Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент	Косенков Александр Александрович
Группа	РК6-64Б
Тип задания	Лабораторная работа №2
Тема лабораторной работы	Нелинейная регрессия

Студент ________________ **_Косенков А.А._**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель ________________ **_Першин А.Ю._**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель ________________ **_Соколов А.П._**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Оценка ______________________________

Москва, 2020 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу

Задача 11 (Регрессия)

Дана модель экспоненциального роста:

$$\frac{d}{dt}I = (\beta - \gamma)I, \tag{1}$$

где I – количество инфицированных людей, β – среднее число контактов, приходящихся на человека в единицу времени, и γ – это среднее число выздоровевших, приходящихся на человека в единицу времени (т. е средняя скорость иммунизации).

Также дана *SIS*-модель:

$$\frac{d}{dt}I = (\beta - \gamma)I - \frac{\beta}{N}I^2, \tag{2}$$

где N – число людей в популяции (например, число жителей страны).

Требуется:

1. Найти решение модели экспоненциального роста и *SIS*-модели при условии, что $I(0) = I_0$ и продемонстрировать детальный вывод этого решения. После этого приведите решение модели экспоненциального роста к форме:

   $$I(t) = I_0 e^{\chi t}, \tag{3}$$

   где $\chi = \beta - \gamma$, и решение *SIS*-модели к форме

   $$I(t) = \frac{I_\infty}{1 + (\frac{I_\infty}{I_0} - 1)e^{-\chi t}}, \tag{4}$$

   где I_∞ обозначает предельное значение $I(t)$ при $t \to \infty$, т. е. $I_\infty = \lim_{t\to\infty} I(t)$.
2. Сформировать выборку данных зависимости числа инфицированных от времени в данной стране. Страна выбирается исходя из первой буквы фамилии (Канада). Актуальные данные в формате *csv* можно найти на сайте https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data.
3. Предполагая, что в первые недели распространения вируса в выбранной стране рост числа зараженных описывается экспоненциальной моделью, требуется оценить значение коэффициента $\chi = \beta - \gamma$ с помощью

нелинейной регрессии и нормального уравнения, взяв в качестве аппроксимирующей функции решение экспоненциальной модели и начального числа инфицированных $I_0 = 20 \dots 30$ и вывести на экран в логарифмической шкале полученное решение вместе с исходными дискретными данными о числе инфицированных. Требуется подробно описать формулировку задачи регрессии в вашем случае и явно указать выражения для отдельных векторов и матрицы, входящих в нормальное уравнение.

4. Подставив найденное значение коэффициента $\chi = \beta - \gamma$ в решение *SIS*-модели, оценить значение коэффициента I_∞ с помощью нелинейной регрессии и нормального уравнения, взяв в качестве аппроксимирующей функции решение *SIS*-модели и вывести на экран полученное решение вместе с исходными дискретными данными о числе инфицированных. Требуется подробно описать формулировку задачи регрессии в вашем случае и явно указать выражения для отдельных векторов и матрицы, входящих в нормальное уравнение.
5. Ответить на вопросы:
    (a) Какова погрешность полученной аппроксимации (решения *SIS*-модели) относительно нормы L_∞? Относительно нормы L_2?
    (b) Какой критерий можно использовать для определения максимального числа дней, в течение которых использование модели экспоненциального роста оправдано? Каково такое максимальное число дней в случае данной лабораторной работы в соответствии с выбранным критерием?
    (c) Предсказать, сколько человек в соответствии с полученной аппроксимацией (решения *SIS*-модели) будут инфицированы в выбранной стране при $t \to \infty$ и через сколько дней после начала эпидемии наступит ее окончание.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – применение нелинейной регрессии для получения экспоненциальной и SIS моделей для решения практической задачи исследования распространения коронавирусной инфекции COVID-19 в Канаде, использование данных моделей для дальнейшего прогноза распространения инфекции.

Выполненные задачи

1. Получение аналитического решения экспоненциальной модели.
2. Получение аналитического решения SIS-модели.
3. Формирование выборки данных зависимости числа инфицированных от времени.
4. Оценка значения коэффициента $\chi = \beta - \gamma$ с помощью нелинейной регрессии и нормального уравнения с использованием решения экспоненциальной модели.
5. Оценка значения коэффициента I_∞ с помощью нелинейной регрессии с использованием решения SIS-модели.
6. Вычисление погрешностей полученной аппроксимации (решения SIS-модели).
7. Определение критерия для нахождения максимального числа дней, в течение которых оправдано использование модели экспоненциального роста.
8. Предсказание окончания эпидемии в соответствии с полученной аппроксимацией (решения SIS-модели).

В ходе лабораторной работы для программной реализации задач был использован язык Python v3.6.9, а также прикладные библиотеки numpy v1.18.1, matplotlib v3.2.0, scipy v1.4.1, pandas v1.0.3.

1. Получение аналитического решения экспоненциальной модели.

