{6}{(x-1)(x+2)}+\frac{2}{(\mathbf{1-x})}=\frac{6}{(x-1)(x+2)}-\left.\frac{2}{(\mathbf{x-1})}\right|_{\cdot(\mathbf{x+2})}=$

$=\frac{6}{(x-1)(x+2)}-\frac{2(\mathbf{x+2})}{(x-1)(\mathbf{x+2})}=\frac{6-2(x+2)}{(\mathbf{x-1})(\mathbf{x+2})}=$

$=\frac{\mathbf{-2x+2}}{(x-1)(x+2)}=\frac{\mathbf{-2(x-1)}}{(\mathbf{x-1})(x+2)}=-\frac{2}{(x+2)}$ $\quad$ (при $x-1\neq 0$)

! *при x=1 исходное выражение не определено, а полученное выражение определено и равно* $-2/3$

Дробно-рациональные уравнения

приводятся к виду:

$\boldsymbol{\frac{A(x)}{B(x)}=0}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\boldsymbol{A(x)=0}\\ \boldsymbol{B(x)\neq 0}\end{cases}$

пр: $\frac{x-3}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{x+5}{x(x-5)}$

$\left.\frac{x-3}{x-5}\right|_{\cdot\mathbf{x}}+\left.\frac{1}{x}\right|_{\cdot(\mathbf{x-5})}-\frac{x+5}{x(x-5)}=0$

$\frac{x(x-3)+(x-5)-(x+5)}{x(x-5)}=0$

$\frac{x^2-3x-10}{x(x-5)}=0$

$\begin{cases}x^2-3x-10=0\\ x(x-5)\neq 0\end{cases}\;\Rightarrow\;\begin{cases}x=-2;\ \mathbf{5}\\ x\neq 0;\ \mathbf{5}\end{cases}\;\Rightarrow\; x=-2$

Множества	***Неравенства***

Множества

множество - «набор элементов»

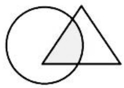
$a \in A$ - *элемент a принадлежит множеству A*

$A \subset B$ - *множество A принадлежит множеству B*

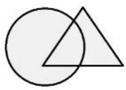
пересечение множеств $A \cap B$ - множество элементов, принадлежащих обоим множествам (A и B)

объединение множеств $A \cup B$ - множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (A или B)

пр: K - множество точек круга
T - множество точек треугольника



пересечение К ∩ Т



объединение К ∪ Т

пр: множество целых чисел от 0 до 3 (конечное)

$Z_0^3 = \{0; 1; 2; 3\}$

пр: множество четных чисел (бесконечное)

$E = \{2n; n \in Z\}$

основные числовые множества:

N - *натуральные числа* $\{1; 2; 3 \dots\}$

Z - *целые числа* $\{0;\ \pm1;\ \pm2, \pm3 \dots\}$

Q - *рациональные числа* $\left\{\frac{p}{q};\ p \in Z, q \in N\right\}$

(могут быть записаны обыкновенной дробью, конечной или бесконечной периодической десятичной дробью) *пр:* $\frac{1}{3} = 0,(3)$

I - *иррациональные числа (не рациональные, бесконечные непериодические десятичные дроби)* *пр:* $\sqrt{2} \approx 1,4142 \dots$ $\pi \approx 3,14159 \dots$

R - *действительные (вещественные) числа (все точки числовой оси, от* $-\infty$ *до* $+\infty$*)*

C - *комплексные (мнимые) числа* ($i = \sqrt{-1}$)

$N \subset Z \subset Q \subset R\ (Q \cup I) \subset C$

числовой промежуток - *множество точек числовой оси:*

$x = a$	$\{a\}$ *точка*	
$a \le x \le b$	$[a; b]$ *отрезок*	
$a < x < b$	$(a; b)$ *интервал*	
$a \le x < b$ $a < x \le b$	$[a; b)$ $(a; b]$ *полуинтервал*	
$x \ge a$ $x \le a$	$[a;\ +\infty)$ $(-\infty; a]$ *луч*	
$x > a$ $x < a$	$(a;\ +\infty)$ $(-\infty; a)$ *открытый луч*	
$x \in R$	$(-\infty; +\infty)$ *вся числовая ось*	

Неравенства

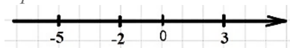
неравенство - отношение величин, записанное с одним из знаков:

$<$ или $>$ «строгое» неравенство

$\le$ или $\ge$ «не строгое» неравенство

$\ne$ (не равно)

меньше то число, которое на числовой оси находится левее *пр:* $-5 < -2 < 0 < 3$



- *если* $a < b$ *и* $b < c$, *то* $a < c$
- *если* $a < b$ *и* $c < d$, *то* $a + c < b + d$
  $\cancel{a - c < b - d}$
- *если* $a < b$ *и* $c < d$, *то* $a \cdot c < b \cdot d$
  $(a, b, c, d > 0)$ $\cancel{a : c < b : d}$
- *если* $a < b$ $(a, b > 0)$, *то при* $n > 0$ $a^n < b^n$
  при $n < 0$ $a^n > b^n$

пр: $a < 3 \Rightarrow a^2 < 9,\ \frac{1}{a} > \frac{1}{3}$

- *если* $a < b$, *то* $a + c < b + c$
  $a - c < b - c$

к левой и правой части неравенства можно прибавить (или отнять) одно число; т.е. можно перенести слагаемое из одной части неравенства в другую, изменив знак действия

пр: $x + 1 > 0 \quad | -1$
$x > -1$

- *если* $a < b$, *то* *при* $c > 0$: $a \cdot c < b \cdot c$, $a : c < b : c$; *при* $c < 0$: $a \cdot c > b \cdot c$, $a : c > b : c$

