Алгебра - 7 класс

Свойства степени

«а в степени n»

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n множителей}} = a^n$$

a - основание

n - показатель

$$a^0 = 1$$

($a \neq 0$, 0^0 не определено)

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

пр: $\frac{(a^2 \cdot a)^2}{a^4 \cdot a^2} = \frac{a^{(2+1)\cdot 2}}{a^{4+2}} = \frac{a^6}{a^6} = a^{6-6} = a^0 = 1$

Буквенные выражения

буквенное выражение - конструкция, составленная из чисел, букв («неизвестных» величин), скобок и знаков арифметических действий

пр: найти значение выражения $(3-2x)^2$ при $x = -1$

$\Rightarrow$ подставим вместо x его значение

$(3 - 2 \cdot (-1))^2 = 5^2 = 25$

пр: выражение $\frac{1}{x-1}$ при $x = 1$ не определено («не имеет смысла», т.к. «на ноль делить нельзя»)

раскрытие скобок

$c(a+b) = ca + cb$ $\quad -c(a+b) = -ca - cb$

$c(a-b) = ca - cb$ $\quad -c(a-b) = -ca + cb$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

пр: $(x-2)(3+x) = 3x + x^2 - 6 - 2x = x^2 + x - 6$

формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

пр: $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + +3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + +3c^2a + 3c^2b + 6abc$

разложение на множители - представление в виде произведения. Используются методы:

- *вынесение общего множителя за скобки*

пр: $4x^3 + 8x^2y + 2x^2 = \underline{2x^2} \cdot 2x + \underline{2x^2} \cdot 4y + \underline{2x^2} \cdot 1 = 2x^2(2x + 4y + 1)$

- *группировка*

пр: $2x - ax + 2y - ay = 2(x+y) - a(x+y) = (2-a)(x+y)$

- *формулы сокращенного умножения*

пр: $x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x-2y)(x+2y)$

Системы линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

решением является пара значений *(x;y)*, при которых оба уравнения обращаются в верные равенства;
система может не иметь решений, или иметь бесконечно много решений

пр: $\begin{cases} -x + 3y = 3 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

метод подстановки:

выразить одну неизвестную из одного уравнения и подставить в другое уравнение, получится уравнение с одной неизвестной

пр: из первого уравнения выразим x:

$x = 3y - 3$

и подставим во второе уравнение:

$2(3y - 3) + y = 8 \;\Rightarrow\; 7y = 14 \;\Rightarrow\; y = 2$

теперь найдем x: $x = 3 \cdot 2 - 3 = 3$

ответ: (3;2) $\quad x = 3;\ y = 2$

метод сложения:

преобразовать уравнения системы так, чтобы при сложении (или вычитании) уравнений одна из неизвестных сократилась, и получилось уравнение с одной неизвестной

пр: умножим первое уравнение на 2:

$\begin{cases} -x + 3y = 3 \quad | \cdot 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

сложим уравнения (x сократится):

$(-2x + 2x) + (6y + y) = 6 + 8 \;\Rightarrow$

$7y = 14 \;\Rightarrow\; y = 2$

подставим найденное значение y в любое из уравнений и найдем x:

$-x + 3 \cdot 2 = 3 \;\Rightarrow\; x = 3$

ответ: (3;2) $\quad x = 3;\ y = 2$

графический метод:

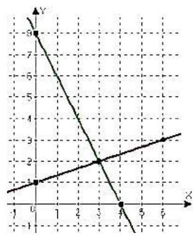
построить две прямые, точка их пересечения является решением системы

пр:

построим две прямые

(прямую можно построить по двум точкам)

эти прямые пересекаются в точке (3;2)



несовместная система ~ не имеет решений (прямые параллельны)

недоопределенная система ~ бесконечно много решений (прямые совпадают)

Функции

переменная - величина, которая может принимать различные значения

функция *- это зависимость одной переменной от другой, когда для каждого значения независимой переменной* («аргумента», обычно обозначают *x*) *задано <u>единственное</u> значение зависимой переменной* («функции», обычно обозначают *y*)

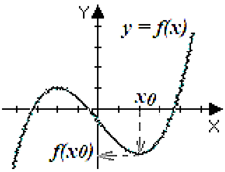
функция может быть задана описанием, таблицей, графиком, формулой