Экспоненциальная модель (1) представляет собой дифференциальное уравнение 1-го порядка, решение которого было произведено с помощью метода разделения переменных:

$$\frac{dI}{dt} = (\beta - \gamma)I,$$

$$\frac{dI}{I} = (\beta - \gamma)dt,$$

при этом $I \neq 0$, но данное условие выполняется исходя из смысла модели (количество зараженных I должно быть больше 0),

$$\int \frac{dI}{I} = \int (\beta - \gamma)dt,$$

$$\ln|I| = t(\beta - \gamma) + C_1,$$

$$|I| = e^{t(\beta-\gamma)+C_1} = e^{t(\beta-\gamma)}e^{C_1}, \tag{5}$$

где $C_1 = const$. Также известно, что $I(0) = I_0$, откуда решение задачи Коши для общего решения (5):

$$I_0 = e^0 e^{C_1},$$

откуда $e^{C_1} = I_0$ и, при учете того, что количество зараженных всегда больше 0, а также с учетом замены $\chi = \beta - \gamma$, выражение (5) приобретает вид:

$$I(t) = I_0 e^{\chi t},$$

что соответствует искомому выражению (3).

2. Получение аналитического решения SIS-модели.

SIS-модель (2) представляет собой дифференциальное уравнение вида уравнения Бернулли, решение которого было произведено с помощью метода вариации постоянной.

Метод решения ДУ Бернулли предполагает замену переменной:

$$x = \frac{1}{I^{2-1}} = \frac{1}{I}, \tag{6.1}$$

дифференциал которой равен:

$$dx = -\frac{dI}{dt}\frac{1}{I^2}. \tag{6.2}$$

Преобразовав исходное ДУ (3) к виду:

$$\frac{dI}{dt}\frac{1}{I^2} - \chi\frac{1}{I} = -\frac{\beta}{N},$$

с учетом условия $I \neq 0$, которое выполняется исходя из смысла модели (количество зараженных I должно быть больше 0), а также с учетом $\chi = \beta - \gamma$, выполнив замену (6.1) и (6.2) было получено неоднородное линейное ДУ:

$$\frac{dx}{dt} + \chi x = \frac{\beta}{N}. \tag{6.3}$$

С помощью метода разделения переменных было решено однородное ДУ:

$$\frac{dx}{dt} + \chi x = 0,$$

$$\frac{dx}{x} = -\chi dt,$$

$$\ln|x| = -\chi t + C_2,$$

$$x = e^{-\chi t}e^{C_2} = e^{-\chi t}\tilde{C} \tag{6.4}$$

где $C_2 = const, \tilde{C} = const$.

По методу вариации постоянной, выполнив замену $\tilde{C} = \tilde{C}(t)$, и подставив общее решение однородного ДУ (6.4) в исходное уравнение (6.3) было получено:

$$\left(e^{\chi t}\tilde{C}(t)\right)' + \chi\left(e^{\chi t}\tilde{C}(t)\right) = \frac{\beta}{N},$$

$$-\chi e^{\chi t}\tilde{C}(t)+\tilde{C}(t)'e^{\chi t}+\chi e^{\chi t}\tilde{C}(t)=\frac{\beta}{N},$$

$$\tilde{C}(t)'e^{\chi t}=\frac{\beta}{N},$$

$$\tilde{C}(t)=\int\frac{\beta}{Ne^{\chi t}},$$

$$\tilde{C}(t)=\frac{\beta}{N\chi}e^{\chi t}+C_3, \tag{6.5}$$

где $C_3=const$. Подставляя (6.5) в (6.4), было получено решение линейного неоднородного ДУ (6.3):

$$x=e^{-\chi t}\left(\frac{\beta}{N\chi}e^{\chi t}+C_3\right)=\frac{\beta+N\chi C_3e^{-\chi t}}{N\chi}.$$

Выполнив обратную замену было получено:

$$I(t)=\frac{N\chi}{\beta+N\chi C_3e^{-\chi t}}. \tag{6.6}$$

Известно, что $I(0)=I_0$, откуда решение задачи Коши для общего решения (6.6):

$$I_0=\frac{N\chi}{\beta+N\chi C_3e^0},$$

$$C_3=\frac{N\chi-\beta I_0}{I_0N\chi}. \tag{6.7}$$

Также известно, что $\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=I_\infty$, откуда:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N\chi}{\beta+N\chi C_3e^{-\chi t}}=\frac{N\chi}{\beta}=I_\infty. \tag{6.8}$$

Подставив (6.7) в (6.6) и преобразуя полученное выражение, было получено:

$$I(t)=\frac{N\chi}{\beta+\beta\left(\frac{N\chi}{I_0\beta}-1\right)e^{-\chi t}}=\frac{\frac{N\chi}{\beta}}{1+\left(\frac{N\chi}{I_0\beta}-1\right)e^{-\chi t}},$$

что при замене (6.9) дает:

$$I(t)=\frac{I_\infty}{1+\left(\frac{I_\infty}{I_0}-1\right)e^{-\chi t}},$$

что соответствует искомому выражению (4).

3. Формирование выборки данных зависимости числа инфицированных от времени.

По условию задачи в соответствии с первой буквой фамилии исследуемой страной была определена Канада.

