Алгебра - 11 класс

Равносильность уравнений и неравенств

с модулем

$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = \pm g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$|f(x)| > g(x) \iff \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$

$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

$|f(x)| \gtreqless |g(x)| \iff f^2(x) \gtreqless g^2(x)$

распадающиеся, дробные

$f(x)g(x) = 0 \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array} \right. \\ x \in D_f \cap D_g \end{cases}$

$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \\ x \in D_f \cap D_g \end{cases}$

$\begin{array}{c} f(x)g(x)>0 \\ \frac{f(x)}{g(x)}>0 \end{array} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases} \end{array} \right.$

$\begin{array}{c} f(x)g(x)<0 \\ \frac{f(x)}{g(x)}<0 \end{array} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases} \end{array} \right.$

сокращение

$f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D_\varphi \end{cases}$

иррациональные

$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \iff f(x) = g^3(x)$

$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

показательные

$a > 0,\ a \neq 1$

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$

$a^{f(x)} \gtreqless a^{g(x)} \iff \begin{cases} a > 1,\ f(x) \gtreqless g(x) \\ a < 1,\ f(x) \lesseqgtr g(x) \end{cases}$

логарифмические

$a > 0,\ a \neq 1$

$log_a f(x) = log_a g(x) \iff \{ f(x) = g(x) > 0$

$log_a f(x) \gtreqless log_a g(x) \iff$
$\begin{cases} a \gtreqless 1,\ f(x) > g(x) > 0 \\ a \lesseqgtr 1,\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$

равносильные уравнения/неравенства/системы - имеют одинаковые множества корней

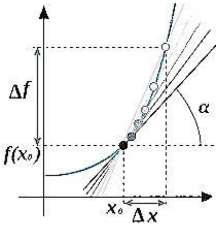
использование формул (свойств корней, логарифмов, тригонометрических функций) может привести к неравносильным преобразованиям

Производная

производная (в точке):

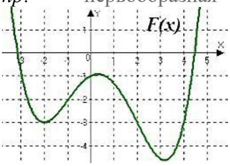
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

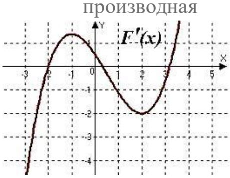
предел приращения функции к приращению аргумента



производная (функция): *функция, которая в каждой точке равна значению производной от «первообразной» функции в этой точке*

пр: первообразная — производная





уравнение касательной *к функции $f(x)$ в точке x_0*

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

геометрический смысл: тангенс угла наклона касательной $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k$ *(угловой коэффициент касательной прямой $y = kx + b$)*

физический смысл: скорость изменения функции

пр: $v(t) = s'(t) \quad a(t) = v'(t) = s''(t)$

скорость - производная от перемещения по времени, ускорение - производная от скорости по времени

дифференцирование *- нахождение производной*

правила дифференцирования:

можно пользоваться таблицей производных (см→)

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh' \qquad f(g(x))' = f'_g\, g'_x$$

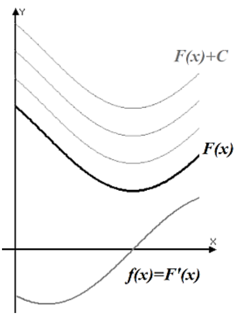
пр: $(\sin 2x)' = 2\cos 2x \quad (\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x$

приближенные вычисления

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

пр: $(1{,}01)^{10} \approx 1^{10} + 9 \cdot 1^9 \cdot `0{,}01 = 1{,}09$

Интеграл



если известна производная функция, то первообразную функцию можно найти с точностью до константы

неопределенный интеграл *- множество первообразных функций (отличающихся на константу)*

$F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \iff (F(x) + C)' = F(x)' = f(x)$$

интегрирование *- нахождение функции (первообразной) по ее производной*

правила интегрирования:

можно пользоваться таблицей интегралов (см→)

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

пр: $\int 2\sqrt{x}dx = 2\int x^{0,5}dx = 2\frac{x^{1,5}}{0,5} + C = 4\sqrt{x^3} + C$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g)dg$$

