Алгебра - 7 класс

Свойства степени

«а в степени n»

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n множителей}} = a^n$$

a - основание
n - показатель

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

($a \neq 0$, 0^0 не определено)

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

пр: $\frac{(a^2 \cdot a)^2}{a^4 \cdot a^2} = \frac{a^{(2+1)\cdot 2}}{a^{4+2}} = \frac{a^6}{a^6} = a^{6-6} = a^0 = 1$

Буквенные выражения

буквенное выражение - конструкция, составленная из чисел, букв («неизвестных» величин), скобок и знаков арифметических действий

пр: найти значение выражения $(3-2x)^2$ при $x = -1$
$\Rightarrow$ подставим вместо *x* его значение
$\left(3 - 2 \cdot (-1)\right)^2 = 5^2 = 25$

пр: выражение $\frac{1}{x-1}$ при $x = 1$ не определено («не имеет смысла», т.к. «на ноль делить нельзя»)

раскрытие скобок

$c(a+b) = ca + cb$ $\quad -c(a+b) = -ca - cb$
$c(a-b) = ca - cb$ $\quad -c(a-b) = -ca + cb$
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

пр: $(x-2)(3+x) = 3x + x^2 - 6 - 2x = x^2 + x - 6$

формулы сокращенного умножения

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$
$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

пр: $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + +3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + +3c^2a + 3c^2b + 6abc$

разложение на множители - представление в виде произведения. Используются методы:

- *вынесение общего множителя за скобки*

пр: $4x^3 + 8x^2y + 2x^2 = \underline{2x^2} \cdot 2x + \underline{2x^2} \cdot 4y + \underline{2x^2} \cdot 1 = 2x^2(2x + 4y + 1)$

- *группировка*

пр: $2x - ax + 2y - ay = 2(x+y) - a(x+y) = (2-a)(x+y)$

- *формулы сокращенного умножения*

пр: $x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x-2y)(x+2y)$

Системы линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

решением является пара значений *(x;y)*, при которых оба уравнения обращаются в верные равенства;
система может не иметь решений, или иметь бесконечно много решений

пр: $\begin{cases} -x + 3y = 3 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

метод подстановки:

выразить одну неизвестную из одного уравнения и подставить в другое уравнение, получится уравнение с одной неизвестной

пр: из первого уравнения выразим *x*:
$x = 3y - 3$
и подставим во второе уравнение:
$2(3y-3) + y = 8 \;\Rightarrow\; 7y = 14 \;\Rightarrow\; y = 2$
теперь найдем *x*: $x = 3 \cdot 2 - 3 = 3$
ответ: (3;2) $\quad x = 3;\ y = 2$

метод сложения:

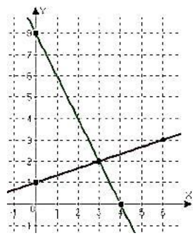
преобразовать уравнения системы так, чтобы при сложении (или вычитании) уравнений одна из неизвестных сократилась, и получилось уравнение с одной неизвестной

пр: умножим первое уравнение на 2:
$\begin{cases} -x + 3y = 3 \quad | \cdot 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$
сложим уравнения (*x* сократится):
$(-2x + 2x) + (6y + y) = 6 + 8 \;\Rightarrow$
$7y = 14 \;\Rightarrow\; y = 2$
подставим найденное значение *y* в любое из уравнений и найдем *x*:
$-x + 3 \cdot 2 = 3 \;\Rightarrow\; x = 3$
ответ: (3;2) $\quad x = 3;\ y = 2$

графический метод:

построить две прямые, точка их пересечения является решением системы

пр:
построим две прямые
(прямую можно построить по двум точкам)
эти прямые пересекаются в точке (3;2)



несовместная система ~ не имеет решений (прямые параллельны)
недоопределенная система ~ бесконечно много решений (прямые совпадают)

Функции

переменная - величина, которая может принимать различные значения

функция - *это зависимость одной переменной от другой, когда для каждого значения независимой переменной* («аргумента», обычно обозначают *x*) *задано* <u>*единственное*</u> *значение зависимой переменной* («функции», обычно обозначают *y*)

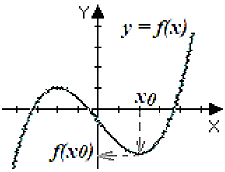
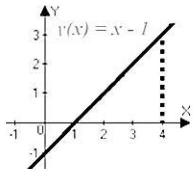
функция может быть задана описанием, таблицей, графиком, формулой

область определения - все значения аргумента, для которых функция задана (определена)

область значений - все значения функции

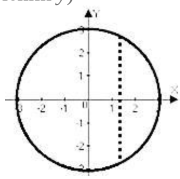
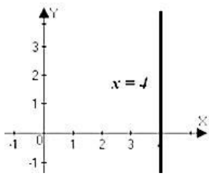
нули функции – такие значения аргумента, для которых значение функции равно нулю $f(x_0) = 0$ (точки пересечения графика с осью *x*)

пр: графики функций (каждому значению *x* соответствует единственное значение *y*)

$f(x_0)$ - значение функции в т.x_0

пр: эти линии не являются графиками функций (некоторым значениям *x* соответствует несколько значений *y*)

Статистические характеристики

статистика ~ анализ количественных данных

числовой ряд ~ набор чисел

пр: ряд из 8 чисел -2; 11; -2; 5; 7,5; 11; 0; -2,5

среднее арифметическое - *сумма всех чисел ряда, деленная на их количество*

пр: $\frac{(-2)+11+(-2)+5+7{,}5+11+0+(-2{,}5)}{8} = \frac{28}{8} = 3{,}5$

размах - *разность между наибольшим и наименьшим из чисел ряда*

мода - *число, которое встречается в ряду чаще других* (может быть несколько, или не быть ни одной)

пр: размах: $11 - (-2{,}5) = 13{,}5$ моды: -2 и 11

медиана - *число в середине упорядоченного ряда* (при четном количестве чисел в ряду - среднее арифметическое двух чисел в середине)

пр: упорядочим ряд: -2,5; -2; -2; 0; 5; 7,5; 11; 11 ⇒ медиана: $\frac{0+5}{2} = 2{,}5$

Линейная функция $y = kx + b$

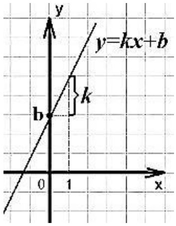


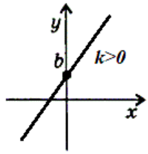
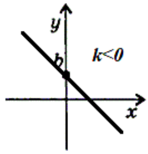
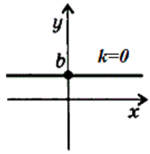
график - прямая

k - «угловой коэффициент»

b - «сдвиг вдоль оси y»

$b = y(0)$

$k = y(1) - y(0)$

при $k > 0$ функция возрастает

при $k < 0$ функция убывает

при $k = 0$ функция постоянна

построение графика: *по двум точкам*

по очереди подставляем в уравнение два любых значения *x* и находим соответствующие значения *y*, получаем координаты двух точек, принадлежащих прямой, проводим прямую через эти точки

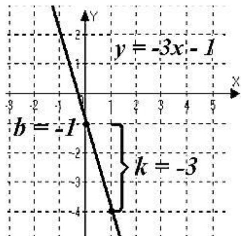
проще всего найти две точки по коэффициентам: (0;b) и (1;b+k)

пр: построить график функции $y = -3x - 1$

$b = -1 \Rightarrow$ точка пересечения с осью *y* (0;-1)

$k = -3 \Rightarrow$ функция убывает («на 3 клеточки») ⇒ (1;-4)

проводим прямую через эти точки



взаимное расположение двух прямых:

если $k_1 \neq k_2$ прямые пересекаются

(точку пересечения можно найти из уравнения $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$)

если $k_1 = k_2$ прямые параллельны (или совпадают)

