Алгебра - 10 класс

Рациональные уравнения

распадающиеся уравнения

$A(x) \cdot B(x) = 0 \;\Rightarrow\; A(x) = 0$ или $B(x) = 0$

$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \;\Rightarrow\; A(x) = 0$ и $B(x) \neq 0$

Рациональные неравенства

метод интервалов *для неравенств вида*

$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k) \gtreqless 0$

a_i *- точки перемены знака*

пр: $\frac{x(x-2)^2(x+4)^2}{(x+7)^3(x-5)(x+4)} \geq 0$

«четные» точки: $x = 2$ (т.к. эта скобка входит в выражение в четной степени)

«нечетные» точки: $x = 0; -4; -7; 5$

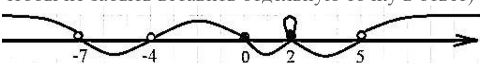
скобка $(x+4)$ входит и в числитель, и в знаменатель – в общем, она входит в выражение в 1ой степени

выражение меняет знак только в «нечетных» точках

- отмечаем на оси точки перемены знака
- если неравенство нестрогое, то закрасим точки, которые входят только в числитель (в этих точках выражение равно нулю), а точки из знаменателя оставим незакрашенными (знаменатель не должен быть равен нулю, т.к. в этих точках значение выражения не определено)
- на самом правом промежутке выражение положительно (т.к. все скобки положительны)
- «идем» справа налево через точки перемены знака: в «нечетных» точках знак меняется, в «четных» точках знак остается прежним

пр:

можно условно изобразить дугами промежутки знакопостоянства (в «четных» точках ставим «петлю», чтобы не забыть вставить отдельную точку в ответ)



- записываем ответ в соответствии со знаком исходного неравенства, включая закрашенные точки и исключая незакрашенные

пр: $(-\infty; -7) \cup (-4; 0] \cup \{2\} \cup (5: +\infty)$

если неравенство имеет не совсем подходящий вид, то его нужно преобразовать:

пр: $-4(3 - x)(2 + 5x) < 0 \;\Rightarrow$

разделим нер-во на -4 (при умножении или делении на отрицательное число знак нер-ва меняется)

$(3 - x)(2 + 5x) > 0 \;\Rightarrow$

«перевернем» скобку (т.е. умножим нер-во на -1)

$(x - 3)(2 + 5x) < 0 \;\Rightarrow$

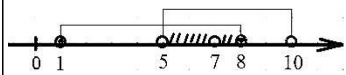
«вынесем» 5 за скобку

$5(x - 3)\left(\frac{2}{5} + x\right) < 0 \;\Rightarrow$

$(x - 3)(x + 0{,}4) < 0 \;\Rightarrow$ теперь можно применить метод интервалов $\Rightarrow x \in (-0{,}4; 3)$

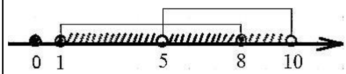
Система *(уравнений или неравенств) ~ пересечение решений*

пр: $\begin{cases} 1 \leq x \leq 8 \\ 5 < x < 10 \\ x \neq 7 \end{cases} \Rightarrow$ $[1;8] \cap (5;10) \cap \{R \backslash 7\}$ $x \in (5;7) \cup (7;8]$



Совокупность *(уравнений или неравенств) ~ объединение решений*

пр: $\left[\begin{array}{l} 1 \leq x \leq 8 \\ 5 < x < 10 \\ x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$ $[1;8] \cup (5;10) \cup \{0\}$ $x \in \{0\} \cup [1;10)$



Метод замены неизвестных

пр: $(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 4) = 20$

замена $t = x^2 - 4x \Rightarrow (t + 3)(t + 4) = 20 \;\Rightarrow$

$t^2 + 7t - 8 = 0 \;\Rightarrow\; t = -8; 1$

$\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = -8 \\ x^2 - 4x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \pm \sqrt{5} \\ x = -2 \pm \sqrt{5} \end{array}\right.$

пр: $\begin{cases} 3^{2x} + 4^{2y} = 82 \\ 3^x - 4^y = 8 \end{cases}$ *замена* $\begin{array}{l} a = 3^x \\ b = 4^y \end{array} \Rightarrow$

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 82 \\ a - b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 9 \\ 4^y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

пр: $\begin{cases} xy(x + y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$ *замена* $\begin{array}{l} a = xy \\ b = x + y \end{array} \Rightarrow$

