



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент Косенков Александр Александрович

Группа РК6-64Б

Тип задания Лабораторная работа

Тема лабораторной работы Интерполяция Лагранжа и кусочная
интерполяция

Студент _____ **Косенков А.А.**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель _____ **Першин А.Ю.**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель _____ **Соколов А.П.**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Оценка _____

Москва, 2020 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу	3
Цель выполнения лабораторной работы.....	5
Выполненные задачи	5
1. Разработка функции для вычисления i -го базисного полинома Лагранжа в заданной точке.....	6
2. Разработка функции для вычисления интерполяционного полинома Лагранжа в заданной точке.	7
3. Анализ интерполяции Лагранжа для случая равномерно расположенных узлов.....	8
4. Анализ интерполяции Лагранжа для случая оптимально расположенных узлов.....	18
5. Анализ кусочно-линейной интерполяции при равномерном расположении узлов.....	24
6. Сравнение и анализ зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ для трех случаев интерполяции.	30
7. Аппроксимация значения функции ошибок $erf(x)$	32
Заключение	34
Список использованных источников	35

Задание на лабораторную работу

Задача 3 (интерполирование многочленами)

Даны функция

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad (1)$$

где $x \in [-5; 5]$, и функция ошибок

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x f(t) dt. \quad (2)$$

Требуется:

1. Разработать функцию $l_i(i, x, x_nodes)$, которая возвращает значение i -го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes , в точке x .
2. Написать функцию $L(x, x_nodes, y_nodes)$, которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes , в точке x .
3. Провести следующий анализ:
 - а. Для равномерно расположенных узлов в интервале $x \in [-5; 5]$ вывести на экран одновременно графики $f(x)$ и полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для нескольких различных количеств узлов, обозначаемых N . Описать, что наблюдается при увеличении количества узлов N .
 - б. Для каждого $N = 4, 5, \dots, 20$ рассчитать расстояние между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ .
 - с. Используя формулу для остаточного члена интерполяции, аналитически оценить верхнюю границу зависимости погрешности интерполяции от N . Вывести на экран сравнение полученного результата с зависимостью расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от N . Определить, как соотносятся друг с другом полученные аналитическая и численная оценки погрешности аппроксимации.
4. Повторить пункт 3 для случая оптимально расположенных узлов и для случая кусочно-линейной интерполяции.
5. Вывести на едином графике зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от N для трех случаев интерполяции. Определить, как влияет расположение узлов на погрешность аппроксимации. Выяснить, какое расположение узлов и для каких N дает

более точную интерполяцию. Определить, как влияет использование локальной или глобальной интерполяции на точность интерполяции.

6. Найти приближенное значение функции ошибок $\operatorname{erf}(x)$ для $x = 2$, используя кусочно-линейную интерполяцию для $f(x)$ для $N = 3, 5, 7, 9$, и сравнить полученные значения. Дополнительно требуется представить аналитическое выражение для интеграла от кусочно-линейного интерполанта, используемого для аппроксимации $\operatorname{erf}(x)$. Описать, где применяется функция ошибок.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – исследование интерполяции полиномами Лагранжа для случаев равномерно распределенных узлов, чебышевских узлов, кусочно-линейной интерполяции; исследование точности аппроксимации в зависимости от количества узлов в сравнении с аналитическими значениями.

Выполненные задачи

1. Разработка функции для вычисления i -го базисного полинома Лагранжа в заданной точке.
2. Разработка функции для вычисления интерполяционного полинома Лагранжа в заданной точке.
3. Анализ интерполяции Лагранжа для случая равномерно расположенных узлов.
4. Анализ интерполяции Лагранжа для случая оптимально расположенных узлов.
5. Анализ кусочно-линейной интерполяции при равномерном расположении узлов.
6. Сравнение и анализ зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ для трех случаев интерполяции.
7. Аппроксимация значения функции ошибок $erf(x)$.