если $k_1 \cdot k_2 = -1$ прямые перпендикулярны

Функции $y = x^2$ и $y = x^3$

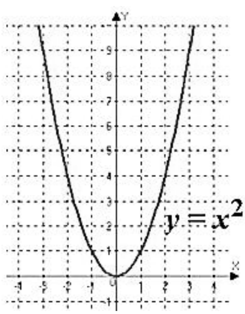
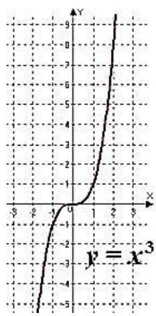


график - парабола



кубическая парабола

Алгебра - 8 класс

Арифметический квадратный корень

«корень из a» - число, квадрат которого равен a

пр: $2^2 = (-2)^2 = 4 \;\Rightarrow\; \pm 2$ – это корни из 4

«арифметический корень из a» - неотрицательное число, квадрат которого равен a

$\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a}$ $a \ge 0, \sqrt{a} \ge 0$

пр: $\sqrt{0} = 0;\ \sqrt{1} = 1;\ \sqrt{4} = 2;\ \sqrt{9} = 3;\ \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

пр: $\sqrt{6} \approx \sqrt{6{,}25} = 2{,}5;\ \sqrt{11} \approx \sqrt{10{,}89} = 3{,}3$

пр: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2;\ \sqrt{2} = 1{,}41\ldots$ *(иррациональное число)*

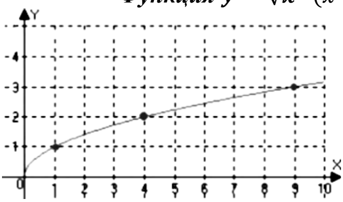
свойства: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$

пр: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

от иррациональности (корней) в знаменателе принято «избавляться»

пр: $\frac{3}{\sqrt{2}}\Big|_{\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ *пр:* $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\Big|_{\cdot(1-\sqrt{x})} = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{1^2-\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1-2\sqrt{x}+x}{1-x}$

Функция $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ $(x \ge 0)$



Квадратные уравнения

формула корней квадратного уравнения:

$ax^2 + bx + c = 0$

$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$

$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$

дискриминант:

$D > 0 \Rightarrow$ *два корня*

$D = 0 \Rightarrow$ *один корень*

$D < 0 \Rightarrow$ *нет корней*
(действительных)

пр: $2x^2 - x - 3 = 0$

$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -3$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25$

$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -1; \frac{3}{2}$

теорема Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

разложение на множители:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

метод выделения полного квадрата:

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$

$a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

биквадратные уравнения: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

решают заменой переменной $t = x^2$

Рациональные дроби

рациональная дробь ~ содержит переменную в знаменателе

основное свойство дроби - если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить или разделить на одно и то же выражение (не равное нулю), то получится равная дробь

$\frac{A}{B} = \frac{A}{B}\Big|_{\cdot C} = \frac{AC}{BC} \qquad \frac{A}{B} = \frac{A}{B}\Big|_{:C} = \frac{A:C}{B:C} \qquad (C \ne 0)$

действия с рациональными дробями

сложение и вычитание:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{A}{C}\Big|_{\cdot D} \pm \frac{B}{D}\Big|_{\cdot C} = \frac{AD \pm CB}{CD}$$

или $\frac{A}{CE} \pm \frac{B}{DE} = \frac{A}{CE}\Big|_{\cdot D} \pm \frac{B}{DE}\Big|_{\cdot C} = \frac{AD \pm CB}{CDE}$

умножение и деление:

$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$

полезно помнить, что:

$-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$ | $-\frac{A+B}{C} = -\frac{A}{C} - \frac{B}{C}$ | $\frac{A}{B} \cdot C = \frac{AC}{B}$

$\frac{1}{A-B} = -\frac{1}{B-A}$ | $-\frac{A-B}{C} = -\frac{A}{C} + \frac{B}{C}$ | $\frac{A}{B} : C = \frac{A}{BC}$

пр: $\frac{6}{(x-1)(x+2)} + \frac{2}{(\mathbf{1-x})} = \frac{6}{(x-1)(x+2)} - \frac{2}{(\boldsymbol{x-1})}\Big|_{\cdot(\boldsymbol{x+2})} =$

$= \frac{6}{(x-1)(x+2)} - \frac{2(\boldsymbol{x+2})}{(x-1)(\boldsymbol{x+2})} = \frac{6-2(x+2)}{(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x+2})} =$

$= \frac{\mathbf{-2x+2}}{(x-1)(x+2)} = \frac{\mathbf{-2(x-1)}}{(\boldsymbol{x-1})(x+2)} = -\frac{2}{(x+2)}$ (при $x - 1 \ne 0$)

! *при x=1 исходное выражение не определено, а полученное выражение определено и равно* $-2/3$

Дробно-рациональные уравнения

приводятся к виду:

$\boldsymbol{\frac{A(x)}{B(x)} = 0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \boldsymbol{A(x) = 0} \\ \boldsymbol{B(x) \ne 0} \end{cases}$

пр: $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$

$\frac{x-3}{x-5}\Big|_{\cdot\boldsymbol{x}} + \frac{1}{x}\Big|_{\cdot(\boldsymbol{x-5})} - \frac{x+5}{x(x-5)} = 0$

$\frac{x(x-3)+(x-5)-(x+5)}{x(x-5)} = 0$

$\frac{x^2-3x-10}{x(x-5)} = 0$

$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 = 0 \\ x(x-5) \ne 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -2;\ \mathbf{5} \\ x \ne 0;\ \mathbf{5} \end{cases} \;\Rightarrow\; x = -2$

Множества

множество - «набор элементов»

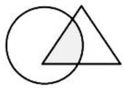
$a \in A$ - *элемент a принадлежит множеству A*

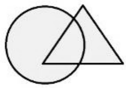
$A \subset B$ - *множество A принадлежит множеству B*

пересечение множеств $A \cap B$ - множество элементов, принадлежащих обоим множествам (A и B)

объединение множеств $A \cup B$ - множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (A или B)

пр: K - множество точек круга
T - множество точек треугольника


пересечение К ∩ Т


объединение К ∪ Т

пр: множество целых чисел от 0 до 3 (конечное)

$Z_0^3 = \{0; 1; 2; 3\}$

пр: множество четных чисел (бесконечное)

$E = \{2n; n \in Z\}$

основные числовые множества:

N - *натуральные числа* $\{1; 2; 3 \ldots\}$

Z - *целые числа* $\{0;\ \pm 1;\ \pm 2, \pm 3 \ldots\}$

Q - *рациональные числа* $\left\{\frac{p}{q};\ p \in Z, q \in N\right\}$

(могут быть записаны обыкновенной дробью, конечной или бесконечной периодической десятичной дробью) *пр:* $\frac{1}{3} = 0,(3)$

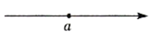
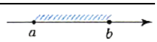
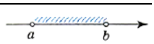
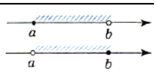
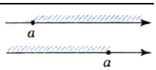
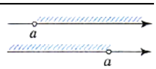
I - *иррациональные числа (не рациональные, бесконечные непериодические десятичные дроби)* *пр:* $\sqrt{2} \approx 1{,}4142 \ldots$ $\quad \pi \approx 3{,}14159 \ldots$

R - *действительные (вещественные) числа (все точки числовой оси, от* $-\infty$ *до* $+\infty$*)*

C - *комплексные (мнимые) числа* $(i = \sqrt{-1})$

$N \subset Z \subset Q \subset R$ $(Q \cup I) \subset C$

числовой промежуток - *множество точек числовой оси:*

$x = a$	$\{a\}$ *точка*	
$a \le x \le b$	$[a; b]$ *отрезок*	
$a < x < b$	$(a; b)$ *интервал*	
$a \le x < b$ $a < x \le b$	$[a; b)$ $(a; b]$ *полуинтервал*	
$x \ge a$ $x \le a$	$[a;\ +\infty)$ $(-\infty; a]$ *луч*	
$x > a$ $x < a$	$(a;\ +\infty)$ $(-\infty; a)$ *открытый луч*	
$x \in R$	$(-\infty; +\infty)$ *вся числовая ось*	

Неравенства

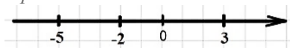
неравенство - отношение величин, записанное с одним из знаков:

