



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

## **ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент Косенков Александр Александрович

Группа РК6-64Б

Тип задания Лабораторная работа №3

Тема лабораторной работы Модель Лоренца

Студент \_\_\_\_\_ **Косенков А.А.**  
*подпись, дата* *фамилия, и.о.*

Преподаватель \_\_\_\_\_ **Першин А.Ю.**  
*подпись, дата* *фамилия, и.о.*

Преподаватель \_\_\_\_\_ **Соколов А.П.**  
*подпись, дата* *фамилия, и.о.*

Оценка \_\_\_\_\_

*Москва, 2020 г.*

## Оглавление

Задание на лабораторную работу .....	3
Цель выполнения лабораторной работы.....	5
Выполненные задачи .....	5
1. Получение стационарных позиций заданной системы ОДУ.....	6
2. Написание функций возврата дискретной траектории системы ОДУ с заданными параметрами. ....	7
2.1 Реализация явного метода Эйлера.....	7
2.2 Реализация неявного метода Эйлера.....	7
2.3 Реализация метода Адамса-Башфорта-Моултона. ....	8
3. Выбор численного метода «по умолчанию» и шага $h$ «по умолчанию». ....	11
4. Анализ динамических режимов системы для разных значений параметра $r$	15
5. Анализ методов нахождения траектории и выбираемого шага $h$ с точки зрения затраченного времени. ....	21
Заключение .....	23
Список использованных источников .....	24

## Задание на лабораторную работу

### Задача 14 (Модель Лоренца)

Дана система ОДУ 1-го порядка  $\frac{dx}{dt} = \bar{f}(\bar{x})$ , где  $\bar{x} = \bar{x}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ x(r - z) - y \\ xy - bz \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $\sigma = 10$  и  $b = \frac{8}{3}$ .

Требуется:

1. Найти аналитически все стационарные позиции заданной системы ОДУ.
2. Написать следующие функции, каждая из которых возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью, заданной функцией  $f$ , начальным условием  $x_0$ , шагом по времени  $h$  и конечным временем  $t_n$ :
  - $euler(x_0, t_n, f, h)$ , где дискретная траектория строится с помощью метода Эйлера;
  - $implicit\_euler(x_0, t_n, f, h)$ , где дискретная траектория строится с помощью неявного метода Эйлера;
  - $adams\_bashforth\_moulton(x_0, t_n, f, h)$ , где дискретная траектория строится с помощью метода Адамса-Башфорта-Моултона 4-го порядка.
3. Выбрать «численный метод по умолчанию» из функций  $euler$ ,  $implicit\_euler$  и  $adams\_bashforth\_moulton$  и «шаг по умолчанию»  $h$ , предполагая, что выбор даст наиболее точное решение. Аргументировать данный выбор.
4. Для каждого из значений параметра  $r \in \{0, 10, 20, 30\}$  провести следующий анализ:
  - (а) Сгенерировать набор случайных начальных условий  $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^{100}$ .

- (b) Для каждого случайного начального условия следует найти решение данной системы ОДУ с помощью численного метода по умолчанию.
  - (c) Вывести подмножество полученных траекторий на одном графике в виде фазового портрета.
  - (d) Охарактеризовать наблюдаемый динамический режим:
    - i. Наблюдается ли сходимость решений независимо от начального условия к одной точке? Если да, то как можно охарактеризовать получаемую структуру решения?
    - ii. Наблюдаются ли какие-то особенности поведения при переходе от начального условия к характеризуемому динамическому режиму?
5. Используя наиболее сложный динамический режим как пример, ответить на следующие вопросы:
- (a) Сколько суммарно времени в секундах занимает нахождение всех решений для всех сгенерированных начальных условий?
  - (b) Как влияет увеличение и уменьшение шага по умолчанию  $h$  на фазовый портрет и время нахождения решений?
  - (c) Как влияет на фазовый портрет и время нахождения решений замена численного метода по умолчанию на каждый из двух оставшихся? Как влияет на фазовый портрет и время нахождения решений увеличение и уменьшение шага по умолчанию  $h$  в каждом из двух случаев?

## **Цель выполнения лабораторной работы**

**Цель выполнения лабораторной работы** – исследование динамической модели Лоренца на предмет влияния изменения параметров системы с помощью численных методов решения задачи Коши для систем ОДУ 1-го порядка на примере явного и неявного методов Эйлера и метода Адамса-Башфорта-Моултона 4-го порядка.

## **Выполненные задачи**

1. Получение стационарных позиций заданной системы ОДУ.
2. Написание функций возврата дискретной траектории системы ОДУ с заданными параметрами.
3. Выбор численного метода «по умолчанию» и шага  $h$  «по умолчанию».
4. Анализ динамических режимов системы для разных значений параметра  $r$ .
5. Анализ методов нахождения траектории и выбираемого шага  $h$  с точки зрения затраченного времени.

В ходе лабораторной работы для программной реализации задач был использован язык Python v3.6.9, а также прикладные библиотеки numpy v1.18.1, matplotlib v3.2.0, scipy v1.4.1.

## 1. Получение стационарных позиций заданной системы ОДУ.

Модель Лоренца (1) имеет весомое значение в теории хаоса и исследовании поведения параметров динамических моделей. Данная модель выделяется тем, что траектории, получаемые в ходе решения ОДУ, при определенных параметрах, попадают в аттрактор – подмножество фазового пространства (пространства зависимости параметров динамической системы), что все траектории, стартующие не слишком далеко от него, стремятся к нему с течением времени [2]. Таким образом, траектории решения ОДУ могут иметь предсказуемый и локальный характер.

Данные точки сходимости траекторий или стационарные точки аттрактора, определяются через стационарные позиции заданной системы ОДУ (1).

Стационарной позицией динамической системы является постоянная во времени траектория  $\bar{x}^*(t) = const$ . Для такой позиции  $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$ , откуда ее можно определить, решив нелинейное в общем случае уравнение  $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0; \\ x(r - z) - y = 0; \\ xy - bz = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Из первого уравнения:  $x = y$ , что при подстановке во 2-е и 3-е уравнения дает:

$$\begin{cases} x = y; \\ y(r - z - 1) = 0; \\ y^2 - bz = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

откуда из второго уравнения получаем 2 решения:

$$\begin{cases} y = 0; \\ z = r - 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Подставляя первое решение (3.2) в третье уравнение получаем первую стационарную позицию:

$$\begin{cases} x = y; \\ y = 0; \\ -bz = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \\ z = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя второе решение (3.2) в третье уравнение получаем еще 2 стационарные позиции:

$$\begin{cases} x = y; \\ y^2 = b(r - 1); \\ z = r - 1, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{b(r - 1)}; \\ y = \pm\sqrt{b(r - 1)}; \\ z = r - 1. \end{cases} \quad (5)$$

Также можно заметить, что при значении параметра  $r = 0$  стационарные позиции (5) вырождаются в позицию (4), откуда возможны 2 случая поведения системы: сходимость к точке (4) при значении  $r = 0$  и сходимость к точкам (5) при  $r \neq 0$ .

## 2. Написание функций возврата дискретной траектории системы ОДУ с заданными параметрами.

Расчет дискретной траектории для определенных параметров шага  $h$ , предела по времени  $t_n$ , а также начального условия  $x_0$  и параметра системы  $r$  для каждого из трех методов (метод Эйлера, неявный метод Эйлера и метод Адамса-Башфорта-Моултона) программно была реализована функция.

### 2.1 Реализация явного метода Эйлера.

Явный метод Эйлера имеет следующую запись:

$$\bar{w}_0 = \alpha, \quad (6)$$

$$\bar{w}_{i+1} = \bar{w}_i + h\bar{f}(t_i, \bar{w}_i), \quad i \in [0; n - 1], \quad (7)$$

где  $\bar{w}_0$  – начальное условие задачи Коши,  $\bar{w}_i$  – вектор значений функции решения, полученной на предыдущем шаге,  $n$  – количество шагов,  $\bar{w}_i \approx \bar{y}_i$ .

Программная реализация функции  $euler(x_0, t_n, f, h)$  использует векторные операции библиотеки *numpy* и представлена в листинге 1.