В качестве исходной выборки данных была использована *csv*-таблица, доступная по адресу https://covid.ourworldindata.org/data/ecdc/total_cases.csv [2].

Используемая для исследований версия таблица включает в себя данные по количеству зараженных в период с 31.12.19 по 28.04.20.

Из csv-таблицы была произведена выборка данных по Канаде с помощью библиотеки *pandas*, по которой в последствии были построены графики зависимости количества зараженных от дней с начала распространения инфекции COVID-19 в Канаде (рис. 1 и 2). При этом, так как данные, предоставленные ресурсом [2], представлены в сводной таблице, начиная с даты 31.12.19 – были исключены данные, когда количество инфицированных в Канаде было равно 0.

День, когда был обнаружен первый зараженный в Канаде – 26.01.20.

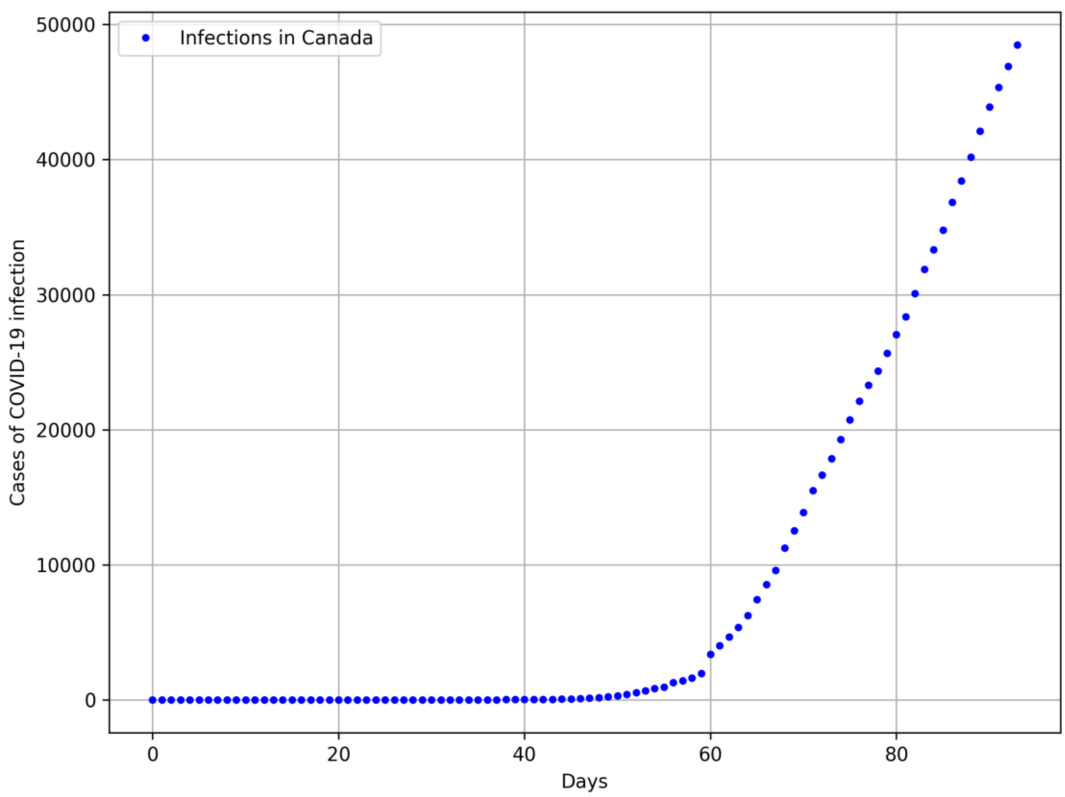

Рис. 1 – Зависимость количества инфицированных COVID-19 в Канаде от количества дней с начала заражения.