$<$ или $>$ «строгое» неравенство

$\le$ или $\ge$ «не строгое» неравенство

$\ne$ (не равно)

меньше то число, которое на числовой оси находится левее *пр:* $-5 < -2 < 0 < 3$



- *если* $a < b$ *и* $b < c$, *то* $a < c$
- *если* $a < b$ *и* $c < d$, *то* $a + c < b + d$
  $\cancel{a - c < b - d}$
- *если* $a < b$ *и* $c < d$, *то* $a \cdot c < b \cdot d$
  $(a, b, c, d > 0)$ $\cancel{a : c < b : d}$
- *если* $a < b$ $(a, b > 0)$, *то при* $n > 0$ $a^n < b^n$
  при $n < 0$ $a^n > b^n$

пр: $a < 3 \Rightarrow a^2 < 9,\ \frac{1}{a} > \frac{1}{3}$

- *если* $a < b$, *то* $a + c < b + c$
  $a - c < b - c$

к левой и правой части неравенства можно прибавить (или отнять) одно число; т.е. можно перенести слагаемое из одной части неравенства в другую, изменив знак действия

пр: $x + 1 > 0 \quad | -1$
$x > -1$

- *если* $a < b$, *то* *при* $c > 0$: $a \cdot c < b \cdot c$, $a : c < b : c$; *при* $c < 0$: $a \cdot c > b \cdot c$, $a : c > b : c$

обе части неравенства можно умножить (или разделить) на положительное число, но при умножении (или делении) на отрицательное число, нужно изменить знак неравенства

пр: $2x > 6 \quad | : 2$
$x > 3$

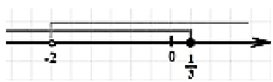
пр: $-2x > 6 \quad | : (-2)$
$x < -3$

решение неравенства - множество значений переменной, при которых неравенство верно

решение системы неравенств - множество значений переменной, при которых все неравенства системы верны (т.е. пересечение множеств решений этих неравенств)

решение неравенств (ответ) принято записывать в виде числовых промежутков

пр: $\begin{cases} 2 - 3x \ge 1 \\ x + 5 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{3} \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-2; \frac{1}{3}\right]$



неравенства вида $|x| \lessgtr a$

пр: $|x| \le 2$

$x \in [-2; 2]$

пр: $|x| > 2$

$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Степень с целым показателем

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$ *пр:* $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$ *пр:* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{9}{8}$

пр: $2^0 = 1$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$ *пр:* 0^0 – не определено

стандартный вид числа:

$a \cdot 10^n,\ 1 \leq |a| < 10$ *(мантисса)*, $n \in Z$ *(порядок)*

пр: $0{,}00011 = 1{,}1 \cdot 10^{-4} = 1{,}1e-4$

$2020 = 2{,}02 \cdot 10^3 = 2{,}02e+3$

$1 = 1 \cdot 10^0 \qquad 0 = ?$

Погрешность приближения

абсолютная погрешность - модуль разности истинного и приближенного значений

относительная погрешность - отношение абсолютной погрешности к модулю истинного или приближенного значения

пр: $\pi \approx 3{,}14$

абс. погр. $\Delta\pi = |\pi - 3{,}14| = 0{,}00159\ldots$

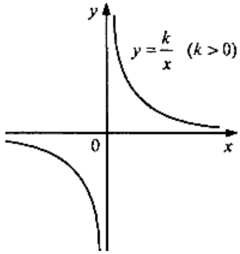
отн. погр. $\frac{\Delta\pi}{|3{,}14|} = 0{,}000507\ldots$

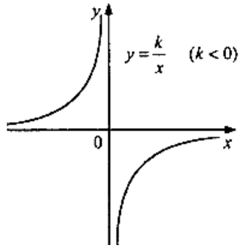
пр: $a = 1 \pm 0{,}1 \Rightarrow 1 - 0{,}1 \leq a \leq 1 + 0{,}1$

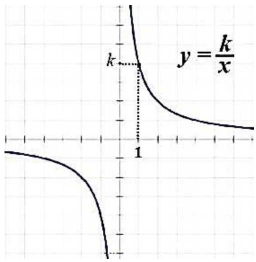
Функция $y = \frac{k}{x}$ $(xy = k)$

$y = kx$ *«прямая пропорциональность»*

$y = \frac{k}{x}$ *«обратная пропорциональность»*







$y(0)$ – не определено

$k = y(1)$

график - гипербола

алгебраическое выражение - конструкция из чисел и букв («переменных»), соединенных скобками и знаками арифметических действий ($+ - \cdot : \sqrt{}$ ^ с целым показателем)

ОДЗ - *область допустимых значений* - значения переменных, при которых выражение имеет смысл

$\frac{1}{A} \Rightarrow A \neq 0$ *выражение в знаменателе*

$\sqrt{A} \Rightarrow A \geq 0$ *выражение под знаком корня*

A^α (при $\alpha \leq 0$) $\Rightarrow A \neq 0$ *основание степени*

… *и др.*

пр: найти ОДЗ выражения $\frac{\sqrt{x+3}+(x-1)^0}{x(x+2)} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2) \neq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0;\ -2 \\ x \geq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Уравнения n-ой степени $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$

- *если x_0 - корень многочлена $P_n(x)$, то* $P_n(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x)$
- *если x_0 - целый корень многочлена с целыми коэф-ми, то* $|a_n| \vdots |x_0|$

пр: $x^3 - x^2 + 13x - \boxed{2} = 0$

попробуем найти целый корень: $\boxed{2} \vdots 1$ и 2

проверим числа $\pm 1;\ \pm 2$ (подставив в уравнение, или по схеме Горнера, или угадав графически) $\Rightarrow$ число 2 является корнем $\Rightarrow$ найдем $P_{n-1}(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 13x - 2 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 - 6x + 1 \\ -6x^2 + 13x & \\ \underline{-6x^2 + 12x} & \\ x - 2 & \\ \underline{x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow P_n(x) = (x-2)(x^2 - 6x + 1) = 0$

- *если $x_0 = \frac{p}{q}$ рациональный корень многочлена с целыми коэф-ми, то $|a_n| \vdots |p|$ и $|a_0| \vdots |q|$ и если $P_n(k \epsilon Z) \neq 0$, то $P_n(k) \vdots (p - kq)$*

пр: рац. корни ур-я $\boxed{6}x^3 - x^2 + x - \boxed{1} = 0$ следует искать среди чисел: $\pm 1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{6}$

при всех $x < 0$ $P_n(x) < 0 \Rightarrow$ отриц. корней нет

возьмем $k = \pm 1 \Rightarrow$ должны выпол-ся условия $P(1) = 5 \vdots (p - q),\ P(-1) = -9 \vdots (p + q)$

т.е. подходит только $+\frac{1}{2}$ (но нужно проверить)

Теорема Виета для уравнений n-ой степени

$x_1 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$

$x_1x_2 + x_1x_3 \ldots + x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$

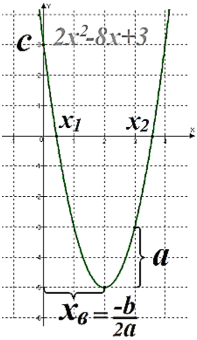
$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}$

$x_1x_2 \ldots\ x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$

Алгебра - 9 класс

Функция $y = ax^2 + bx + c$ (квадратичная)

нули функции (точки пересечения с осью x) - корни квадратного уравнения



$D = b^2 - 4ac$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

вершина параболы:

$x_в = -\frac{b}{2a}$ $\quad y_в = y(x_в)$

$a = y(x_в + 1) - y(x_в)$

$b = -2ax_в$

$c = y(0)$

$\cup$ $a > 0$ *ветви направлены вверх*

$\cap$ $a < 0$ *ветви направлены вниз*

 $a > 1$ *парабола «прижата» к оси y*

 $a < 1$ *парабола «прижата» к оси x*

$\updownarrow$ c *точка пересечения с осью y*

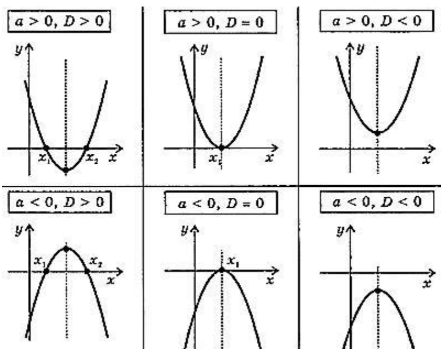
$\leftarrow$ $ab > 0$ *сдвиг вдоль оси x налево*

