04/01/2021

# Algebre de Boole

Support de cours et exercices

Rudy Lesur

Table des matières

# I Introduction

BOOLE, mathématicien anglais du 19$^{ème}$ siècle, a créé une algèbre représentant de manière synthétique les raisonnements de la logique binaire.

(logique dans laquelle on admet que les propositions formulées ne peuvent être que vraies ou fausses)

***Exemple***: s'il fait beau et pas trop chaud nous irons pique-niquer.

**Deux propositions initiales** :

. il fait beau

. il ne fait pas trop chaud

**Une proposition conséquente** :

. nous irons pique-niquer.

Pour que la dernière proposition se réalise (soit vraie), il faut que les deux premières propositions soient réalisées (soient vraies)

## *II Variables et fonction booléennes*

On appelle **variable booléenne** toute quantité susceptible de prendre seulement deux valeurs : 0,1.

. 0 : proposition fausse

. 1 : proposition vraie

Si 3 variables booléennes A, x, y varient de telle façon qu'à une valeur de x et de y correspond une valeur de A et une seule, on dit que A est fonction de x et de y.

A = F(x,y)

## *III Table de vérité*

On appelle table de vérité la table qui permet de représenter la valeur des fonctions booléennes en fonction de la valeur des variables.

De l'exemple suivant

X: il pleut

Y: j'ai suffisamment d'argent

A Aller au cinéma

Proposition: Je vais au cinéma s'il pleut et si j'ai suffisamment d'argent.

| x | y | A |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# IV Opérateurs booléens :

Dans les fonctions booléennes, les variables sont reliées entre elles par des opérateurs booléens.

Addition (OU)

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 1$

Multiplication (ET)

$0 . 0 = 0$

$0 . 1 = 0$

$1 . 0 = 0$

$1 . 1 = 1$

Complémentation

$\bar{0} = 1$

$\bar{1} = 0$

Disjonction

$0 \oplus 0 = 0$

$0 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus 0 = 1$

$1 \oplus 1 = 0$

# V Identification et définition des fonctions booléennes

Tout ensemble de variables ou de constantes reliées par un ou plusieurs opérateurs booléens constitue une fonction booléenne.

*Exemple* : $A = x.y + (\bar{y} \oplus z)$

$B = x.y.z + \bar{x}.\bar{y} + y.\bar{z}$

Une table de vérité identifie d'une manière unique une fonction booléenne.

Pour montrer l'égalité de deux ou plusieurs fonctions booléennes, il suffira de montrer l'identité de leur table de vérité (c'est à dire qu'à chaque valeur des variables est associée la même valeur des fonctions.

# VI Quelques fonctions de base

## La fonction égalité

$A = x$

Table de vérité

| **x** | **A** |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |

## La fonction complément

$A = \overline{x}$

Table de vérité

| **x** | **A** |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

NB : $\overline{\overline{x}} = x$

# La fonction ET

$A = x . y$

Table de vérité

| **x** | **y** | **A** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Propriétés:

$x.y = y.x$

$x.0 = 0$

$x.1 = x$

$x.x = x$

$x.\overline{x} = 0$

Ces propriétés se démontrent à l'aide des tables de vérité.

# *La fonction OU*

$A = x + y$

Table de vérité

| **x** | **y** | **A** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Propriétés:

$x+y = y+x$

$x+0 = x$

$x+1 = 1$

$x+x = x$

$x+\overline{x} = 1$

# *La fonction OU EXCLUSIF*

$A = x \oplus y$

Table de vérité

| x | y | A |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Propriétés:

$x \oplus y = y \oplus x$

$x \oplus 0 = x$

$x \oplus 1 = \overline{x}$

$x \oplus x = 0$

$x \oplus \overline{x} = 1$

$x \oplus y = x.\overline{y} + \overline{x}.y$

# VII Propriétés de la somme et du produit logique combiné

## 1 Distributivité du produit par rapport à la somme

x.(y+z) = (x.y) + (x.z)

Table de vérité

| **x** | **y** | **z** | **y+z** | **x(y+z)** | **x.y** | **x.z** | **(x.y) + (x.z)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | **0** | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | **0** | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | **0** | 0 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 1 | 1 | **1** | 0 | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | **1** | 1 | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** |

## 2 Lois d'absorption

a) $\mathbf{x + x.y = x}$

démonstration: $x + x.y = x.(1 + y)$

or $1 + y = 1$

donc $x.(1 + y) = x.1$

donc $x + x.y = x$

b) $\mathbf{x + \overline{x}.y = x + y}$

démonstration : $x = x + x.y$ (loi précédente)

donc $x + \overline{x}.y = x + x.y + \overline{x}.y$

or $x.y + \overline{x}.y = y.\ (x + \overline{x})$ (loi distributivité)

et $x + \overline{x} = 1$ (propriété addition)

et $y.1 = y$ (propriété multiplication)

donc $x + \overline{x}.y = x + y$

## 3 Distributivité de la somme par rapport au produit

$x + y.z = (x + y) . (x + z)$

démonstration:

| | | |
|---|---|---|
| | $x = x + x.z$ | |
| et | $x = x + x.y + x.z$ | idem |
| et | $x = x.x$ | propriété multiplication |
| donc | $x + y.z = x.x + x.y + x.z + y.z$ | |
| | $= x.(x + y) + z.(x + y)$ | distributivité / addition |
| | $= (x + z).(x +y)$ | |