пр: $\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{x^3+1}d(x^3+1) = \ln(x^3+1) + C$

$$\int f(g(x) = kx + b)dx = \frac{1}{k}\int f(g)dg$$

пр: $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

пр: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx + C = xe^x - e^x + C$

определенный интеграл (формула Ньютона-Лейбница)

если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$

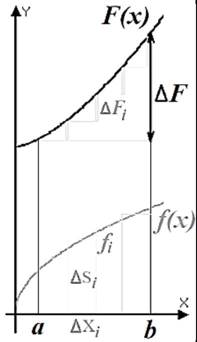
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции под графиком производной функции

если $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$

$$S = \int_a^b f(x)dx = \Delta F$$

$$\Delta s_i = \Delta x_i \cdot f_i = \Delta x_i \cdot \frac{\Delta F_i}{\Delta x_i} = \Delta F_i$$



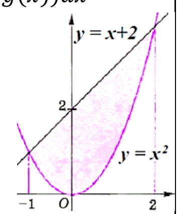
площадь фигуры между графиками функций:

если $f(x) \geq g(x)$ $\quad S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

пр: площадь фигуры между графиками функций $y = x + 2$ и $y = x^2$

$$S = \int_{-1}^{2}(x + 2 - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = 4{,}5$$



физический смысл интеграла: сумма

пр: $\Delta S = \int v(t)dt \quad A = \int F(x)dx$

перемещение - интеграл от скорости, работа - интеграл от силы

свойства определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

таблица производных и интегралов

$(c)' = 0$

$(x^n)' = nx^n - 1$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctg\, x)' = \frac{1}{x^2+1}$

$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{x^2+1}$

$\int c = cx + C$

$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x = e^x + C$

$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$

$\int \cos x = \sin x + C$

$\int \sin x = -\cos x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$

предел функции *в точке (или на бесконечности)* - величина, к которой стремится значение функции, когда аргумент стремится к этой точке (слева и справа) $A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

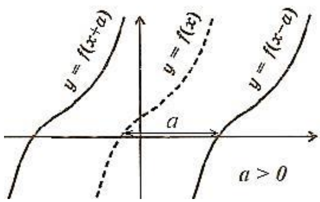
пр: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+4x+1}{5x^2-2x} = \frac{3}{5}$

«замечательные» пределы:

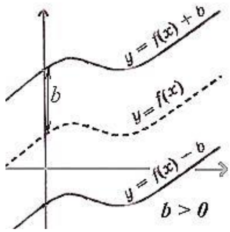
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Преобразование графика функции

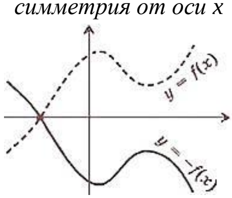
сдвиг вдоль оси x



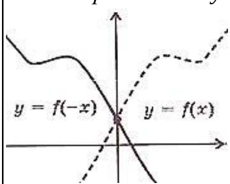
сдвиг вдоль оси y



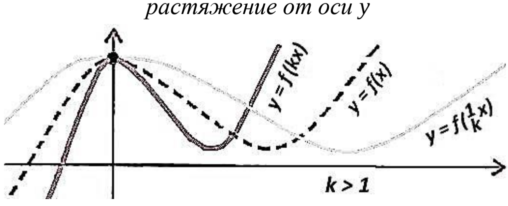
симметрия от оси x



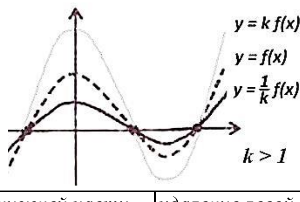
симметрия от оси y



растяжение от оси y



растяжение от оси x



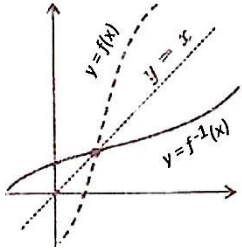
порядок при сложном преобразовании:

$f(kx + a) + b \Rightarrow$

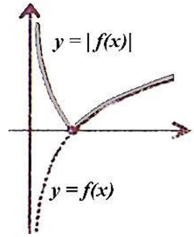
$f\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right) + b$

- *сдвиг вдоль оси x на* $\frac{a}{k}$
- *растяжение от оси x*
- *сдвиг вдоль оси y на* b