$\rightarrow$ $ab < 0$ *сдвиг вдоль оси x направо*

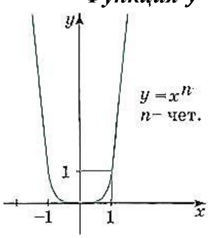
 $D > 0$ *парабола пересекает ось x в двух точках*

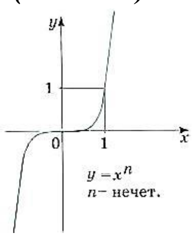
 $D = 0$ *парабола касается оси x в одной точке*

 $D < 0$ *парабола не пересекает ось x*



Функция $y = x^n$ (степенная)





Квадратные неравенства

$ax^2 + bx + c \gtrless 0$

- решить квадратное уравнение

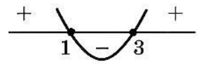
- схематично изобразить параболу - корни, направление ветвей

- выписать нужные промежутки

пр: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 3$

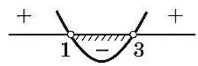
$x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$



пр: $x^2 - 4x + 3 < 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 3$

$x \in (1; 3)$



пр: $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

$D = 0 \quad x_1 = 2$

$x \in \{2\}$

пр: $x^2 - 3x + 4 > 0$

$D < 0$

$x \in R$

Графический метод решения уравнений и неравенств с двумя переменными

для уравнений - нахождение точек пересечения линий координатной плоскости

для неравенств - нахождение пересечения областей координатной плоскости

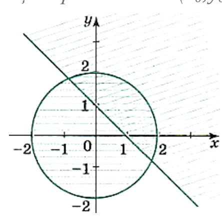
$y = kx + b$ $(ax + by + c = 0)$ *прямая*

$y = \frac{k}{x}$ $(xy = k)$ *гипербола*

$y = ax^2 + bx + c$ *парабола*

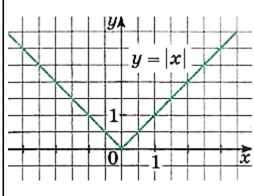
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ *окружность радиуса r с центром в точке (x_0;y_0)*

пр: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$



Функция $y = |x|$ (модуль)

$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$



решение уравнений и неравенств с модулем

$F(|g(x)|, x) \gtrless 0 \Rightarrow$ *рассмотреть две ветви*

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ F(g(x), x) \gtrless 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ F(-g(x), x) \gtrless 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Элементы комбинаторики

комбинаторика ~ подсчет количества комбинаций

комбинаторное правило умножения *- если нужно выбрать k элементов из некоторого множества элементов, и 1-ый элемент можно выбрать n_1 способами, ... , k-ый элемент - n_k способами, то число всех возможных комбинаций равно* $\boldsymbol{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$

пр: сколько вариантов обеда можно составить, если в столовой есть 2 первых блюда, 4 вторых блюда и 3 напитка? $\Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

факториал $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 1}$ $(0! = 1)$

пр: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Виды комбинаций:

перестановки $\boldsymbol{P_n = n!}$

из n различных элементов

пр: сколькими способами можно расставить 5 книг на полке? $\Rightarrow P_5 = 5! = 120$

перестановки с повторениями $\overline{\boldsymbol{P_n}} = \dfrac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}}$

если 1-ый элемент повторяется n_1 раз, ..., k-ый элемент - $n_к$ раз

пр: сколькими способами можно расположить в ряд 3 белых и 2 черных шара?

$\Rightarrow \overline{\boldsymbol{P_5}} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

размещения $\boldsymbol{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$

выбор k элементов из n различных элементов, порядок важен

пр: сколькими способами можно выбрать председателя и заместителя из 5 человек?

$\Rightarrow A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 20$

размещения с повторениями $\overline{\boldsymbol{A_n^k}} = \boldsymbol{n^k}$

если элементы могут повторяться

пр: сколько трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1,2,3,4,5?

$\Rightarrow \overline{A_5^3} = 5^3 = 125$

сочетания $\boldsymbol{C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$

выбор k элементов из n различных элементов, порядок не важен

пр: сколькими способами можно выбрать 3 дежурных из 5 человек?

$\Rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$

сочетания с повторениями $\overline{\boldsymbol{C_n^k}} = \dfrac{\boldsymbol{(n+k-1)!}}{\boldsymbol{k!\,(n-1)!}}$

если элементы могут повторяться

пр: сколькими способами можно собрать букет из 3 роз, если в магазине есть розы 5-ти цветов?

$\Rightarrow \overline{C_5^3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$

Бином Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

(коэффициенты из треугольника Паскаля)

Элементы теории вероятностей

(элементарный) исход - один из равновозможных случаев (вариант того, что может произойти)

пр: бросают кубик - возможно 6 исходов - выпадет одно из 6 чисел

событие - условие, которое может выполниться или не выполниться

пр: рассмотрим событие (условие)

A = «выпадет число меньше 3»

классическое определение вероятности:

вероятность события ~ отношение числа исходов, благоприятных (подходящих) событию, к общему числу исходов

пр: событию *A* подходят 2 исхода (выпадет 1 или 2)

$\Rightarrow$ вероятность события *A* $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

статистическое определение вероятности *(из эксперимента):* отношение числа испытаний, в которых произошло событие, к числу всех испытаний

пр: при проверке партии семян выяснилось, что из 1000 посаженных семян взошло 805

$\Rightarrow$ вероятность того, что семечко из этой партии взойдет: $P = \frac{805}{1000}$

свойства вероятности:

- достоверное событие:

$P(\Omega) = 1$ (обязательно произойдет)

- невозможное событие:

$P(\emptyset) = 0$ (обязательно не произойдет)

- противоположное событие:

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

- произведение (пересечение) событий:

$AB = A \cap B =$ «произойдет и A, и B»

условная вероятность (наступления события B при условии наступления события A)

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B|A)$

если A и B - *независимые события (наступление события A не меняет вероятность наступления события B)*, то

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

- сумма (объединение) событий:

$A + B = A \cup B =$ «произойдет или A, или B»

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

если A и B - *несовместные события (не могут произойти одновременно)*, то

$P(AB) = 0;\ P(A+B) = P(A) + P(B)$

- разность событий:

$A - B = A \backslash B =$ «A произойдет, B не произойдет»

$P(A-B) = P(A)P(\bar{B})$

Арифметический корень n-ой степени

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a \quad (a \geq 0)$

(n - показатель, a - подкоренное выражение)

$\sqrt[n]{a}$ *при a <0 определен только для нечетных n*

$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} \quad (a \geq 0)$

пр: $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

$4^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{2\cdot\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2\cdot 2^{\frac{1}{3}}$

Меры центральной тенденции

среднее арифметическое $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

среднее геометрическое $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

среднее гармоническое $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

Последовательности

числовая последовательность - упорядоченный набор чисел (с заданным правилом вычисления каждого следующего числа)

пр: числа Фибоначчи (сумма двух предыдущих)

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…

$x_1 = 1, \; x_2 = 1, \quad x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$

Арифметическая прогрессия:

$a_{n+1} = a_n + d \quad$ *(d - «разность»)*

$a_n = a_1 + d(n-1) = kn + b \qquad S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

Геометрическая прогрессия:

$b_{n+1} = b_n \cdot q \quad$ *(q - «знаменатель»)*

$b_n = b_1 q^{n-1} \qquad S_n = b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$

бесконечно убывающая: при $|q| < 1 \quad S_n \to \frac{b_1}{1-q}$

предел последовательности - число, к которому стремятся члены последовательности

при $n \to \infty$ $\{x_n\} \to A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\; \exists N > 0: \forall n > N \; |x_n| < \varepsilon$