Листинг 1 - функция расчета дискретной траектории системы ОДУ методом Эйлера.

```
def euler(x_0, t_n, f, h):
    time_array = np.arange(0, t_n + h, h)
    results = [[] * len(time_array)]
    results[0] = np.array(x_0)
    for i in range(len(time_array) - 1):
        results[i + 1] = np.array(results[i]) + h * np.array(f(results[i]))
    return results
```

### 2.2 Реализация неявного метода Эйлера.

Неявный метод Эйлера подразумевает нелинейное уравнение, использующее для расчета значения точки траектории это же самое значение. Формальная запись метода имеет вид:

$$\bar{w}_0 = \alpha, \quad (8)$$

$$\bar{w}_{i+1} = \bar{w}_i + h\bar{f}(t_{i+1}, \bar{w}_{i+1}), \quad i \in [0; n - 1], \quad (9)$$

Так как уравнение (9) является нелинейным относительно  $\bar{w}_{i+1}$ , программно нахождение решения данного уравнения было реализовано с помощью функции

*root*, находящей корни нелинейных уравнений, из библиотеки *scipy.optimize*. Реализация функции *implicit\_euler(x\_0, t\_n, f, h)* представлена в листинге 2.

Листинг 2 - функция расчета дискретной траектории системы ОДУ неявным методом Эйлера.

```
def implicit_euler(x_0, t_n, f, h):
    time_array = np.arange(0, t_n + h, h)
    results = [[] * len(time_array)]
    results[0] = np.array(x_0)

    for i in range(len(time_array) - 1):
        def func_to_solve(w_vec):
            return w_vec - np.array(results[i]) - h * np.array(f(w_vec))

        w_next = root(func_to_solve, results[i])
        results[i + 1] = w_next.x

    return results
```

### 2.3 Реализация метода Адамса-Башфорта-Моултона.

Метод Адамса-Башфорта-Моултона является методом схемы предиктор-корректор, использующий в своей комбинации многошаговые методы Адамса-Башфорта (предиктор – явный метод) (11) и Адамса-Моултона (корректор – неявный метод) (12) одного порядка точности. Самым оптимальным и часто используемым является порядок точности  $O(h^4)$ , для которого формальная запись метода имеет вид:

$$\bar{w}_0 = \alpha_0, \bar{w}_1 = \alpha_1, \bar{w}_2 = \alpha_2, \bar{w}_3 = \alpha_3 \quad (10)$$

$$\tilde{w}_{i+1} = \bar{w}_i + \frac{h}{24} [55\bar{f}(t_i, \bar{w}_i) - 59\bar{f}(t_{i-1}, \bar{w}_{i-1}) + 37\bar{f}(t_{i-2}, \bar{w}_{i-2}) - 9\bar{f}(t_{i-3}, \bar{w}_{i-3})], \quad (11)$$

$$\bar{w}_{i+1} = \bar{w}_i + \frac{h}{24} [9\bar{f}(t_i, \tilde{w}_{i+1}) + 19\bar{f}(t_i, \bar{w}_i) - 5\bar{f}(t_{i-1}, \bar{w}_{i-1}) + \bar{f}(t_{i-2}, \bar{w}_{i-2})], \quad i \in [3; n - 1], \quad (12)$$

где начальные условия задачи Коши (10) определяются с помощью неявного метода Эйлера. Реализация функции *adams\_bashforth\_moulton(x\_0, t\_n, f, h)* представлена в листинге 3.

Листинг 2 - функция расчета дискретной траектории системы ОДУ методом Адамса-Башфорта-Моултона 4-го порядка.

```
def adams_bashforth_moulton(x_0, t_n, f, h):
    time_array = np.arange(0, t_n + h, h)
    results = [[] * len(time_array)]

    initial_w = implicit_euler(x_0, time_array[3], f, h)
    for i in range(len(initial_w)):
        results[i] = initial_w[i]
```



```

    for i in range(3, len(time_array) - 1):
        predictor_w = results[i] + (h / 24) * (55 * np.array(f(results[i])) - 59
* np.array(f(results[i - 1]))) + 37 * np.array(f(results[i - 2])) - 9 *
np.array(f(results[i - 3])))
        corrector_w = results[i] + (h / 24) * (9 * np.array(f(predictor_w)) + 19
* np.array(f(results[i])) - 5 * np.array(f(results[i - 1])) +
np.array(f(results[i - 2])))
        results[i + 1] = corrector_w
    return results

```

Кроме того, так как синтаксис методов, возвращающих дискретную траекторию (Листинги 1-3) не подразумевают задание параметров системы ( $\sigma, b$  и  $r$ ), программно функцией *get\_normalize\_lorentz()* было реализовано замыкание, возвращающее функцию требуемого для методов синтаксиса (Листинг 4).

Листинг 4 – получение функции, решающей правую часть динамической системы с заданными параметрами.

```

def get_normalize_lorentz(r, sigma, b):
    def func(x_vec):
        x = x_vec[0]
        y = x_vec[1]
        z = x_vec[2]
        result = [sigma * (y - x), x * (r - z) - y, x * y - b * z]
        return result
    return func

```

Для проверки правильности написания функций, был построен график дискретной траектории для следующих параметров:  $x_0 = \{10, 10, 10\}$ ,  $r = 24.3$ ,  $h = 0.005$  при  $t_n = 100$ . Выбор начального условия обусловлен одним из значений, удовлетворяющих аттрактору Лоренца [3], параметр  $r$  выбран из эмпирических соображений, а значение шага используется как значение «по умолчанию», выбор которого обусловлен в п.3. Дискретные траектории для всех трех методов представлены на рисунках 1-3.

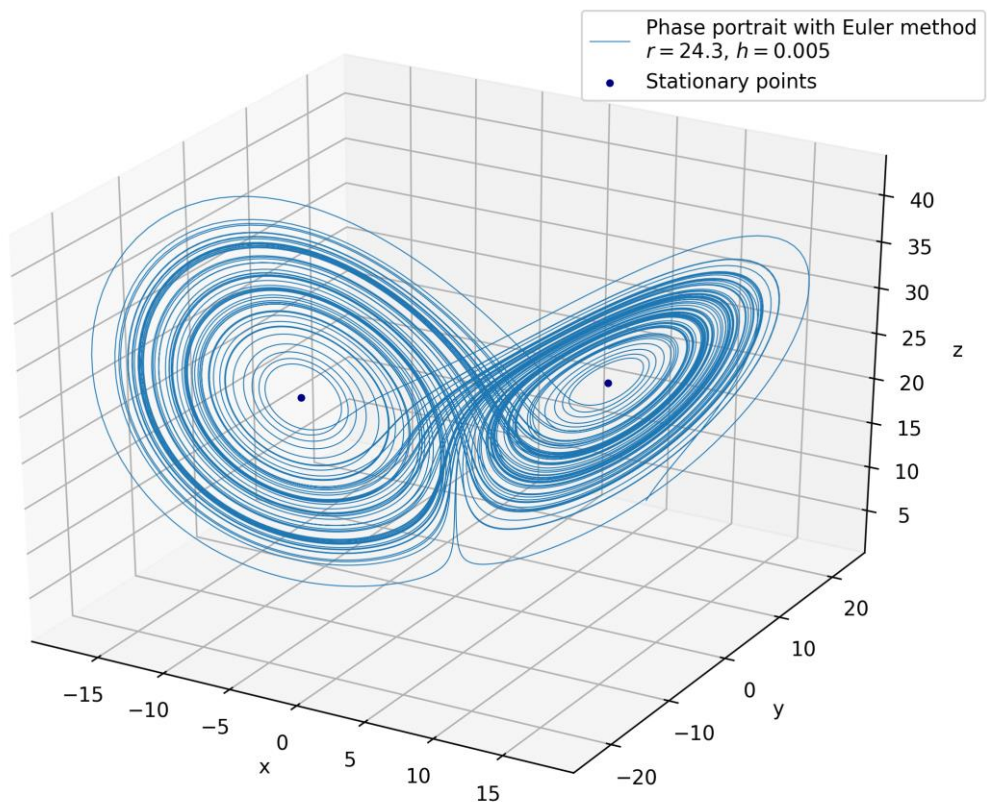


Рис. 1 дискретная траектория, полученная методом Эйлера при параметрах  $r = 24.3, h = 0.005$ .

