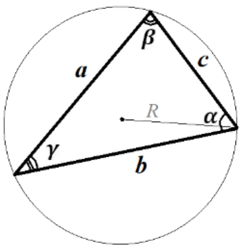
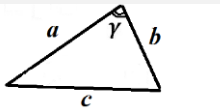
Геометрия - 9 класс

Теорема синусов



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Теорема косинусов



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

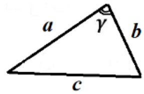
свойство диагоналей параллелограмма

$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$$

Формулы площади

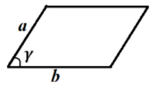
треугольника

$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$



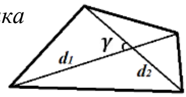
параллелограмма

$S=ab\sin\gamma$

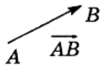


четырехугольника

$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$



Векторы на плоскости

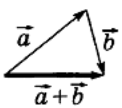


вектор - направленный отрезок (величина + направление)

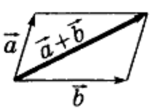
противоположный вектор (та же величина, противоположное направление) $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

сумма векторов:

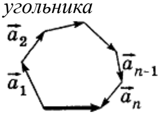
правило треугольника



правило параллелограмма



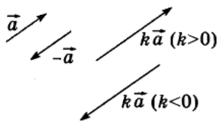
правило многоугольника



$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$

разность векторов: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (сумма с противоположным вектором)

произведение вектора на число:



величина меняется в k раз, при $k<0$ направление меняется на противоположное

коллинеарные *(параллельные) векторы:* $\vec{a}\parallel\vec{b}$

$\vec{a}\upuparrows\vec{b}$ (сонаправленные) или

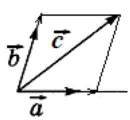
$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ (противоположно направленные)

$\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Rightarrow\ \exists k:\ \vec{b}=k\vec{a}$

$\vec{a}\parallel\vec{b}, \vec{a}\{x_a;y_a\}, \vec{b}\{x_b;y_b\}\Rightarrow\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}$ (или $x_b=y_b=0$)

разложение вектора по двум неколлинеарным векторам:

$\vec{c}=k_a\vec{a}+k_b\vec{b}$ *(k_a, k_b - коэффициенты разложения)*

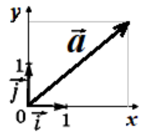


Метод координат на плоскости

разложение вектора по координатным векторам $\vec{\imath},\vec{\jmath}$:

$\vec{a}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}\ \Rightarrow$

координаты вектора $\vec{a}\ \{x;y\}$

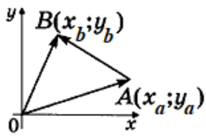


координаты векторов (суммы, разности, произведения на число):

$\vec{a}\{x_a;y_a\}, \vec{b}\{x_b;y_b\}\Rightarrow\ (\vec{a}\pm\vec{b})\ \{x_a\pm x_b;\ y_a\pm y_b\}$

$k\vec{a}\ \{kx_a;\ ky_a\}$

связь между координатами точек и векторов:



координаты точки (A) равны координатам ее радиус-вектора ($\overrightarrow{OA}$)

$\overrightarrow{AB}\ \{x_b-x_a;\ y_b-y_a\}$

длина вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$

середина отрезка: $M\left\{\frac{x_a+x_b}{2};\ \frac{y_a+y_b}{2}\right\}$

- точка M делит отрезок AB в отношении

$m:n=\lambda\ \Rightarrow M\ \left\{\frac{x_a+\lambda x_b}{1+\lambda};\frac{y_a+\lambda y_b}{1+\lambda}\right\}$

- точка пересечения медиан треугольника

$M\ \left\{\frac{x_a+x_b+x_z}{3};\ \frac{y_a+y_b+y_z}{3}\right\}$

скалярное произведение векторов:

$\overline{ab}=\vec{a}\cdot\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$

$\Rightarrow\ \cos\varphi=\frac{\overline{ab}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ *(φ - угол между векторами)*

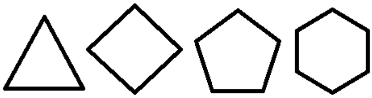
$\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \overline{ab}=0\quad(\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0})$

