CADEIA DE MARKOV

COMPONENTES

- Johnantan Christtopher Alves dos Santos Matos
- Laura Costa Pereira Miranda
- Matheus Santana dos Santos

TÓPICOS A SEREM TRABALHADOS

- Processo Markoviano
- Cadeia de Markov
- Algumas definições necessárias para o nosso problema
  - Matriz Redutível
  - Teorema de Perron-Frobenius
  - Diagonalização
  - Classificação de um estado markoviano e Definição da Cadeia ergódica
- Aplicação 1 – Aluguel de Bicicletas
- Aplicação 2 - Posições da guarda de trânsito nos cruzamentos

PROCESSO MARKOVIANO

- É um processo estocástico um sistema que varia de acordo com o tempo tal como a probabilidade de uma determinada cor pigmentar a pétala de uma flor, a flutuação no mercado de ações, entre outras. Em particular um processo Markoviano é um processo estocástico, onde a probabilidade condicional de um evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente, depende apenas do estado presente.

CADEIA DE MARKOV

- Uma cadeia de Markov é um processo Markoviano, onde as variáveis estão definidas em um espaço de estados(conjunto de estados) discreto. Onde P é a matriz de transição, y^0 é o vetor estado inicial e $y^n = P^n y^0$ é o vetor estado na iteração n.

- Uma cadeia de Markov é um processo Markoviano, onde as variáveis estão definidas em um espaço de estados(conjunto de estados) discreto. Onde é a matriz de transição, é o vetor estado inicial e é o vetor estado na iteração n.

MATRIZ REDUTÍVEL

- Uma matriz $A_{n\times n}$ é redutível se existir uma matriz de permutação P tal que: $\mathrm{PAP}^T = \begin{bmatrix} [B] & [C] \\ [0] & [D] \end{bmatrix}$.

- Uma matriz é redutível se existir uma matriz de permutação tal que: .

TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

Seja $A_{n\times n}$ matriz irredutível cujos elementos são não negativos. Então:

- A possui um autovalor positivo λ_1;
- λ_1 tem multiplicidade algébrica $m_1 = 1$;
- As coordenadas de x_1 (autovetor associado à λ_1) são positivas;
- Todos os outros λ_i de A satisfarão $|\lambda_i| < \lambda_1$ se, e somente se, existir $p \in \mathbb{Z}_+$ tal que A^p possua elementos positivos;
- Se os elementos da diagonal principal de A forem todos positivos, então $|\lambda_i| < \lambda_1$, para i 6= 1.

DIAGONALIZAÇÃO

- Se todos os autovalores de uma matriz são distintos então ela é diagonalizável, se P é diagonalizável, temos que:

$$P = S\Lambda S^{-1}$$

, onde Λ é a matriz diagonal composta pelos autovalores de P e S é composta pelos autovetores de P em coluna.

Mas por que precisamos diagonalizar nossa matriz?

VOLTANDO PARA A CADEIA DE MARKOV...

- $y^n = P^n y^0$
- $P^n \rightarrow P * P * P \dots * P$
-

Sabendo que P é diagonalizavel então temos que P^n pode ser escrito da seguinte forma, $P^n = S\Lambda^{\mathrm{n}}S^{-1}$.

CLASSIFICAÇÃO DE UM ESTADO MARKOVIANO E DEFINIÇÃO DA CADEIA ERGÓDICA

- **Estado recorrente**: Uma vez neste estado, um eventual retorno é assegurado;
- **Estado periódico**: O estado que pode somente ser alcançado nos passos $m, 2m, 3m, \ldots$, onde m é um inteiro > 1;
- **Estado ergódico**: Uma vez neste estado, um retorno ao estado é assegurado dentro de um número finito de passos, porém o estado não é periódico e pode voltar antes de qualquer passo n

- **Cadeia ergódica**: Todos os estados são recorrentes e aperiódicos.

APLICAÇÕES

Estações de bicicletas na cidade X

APLICAÇÃO 1

- Em uma cidade X, uma empresa de aluguel de bicicletas gostaria de analisar a demanda de cada ponto de entrega e devolução das bicicletas, para identificar quais pontos de entrega necessitariam ampliar suas vagas. A alocação de mais espaços em cada ponto será feita se a mesma possuir probabilidade maior que 25%.