число Эйлера e $= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718$

Таблица квадратов

$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$41^2 = 1681$	$51^2 = 2601$	$61^2 = 3721$	$71^2 = 5041$	$81^2 = 6561$	$91^2 = 8281$
$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$	$42^2 = 1764$	$52^2 = 2704$	$62^2 = 3844$	$72^2 = 5184$	$82^2 = 6724$	$92^2 = 8464$
$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$	$53^2 = 2809$	$63^2 = 3969$	$73^2 = 5329$	$83^2 = 6889$	$93^2 = 8649$
$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$	$54^2 = 2916$	$64^2 = 4096$	$74^2 = 5476$	$84^2 = 7056$	$94^2 = 8836$
$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$	$55^2 = 3025$	$65^2 = 4225$	$75^2 = 5625$	$85^2 = 7225$	$95^2 = 9025$
$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$	$56^2 = 3136$	$66^2 = 4356$	$76^2 = 5776$	$86^2 = 7396$	$96^2 = 9216$
$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$	$57^2 = 3249$	$67^2 = 4489$	$77^2 = 5929$	$87^2 = 7569$	$97^2 = 9409$
$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$	$58^2 = 3364$	$68^2 = 4624$	$78^2 = 6084$	$88^2 = 7744$	$98^2 = 9604$
$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$	$59^2 = 3481$	$69^2 = 4761$	$79^2 = 6241$	$89^2 = 7921$	$99^2 = 9801$
$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$	$60^2 = 3600$	$70^2 = 4900$	$80^2 = 6400$	$90^2 = 8100$	

Таблица степеней

n	2^n	3^n	4^n	5^n	6^n	7^n	8^n	9^n
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	9	16	25	36	49	64	81
3	8	27	64	125	216	343	512	729
4	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
8	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
9	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489
10	1024	59049	1048576	9765625	60466176	282475249	1073741824	3486784401

Алгебра - 10 класс

Рациональные уравнения

распадающиеся уравнения

$A(x)\cdot B(x)=0 \Rightarrow A(x)=0$ или $B(x)=0$

$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Rightarrow A(x)=0$ и $B(x)\neq 0$

Рациональные неравенства

метод интервалов *для неравенств вида*

$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)\gtreqless 0$

a_i *- точки перемены знака*

пр: $\frac{x(x-2)^2(x+4)^2}{(x+7)^3(x-5)(x+4)}\geq 0$

«четные» точки: $x=2$ (т.к. эта скобка входит в выражение в четной степени)

«нечетные» точки: $x=0;-4;-7;5$

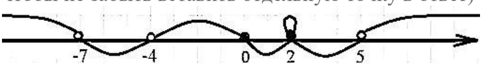
скобка $(x+4)$ входит и в числитель, и в знаменатель – в общем, она входит в выражение в 1ой степени

выражение меняет знак только в «нечетных» точках

- отмечаем на оси точки перемены знака
- если неравенство нестрогое, то закрасим точки, которые входят только в числитель (в этих точках выражение равно нулю), а точки из знаменателя оставим незакрашенными (знаменатель не должен быть равен нулю, т.к. в этих точках значение выражения не определено)
- на самом правом промежутке выражение положительно (т.к. все скобки положительны)
- «идем» справа налево через точки перемены знака: в «нечетных» точках знак меняется, в «четных» точках знак остается прежним

пр:

можно условно изобразить дугами промежутки знакопостоянства (в «четных» точках ставим «петлю», чтобы не забыть вставить отдельную точку в ответ)



- записываем ответ в соответствии со знаком исходного неравенства, включая закрашенные точки и исключая незакрашенные

пр: $(-\infty;-7)\cup(-4;0]\cup\{2\}\cup(5:+\infty)$

если неравенство имеет не совсем подходящий вид, то его нужно преобразовать:

пр: $-4(3-x)(2+5x)<0 \Rightarrow$

разделим нер-во на -4 (при умножении или делении на отрицательное число знак нер-ва меняется)

$(3-x)(2+5x)>0 \Rightarrow$

«перевернем» скобку (т.е. умножим нер-во на -1)

$(x-3)(2+5x)<0 \Rightarrow$

«вынесем» 5 за скобку

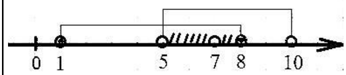
$5(x-3)\left(\frac{2}{5}+x\right)<0 \Rightarrow$

$(x-3)(x+0{,}4)<0 \Rightarrow$ теперь можно применить метод интервалов $\Rightarrow x\in(-0{,}4;3)$

Система *(уравнений или неравенств) ~ пересечение решений*

пр: $\begin{cases}1\leq x\leq 8\\ 5<x<10\\ x\neq 7\end{cases} \Rightarrow$ $[1;8]\cap(5;10)\cap\{R\backslash 7\}$

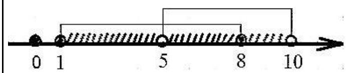
$x\in(5;7)\cup(7;8]$



Совокупность *(уравнений или неравенств) ~ объединение решений*

пр: $\left[\begin{array}{l}1\leq x\leq 8\\ 5<x<10\\ x=0\end{array}\right. \Rightarrow$ $[1;8]\cup(5;10)\cup\{0\}$

$x\in\{0\}\cup[1;10)$



Метод замены неизвестных

пр: $(x^2-4x+3)(x^2-4x+4)=20$

замена $t=x^2-4x \Rightarrow (t+3)(t+4)=20 \Rightarrow$

$t^2+7t-8=0 \Rightarrow t=-8;1$

$\left[\begin{array}{l}x^2-4x=-8\\ x^2-4x=1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pm\sqrt{5}\\ x=-2\pm\sqrt{5}\end{array}\right.$

пр: $\begin{cases}3^{2x}+4^{2y}=82\\ 3^x-4^y=8\end{cases}$ *замена* $\begin{array}{l}a=3^x\\ b=4^y\end{array} \Rightarrow$

$\begin{cases}a^2+b^2=82\\ a-b=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=9\\ b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3^x=9\\ 4^y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$

пр: $\begin{cases}xy(x+y)=30\\ x^3+y^3=35\end{cases}$ *замена* $\begin{array}{l}a=xy\\ b=x+y\end{array} \Rightarrow$

$\begin{cases}ab=30\\ b(b^2-3a)=35\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=6\\ b=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}xy=6\\ x+y=5\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}(2;3)\\ (3;2)\end{array}$

Возвратные (симметричные) уравнения n-ой степени

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$

если $a_0=a_n;\ a_1=a_{n-1}\ \ldots$ то

- если *n* четно - разделить уравнение на x^2 и сделать замену переменной $t=x+\frac{1}{x}$
- если *n* нечетно – то один из корней равен *-1* и при делении $P_n(x)$ на $x+1$ получится возвратное уравнение четной степени

пр: $x^5+6x^4+11x^3+11x^2+6x+1=0$

симметричное ур-е нечет. степени ⇒ корень -1

$(x+1)(x^4+5x^3+6x^2+5x+1)=0 \quad |:x^2$

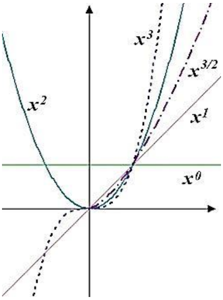
$x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ выделим полный квадрат

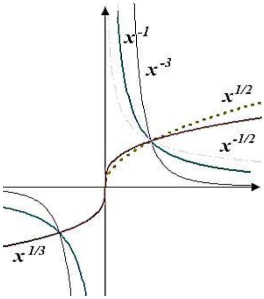
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$ $t=x+\frac{1}{x}$

$t^2+5t+4=0 \Rightarrow t=-1;-4 \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{3}$

Ответ: $-1;\ -2\pm\sqrt{3}$

Функция $y = x^{p}$ (степенная)





свойства степени:

$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\qquad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $(a \neq 0)$

$\boldsymbol{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ $\qquad \boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}}$

$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{nm}}$ $\qquad \boldsymbol{a^0 = 1}$ $(a \neq 0)$

$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$ $\qquad \boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$ $(a \geq 0)$