В ходе лабораторной работы для программной реализации задач был использован язык Python v3.6.9, а также прикладные библиотеки numpy v1.18.1, matplotlib v3.2.0, scipy v1.4.1.

1. Разработка функции для вычисления i -го базисного полинома Лагранжа в заданной точке.

Для вычисления базисного полинома Лагранжа в заданной точке была разработана функция $l_i(i, x, x_nodes)$ (листинг 1), реализующая программное вычисление формулы для базисного интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3)$$

В качестве оптимизации алгоритм сначала считает числитель итоговой дроби, и только в случае, если он не равен 0, вычисляет знаменатель.

Входными параметрами для функции является индекс базисного многочлена i , точка x , в которой вычисляется значение многочлена, а также список интерполяционных узлов x_nodes .

Возвращаемым значением является численное значение i -го базисного полинома Лагранжа в точке x .

Листинг 1: Функция вычисления базисного полинома Лагранжа в точке x .

```
def l_i(i, x, x_nodes):
    numerator = 1
    for j in range(0, len(x_nodes)):
        if numerator == 0:
            break
        elif j != i:
            numerator *= x - x_nodes[j]

    if numerator == 0:
        return 0

    denominator = 1
    for j in range(0, len(x_nodes)):
        if j != i:
            denominator *= x_nodes[i] - x_nodes[j]

    return numerator / denominator
```

2. Разработка функции для вычисления интерполяционного полинома Лагранжа в заданной точке.

Для вычисления интерполяционного многочлена Лагранжа в заданной точке была разработана функция $L(x, x_nodes, y_nodes)$ (листинг 2), реализующая программное вычисление формулы для интерполяционного многочлена Лагранжа для n узлов:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)l_i(x), \quad (4)$$

где $l_i(x)$ – значение i -го базисного полинома Лагранжа в точке x , вычисляемое по формуле (3).

Входными параметрами для функции является точка x , в которой вычисляется значение многочлена, список интерполяционных узлов x_nodes и список значений интерполируемой функции в этих узлах y_nodes .

Определение количества узлов интерполяции обеспечивается посредством определения количества точек в переданном списке x_nodes .

Возвращаемым значением является численное значение интерполяционного многочлена Лагранжа в точке x .

Листинг 2: Функция вычисления интерполяционного многочлена Лагранжа в точке x .

```
def L(x, x_nodes, y_nodes):
    if len(x_nodes) != len(y_nodes):
        print("The dimensions of the nodes x and y doesn't match")

    basis = [l_i(i, x, x_nodes) for i in range(len(x_nodes))]
    return np.sum(y_nodes * basis)

return numerator / denominator
```

3. Анализ интерполяции Лагранжа для случая равномерно расположенных узлов.

Для равномерно расположенных узлов в интервале $x \in [-5; 5]$ были рассчитаны значения интерполяции Лагранжа функции $f(x)$ для 200 точек для разного количества узлов $N = 4, 5, \dots, 20$. На едином графике были построены исходная функция $f(x)$ и интерполяция данной функции для разных N (рис. 1).

