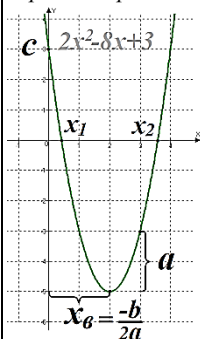


Алгебра - 9 класс

Функция $y = ax^2 + bx + c$ (квадратичная)

нули функции (точки пересечения с осью x) - корни квадратного уравнения



$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

вершина параболы:

$$x_B = -\frac{b}{2a} \quad y_B = y(x_B)$$


$$a = y(x_B + 1) - y(x_B)$$

$$b = -2ax_B$$

$$c = y(0)$$

\cup $a > 0$ ветви направлены вверх

\cap $a < 0$ ветви направлены вниз


 $a > 1$ парабола «прижата» к оси y


 $a < 1$ парабола «прижата» к оси x


\updownarrow c точка пересечения с осью y

\leftarrow $ab > 0$ сдвиг вдоль оси x налево

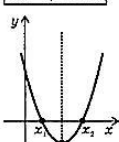
\rightarrow $ab < 0$ сдвиг вдоль оси x направо

 $D > 0$ парабола пересекает ось x в двух точках

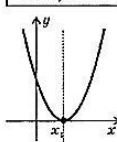
 $D = 0$ парабола касается оси x в одной точке

 $D < 0$ парабола не пересекает ось x

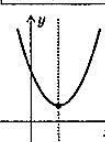
$a > 0, D > 0$



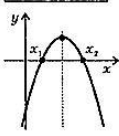
$a > 0, D = 0$



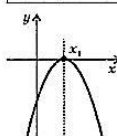
$a > 0, D < 0$



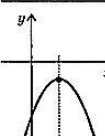
$a < 0, D > 0$



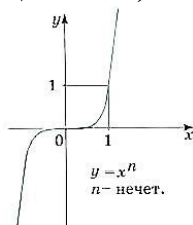
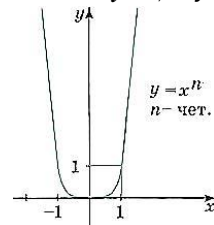
$a < 0, D = 0$



$a < 0, D < 0$



Функция $y = x^n$ (степенная)



Квадратные неравенства

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

- решить квадратное уравнение

- схематично изобразить параболу - корни, направление ветвей

- выписать нужные промежутки

пр: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$$x_1 = 1, x_2 = 3$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$$



пр: $x^2 - 4x + 3 < 0$

$$x_1 = 1, x_2 = 3$$

$$x \in (1; 3)$$



пр: $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

$$D = 0 \quad x_1 = 2$$

$$x \in \{2\}$$



пр: $x^2 - 3x + 4 > 0$

$$D < 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$



Графический метод решения уравнений и неравенств с двумя переменными

для уравнений - нахождение точек пересечения линий координатной плоскости

для неравенств - нахождение пересечения областей координатной плоскости

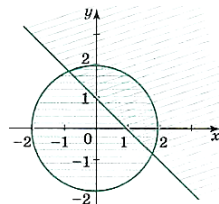
$$y = kx + b \quad (ax + by + c = 0) \quad \text{прямая}$$

$$y = \frac{k}{x} \quad (xy = k) \quad \text{гипербола}$$

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{парабола}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \text{окружность радиуса } r \text{ с центром в точке } (x_0; y_0)$$

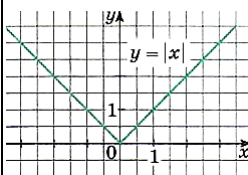
пр: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$



Функция $y = |x|$ (модуль)

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

решение уравнений и неравенств с модулем
 $F(|g(x)|, x) \geq 0 \Rightarrow$
рассмотреть две ветви



$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ F(g(x), x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ F(-g(x), x) \geq 0 \end{cases}$$

Элементы комбинаторики

комбинаторика ~ подсчет количества комбинаций

комбинаторное правило умножения - если нужно выбрать k элементов из некоторого множества элементов, и 1-ый элемент можно выбрать n_1 способами, ..., k -ый элемент - n_k способами, то число всех возможных комбинаций равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

пр: сколько вариантов обеда можно составить, если в столовой есть 2 первых блюда, 4 вторых блюда и 3 напитка? $\Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

факториал $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot 1$ ($0! = 1$)

пр: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Виды комбинаций:

перестановки

$$P_n = n!$$

из n различных элементов

пр: сколькими способами можно расставить 5 книг на полке? $\Rightarrow P_5 = 5! = 120$

перестановки с повторениями

если 1-ый элемент повторяется n_1 раз, ..., k -ый элемент - n_k раз

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

пр: сколькими способами можно расположить в ряд 3 белых и 2 черных шара?

$$\Rightarrow \overline{P}_5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

размещения

выбор k элементов из n различных элементов, порядок важен

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

пр: сколькими способами можно выбрать председателя и заместителя из 5 человек?

$$\Rightarrow A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

размещения с повторениями

если элементы могут повторяться

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

пр: сколько трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1,2,3,4,5?

$$\Rightarrow \overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$$

сочетания

выбор k элементов из n различных элементов, порядок не важен

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

пр: сколькими способами можно выбрать 3 дежурных из 5 человек?

$$\Rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

сочетания с повторениями

если элементы могут повторяться

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k! (n-1)!}$$

пр: сколькими способами можно собрать букет из 3 роз, если в магазине есть розы 5-ти цветов?

$$\Rightarrow \overline{C}_5^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Бином Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$
(коэффициенты из треугольника Паскаля)

Элементы теории вероятностей

(элементарный) исход - один из равновероятных случаев (вариант того, что может произойти)