$\angle\varphi$ *- острый* $\Leftrightarrow\ \overline{ab}>0$

$\angle\varphi$ *- тупой* $\Leftrightarrow\ \overline{ab}<0$

Правильные многоугольники

(все стороны и углы равны)



угол n-угольника $\alpha_n = \frac{n-2}{n}180°$

сторона n-угольника

$a_n = 2R \cdot sin\frac{180}{n} = 2r \cdot tg\frac{180}{n} =$

площадь n-угольника $S_n = pr$

Окружность

длина окружности $C = 2\pi R$

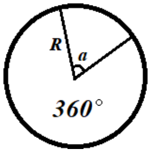
площадь круга $S = \pi R^2$

длина дуги

$l_\alpha = \frac{\alpha}{360} 2\pi R$

площадь сегмента

$S_\alpha = \frac{\alpha}{360}\pi R^2$



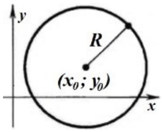
уравнение окружности

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

радиуса R

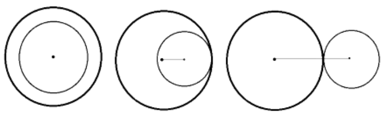
с центром

в точке $(x_0; y_0)$



взаимное расположение окружностей

- *концентрические*
- *касающиеся внутренним образом*
- *касающиес внешним образом*

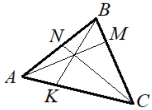


теоремы Чевы и Менелая

пусть точки N, M, K лежат на сторонах треугольника (или продолжениях сторон)

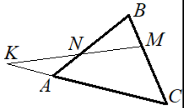
прямые AN, BK, CM пересекаются в одной точке ⇔

$\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CK}}{\overrightarrow{KA}} = 1$



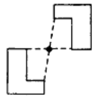
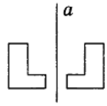
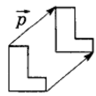
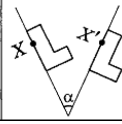
точки N, K, M лежат на одной прямой ⇔

$\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CK}}{\overrightarrow{KA}} = -1$



Движения

движение - отображение плоскости на саму себя (т.е. каждой точке плоскости ставится в соответствие другая точка плоскости), при котором сохраняется расстояние между точками

Данная фигура	Центральная симметрия	Осевая симметрия	Параллельный перенос	Поворот
				

Уравнения прямой

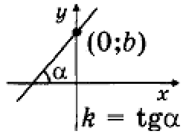
- с угловым коэффициентом:

$y = kx + b$

прямые $\parallel$ *если* $k1 = k2$ $(b1 \neq b2)$

прямые $\perp$ *если* $k1 \cdot k2 = -1$

угол между прямыми: $tg\,\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$



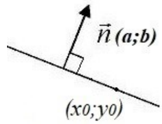
- общее *(через нормаль):*

$ax + by + c = 0 \Rightarrow$

$\vec{n}(a; b)$ *- нормальный вектор (* $\perp$ *прямой)*

если прямая проходит через точку $(x_0; y_0)$

$\Rightarrow$ $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$



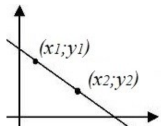
расстояние от точки M до прямой:

$d = \left|\frac{ax_m + by_m + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

угол между прямыми равен углу между их нормалями

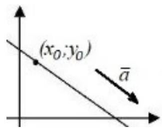
- каноническое *(через две точки):*

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$



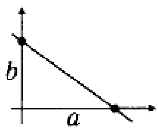
(через точку и направляющий вектор):

$\frac{x - x_0}{x_a} = \frac{y - y_0}{y_a}$



- в отрезках:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$



- параметрическое:

$\begin{cases} x = a_1 t + x_0 \\ y = a_2 t + y_0 \end{cases}$

- нормальное: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$

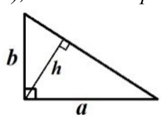
(подставив координаты точки получим расстояние от точки до прямой)

метод площадей (или объемов) для нахождения высоты

часто в задачах для нахождения высоты используют формулы площади (или объема), записанные разными способами

пр:

найти высоту h



$S_\Delta = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$

$\Rightarrow h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$