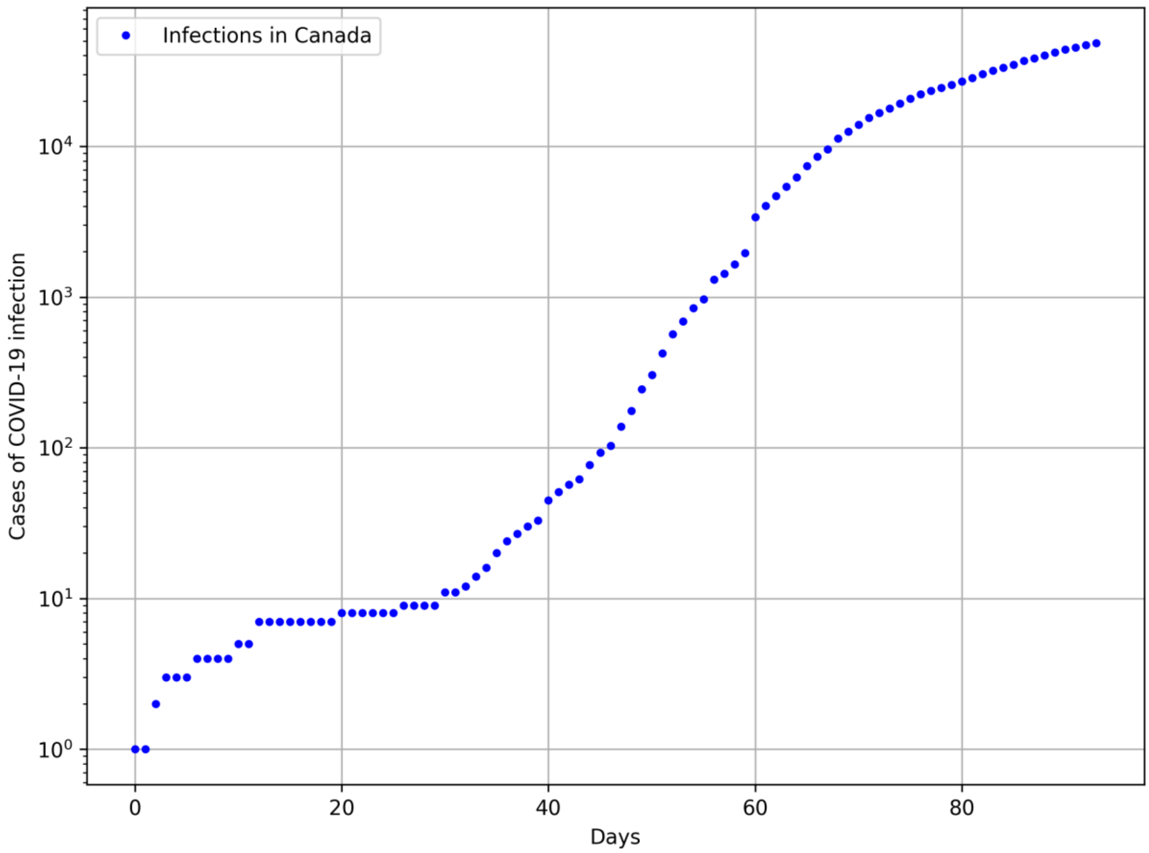

Рис. 2 - Зависимость количества инфицированных COVID-19 в Канаде от количества дней с начала заражения в логарифмической системе координат.

4. Оценка значения коэффициента $\chi = \beta - \gamma$ с помощью нелинейной регрессии и нормального уравнения с использованием решения экспоненциальной модели.

Предполагается, что экспоненциальная модель (1) описывает поведение распространения вируса в стране в первые недели. При анализе рис.2 можно убедиться в том, что в периоде приблизительно с 35-го по 75-й день с начала распространения коронавирусной инфекции в Канаде зависимость количества инфицированных носит экспоненциальный характер.

Случаи заражения до этого периода носят хаотичный характер и являются в большей степени флуктуациями, которые можно объяснить тем, что в первые дни зараженными являлись приезжие из других стран, а распространение вируса внутри страны началось позже после увеличения количества контактов между жителями и после прохождения инкубационного периода.

Рост количества зараженных после 75-го дня по рис.2 начинает снижаться, что может быть объяснено введением карантинных мер в стране, что приводит к изменению значения коэффициента χ, который зависит от количества контактов между людьми и влияет на экспоненциальную зависимость. Данные случаи заболевания были аппроксимированы SIS-моделью.

Для получения экспоненциальной модели, соответствующей исходной выборке $\{I_i\}_{i=0}^{m}$, где m – количество дней в рассматриваемом периоде экспоненциального роста, а значения y_i – количество зараженных в этом периоде, необходимо определить оптимальное значение коэффициента χ, а также задаться значением I_0 для аппроксимации выборки функцией (3), являющейся решением ДУ экспоненциальной модели.

Значение I_0 было выбрано из соображений того, что оно должно приблизительно «лежать» на экспоненте, то есть соответствовать искомой аппроксимации. Для этого было определено количество зараженных для 35-го дня, который в дальнейшем будет называться днем начала эпидемии, откуда $I_0 = 20$.

Значение коэффициента χ было найдено с помощью нелинейной регрессии путем решения нормального уравнения (4.15)[1], имеющего вид:

$$a = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

где a – вектор коэффициентов, X – матрица данных, y – вектор значений.

Для определения оптимального значения коэффициента χ была сформулирована постановка задачи нелинейной регрессии:

- Задана выборка из $m = 40$ пар дискретных значений $\{I_i, t_i\}_{i=1}^{m}$, описывающая данные о количестве зараженных в Канаде в период с 35-го по 75-й день с начала распространения коронавирусной инфекции в стране.
- Задана аппроксимирующая функция (3), где $I_0 = 20$, χ – оптимизируемый параметр.
- Требуется определить оптимальное значение коэффициента χ для наилучшего приближения аппроксимирующей функции к заданной выборке.

Причем значения t_i не принадлежат множеству дней, соответствующих дням распространения коронавирусной инфекции в стране в целом. В контексте экспоненциальной модели порядок дней начинается с 0, так как этого требует сама экспоненциальная модель.