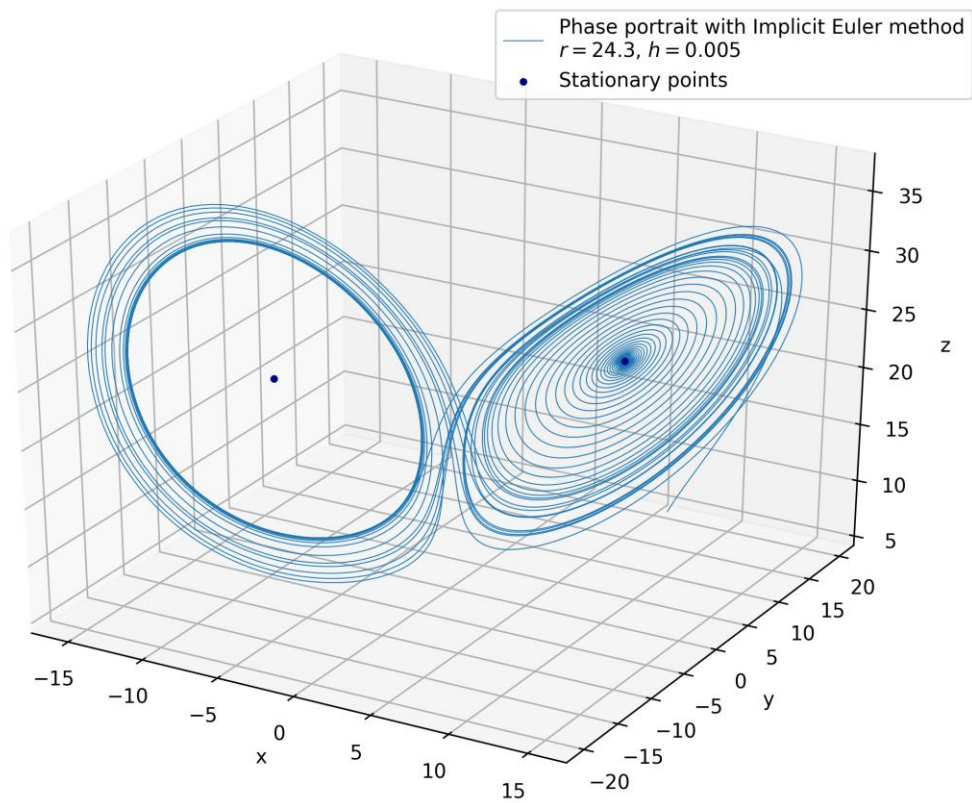


Рис. 2 - дискретная траектория, полученная неявным методом Эйлера при параметрах  $r = 24.3, h = 0.005$ .

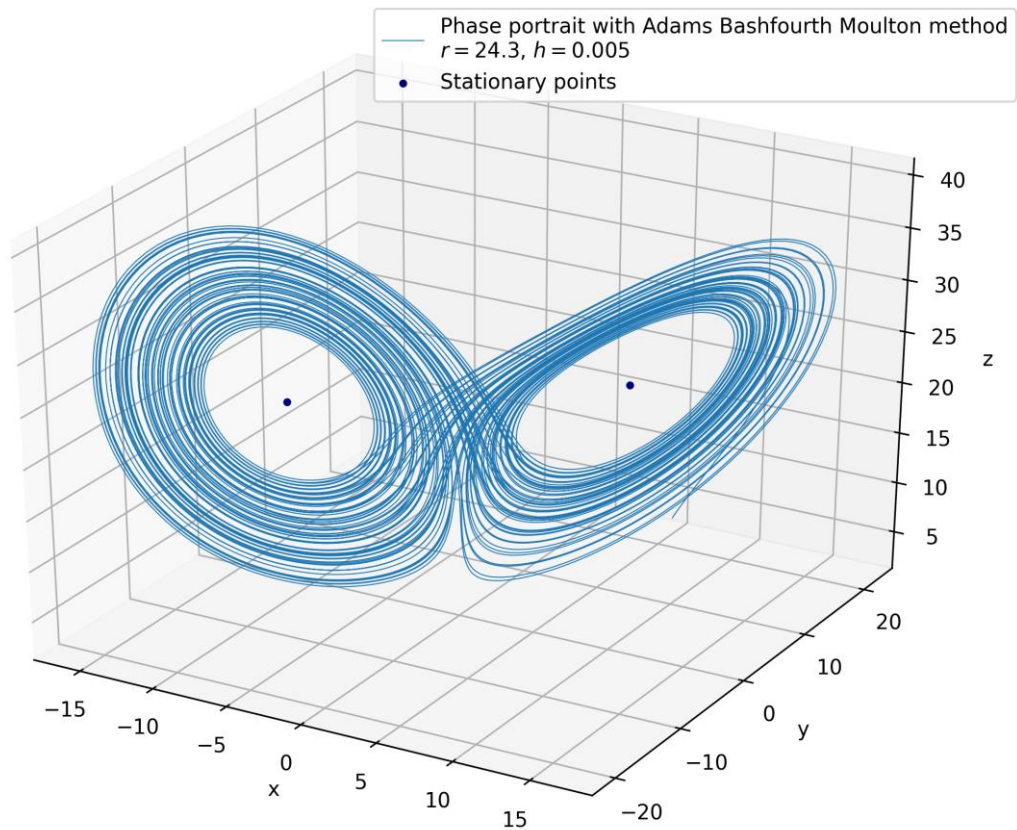


Рис. 3 - дискретная траектория, полученная методом Адамса-Башфорта-Моултона при параметрах  $r = 24.3, h = 0.005$ .

Все три метода с разной степенью точности верно описывают аттрактор Лоренца. Как можно заметить, наиболее равномерная и точная траектория получается при использовании метода Адамса-Башфорта-Моултона, так как известно, что при используемом значении  $r$ , наиболее близкая картина наблюдается именно на рис.3 [3].

### **3. Выбор численного метода «по умолчанию» и шага $h$ «по умолчанию».**

На основе графиков, полученных на рисунках 1-3 можно заметить, что наиболее точным является метод Адамса-Башфорта-Моултона. Кроме того, это подтверждается аналитически, так как данный метод имеет 4-й порядок точности, в то время как явный и неявный методы Эйлера имеют 1-й порядок точности. Также, данный метод является приемлимым с точки зрения временных затрат, что будет подтверждено в п.5. Поэтому данный метод был определен методом «по умолчанию».

Так как рассматриваемые методы являются численными и находят дискретную, а значит приближенную, траекторию системы (1), то важным параметром оценки точности является шаг  $h$ . Более того, в дополнение к параметрам динамической системы, малейшее изменение которых приводит к хаотическим изменениям траектории, небольшие изменения шага также оказывают критическое влияние на результат.

Для тех же условий, что и в п.2 были построены дискретные траектории с помощью каждого метода, но для шагов  $h = [0.003; 0.006]$  с целью анализа влияния изменения шага на траекторию:

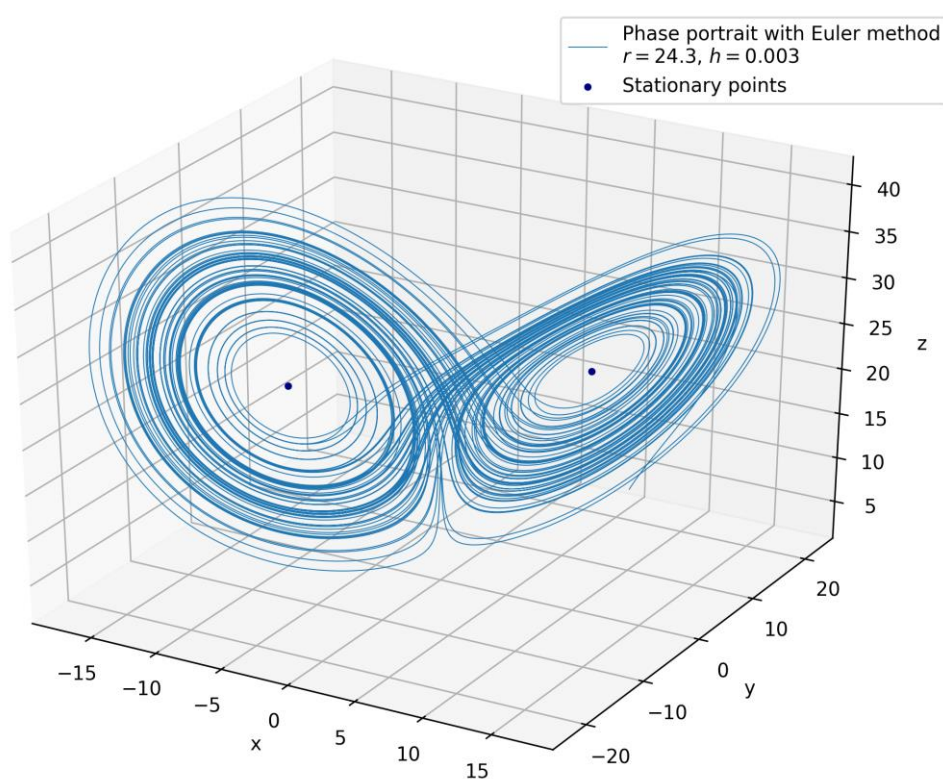


Рис. 4 - дискретная траектория, полученная методом Эйлера при параметрах  $r = 24.3, h = 0.003$ .