$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$ $\qquad \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{если } n - \text{нечет.} \\ |a|, \text{если } n - \text{четн.} \end{cases}$

пр: $\frac{(a^2 \cdot a)^2}{a^4 \cdot a^2} = \frac{a^{(2+1)\cdot 2}}{a^{4+2}} = \frac{a^6}{a^6} = a^{6-6} = a^0 = 1$

пр: $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

$4^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{2\cdot\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

Логарифмы

$\log_a b$ - *«степень, в которую нужно возвести* a*, чтобы получить b»* $\Rightarrow$

$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$ $\quad (\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0})$

(основное логарифмическое тождество)

a - «основание логарифма»

b - «выражение под логарифмом»

пр: $\log_2 8 = 3 \quad \log_2 2 = 1 \quad \log_2 \frac{1}{4} = -2 \quad \log_2 1 = 0$

свойства логарифмов:

$\log_a a^b = b$

$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$

$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_a b^n = n \log_a b$

$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ *(переход к другому основанию)*

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\qquad a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

специальные обозначения:

$\lg b = \log_{10} b$ *(десятичный логарифм)*

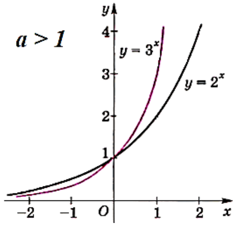
$\ln b = \log_e b$ *(натуральный логарифм,* $\boldsymbol{e} \approx 2{,}7$*)*

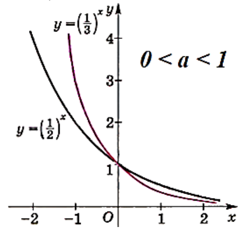
пр: $A = a \cdot 10^k$ $(1 \leq a \leq 9$ *стандартный вид числа)*

$\Rightarrow \quad \lg A = \lg a + k$

Функция $y = a^x$ (показательная)

$(a > 0,\ a \neq 1)$





Показательные уравнения и неравенства

$a^x = b \;\Rightarrow\; x = \log_a b \quad (\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0})$

$a^x \gtrless b \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{если } a > 1, \text{то } x \gtrless \log_a b \\ \text{если } a < 1, \text{то } x \lessgtr \log_a b \end{cases}$

пр: $3^x = 2 \;\Rightarrow\; x = \log_3 2$

метод приведения к одному основанию:

пр: $9^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \Rightarrow 3^{2(x-1)} = 3^{-2x} \Rightarrow$

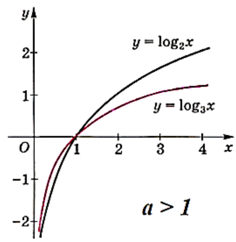
$2x - 2 = -2x \;\Rightarrow\; x = 0{,}5$

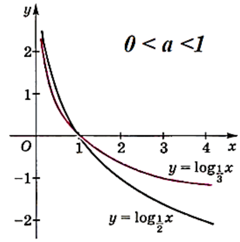
пр: $\frac{1}{2^x} < 0{,}25 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; x > 2$

(если основание <1, при «отбрасывании оснований» знак неравенства меняется)

Функция $y = \log_a x$ (логарифмическая)

$(a > 0,\ a \neq 1)$





Логарифмические уравнения и неравенства

$\log_a x = b \Rightarrow\; x = a^b \quad (\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0})$

$\log_a x \gtrless b \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{если } a > 1, \text{то } x \gtrless a^b \\ \text{если } a < 1, \text{то } x \lessgtr a^b \end{cases}$

пр: $\log_2 x = -3 \;\Rightarrow\; x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

пр: $\log_{0,2} x > 2 \;\Rightarrow x < 0{,}2^2 \Rightarrow\; x < 0{,}04$

(если основание <1, то знак неравенства меняется)

метод приведения к одному основанию:

пр: $\log_2 x > 5 \;\Rightarrow \log_2 x > \log_2 2^5 \Rightarrow x > 32$

пр: $\log_{0,5} \frac{1}{x} \leq \log_4 x \;\Rightarrow -\log_2 \frac{1}{x} \leq 2\log_2 x \Rightarrow$

$\log_2 x \leq \log_2 x^2 \;\Rightarrow x \leq x^2 \;\Rightarrow x(x-1) \geq 0$

ОДЗ: $x > 0 \qquad \Rightarrow x \in [1; +\infty)$

сравнение логарифмов с разными основаниями:

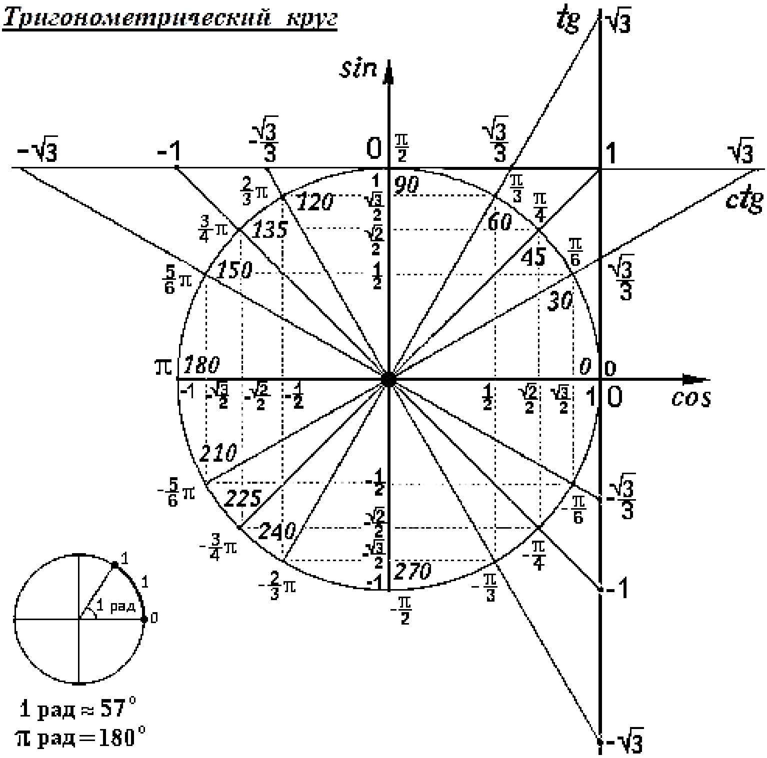
пр: $\log_2 3$ *и* $\log_5 10 \;\Rightarrow 1 < \log_2 3 < 2,\ 1 < \log_5 10 < 2$

$\Rightarrow$ попробуем умножить на 2: $3 < 2\log_2 3 = \log_2 9 < 4,$

$2 < 2\log_5 10 = \log_5 100 < 3 \quad \Rightarrow \log_2 3 > \log_5 10$

Тригонометрия

<u>*Тригонометрический круг*</u>



1 рад ≈ 57°

π рад = 180°

радиан - величина угла, соответствующего дуге окружности, длина которой равна радиусу *(не зависит от окружности)*

синус (sin), косинус (cos), тангенс (tg), котангенс (ctg) (угла на единичной окружности) - это координаты соответствующего радиус-вектора по осям синусов (x=0), косинусов (y=0), тангенсов (x=1), котангенсов (y=1)

$-1 \le \sin\alpha \le 1$

$-1 \le \cos\alpha \le 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(не опред. при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$)

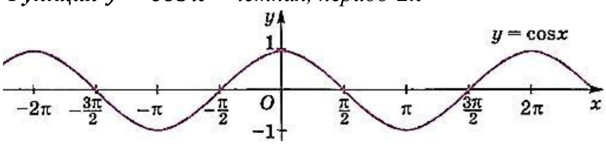
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(не опред. при $\alpha = \pi n$)

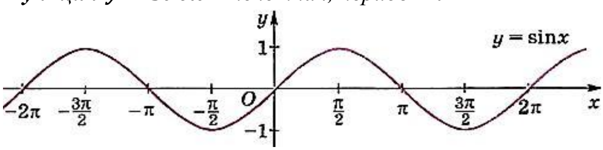
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