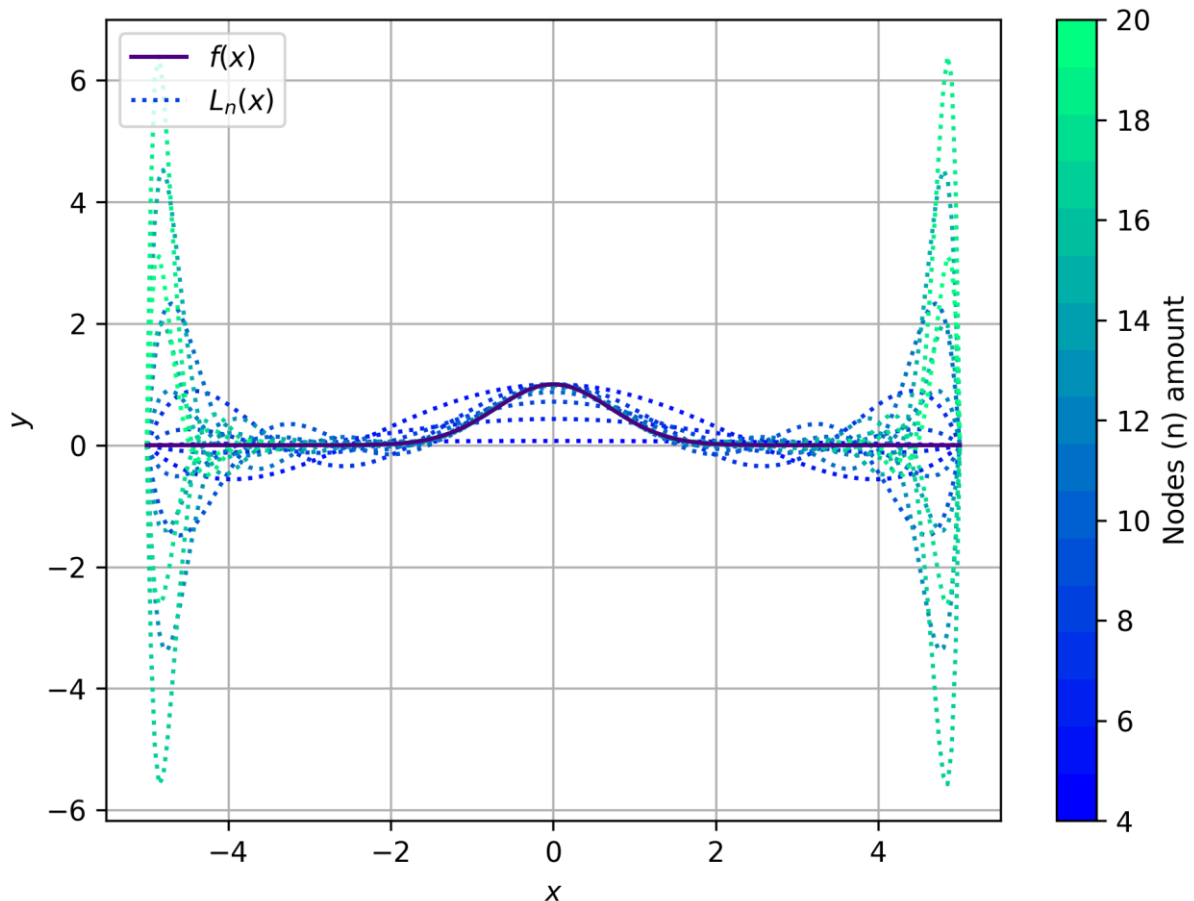


Рис. 1 – Функция $f(x)$ и интерполяция Лагранжа для $f(x)$ при равномерно распределенных узлах для разных значений количества узлов.

Вычисление значений интерполяции было произведено с помощью разработанной функции `lagrange_interpol(real_func, l_limit, r_limit, N, x_plot, method)`, которая принимает на вход в качестве аргументов: интерполируемую функцию `real_func`, пределы интерполирования `[l_limit, r_limit]`, количество узлов интерполяции `N`, список точек, для которых нужно вычислить значение интерполянта `x_plot`, и метод интерполяции (равномерно распределенные узлы, чебышевские узлы, кусочно-линейная интерполяция).

Из графиков на рис. 1 можно заметить, что при увеличении количества узлов интерполяции интерполяция функции $f(x)$ приближается к реальным

значениям исследуемой функции, тем самым давая более точный результат. Однако около границ интерполяции возникают паразитные осцилляции, причем данные осцилляции становятся больше при увеличении N .

Также, анализируя исходную функцию, можно заметить, что она имеет экстремум при $x = 0$, который является важной точкой для интерполяции. В случае исследуемого интервала $[-5; 5]$ данная точка не будет попадать в число узлов интерполяции при четных значениях N . Различие поведения интерполяции в зависимости от четности/нечетности количества узлов приведены на рис. 2.