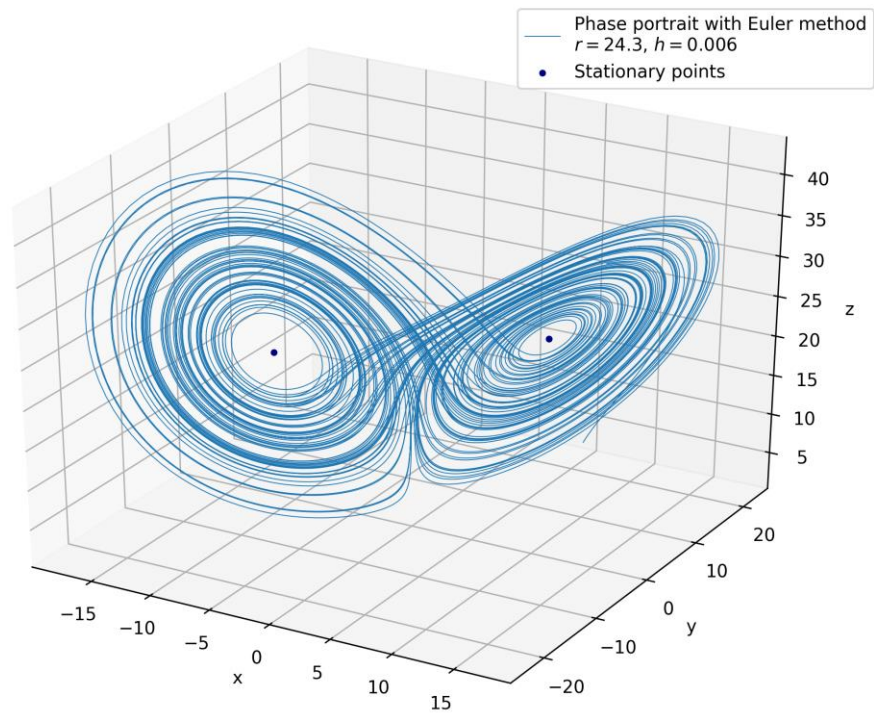


Рис. 5 - дискретная траектория, полученная методом Эйлера при параметрах  $r = 24.3, h = 0.006$ .

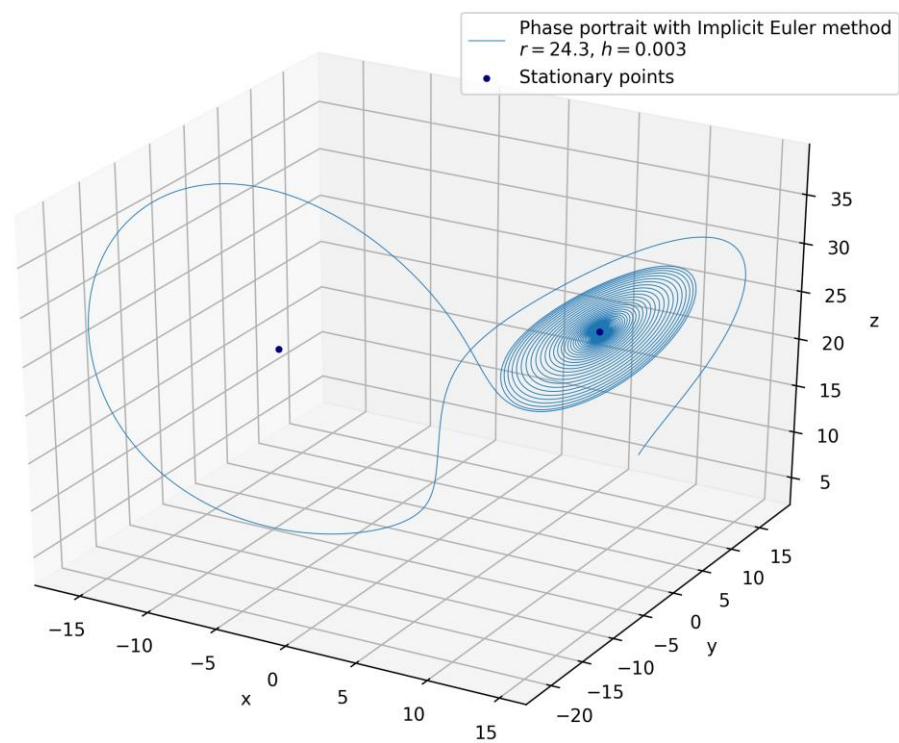


Рис. 6 - дискретная траектория, полученная неявным методом Эйлера при параметрах  $r = 24.3, h = 0.003$ .

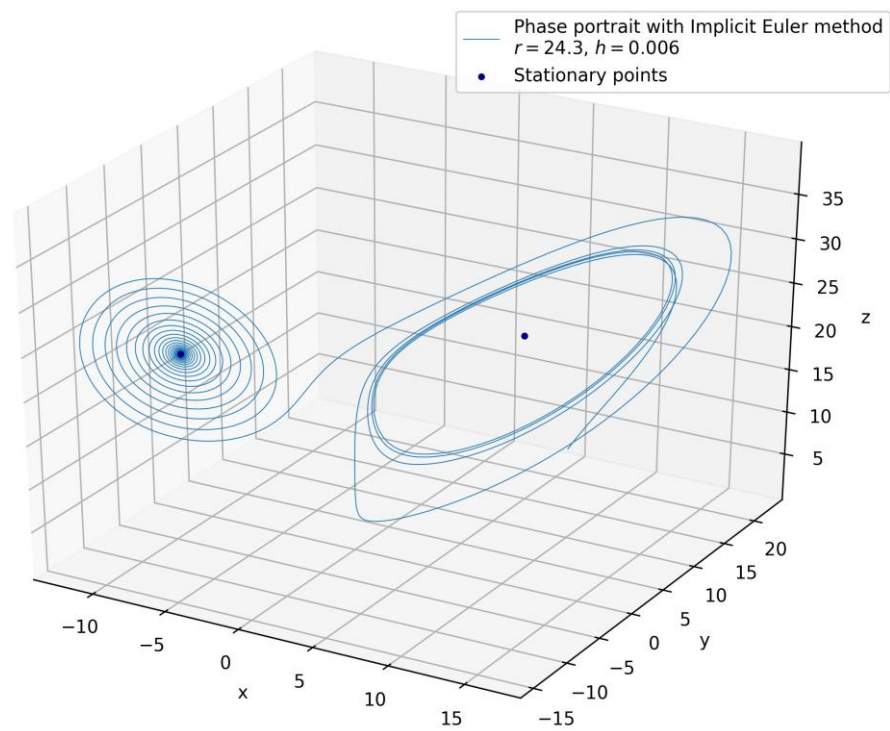


Рис. 7 - дискретная траектория, полученная неявным методом Эйлера при параметрах  $r = 24.3, h = 0.006$ .