## 4 Théorème de Morgan

a) $\overline{x + y} = \overline{x} . \overline{y}$

b) $\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$

démonstration

Table de vérité

| $x$ | $y$ | $\overline{x}$ | $\overline{y}$ | $x+y$ | $\overline{x+y}$ | $\overline{x}.\overline{y}$ | $x.y$ | $\overline{x.y}$ | $\overline{x}+\overline{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

# *VIII Expression d'une fonction booléenne*

Soit la fonction définie par le tableau

| x | y | z | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | **0** |
| 0 | 1 | 0 | **1** |
| 0 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 1 | **0** |
| 1 | 1 | 0 | **0** |
| 1 | 1 | 1 | **1** |

On peut écrire la fonction sous la forme:

$F(x,y,z) = \overline{x}.y.\overline{z} + \overline{x}.y.z + x.y.z$

Une expression est sous forme de **somme canonique** si toutes les variables (sous forme vraie ou fausse) figurent dans chaque terme et si dans chacun de ses termes elles sont toutes reliées par l'opérateur ET (.)

Chaque terme est alors désigné sous le nom de **minterm**.

$\mathbf{A = x.\overline{y}.z + \overline{x}.\overline{y}.z + x.\overline{y}.z}$

Une expression est sous forme de produit canonique si toutes les variables (sous forme vraie ou fausse) figurent dans chaque terme et si dans chacun de ces termes elles sont toutes reliées par l'opérateur OU (+)

Chaque terme est alors désigné sous le nom de **maxterm.**

$\mathbf{A = (x+y+\overline{z}).(\overline{x}+y+z)}$

# *IX Simplification algébrique d'une fonction booléenne*

Il s'agit de trouver l'expression la plus simple d'une fonction, c'est à dire l'expression la plus courte et faisant apparaître le moins de variables possibles.

*Exemple:*

$$F(x,y) = x.\overline{y} + x.y + \overline{x}$$

$$= x.(y + \overline{y}) + \overline{x}$$

$$= x + \overline{x} = 1$$

Pour obtenir la forme la plus simplifiée possible d'une fonction, on utilise les propriétés et les théorèmes déjà vus.

# EXERCICES

## 1) Quelle est la fonction ayant la table de vérité suivante ?

| x | y | z | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | **1** |
| 1 | 0 | 1 | **0** |
| 1 | 1 | 0 | **0** |
| 1 | 1 | 1 | **0** |

## 2) Simplifier les fonctions suivantes:

$$F(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.z + x.\bar{y}.z + x.y.z$$

$$F(x\ ,y\ ) = x.\bar{y} + x.y + \bar{x}.y + \bar{x}.\bar{y}$$

$$F(x,y,z) = x + \bar{z} + y.(\overline{x+z}) + (x+\bar{z}).(x+y+\bar{z})$$

3) **Composer la table de vérité d'une fonction :**

Comportant les variables x,y,z dont la valeur n'est 1 que s'il y a un nombre impair de variables égales à 1.

Indiquer sa forme canonique.

4) **Donner l'expression booléenne simplifiée de la fonction**

Correspondant à la proposition "l'intéressé peut souscrire à l'avenant".

Pour pouvoir souscrire à l'avenant, il faut remplir les conditions suivantes:

a) avoir souscrit la police "vie", être de sexe masculin, marié et âgé de plus de 25 ans.
b) Ne pas avoir souscrit la police "vie", être de sexe féminin et mariée
c) Etre célibataire, de sexe masculin et âgé de plus de 25 ans
d) Avoir souscrit la police "vie", être de sexe féminin et mariée
e) N'avoir pas souscrit la police "vie", être âgé de plus de 25 ans et de sexe masculin
f) Ne pas avoir plus de 25 ans, être marié et de sexe masculin.

On utilisera les variables suivantes:

V : police "vie"

C : célibataire

M : masculin

A : âge > 25 ans

**5) Simplifier les fonctions suivantes:**

$$F(a,b,c) = a + \bar{a}\, b + \bar{a}\, \bar{b}\, c$$

$$F(a,b,c,d) = a\, b\, c + a\, \bar{b}\, d + a\, b\, \bar{c} + a\, b\, \bar{d}$$

$$F(a,b,c,d) = a\, b\, c + a\, b\, \bar{c} + a\, \bar{b}\, d + a\, \bar{b}\, \bar{d}$$