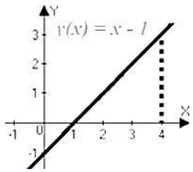
область определения - все значения аргумента, для которых функция задана (определена)

область значений - все значения функции

нули функции – такие значения аргумента, для которых значение функции равно нулю $f(x_0) = 0$ (точки пересечения графика с осью *x*)

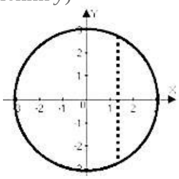
пр: графики функций (каждому значению *x* соответствует единственное значение *y*)

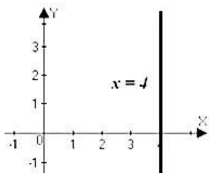




$f(x_0)$ - значение функции в т.x_0

пр: эти линии не являются графиками функций (некоторым значениям *x* соответствует несколько значений *y*)





Статистические характеристики

статистика ~ анализ количественных данных

числовой ряд ~ набор чисел

пр: ряд из 8 чисел -2; 11; -2; 5; 7,5; 11; 0; -2,5

среднее арифметическое *- сумма всех чисел ряда, деленная на их количество*

пр: $\frac{(-2)+11+(-2)+5+7{,}5+11+0+(-2{,}5)}{8} = \frac{28}{8} = 3{,}5$

размах *- разность между наибольшим и наименьшим из чисел ряда*

мода *- число, которое встречается в ряду чаще других* (может быть несколько, или не быть ни одной)

пр: размах: $11 - (-2{,}5) = 13{,}5$ моды: -2 и 11

медиана *- число в середине упорядоченного ряда* (при четном количестве чисел в ряду - среднее арифметическое двух чисел в середине)

пр: упорядочим ряд: -2,5; -2; -2; 0; 5; 7,5; 11; 11 ⇒ медиана: $\frac{0+5}{2} = 2{,}5$

Линейная функция $y = kx + b$

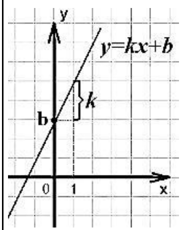


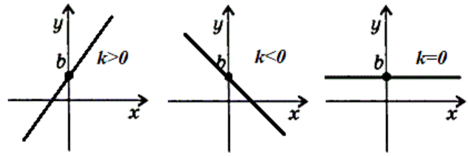
график - прямая

k - «угловой коэффициент»

b - «сдвиг вдоль оси y»

$b = y(0)$

$k = y(1) - y(0)$



при $k > 0$ *функция возрастает*

при $k < 0$ *функция убывает*

при $k = 0$ *функция постоянна*

построение графика: *по двум точкам*

по очереди подставляем в уравнение два любых значения *x* и находим соответствующие значения *y*, получаем координаты двух точек, принадлежащих прямой, проводим прямую через эти точки

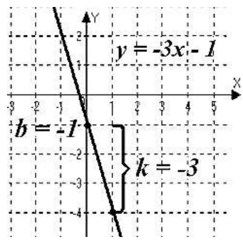
проще всего найти две точки по коэффициентам: (0;b) и (1;b+k)

пр: построить график функции $y = -3x - 1$

$b = -1 \Rightarrow$ точка пересечения с осью *y* (0;-1)

$k = -3 \Rightarrow$ функция убывает («на 3 клеточки») ⇒ (1;-4)

проводим прямую через эти точки



взаимное расположение двух прямых:

если $k_1 \neq k_2$ *прямые пересекаются*

(точку пересечения можно найти из уравнения $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$*)*

если $k_1 = k_2$ *прямые параллельны (или совпадают)*

если $k_1 \cdot k_2 = -1$ *прямые перпендикулярны*

Функции $y = x^2$ *и* $y = x^3$

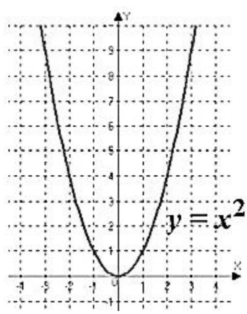
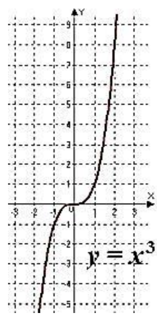


график - парабола



кубическая парабола