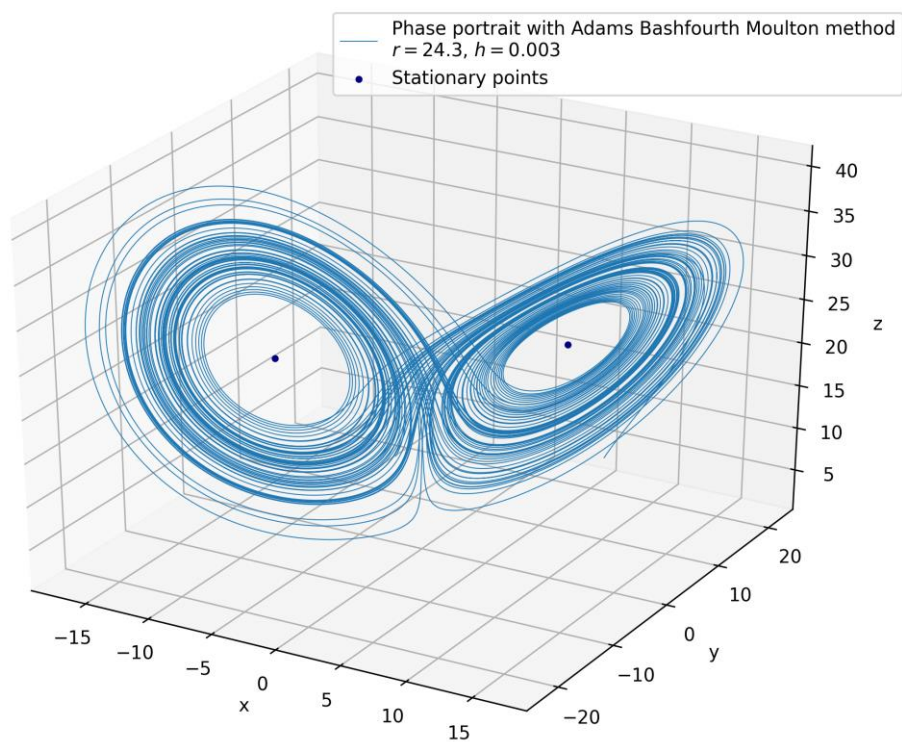


Рис. 8 - дискретная траектория, полученная методом Адамса-Башфорта-Моултона при параметрах  $r = 24.3, h = 0.003$ .

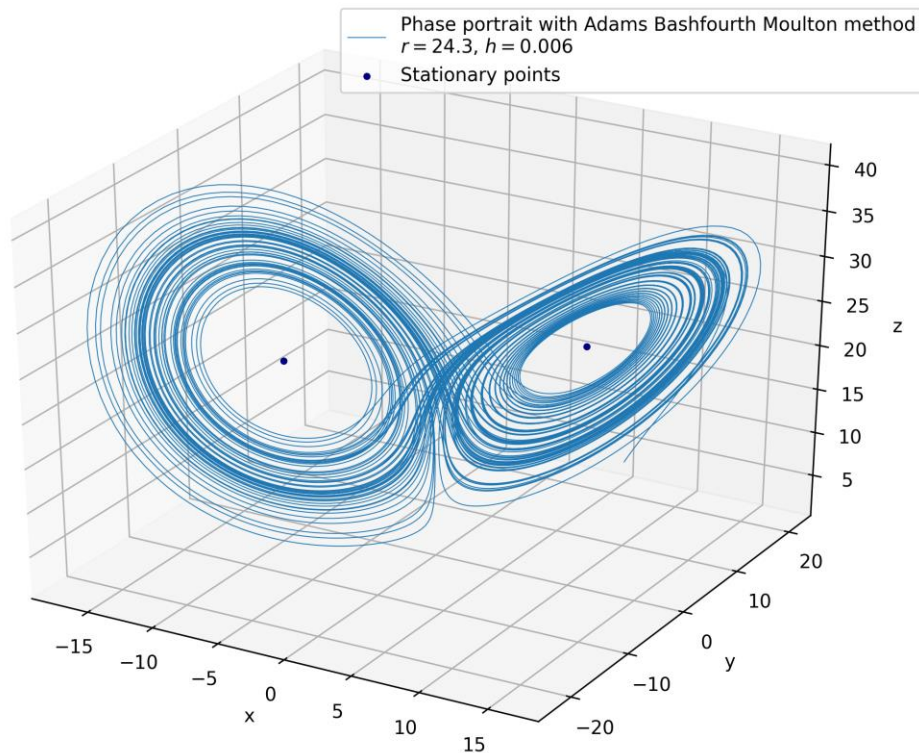


Рис. 9 - дискретная траектория, полученная методом Адамса-Башфорта-Моултона при параметрах  $r = 24.3, h = 0.006$ .

Анализируя графики траекторий на рисунках 1-9 было замечено, что наиболее стабильным и устойчивым является метод Адамса-Башфорта-Моултона, который демонстрирует примерно одинаковую картинку аттрактора при разных значениях шага. Явный метод Эйлера также обладает такой же устойчивостью, хоть и менее точен, в то время как неявный метод Эйлера является крайне неустойчивым к изменениям шага и демонстрирует значительные изменения в поведении дискретной траектории при каждом значении шага. Если брать график аттрактора, полученного методом Адамса-Башфорта-Моултона, как эталон, то наиболее близкой картиной аттрактора, полученной с помощью неявного метода Эйлера, является траектория при шаге  $h = 0.005$ , который и был взят как шаг «по умолчанию».

#### 4. Анализ динамических режимов системы для разных значений параметра $r$ .

Дальнейший анализ подразумевает исследование поведения динамической системы при разных значениях параметров  $x_0$  и  $r$ .

Вариация начальных значений осуществляется генерацией случайных начальных условий  $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^{100}$  с помощью реализованной функции

`get_random_point()` с пределами изменения координат:  $x \in [-50; 50]$ ,  $y \in [-50; 50]$ ,  $z \in [0; 70]$ .

Вариация значения параметра  $r$  осуществляется в пределах  $[0; 30]$  с шагом 10.

С помощью метода «по умолчанию» при шаге «по умолчанию» (см. п.3.) для каждого значения параметра  $r$  были построены 10 дискретных траекторий, используя в качестве начальных условий точки их набора  $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^{100}$ .

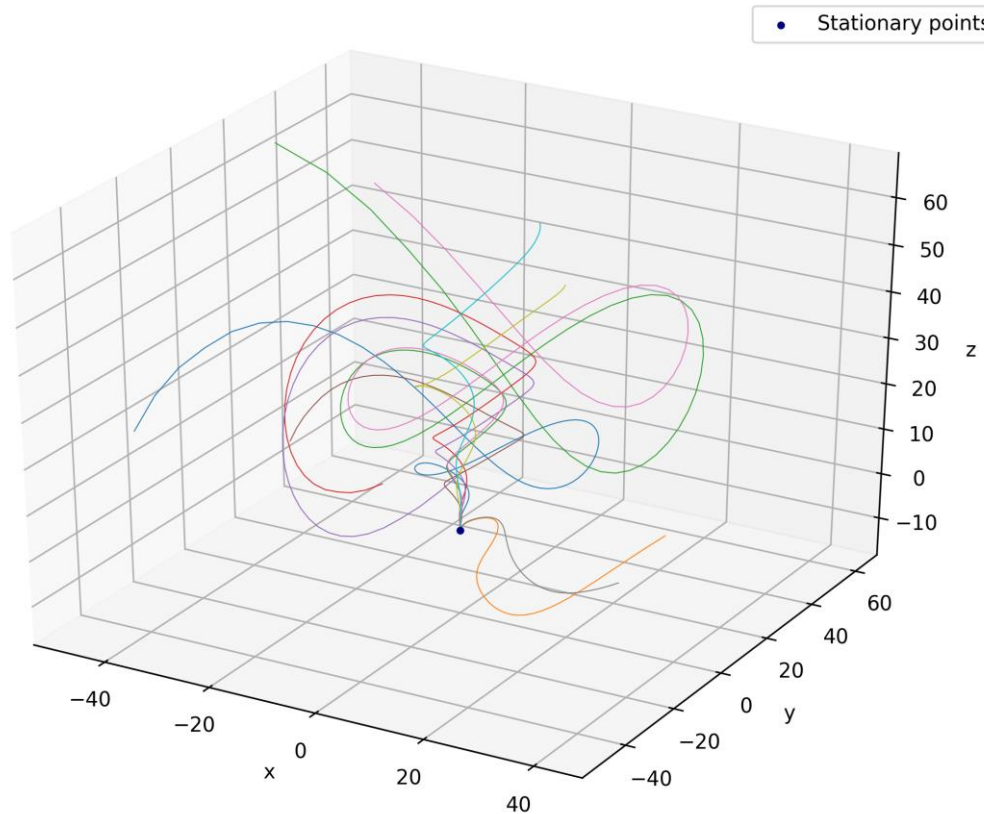


Рис. 10 – Фазовый портрет траекторий решения ОДУ при случайно сгенерированных начальных условиях при  $r = 0$ .

Как было отмечено в п.1, при  $r = 0$  стационарной точкой является точка  $(0; 0; 0)$ , около которой и наблюдается сходимость решений при  $t \rightarrow \infty$  на рис. 10. Аттрактором в таком случае является начало координат [3]. Более наглядный фазовый портрет виден на проекции траекторий на плоскость  $XY$  – рис. 11.