$\begin{cases} ab = 30 \\ b(b^2 - 3a) = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (2;3) \\ (3;2) \end{array}$

Возвратные (симметричные) уравнения n-ой степени

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$

если $a_0 = a_n$; $a_1 = a_{n-1}$ ... то

- если *n* четно - разделить уравнение на x^2 и сделать замену переменной $t = x + \frac{1}{x}$
- если *n* нечетно – то один из корней равен *-1* и при делении $P_n(x)$ на $x + 1$ получится возвратное уравнение четной степени

пр: $x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 0$

симметричное ур-е нечет. степени ⇒ корень -1

$(x + 1)(x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1) = 0 \quad | : x^2$

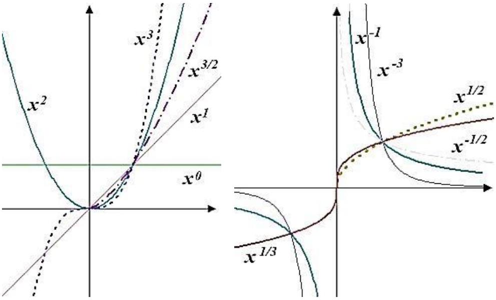
$x^2 + 5x + 6 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ выделим полный квадрат

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$ $\quad t = x + \frac{1}{x}$

$t^2 + 5t + 4 = 0 \;\Rightarrow\; t = -1; -4 \;\Rightarrow\; x = -2 \pm \sqrt{3}$

Ответ: -1; $-2 \pm \sqrt{3}$

Функция $y = x^{\mathrm{p}}$ (степенная)



свойства степени:

$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $\quad (a \neq 0)$

$\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}}$

$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{nm}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{a^0 = 1}$ $\quad (a \neq 0)$

$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$ $\ (a \geq 0)$

$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{если } n - \text{нечет.} \\ |a|, \text{если } n - \text{четн.} \end{cases}$

пр: $\frac{(a^2 \cdot a)^2}{a^4 \cdot a^2} = \frac{a^{(2+1)\cdot 2}}{a^{4+2}} = \frac{a^6}{a^6} = a^{6-6} = a^0 = 1$

пр: $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

$4^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{2 \cdot \frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

Логарифмы

$\log_a b$ - *«степень, в которую нужно возвести a, чтобы получить b»* $\Rightarrow$

$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$ $\ (\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0})$

(основное логарифмическое тождество)

a - «основание логарифма»

b - «выражение под логарифмом»

пр: $\log_2 8 = 3 \quad \log_2 2 = 1 \quad \log_2 \frac{1}{4} = -2 \quad \log_2 1 = 0$

свойства логарифмов:

$\log_a a^b = b$

$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$

$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_a b^n = n \log_a b$

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ *(переход к другому основанию)*

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\qquad$ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

специальные обозначения:

$\lg b = \log_{10} b$ *(десятичный логарифм)*

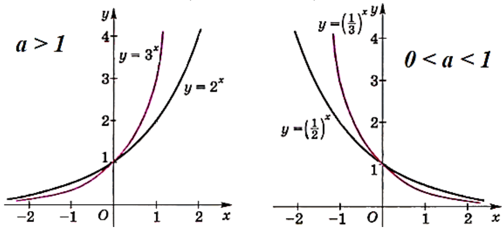
$\ln b = \log_e b$ *(натуральный логарифм, $\boldsymbol{e} \approx 2{,}7$)*

пр: $A = a \cdot 10^k$ *($1 \leq a \leq 9$ стандартный вид числа)*

$\Rightarrow \quad \lg A = \lg a + k$

Функция $y = a^x$ (показательная)

$(a > 0,\ a \neq 1)$



Показательные уравнения и неравенства

$a^x = b \ \Rightarrow\ x = \log_a b \quad (\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0})$

$a^x \gtrless b \ \Rightarrow\ \begin{cases} \text{если } a > 1, \text{то } x \gtrless \log_a b \\ \text{если } a < 1, \text{то } x \lessgtr \log_a b \end{cases}$

пр: $3^x = 2 \ \Rightarrow\ x = \log_3 2$

метод приведения к одному основанию:

пр: $9^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \Rightarrow 3^{2(x-1)} = 3^{-2x} \Rightarrow$