APLICAÇÃO 1

- Tendo em posse os dados de probabilidade e levando em consideração que P_{ij} é a probabilidade de uma bicicleta ser locada no ponto i e devolvida no ponto j, os dados de cada ponto de distribuição são mostrados na tabela a seguir:

- Tendo em posse os dados de probabilidade e levando em consideração que P_{ij} é a probabilidade de uma bicicleta ser locada no ponto i e devolvida no ponto j, os dados de cada ponto de distribuição são mostrados na tabela a seguir:

$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$
$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$
$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$
$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$
$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$
$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$
$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$
$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$
$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$
$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$
$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$
$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$
$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$	$A \to A = 20\%$	$B \to A = 30\%$	$C \to A = 10\%$	$D \to A = 40\%$
$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$	$A \to B = 40\%$	$B \to B = 20\%$	$C \to B = 30\%$	$D \to B = 10\%$
$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$	$A \to C = 10\%$	$B \to C = 20\%$	$C \to C = 50\%$	$D \to C = 20\%$
$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$	$A \to D = 40\%$	$B \to D = 10\%$	$C \to D = 30\%$	$D \to D = 20\%$

- Matriz de transição

$$
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

APLICAÇÃO 1

- Aplicando o método da Cadeia de Markov e utilizando a solução inicial $x^0 = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$. A matriz de transição A^n convergiu com $n = 15$, com um erro menor que $\varepsilon = 10^{-6}$, podemos ver que a probabilidade das bicicletas serem devolvidas em cada ponto é de aproximadamente:

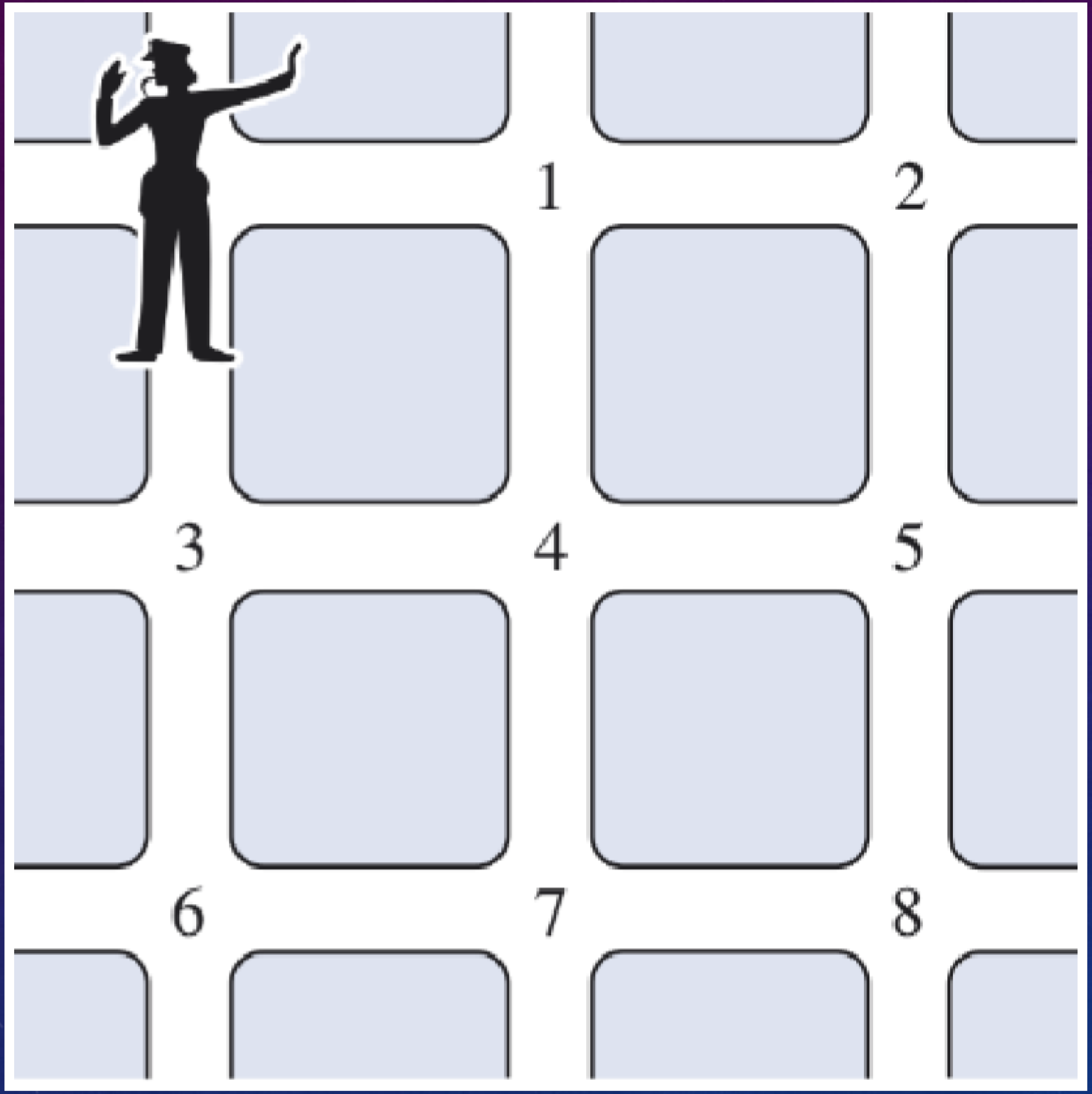
- Aplicando o método da Cadeia de Markov e utilizando a solução inicial . A matriz de transição convergiu com , com um erro menor que , podemos ver que a probabilidade das bicicletas serem devolvidas em cada ponto é de aproximadamente:

$$A = 26\%$$
$$B = 20\%$$
$$C = 31\%$$
$$D = 23\%$$

Com base nesses dados o a empresa concluiu que precisará aumentar as vagas dos pontos **A** e **C**

Com base nesses dados o a empresa concluiu que precisará aumentar as vagas dos pontos **A** e **C**

APLICAÇÃO 2



Posições da guarda de trânsito nos cruzamentos

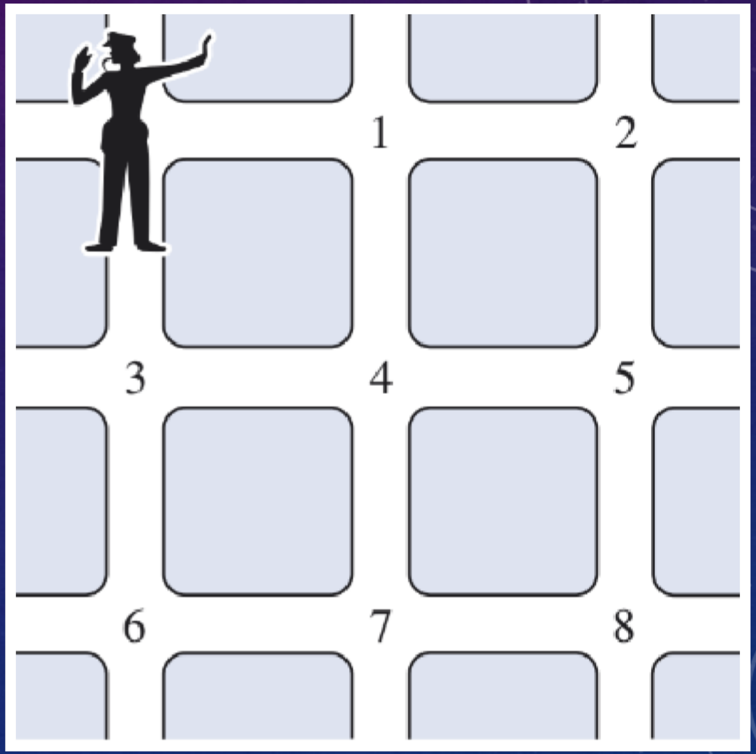
- Uma guarda de trânsito é designada para controlar o tráfego nos oito cruzamentos. Ela é instruída a permanecer em cada cruzamento por uma hora e, em seguida, permanecer no mesmo cruzamento ou no cruzamento adjacente. Para evitar que ela estabeleça um padrão, ela deve escolher o novo cruzamento de maneira aleatória.

APLICAÇÃO 2

- Por exemplo, se ela está no cruzamento 5, seu próximo cruzamento pode ser 2, 4, 5 ou 8, cada um com probabilidade 1/4. Cada dia ela começa no cruzamento em que parou no dia anterior.

- Matriz de transição

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$



APLICAÇÃO 2

- Considerando que ela estava inicialmente no cruzamento 5 podemos dizer que a solução inicial é $x^{(0)} = (0,0,0,0,1,0,0,0)$. Aplicando o método da Cadeia de Markov temos que a matriz de transição A^n convergiu para $n = 48$, com um erro menor que $\varepsilon = 10^{-6}$. Assim, após 48 horas de trabalho, a probabilidade da guarda estar em cada posição é de aproximadamente:

- Considerando que ela estava inicialmente no cruzamento 5 podemos dizer que a solução inicial é . Aplicando o método da Cadeia de Markov temos que a matriz de transição convergiu para n = 48, com um erro menor que . Assim, após 48 horas de trabalho, a probabilidade da guarda estar em cada posição é de aproximadamente:

$$
\begin{array}{ll}
Posição\ 1: 12\% & Posição\ 2: 12\% \\
Posição\ 3: 12\% & Posição\ 4: 20\% \\
Posição\ 5: 16\% & Posição\ 6: 12\% \\
Posição\ 7: 16\% & Posição\ 8: 12\%
\end{array}
$$