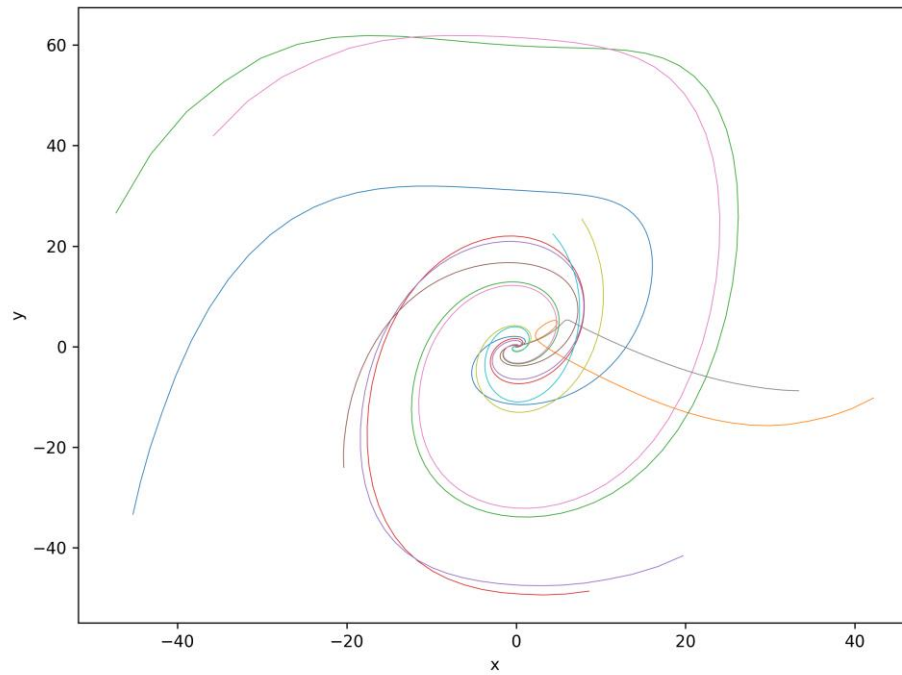


Рис. 11 – Проекция фазового портрет траекторий решения ОДУ при случайно сгенерированных начальных условиях при  $r = 0$  на плоскость XY.

При  $r = 10$  наблюдается спиральная сходимость траекторий к стационарным позициям (5) (рис. 12), что вызывает перестройку – смену аттрактора, но все еще с большим разбросом траекторий в начале.

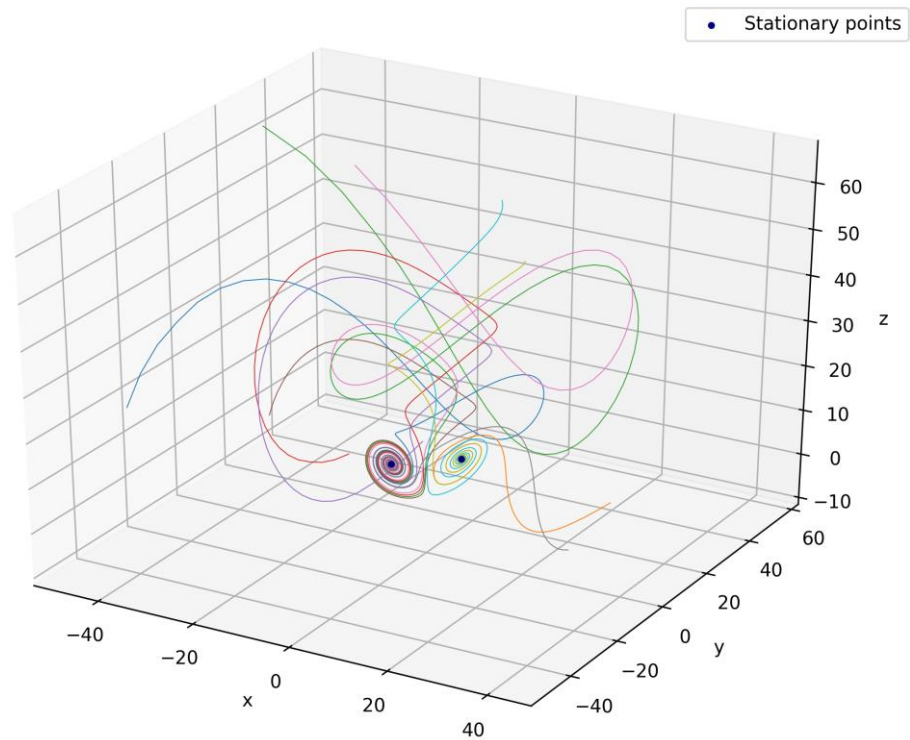


Рис. 12 - Фазовый портрет траекторий решения ОДУ при случайно сгенерированных начальных условиях при  $r = 10$ .

При  $r = 20$  сильнее видна спиральная сходимость траекторий к стационарным точкам, увеличивается размах колебаний относительно положения равновесия, траектории становятся плотнее. Возникают неустойчивые предельные циклы – траектории совершают колебания вокруг двух точек сразу, но в большинстве наблюдаются циклы вокруг одной конкретной точки.

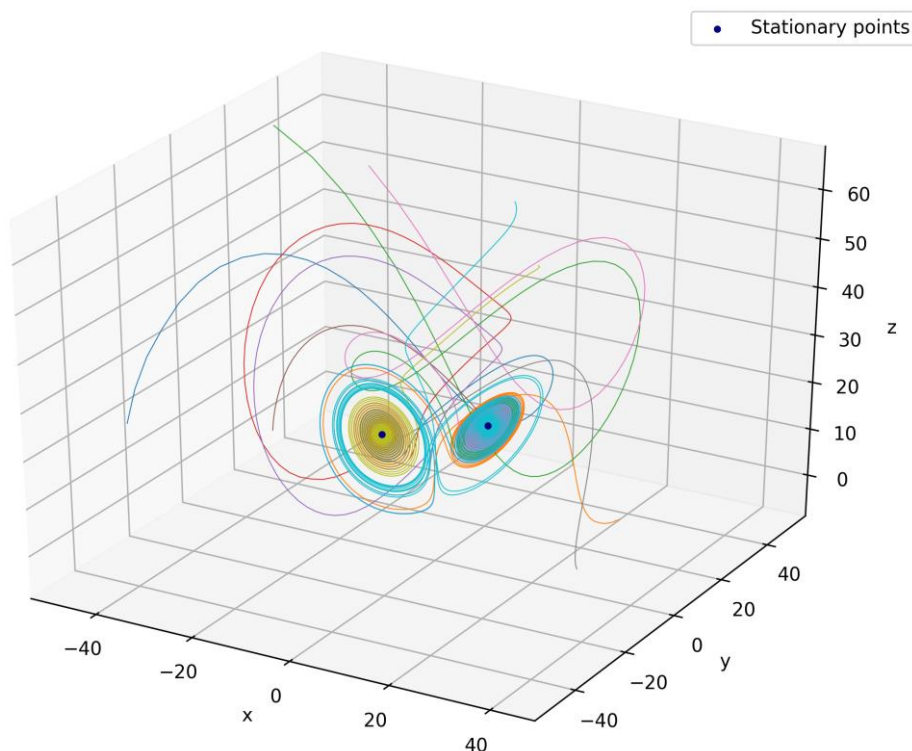


Рис. 13 - Фазовый портрет траекторий решения ОДУ при случайно сгенерированных начальных условиях при  $r = 20$ .

При  $r = 30$  размах колебаний увеличивается еще больше, и плотность траекторий также возрастает, кроме того, колебания в большинстве совершаются уже вокруг двух точек, тем самым асимптотически приближаясь к неустойчивым предельным циклам, создавая «странный аттрактор Лоренца» [4]. Разброс траекторий в начале почти отсутствует.