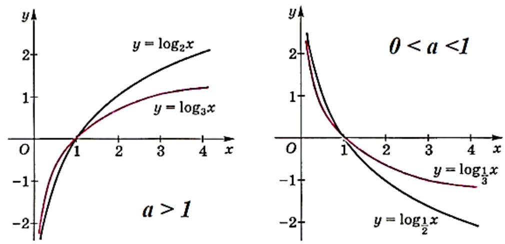
$2x - 2 = -2x \ \Rightarrow\ x = 0{,}5$

пр: $\frac{1}{2^x} < 0{,}25 \ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ \Rightarrow\ x > 2$

(если основание <1, при «отбрасывании оснований» знак неравенства меняется)

Функция $y = \log_a x$ (логарифмическая)

$(a > 0,\ a \neq 1)$



Логарифмические уравнения и неравенства

$\log_a x = b \Rightarrow\ x = a^b \quad (\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0})$

$\log_a x \gtrless b \ \Rightarrow\ \begin{cases} \text{если } a > 1, \text{то } x \gtrless a^b \\ \text{если } a < 1, \text{то } x \lessgtr a^b \end{cases}$

пр: $\log_2 x = -3 \ \Rightarrow\ x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

пр: $\log_{0{,}2} x > 2 \ \Rightarrow x < 0{,}2^2 \Rightarrow\ x < 0{,}04$

(если основание <1, то знак неравенства меняется)

метод приведения к одному основанию:

пр: $\log_2 x > 5 \ \Rightarrow \log_2 x > \log_2 2^5 \Rightarrow x > 32$

пр: $\log_{0{,}5} \frac{1}{x} \leq \log_4 x \ \Rightarrow -\log_2 \frac{1}{x} \leq 2\log_2 x \Rightarrow$

$\log_2 x \leq \log_2 x^2 \ \Rightarrow x \leq x^2 \ \Rightarrow x(x-1) \geq 0$

ОДЗ: $x > 0 \qquad \Rightarrow x \in [1; +\infty)$

сравнение логарифмов с разными основаниями:

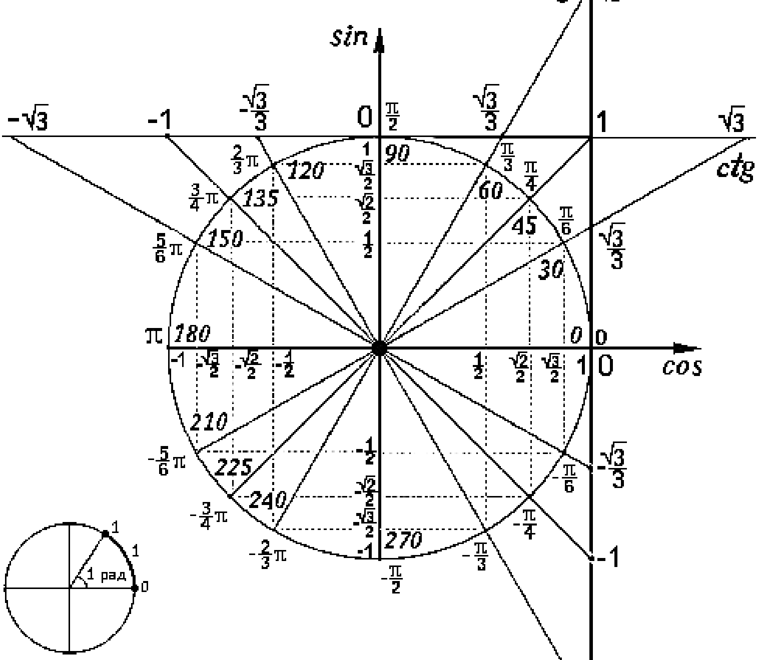
пр: $\log_2 3$ *и* $\log_5 10 \ \Rightarrow 1 < \log_2 3 < 2,\ 1 < \log_5 10 < 2$

$\Rightarrow$ попробуем умножить на 2: $3 < 2\log_2 3 = \log_2 9 < 4,$

$2 < 2\log_5 10 = \log_5 100 < 3 \ \Rightarrow \log_2 3 > \log_5 10$

Тригонометрия

Тригонометрический круг



1 рад ≈ 57°

π рад = 180°

радиан - величина угла, соответствующего дуге окружности, длина которой равна радиусу *(не зависит от окружности)*