Для решения нормального уравнения требуется, чтобы аппроксимирующая функция была линейна относительно оптимизируемых параметров. По этой причине для (3) был произведен переход от нелинейной записи относительно χ к линейной путем логарифмирования:

$$\ln I = \ln I_0 e^{\chi t},$$

$$\ln I = \ln I_0 + \chi t,$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = \chi t. \tag{7}$$

Были установлены соответствия с нормальным уравнением:

$$a = \chi, X = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \ln \frac{I_1}{I_0} \\ \vdots \\ \ln \frac{I_m}{I_0} \end{pmatrix}.$$

Вычисление нормального уравнения было произведено с помощью разработанной функции *norm_eq_solver(x, y)* (Листинг 1).

Листинг 1. Реализация решения нормального уравнения.

```
def norm_eq_solver(x, y):
    X = np.c_[x]
    A = np.linalg.inv(X.T.dot(X)).dot(X.T).dot(y)

    return A
```

В ходе решения было получено значение $\chi \approx 0.18915$, откуда аппроксимирующая функция (3) принимает вид:

$$I(t) = 20e^{0.18915t}. \tag{8}$$

По полученной аппроксимации был построен график сравнения результатов экспоненциальной модели и исходной выборки данных (рис. 3).

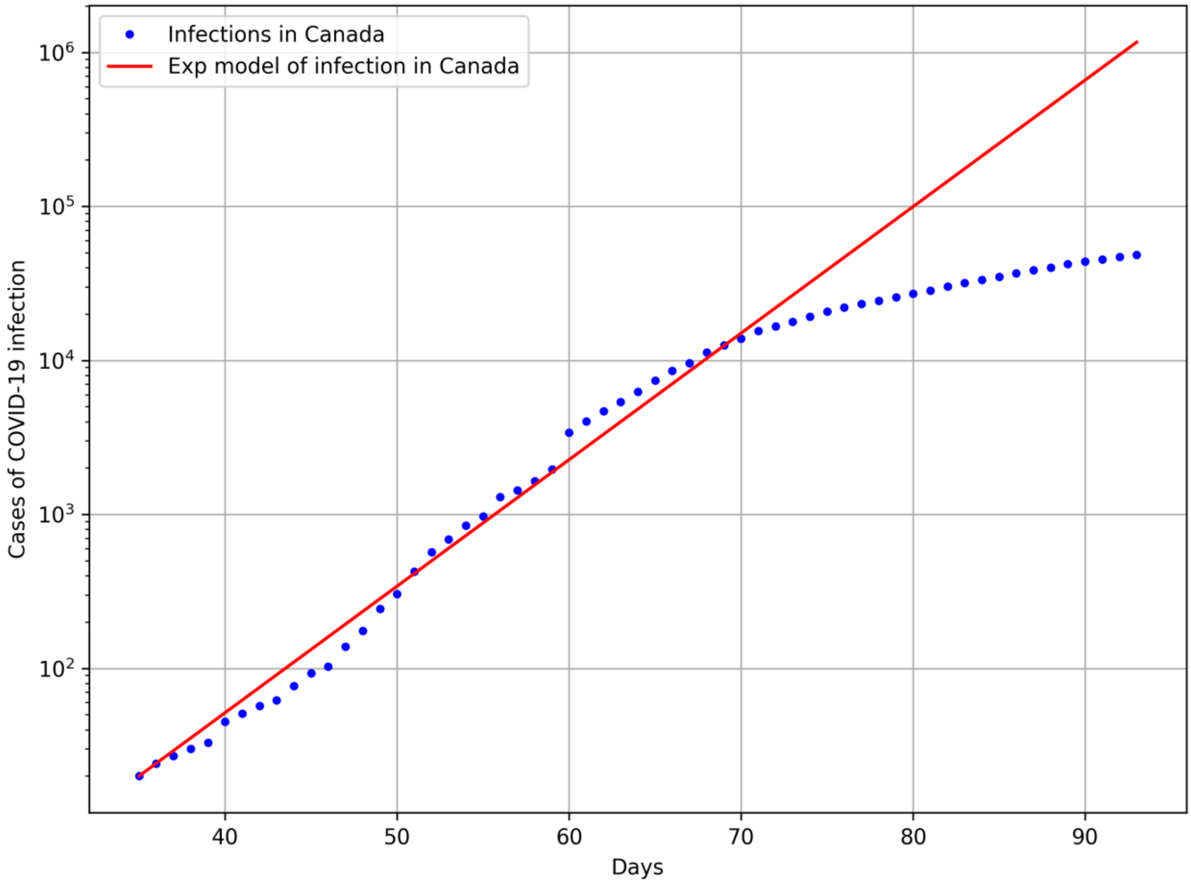

Рис. 3 – Сравнение реальных данных по количеству заражений COVID-19 в Канаде и данных, полученных экспоненциальной моделью, в логарифмическом масштабе.

Анализируя рис. 3 можно заметить, что экспоненциальная модель достаточно точно описывает поведение роста инфицированных вирусом в выбранном для аппроксимации периоде.

5. Оценка значения коэффициента I_∞ с помощью нелинейной регрессии с использованием решения SIS-модели.