Тригонометрические функции

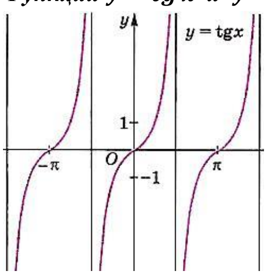
Функция $y = \cos x$ *- четная, период 2π*

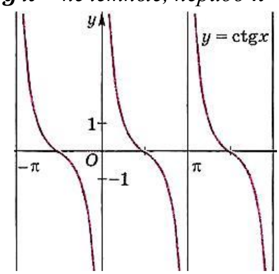


Функция $y = \sin x$ *- нечетная, период 2π*

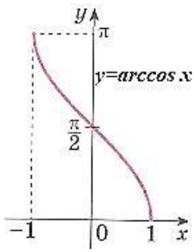


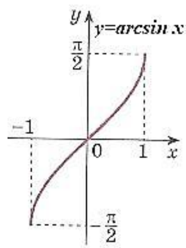
Функции $y = tg\, x$ и $y = ctg\, x$ *- нечетные, период π*

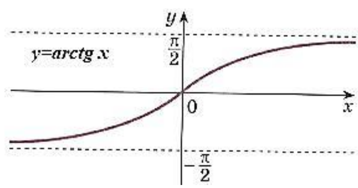


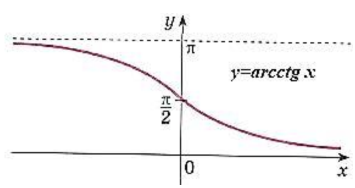


Обратные тригонометрические функции









арккосинус $\alpha = arccos\, x \Leftrightarrow \begin{cases} cos\, \alpha = x \\ \alpha\, \epsilon [0; \pi] \end{cases}$

арксинус $\alpha = arcsin\, x \Leftrightarrow \begin{cases} sin\, \alpha = x \\ \alpha\, \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

арктангенс $\alpha = arctg\, x \Leftrightarrow \begin{cases} tg\, \alpha = x \\ \alpha\, \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

арккотангенс $\alpha = arcctg\, x \Leftrightarrow \begin{cases} ctg\, \alpha = x \\ \alpha\, \epsilon (0; \pi) \end{cases}$

Тригонометрические уравнения

$\boldsymbol{cos\, x = a}$ $(-1 \le a \le 1)$

$\alpha = \pm arccos\, a + 2\pi n$

$\boldsymbol{sin\, x = a}$ $(-1 \le a \le 1)$

$\alpha_1 = arcsin\, a + 2\pi n$

$\alpha_2 = \pi - arcsin\, a + 2\pi n$

или $\alpha = (-1)^n\, arcsin\, a + \pi n$

$\boldsymbol{tg\, x = a}$

$\alpha = arctg\, a + \pi n$

$\boldsymbol{ctg\, x = a}$

$\alpha = arcctg\, a + \pi n$

Тригонометрические формулы

основное тригонометрическое тождество

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $\quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

формулы для суммы и разности углов

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ $\quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\pm \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$

формулы для произведения функций

$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

формулы для суммы и разности функций

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$ $\quad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\pm \sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$

формулы половинных углов

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ $\quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ $\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

формулы универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

формула вспомогательных углов

$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}\,\sin(\alpha + \varphi),$

где $\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\quad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

формулы дополнительных углов

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

формулы приведения

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

$\cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi n) = \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha$

$\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$

$\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\alpha$

$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{ctg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

формулы двойных углов

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$= 1 - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

формулы тройных углов

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

Алгебра - 11 класс

Равносильность уравнений и неравенств

с модулем

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \pm g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array} \right.$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| \gtreqless |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \gtreqless g^2(x)$$

распадающиеся, дробные

$$f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array} \right. \\ x \in D_f \cap D_g \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \\ x \in D_f \cap D_g \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} f(x)g(x)>0 \\ \frac{f(x)}{g(x)}>0 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} f(x)g(x)<0 \\ \frac{f(x)}{g(x)}<0 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases} \end{array} \right.$$

сокращение

$$f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D_\varphi \end{cases}$$

иррациональные

$$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^3(x)$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

показательные

$a > 0,\ a \neq 1$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$a^{f(x)} \gtreqless a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1,\ f(x) \gtreqless g(x) \\ a < 1,\ f(x) \lesseqgtr g(x) \end{cases}$$

логарифмические

$a > 0,\ a \neq 1$

$$log_a f(x) = log_a g(x) \Leftrightarrow \{ f(x) = g(x) > 0$$

$$log_a f(x) \gtreqless log_a g(x) \Leftrightarrow$$

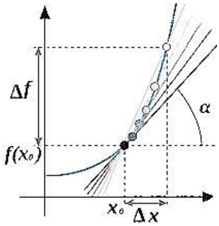
$$\begin{cases} a \gtreqless 1,\ f(x) > g(x) > 0 \\ a \lesseqgtr 1,\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$$

равносильные уравнения/неравенства/системы - имеют одинаковые множества корней

использование формул (свойств корней, логарифмов, тригонометрических функций) может привести к неравносильным преобразованиям

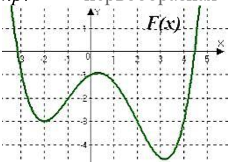
Производная

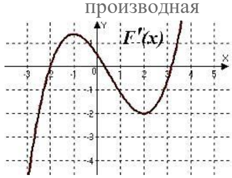
производная (в точке):
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$
предел приращения функции к приращению аргумента



производная (функция): *функция, которая в каждой точке равна значению производной от «первообразной» функции в этой точке*

пр: первообразная производная





уравнение касательной *к функции $f(x)$ в точке x_0*
$y(x) = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0)$

геометрический смысл: тангенс угла наклона касательной $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k$ *(угловой коэффициент касательной прямой $y = kx + b$)*

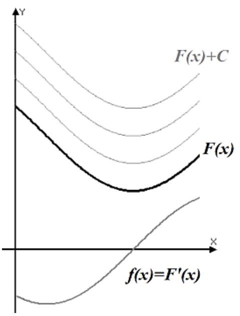
физический смысл: скорость изменения функции
пр: $v(t) = s'(t) \quad a(t) = v'(t) = s''(t)$
скорость - производная от перемещения по времени, ускорение - производная от скорости по времени

дифференцирование - *нахождение производной*
правила дифференцирования:
можно пользоваться таблицей производных (см→)

$(f \pm g)' = f\,' \pm g'$ $\qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f\,'g - fg\,'}{g^2}$
$(fg)' = f\,'g + fg'$
$(fgh)' = f\,'gh + fg'h + fgh\,'$ $\qquad f(g(x))' = f_g'\,g_x'$
пр: $(\sin 2x)' = 2\cos 2x \quad (\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x$

приближенные вычисления
$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f\,'(x_0)\Delta x$
пр: $(1{,}01)^{10} \approx 1^{10} + 9 \cdot 1^9 \cdot 0{,}01 = 1{,}09$

Интеграл



если известна производная функция, то первообразную функцию можно найти с точностью до константы

неопределенный интеграл - *множество первообразных функций (отличающихся на константу)*

$F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$

$\int f(x)dx = F(x) + C \;\Leftrightarrow\; (F(x) + C)' = F(x)' = f(x)$

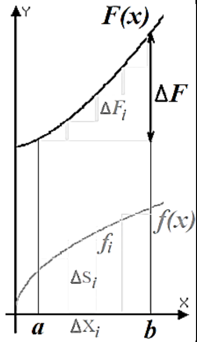
интегрирование - *нахождение функции (первообразной) по ее производной*

правила интегрирования:
можно пользоваться таблицей интегралов (см→)

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
пр: $\int 2\sqrt{x}dx = 2\int x^{0,5}dx = 2\frac{x^{1,5}}{0,5} + C = 4\sqrt{x^3} + C$
$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g)dg$
пр: $\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{x^3+1}d(x^3+1) = \ln(x^3+1) + C$
$\int f(g(x) = kx + b)dx = \frac{1}{k}\int f(g)dg$
пр: $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

формула интегрирования по частям:
$\int udv = uv - \int vdu$
пр: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx + C = xe^x - e^x + C$