синус (sin), косинус (cos), тангенс (tg), котангенс (ctg) (угла на единичной окружности) - это координаты соответствующего радиус-вектора по осям синусов (x=0), косинусов (y=0), тангенсов (x=1), котангенсов (y=1)

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(не опред. при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$*)*

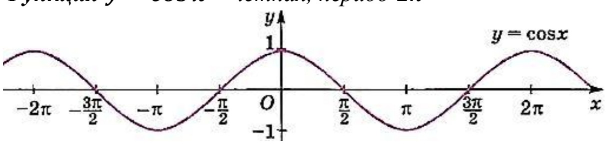
$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(не опред. при $\alpha = \pi n$*)*

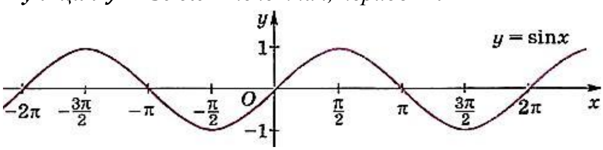
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

Тригонометрические функции

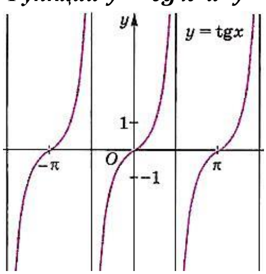
Функция $\boldsymbol{y = \cos x}$ *- четная, период* 2π

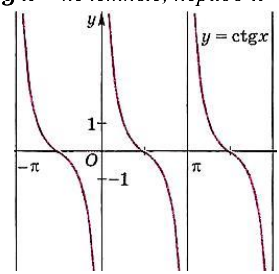


Функция $\boldsymbol{y = \sin x}$ *- нечетная, период* 2π

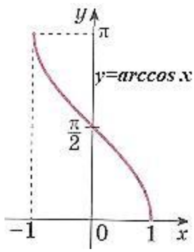


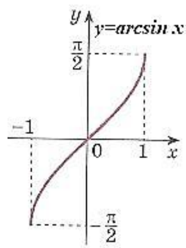
Функции $\boldsymbol{y = \operatorname{tg} x}$ ***и*** $\boldsymbol{y = \operatorname{ctg} x}$ *- нечетные, период* π

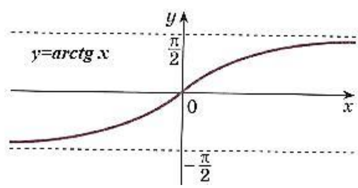


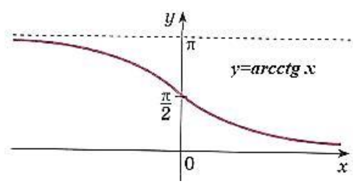


Обратные тригонометрические функции









арккосинус $\alpha = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = x \\ \alpha \in [0;\pi] \end{cases}$ *арксинус* $\alpha = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = x \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ *арктангенс* $\alpha = \mathrm{arctg}\, x \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\,\alpha = x \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ *арккотангенс* $\alpha = \mathrm{arcctg}\, x \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{ctg}\,\alpha = x \\ \alpha \in (0;\pi) \end{cases}$	***Тригонометрические уравнения*** $\boldsymbol{\cos x = a}$ $(-1 \le a \le 1)$ $\alpha = \pm\arccos a + 2\pi n$ $\boldsymbol{\sin x = a}$ $(-1 \le a \le 1)$ $\alpha_1 = \arcsin a + 2\pi n$ $\alpha_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ *или* $\alpha = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ $\boldsymbol{\mathrm{tg}\, x = a}$ $\alpha = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$ $\boldsymbol{\mathrm{ctg}\, x = a}$ $\alpha = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$

Тригонометрические формулы

основное тригонометрическое тождество

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

формулы для суммы и разности углов

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$ $\quad \mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\pm\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}$

формулы для произведения функций

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

формулы для суммы и разности функций

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ $\quad \mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\pm\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

формулы половинных углов

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ $\quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ $\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

формулы универсальной подстановки $t = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

формула вспомогательных углов

$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\alpha + \varphi)$,

где $\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\quad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

формулы дополнительных углов

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha$

$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\,\alpha$

формулы приведения

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \pi n) = \mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \pi n) = \mathrm{ctg}\,\alpha$

$\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$

$\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\alpha$

$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\mathrm{ctg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

формулы двойных углов

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$= 1 - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$

$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

формулы тройных углов

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$