обе части неравенства можно умножить (или разделить) на положительное число, но при умножении (или делении) на отрицательное число, нужно изменить знак неравенства

пр: $2x > 6 \quad | : 2$
$x > 3$

пр: $-2x > 6 \quad | : (-2)$
$x < -3$

решение неравенства - множество значений переменной, при которых неравенство верно

решение системы неравенств - множество значений переменной, при которых все неравенства системы верны (т.е. пересечение множеств решений этих неравенств)

решение неравенств (ответ) принято записывать в виде числовых промежутков

пр: $\begin{cases} 2 - 3x \ge 1 \\ x + 5 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{3} \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-2; \frac{1}{3}\right]$

неравенства вида $|x| \lessgtr a$

пр: $|x| \le 2$

$x \in [-2; 2]$

пр: $|x| > 2$

$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Степень с целым показателем

$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $(a \neq 0)$ *пр:* $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}}$ *пр:* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{9}{8}$

$\boldsymbol{a^0 = 1}$ $(a \neq 0)$ *пр:* $2^0 = 1$; *пр:* 0^0 — не определено

стандартный вид числа:

$a \cdot 10^n,\ 1 \leq |a| < 10$ *(мантисса)*, $n \in Z$ *(порядок)*

пр: $0{,}00011 = 1{,}1 \cdot 10^{-4} = 1{,}1e-4$

$2020 = 2{,}02 \cdot 10^3 = 2{,}02e+3$

$1 = 1 \cdot 10^0$ $\quad 0 = ?$

Погрешность приближения

абсолютная погрешность - модуль разности истинного и приближенного значений

относительная погрешность - отношение абсолютной погрешности к модулю истинного или приближенного значения

пр: $\pi \approx 3{,}14$

абс. погр. $\Delta\pi = |\pi - 3{,}14| = 0{,}00159\ldots$

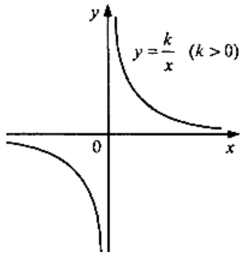
отн. погр. $\frac{\Delta\pi}{|3{,}14|} = 0{,}000507\ldots$

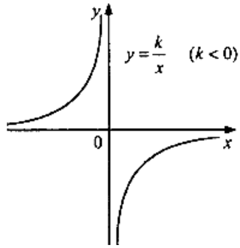
пр: $a = 1 \pm 0{,}1 \Rightarrow 1 - 0{,}1 \leq a \leq 1 + 0{,}1$

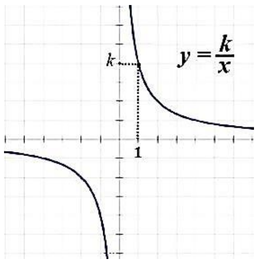
Функция $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ $(xy = k)$

$y = kx$ *«прямая пропорциональность»*

$y = \frac{k}{x}$ *«обратная пропорциональность»*







$y(0)$ — не определено

$k = y(1)$

график - гипербола

алгебраическое выражение - конструкция из чисел и букв («переменных»), соединенных скобками и знаками арифметических действий ($+ - \cdot : \sqrt{}$ ^ с целым показателем)

ОДЗ - *область допустимых значений* - значения переменных, при которых выражение имеет смысл

$\frac{1}{A} \Rightarrow A \neq 0$ *выражение в знаменателе*

$\sqrt{A} \Rightarrow A \geq 0$ *выражение под знаком корня*

A^α (при $\alpha \leq 0$) $\Rightarrow A \neq 0$ *основание степени*

… *и др.*

пр: найти ОДЗ выражения $\frac{\sqrt{x+3}+(x-1)^0}{x(x+2)} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2) \neq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0; -2 \\ x \geq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Уравнения n-ой степени $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$

- *если* x_0 *- корень многочлена* $P_n(x)$, *то* $P_n(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x)$
- *если* x_0 *- целый корень многочлена с целыми коэф-ми, то* $|a_n| \vdots |x_0|$

пр: $x^3 - x^2 + 13x - \boxed{2} = 0$

попробуем найти целый корень: $\boxed{2} \vdots 1$ и 2

проверим числа $\pm 1;\ \pm 2$ (подставив в уравнение, или по схеме Горнера, или угадав графически) $\Rightarrow$ число 2 является корнем $\Rightarrow$ найдем $P_{n-1}(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 13x - 2 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 - 6x + 1 \\ -6x^2 + 13x & \\ \underline{-6x^2 + 12x} & \\ x - 2 & \\ \underline{x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow P_n(x) = (x-2)(x^2 - 6x + 1) = 0$

- *если* $x_0 = \frac{p}{q}$ *рациональный корень многочлена с целыми коэф-ми, то* $|a_n| \vdots |p|$ *и* $|a_0| \vdots |q|$ *и если* $P_n(k \epsilon Z) \neq 0$, *то* $P_n(k) \vdots (p - kq)$

пр: рац. корни ур-я $\boxed{6}x^3 - x^2 + x - \boxed{1} = 0$

следует искать среди чисел*:* $\pm 1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{6}$

при всех $x < 0$ $P_n(x) < 0 \Rightarrow$ отриц. корней нет

возьмем $k = \pm 1 \Rightarrow$ должны выпол-ся условия $P(1) = 5 \vdots (p - q),\ P(-1) = -9 \vdots (p + q)$

т.е. подходит только $+\frac{1}{2}$ (но нужно проверить)

Теорема Виета для уравнений n-ой степени

$x_1 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$

$x_1x_2 + x_1x_3 \ldots + x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}$

$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$