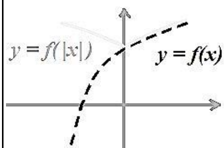
симметрия от оси $y = x$
(обратная функция)



перенос нижней части графика симетрично оси x



удаление левой части графика и копирование правой части графика симметрично оси y



Исследование функции

1) *область определения, непрерывность*

D_f - значения аргумента, для которых функция определена (выражение имеет смысл)

$\dfrac{1}{A} \Rightarrow A \neq 0$ выражение в знаменателе

A^{α} (при $\alpha \leq 0$) $\Rightarrow A \neq 0$ ноль можно возводить только в положительную степень

$\sqrt{A} \Rightarrow A \geq 0$ выражение под знаком корня четной степени

$\log_A B \Rightarrow B > 0,\ A > 0,\ A \neq 1$ выражение под логарифмом и основание логарифма

$\operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow \alpha \neq \pi n$

тангенс и котангенс

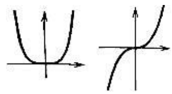
точки разрыва - устранимые/неустранимые

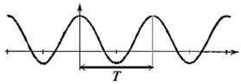
2) *четность/нечетность, периодичность*

$f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D_f \Rightarrow$ функция четная (симмет. отн. оси oy)

$f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D_f \Rightarrow$ функция нечетная (симмет. отн. точки 0)

$f(x \pm T) = f(x)$ $\forall x \in D_f \Rightarrow$ период $= T$





3) *точки пересечения с осями, промежутки знакопостоянства*

точка пересечения с осью y: $x = 0;\ y = f(0)$

точки пересечения с осью x: $x -$ корни уравнения $f(x) = 0;\ y = 0$ (нули функции)

4) *критические точки, промежутки возрастания/убывания*

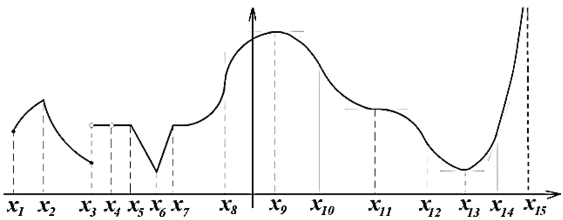
$f(x)$ *не опр. или имеет разрыв* *пр:* $x_3\ x_4\ x_{15}$

f' *не опр.* критическая точка
пр: $x_2\ x_3\ x_5\ x_6\ x_8$

$f' = 0$ ($f \neq const$) критическая точка
пр: $x_9\ x_{11}\ x_{13}$
точка экстремума,
если f' меняет знак

$f' > 0$ промежуток возрастания
пр: $[x_1; x_2]\ [x_6; x_9]\ [x_{13}; x_{15})$

$f' < 0$ промежуток убывания
пр: $[x_2; x_2]\ [x_5; x_6]\ [x_9; x_{13})$



5) *точки перегиба, промежутки выпуклости/вогнутости*

f'' *не опр. или* $f'' = 0$ *и* f'' *меняет знак* (f не прямая) точка перегиба (меняется выпуклость/вогнутость)
пр: $x_8\ x_{10}\ x_{12}\ x_{14}$

$f''(x) > 0$ промежуток вогнутости
пр: $[x_2; x_3]\ [x_7; x_8]\ [x_{10}; x_{11}]\ [x_{12}; x_{15}]$

$f''(x) < 0$ промежуток выпуклости
пр: $[x_1; x_2]\ [x_8; x_{10}]\ [x_{11}; x_{12}]$

6) *область значений, ограниченность сверху/снизу, экстремумы*

E_f - множество значений, которые может принимать функция

нахождение минимума/максимума функции: сравнить значения функции в критических точках и на границах области определения, в точках разрыва

7) *асимптоты* (прямые, к которым стремится функция)

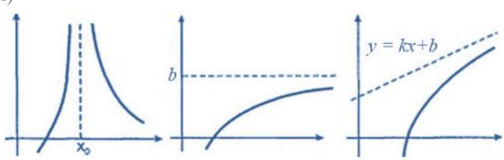
вертикальные $x = x_0$ $\lim\limits_{x \to x0\pm} f(x) = \pm\infty$

горизонтальные $y = b$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

наклонные $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$$



8) *график* (для более точного построения можно найти значения функции в некоторых точках)