определенный интеграл (формула Ньютона-Лейбница)



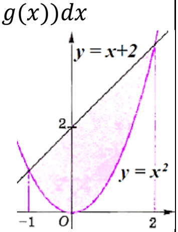
если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

геометрический смысл:
площадь криволинейной трапеции под графиком производной функции

если $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$
$S = \int_a^b f(x)dx = \Delta F$
$\Delta s_i = \Delta x_i \cdot f_i = \Delta x_i \cdot \frac{\Delta F_i}{\Delta x_i} = \Delta F_i$

площадь фигуры между графиками функций:
если $f(x) \geq g(x)$ $\quad S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

пр: площадь фигуры между графиками функций $y = x + 2$ и $y = x^2$
$S = \int_{-1}^{2}(x + 2 - x^2)dx =$
$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = 4{,}5$



физический смысл интеграла: сумма
пр: $\Delta S = \int v(t)dt \quad A = \int F(x)dx$
перемещение - интеграл от скорости, работа - интеграл от силы

свойства определенного интеграла:
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

таблица производных и интегралов

$(c)' = 0$

$(x^n)' = nx^n - 1$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctg\, x)' = \frac{1}{x^2+1}$

$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{x^2+1}$

$\int c = cx + C$

$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x = e^x + C$

$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$

$\int \cos x = \sin x + C$

$\int \sin x = -\cos x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

предел функции *в точке (или на бесконечности)* - величина, к которой стремится значение функции, когда аргумент стремится к этой точке (слева и справа) $A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

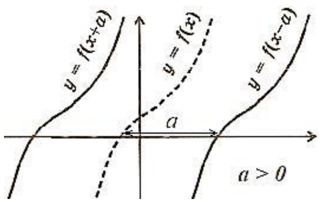
пр: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+4x+1}{5x^2-2x} = \frac{3}{5}$

«замечательные» пределы:

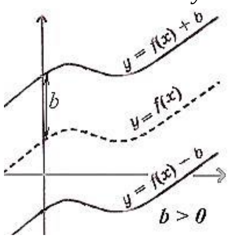
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Преобразование графика функции

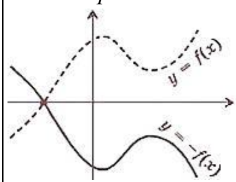
сдвиг вдоль оси x



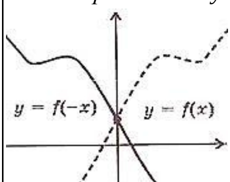
сдвиг вдоль оси y



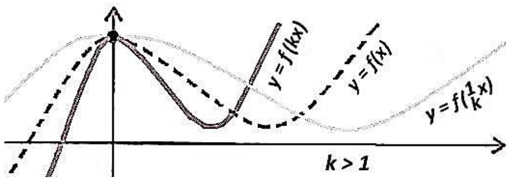
симметрия от оси x



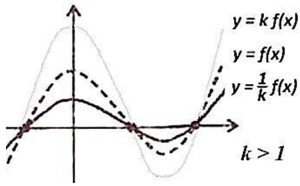
симметрия от оси y



растяжение от оси y



растяжение от оси x



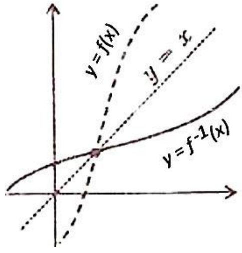
порядок при сложном преобразовании:

$f(kx + a) + b \Rightarrow$

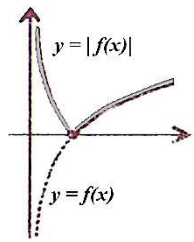
$f\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right) + b$

- *сдвиг вдоль оси x на* $\frac{a}{k}$
- *растяжение от оси x*
- *сдвиг вдоль оси y на* b

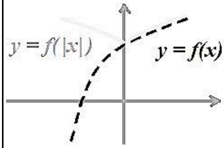
симметрия от оси $y = x$ *(обратная функция)*



перенос нижней части графика симетрично оси x



удаление левой части графика и копирование правой части графика симметрично оси y



Исследование функции

1) *область определения, непрерывность*

D_f - значения аргумента, для которых функция определена (выражение имеет смысл)

$\frac{1}{A} \Rightarrow A \neq 0$	выражение в знаменателе
A^{α} (при $\alpha \leq 0$) $\Rightarrow A \neq 0$	ноль можно возводить только в положительную степень
$\sqrt{A} \Rightarrow A \geq 0$	выражение под знаком корня четной степени
$\log_A B \Rightarrow B > 0,\ A > 0,\ A \neq 1$	выражение под логарифмом и основание логарифма
$\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow \alpha \neq \pi n$	тангенс и котангенс

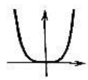
точки разрыва - устранимые/неустранимые

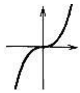
2) *четность/нечетность, периодичность*

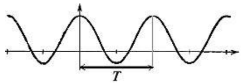
$f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D_f \Rightarrow$ функция четная (симмет. отн. оси oy)

$f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D_f \Rightarrow$ функция нечетная (симмет. отн. точки 0)

$f(x \pm T) = f(x)$ $\forall x \in D_f \Rightarrow$ период $= T$







3) *точки пересечения с осями, промежутки знакопостоянства*

точка пересечения с осью y: $x = 0;\ y = f(0)$

точки пересечения с осью x: $x -$ корни уравнения $f(x) = 0;\ y = 0$ (нули функции)

4) *критические точки, промежутки возрастания/убывания*

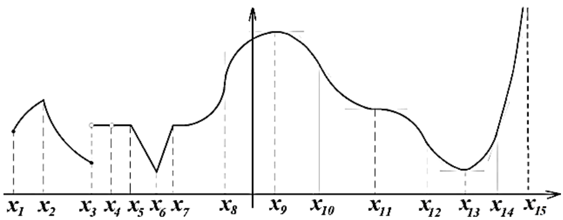
$f(x)$ *не опр. или имеет разрыв* *пр:* $x_3\ x_4\ x_{15}$

f' *не опр.* — критическая точка
пр: $x_2\ x_3\ x_5\ x_6\ x_8$

$f' = 0$ ($f \neq const$) — критическая точка
пр: $x_9\ x_{11}\ x_{13}$
точка экстремума,
если f' меняет знак

$f' > 0$ — промежуток возрастания
пр: $[x_1; x_2]\ [x_6; x_9]\ [x_{13}; x_{15})$

$f' < 0$ — промежуток убывания
пр: $[x_2; x_2]\ [x_5; x_6]\ [x_9; x_{13})$



5) *точки перегиба, промежутки выпуклости/вогнутости*

f'' *не опр. или* $f'' = 0$ *и* f'' *меняет знак* (f не прямая) — точка перегиба (меняется выпуклость/вогнутость)
пр: $x_8\ x_{10}\ x_{12}\ x_{14}$

$f''(x) > 0$ — промежуток вогнутости
пр: $[x_2; x_3]\ [x_7; x_8]\ [x_{10}; x_{11}]\ [x_{12}; x_{15}]$

$f''(x) < 0$ — промежуток выпуклости
пр: $[x_1; x_2]\ [x_8; x_{10}]\ [x_{11}; x_{12}]$

6) *область значений, ограниченность сверху/снизу, экстремумы*

E_f - множество значений, которые может принимать функция

нахождение минимума/максимума функции: сравнить значения функции в критических точках и на границах области определения, в точках разрыва

7) *асимптоты* (прямые, к которым стремится функция)

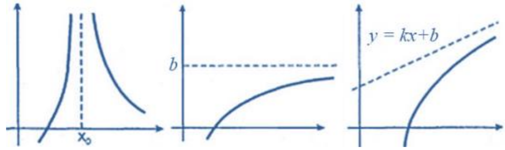
вертикальные $x = x_0$ $\lim\limits_{x \to x0\pm} f(x) = \pm\infty$

горизонтальные $y = b$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

наклонные $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty}(f(x) - kx)$$



8) *график* (для более точного построения можно найти значения функции в некоторых точках)