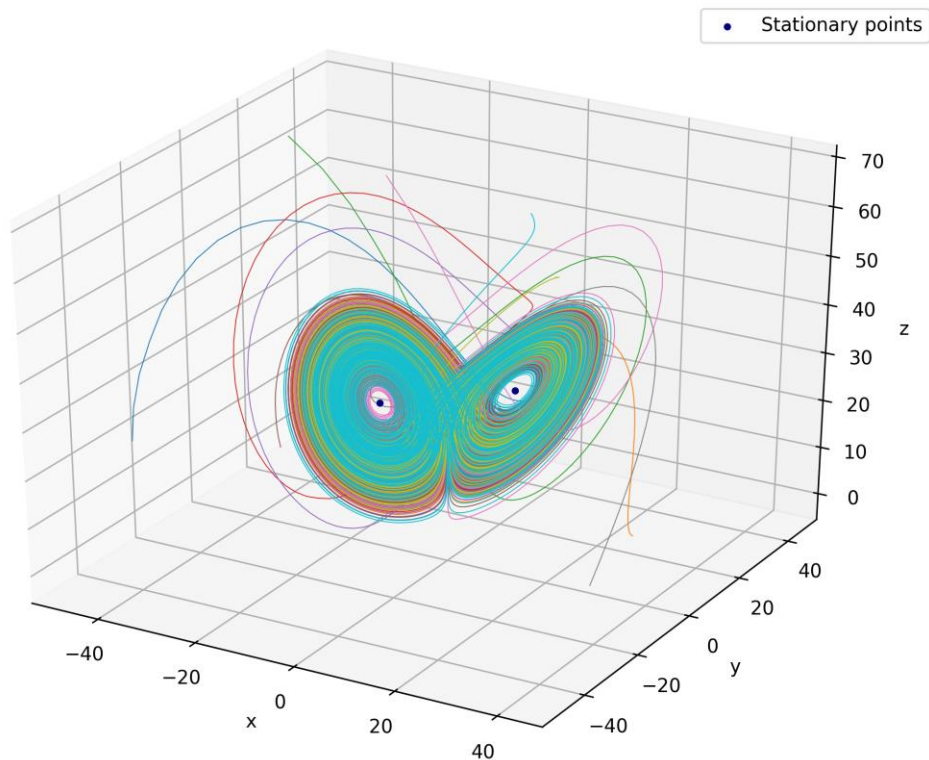


Рис. 14 - Фазовый портрет траекторий решения ОДУ при случайно сгенерированных начальных условиях при  $r = 30$ .

Помимо рассмотренных значений параметра  $r$ , интерес представляют конкретные значения данного параметра, при которых возникают перестройки аттрактора и его качественные изменения.

Так, известно, что при значении  $r = 24.06$  и до  $r = 24.74$  [4] в системе существуют три аттрактора – две неподвижные точки (стационарные позиции (5)) и «странный аттрактор», представляющий собой неустойчивые предельные циклы. При таких значениях параметра (рис. 15) – траектории наиболее устойчивы и равномерны, размах колебаний меньше, чем при  $r = 20$  (рис. 13).

При больших же значениях, например, при  $r = 28$ , стационарные точки (5) теряют устойчивость и остается единственное притягивающее множество – «странный аттрактор» Лоренца (рис. 16) [4].

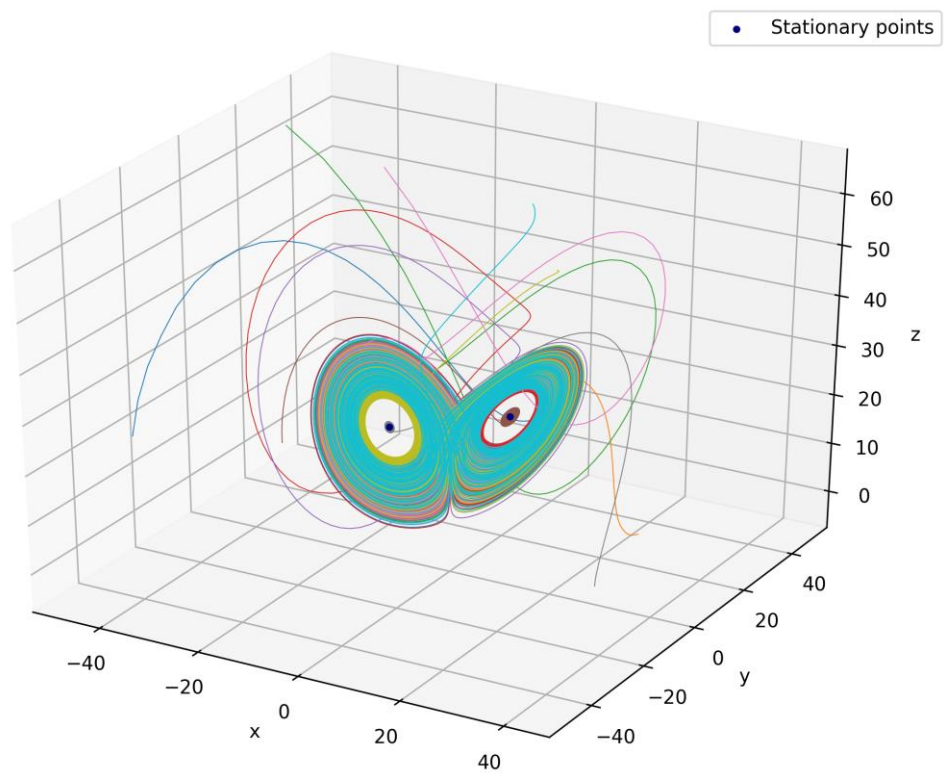


Рис. 15 - Фазовый портрет траекторий решения ОДУ при случайно сгенерированных начальных условиях при  $r = 24.06$ .

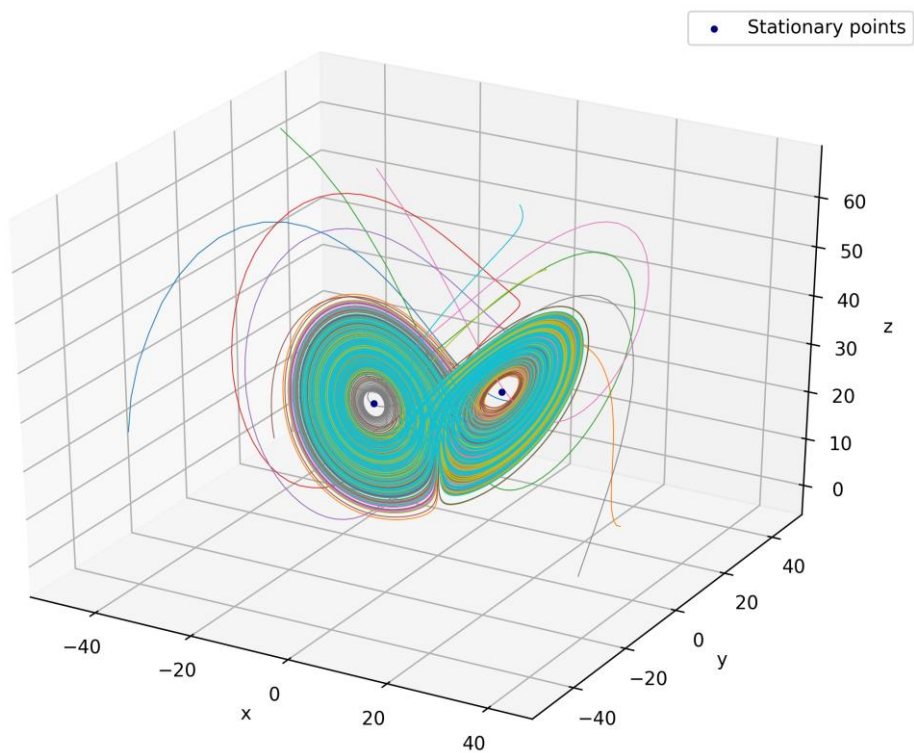


Рис. 16 - Фазовый портрет траекторий решения ОДУ при случайно сгенерированных начальных условиях при  $r = 28$ .