Для SIS-модели (2), описывающей долгосрочную динамику эпидемии, были использованы значения коэффициентов χ и I_0 из экспоненциальной модели. Таким образом, задача оптимизации SIS-модели сводится к оптимизации коэффициента I_∞, обозначающего предельное значение количества зараженных.

Для определения оптимального значения коэффициента I_∞ можно было бы применить нелинейную регрессию также, как и для случая экспоненциальной модели, однако аппроксимирующая функция (4) является нелинейной относительно коэффициента I_∞ и сведение данной функции к линейной приведет к потери качества аппроксимации. Поэтому определение оптимального значения данного коэффициента было произведено численно для задачи минимизации метода наименьших квадратов.

Постановка задачи МНК для определения аппроксимации SIS-модели:

$$\min_{I_\infty} E_2\,(I_\infty) = \min_{I_\infty} \sum_{i=1}^{m} \big(I(t_i) - I^*(t_i)\big)^2, \qquad (9)$$

где $I^*(t_i)$ – значения количества зараженных из SIS-модели, а $m = 59$ – количество дней с начала эпидемии (экспоненциального роста).

Данная задача минимизации была решена с помощью функции *minimize* из библиотеки *scipy.optimize*, для чего предварительно программно в функции *get_lsm_func* (Листинг 2) было реализовано замыкание, возвращающее функцию для минимизации, зависящую только от параметра I_∞.

Листинг 2: Формирование функции для минимизации МНК.

```
def get_lsm_func(y, t, I_0, hi):
    def lsm_sis(I_inf):
        deviations = 0
        for i in range(len(y)):
            deviations += (y[i] - sis_model(t=t[i], hi=hi, I_0=I_0,
                           I_inf=I_inf)) ** 2
        return deviations

    return lsm_sis
```

Найденное оптимальное значение $I_\infty = 44150$, откуда аппроксимирующая функция (4) принимает вид:

$$I(t) = \frac{44150}{1 + 2206.5e^{-0.18915t}}. \quad (10)$$

По полученной аппроксимации был построен график сравнения результатов SIS-модели и исходной выборки данных (рис. 4).