пр: бросают кубик - возможно 6 исходов - выпадет одно из 6 чисел

событие - условие, которое может выполняться или не выполняться

пр: рассмотрим событие (условие)

A = «выпадет число меньше 3»

классическое определение вероятности:

вероятность события ~ отношение числа исходов, благоприятных (подходящих) событию, к общему числу исходов

пр: событию A подходят 2 исхода (выпадет 1 или 2)

$$\Rightarrow \text{вероятность события } A \quad P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

статистическое определение вероятности

(из эксперимента): отношение числа испытаний, в которых произошло событие, к числу всех испытаний

пр: при проверке партии семян выяснилось, что из 1000 посаженных семян взошло 805

\Rightarrow вероятность того, что семечко из этой партии

$$\text{взойдет: } P = \frac{805}{1000}$$

свойства вероятности:

- **достоверное событие:**

$$P(\Omega) = 1 \quad (\text{обязательно произойдет})$$

- **невозможное событие:**

$$P(\emptyset) = 0 \quad (\text{обязательно не произойдет})$$

- **противоположное событие:**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- **произведение (пересечение) событий:**

$$AB = A \cap B = \text{«произойдет и } A, \text{ и } B\text{»}$$

условная вероятность (наступления события

B при условии наступления события A)

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B|A)$$

если A и B - **независимые события**

(наступление события A не меняет

вероятность наступления события B), то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

- **сумма (объединение) событий:**

$$A + B = A \cup B = \text{«произойдет или } A, \text{ или } B\text{»}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

если A и B - **несовместные события** (не могут произойти одновременно), то

$$P(AB) = 0; \quad P(A + B) = P(A) + P(B)$$

- **разность событий:**

$$A - B = A \setminus B = \text{«} A \text{ произойдет, } B \text{ не произойдет»}$$

$$P(A - B) = P(A)P(\bar{B})$$

<p>Арифметический корень n-ой степени</p> $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a \quad (a \geq 0)$ <p>(n - показатель, a - подкоренное выражение)</p> <p>$\sqrt[n]{a}$ при $a < 0$ определен только для нечетных n</p> $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0)$ <p>пр: $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$</p> $4^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{2 \cdot \frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1 + \frac{1}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$	<p>Последовательности</p> <p>числовая последовательность - упорядоченный набор чисел (с заданным правилом вычисления каждого следующего числа)</p> <p>пр: числа Фибоначчи (сумма двух предыдущих)</p> <p>1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...</p> $x_1 = 1, x_2 = 1, x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$ <p>Арифметическая прогрессия:</p> $a_{n+1} = a_n + d \quad (d - \text{«разность»})$ $a_n = a_1 + d(n - 1) = kn + b \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ <p>Геометрическая прогрессия:</p> $b_{n+1} = b_n \cdot q \quad (q - \text{«знаменатель»})$ $b_n = b_1 q^{n-1} \quad S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ <p>бесконечно убывающая: при $q < 1 \quad S_n \rightarrow \frac{b_1}{1 - q}$</p> <p>предел последовательности - число, к которому стремятся члены последовательности</p> <p>при $n \rightarrow \infty \quad \{x_n\} \rightarrow A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow$</p> <p>$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: \forall n > N \quad x_n < \varepsilon$</p> <p>число Эйлера $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718$</p>
<p>Меры центральной тенденции</p> <p>среднее арифметическое $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$</p> <p>среднее геометрическое $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$</p> <p>среднее гармоническое $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$</p>	

Таблица квадратов

11 ² = 121	21 ² = 441	31 ² = 961	41 ² = 1681	51 ² = 2601	61 ² = 3721	71 ² = 5041	81 ² = 6561	91 ² = 8281
12 ² = 144	22 ² = 484	32 ² = 1024	42 ² = 1764	52 ² = 2704	62 ² = 3844	72 ² = 5184	82 ² = 6724	92 ² = 8464
13 ² = 169	23 ² = 529	33 ² = 1089	43 ² = 1849	53 ² = 2809	63 ² = 3969	73 ² = 5329	83 ² = 6889	93 ² = 8649
14 ² = 196	24 ² = 576	34 ² = 1156	44 ² = 1936	54 ² = 2916	64 ² = 4096	74 ² = 5476	84 ² = 7056	94 ² = 8836
15 ² = 225	25 ² = 625	35 ² = 1225	45 ² = 2025	55 ² = 3025	65 ² = 4225	75 ² = 5625	85 ² = 7225	95 ² = 9025
16 ² = 256	26 ² = 676	36 ² = 1296	46 ² = 2116	56 ² = 3136	66 ² = 4356	76 ² = 5776	86 ² = 7396	96 ² = 9216
17 ² = 289	27 ² = 729	37 ² = 1369	47 ² = 2209	57 ² = 3249	67 ² = 4489	77 ² = 5929	87 ² = 7569	97 ² = 9409
18 ² = 324	28 ² = 784	38 ² = 1444	48 ² = 2304	58 ² = 3364	68 ² = 4624	78 ² = 6084	88 ² = 7744	98 ² = 9604
19 ² = 361	29 ² = 841	39 ² = 1521	49 ² = 2401	59 ² = 3481	69 ² = 4761	79 ² = 6241	89 ² = 7921	99 ² = 9801
20 ² = 400	30 ² = 900	40 ² = 1600	50 ² = 2500	60 ² = 3600	70 ² = 4900	80 ² = 6400	90 ² = 8100	

Таблица степеней

n	2 ⁿ	3 ⁿ	4 ⁿ	5 ⁿ	6 ⁿ	7 ⁿ	8 ⁿ	9 ⁿ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	9	16	25	36	49	64	81
3	8	27	64	125	216	343	512	729
4	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
8	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
9	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489
10	1024	59049	1048576	9765625	60466176	282475249	1073741824	3486784401