При больших значениях параметра  $r$  траектории переходят в режим автоколебаний, чередуя хаотические и периодические колебания, тем самым теряя устойчивость и сходимость. [4]

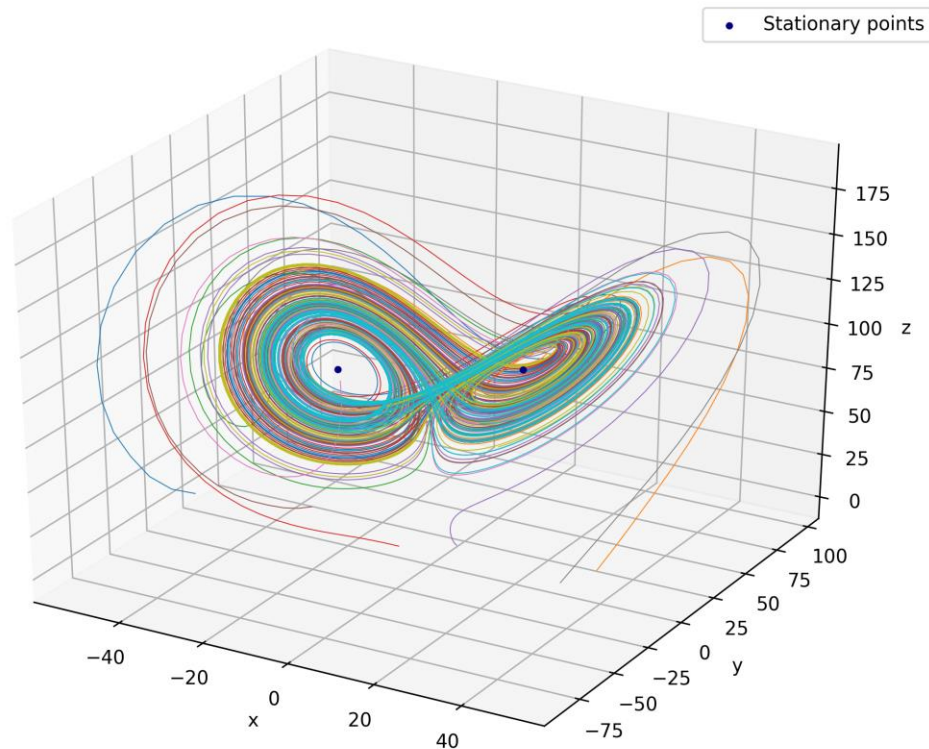


Рис. 17 - Фазовый портрет траекторий решения ОДУ при случайно сгенерированных начальных условиях при  $r = 100$ .

Анализируя фазовые портреты, было обнаружено, что при правильно определенных ограничениях генерации начальных условий, наблюдается сходимость решений независимо от выбранного начального условия к аттрактору. При изменении параметра  $r$  до определенного значения уменьшается хаотичность и увеличивается устойчивость и сходимость траекторий, которые притягиваются к аттракторам, также меняющим свою природу с ростом параметра  $r$ .

## 5. Анализ методов нахождения траектории и выбираемого шага $h$ с точки зрения затраченного времени.

Приняв значение параметра  $r = 30$ , как случай наиболее сложного динамического режима из набора  $r \in [0; 30]$  с шагом 10 (сходимость к «странному аттрактору» Лоренца), для значений шага  $h \in [0.005; 0.01, 0.05, 0.01]$  для каждого из трех методов, был выполнен временной



анализ расчета дискретных траекторий для набора случайных начальных условий  $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^{100}$  (Таблица 1).

Таблица 1 – Зависимость времени расчета дискретной траектории от шага.

Метод Шаг	Явный Эйлера	Неявный Эйлера	Адамса-Башфорта-Моултона
0.005	11 сек.	165.63 сек.	86.66 сек.
0.01	5.61 сек.	76.66 сек.	42.87 сек.
0.05	1.13 сек.	15.35 сек.	8.98 сек.
0.1	0.58 сек.	7.83 сек.	4.52 сек.

Результаты, представленные в таблице 1 были также проиллюстрированы графиком зависимости времени расчета от шага (рис. 17).

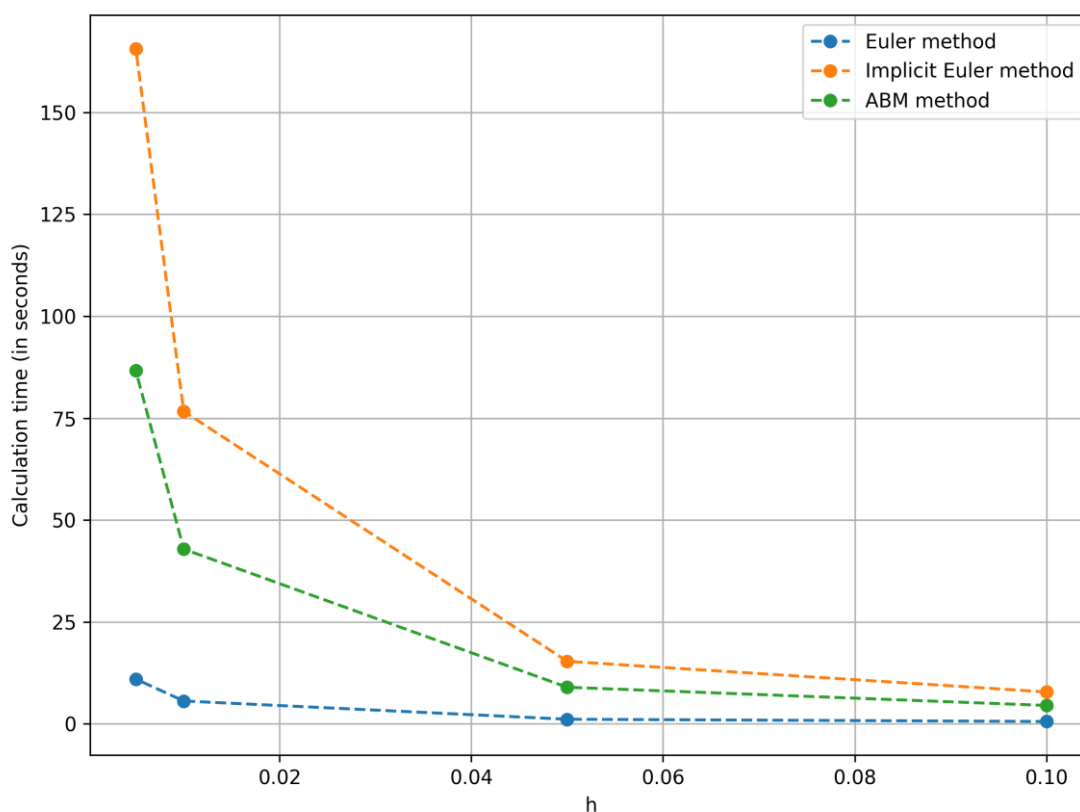


Рис. 18 – Зависимость времени расчета дискретной траектории для 100 начальных условий от шага  $h$  для каждого рассматриваемого метода.

Анализируя результаты рис. 18 было обнаружено, что неявный метод Эйлера является самым неоптимальным с точки зрения временных ресурсов, что можно объяснить ресурсозатратной операцией решения нелинейного уравнения. Самым оптимальным с точки зрения точности и временных

ресурсов является метод Адамса-Башфорта-Моултона, что демонстрирует достоинство использования численных методов задач Коши по схеме предиктор-корректор.

## Заключение

В ходе лабораторной работы с помощью численных методов решения задачи Коши для систем ОДУ была проанализирована модель Лоренца на предмет влияния изменений динамических параметров на траектории решения системы.

На основе полученных фазовых портретов были обнаружены аттракторы системы при разных значениях параметра системы  $r$ . Были продемонстрированы случаи перестройки траекторий и аттракторов.

Сравнивая результаты, полученные явным методом Эйлера, неявным методом Эйлера и методом Адамса-Башфорта-Моултона, было обнаружено, что оптимальным методом для решения динамической системы (1) является метод Адамса-Башфорта-Моултона, а самым чувствительным к изменениям параметров, является неявный метод Эйлера.

Было обнаружено, что, для определенного  $t_n$  и области начальных условий, для любого решения системы Лоренца, независимо от начального условия существует такой момент времени, когда соответствующая фазовая траектория входит в предельное множество — аттрактор Лоренца, — к которому притягиваются все траектории динамической системы.

Также, по результатам временного анализа было еще раз доказано, что метод Адамса-Башфорта-Моултона является оптимальным для решения такого рода задач.

## Список использованных источников

1. **Першин А.Ю.** *Лекции по вычислительной математике (черновик).* [Электронный ресурс] // Кафедра РК6 (Системы автоматизированного проектирования). МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2020 г., 142 с.
2. *Теория хаоса.* [Электронный ресурс] // <https://nplus1.ru/material/2019/09/06/chaosreigns> - (Дата обращения 26.05.2020)
3. *Аттрактор Лоренца.* [Электронный ресурс] // [https://ru.wikipedia.org/wiki/Аттрактор\\_Лоренца](https://ru.wikipedia.org/wiki/Аттрактор_Лоренца) - (Дата обращения: 25.05.2020)
4. **Семенова Е.Е.** *Хаотическое поведение динамических систем. Система Лоренца.* [Электронный ресурс] // [https://math-it.petsu.ru/users/semenova/Nonlinear\\_Dynamics/Lectons/Lecture\\_5.pdf](https://math-it.petsu.ru/users/semenova/Nonlinear_Dynamics/Lectons/Lecture_5.pdf) - (Дата обращения: 25.05.2020)