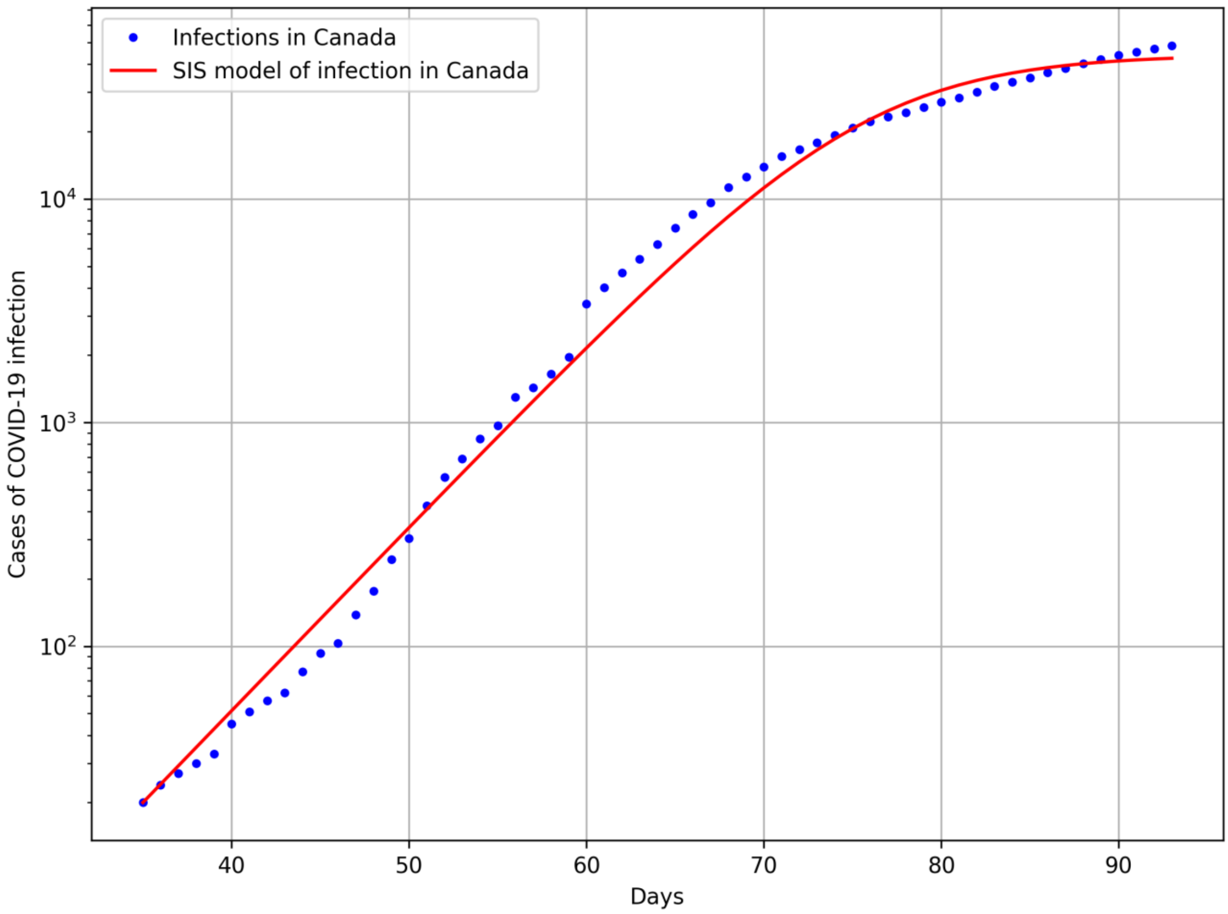

Рис. 4 - Сравнение реальных данных по количеству заражений COVID-19 в Канаде и данных, полученных SIS-моделью, в логарифмическом масштабе.

Анализируя рис.4 можно сказать, что полученная SIS-модель достаточно точно описывает поведение исходной выборки данных, однако не описывает поведение в долгосрочной перспективе достоверно, поскольку после 90-го дня SIS-модель практически выходит на «плато», в то время как реальные данные продолжают демонстрировать рост количества заражений. Это обусловлено тем, что модели являются идеализированными и не учитывают всех факторов, реально влияющих на количество заражений.

6. Вычисление погрешностей полученной аппроксимации (решения SIS-модели).

Вычисление абсолютной и относительной погрешностей аппроксимации SIS-модели производилась в нормах L_∞ и L_2.

По определению, абсолютной погрешностью является норма разности между точным и приближенным значением, а относительной погрешностью является отношение абсолютной погрешности к норме точных значений/функции.

Формула нормы в пространстве L_∞ в общем виде:

$$L_\infty = \|x(t)\|_\infty = max_{t\in[a;\,b]}|x(t)|. \tag{11}$$

Тогда формулы абсолютной и относительной погрешностей для SIS-модели:

$$\Delta_\infty(I) = max_{i\in[1;\,m]}|I(t_i) - I^*(t_i)|, \tag{11}$$

$$\delta_\infty(I) = \frac{max_{i\in[1;\,m]}|I(t_i) - I^*(t_i)|}{max_{i\in[1;\,m]}|I(t_i)|}, \tag{12}$$

где $I^*(t_i)$ – значения количества зараженных из SIS-модели, $m = 59$ – количество дней с начала эпидемии (экспоненциального роста), $I(t_i)$ – значения количества зараженных исходной выборки данных.

Для определения значений погрешностей в пространстве L_∞ были написаны программные функции *l_infinity_error_absolute* и *l_infinity_error_relative*.

Полученные значения погрешностей:

$\Delta_\infty(I) \approx 5951.795$, $\delta_\infty(I) \approx 0.1227$

Формула нормы в пространстве L_2 в общем виде:

$$L_2 = \|x(t)\|_2 = \left(\frac{1}{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2}\right). \tag{13}$$

Тогда формулы абсолютной и относительной погрешностей для SIS-модели:

$$\Delta_2(I) = \frac{1}{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}|I(t_i) - I^*(t_i)|^2}\,. \quad (14)$$

$$\delta_2(I) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}|I(t_i) - I^*(t_i)|^2}{\sum_{i=1}^{m}|I(t_i)|^2}}, \quad (15)$$

Для определения значений погрешностей в пространстве L_2 были написаны программные функции *l_2_error_absolute* и *l_2_error_relative*.

Полученные значения погрешностей:

$\Delta_2(I) \approx 2014.149$, $\delta_2(I) \approx 0.097$.

Из найденных значений погрешностей можно говорить о том, что аппроксимация SIS-модели к исходной выборке достаточно точная.

7. Определение критерия для нахождения максимального числа дней, в течение которых оправдано использование модели экспоненциального роста.

Применимость модели экспоненциального роста можно рассматривать с точки зрения тех же рассуждений, которые были использованы при выборе диапазона аппроксимации экспоненциальной модели в п. 4. А именно, поиск участка исходных данных, который с минимальным отклонением удовлетворяет экспоненциальному поведению. В качестве отклонения от этого поведения, что, в свою очередь, также является и критерием применимости, было принято решение взять условие, что если в течение 5 дней подряд аппроксимация экспоненциальной моделью больше, чем реальные данные, более чем на 10 процентов, то экспоненциальная модель более не применима. Тогда условие окончания применимости модели можно записать как:

$$I^*(t_i) > 1.1I(t_i), i \in [k, k+5], \quad (16)$$

где k – день окончания применимости экспоненциальной модели.

При этом стоит учитывать, что так как экспоненциальная модель идеализирована и реальные данные могут отклонятся – стоит начинать рассматривать критерий (16) не с начала участка использования экспоненциальной модели, а с середины или ближе к концу, так как в начале, в силу погрешностей, данный критерий может дать некорректный результат.

Для поиска дня окончания применимости экспоненциальной модели была разработана программно функция *applicability_exp_model*, с помощью которой было определено значение $k = 35$ дней с начала эпидемии (с начала использования экспоненциальной модели)

8. Предсказание окончания эпидемии в соответствии с полученной аппроксимацией (решения SIS-модели).

Оценка максимального количества зараженных была произведена еще в п. 4 при поиске предельного значения I_∞ SIS-модели при $t \to \infty$: $I_\infty = 44150$.

Опираясь только на значения $I(t_i)$, полученных из SIS-модели, можно опираться на критерий окончания эпидемии, который был сформулирован как день, когда прирост количества заболевших за один день становится меньше 1% от общего числа заболевших, т.е.:

$$I(t_{i+1}) < 1.01 I(t_i). \qquad (17)$$

Для определения дня окончания эпидемии по критерию (17) была разработана программно функция *sis_prediction*, с помощью которой был определен день окончания эпидемии – на 57-й день после начала эпидемии (27.04.20).

Поскольку исходные данные взяты по 28.04.20, можно сказать, что данная оценка не соответствует действительности. Это связано с причинами, описанными в п.5, а именно, с идеализированностью SIS-модели, которая не учитывает, например, карантинных мер, предпринятых страной.

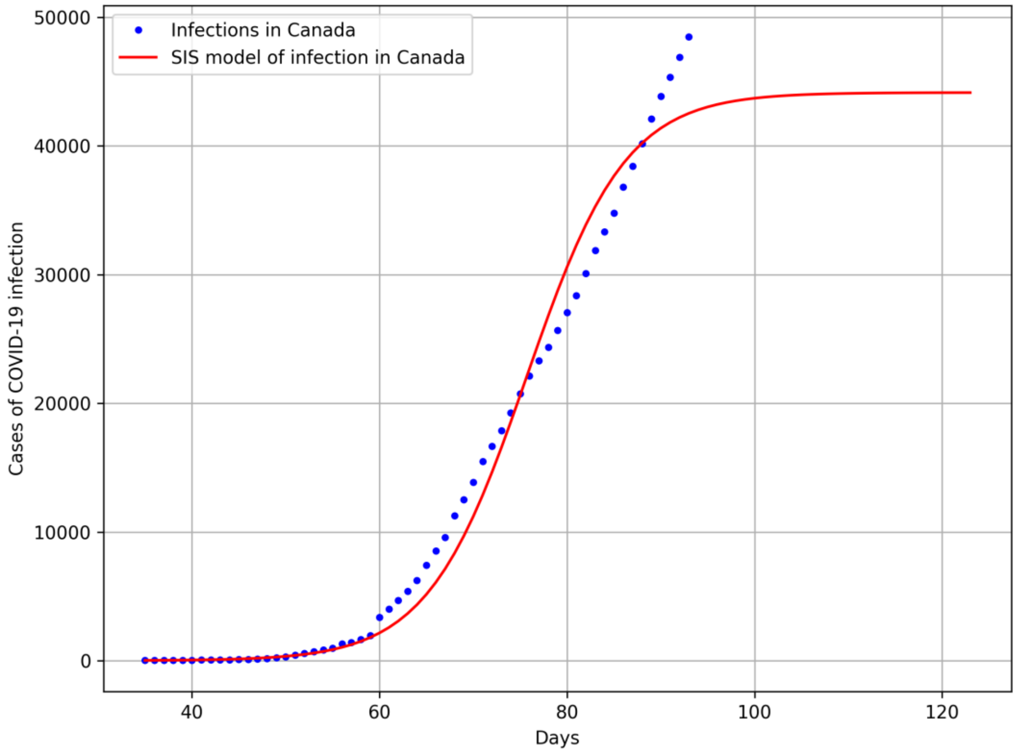

Рис. 5 - Сравнение реальных данных по количеству заражений COVID-19 в Канаде и данных, полученных SIS-моделью с прогнозом

Заключение

В ходе лабораторной работы с помощью нелинейной регрессии были получены экспоненциальная и SIS модели распространения COVID-19 в Канаде. Данные модели были проанализированы и исследованы на предмет погрешностей, и практическую оценку распространения вируса.

В результате проделанной работы, на основе полученных графиков и результатов, можно сделать следующие выводы:

- Использование экспоненциальной модели оправдано только на ранних этапах распространения инфекции, поскольку в дальнейшем рост числа заболевших снижается и уже не аппроксимируется экспоненциальной моделью.

- Долгосрочный прогноз и аппроксимацию может дать SIS-модель, но при минимальном разбросе данных от поведения модели, поскольку ни экспоненциальная модель, ни SIS-модель не учитывают реальных факторов, влияющих на распространение болезни. По этой причине, сделать прогноз окончания эпидемии становится проблематичным и требует большего количества данных и более сложных моделей.

Список использованных источников

1. **Першин А.Ю.** *Лекции по вычислительной математике (черновик)*. [Электронный ресурс] // Кафедра РК6 (Системы автоматизированного проектирования). МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2020 г., 142 с.
2. *Число зараженных по странам в виде csv-таблицы.* [Электронный ресурс] // https://covid.ourworldindata.org/data/ecdc/total_cases.csv - (Дата обращения: 28.04.2020)