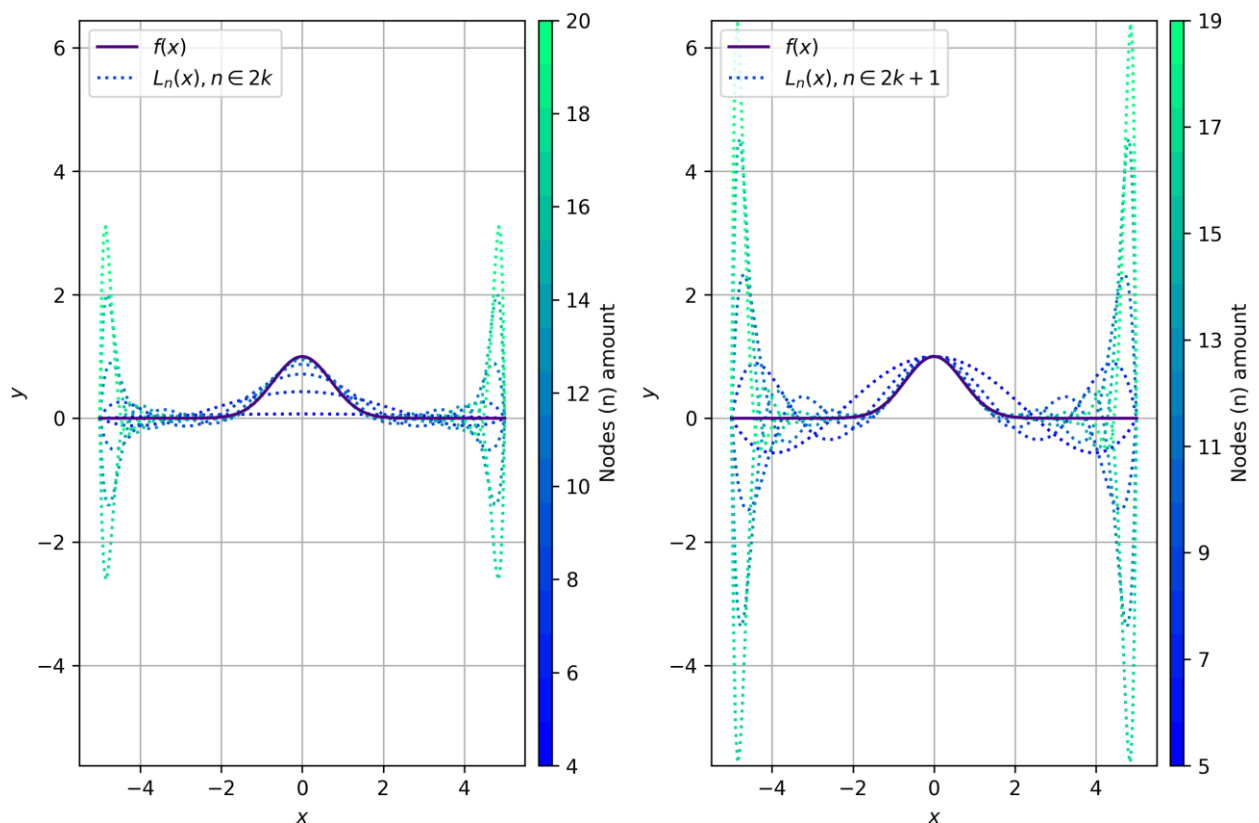


Рис. 2 - интерполяция Лагранжа для $f(x)$ при равномерно распределенных узлах четных (левый график) значений количества узлов N и нечетных (правый график) значений N .

Анализируя поведение интерполяции для четных и нечетных N на рис.2 можно заметить, что для случая четных узлов возникает большая погрешность относительно значения $f(x)$ в точке $x = 0$, чего не наблюдается для нечетных значений N . Однако во втором случае паразитные осцилляции обладают большей амплитудой и в последствии могут сильно повлиять на точность интерполяции. Данный факт будет учитываться в дальнейшем исследовании интерполяции и погрешностей.

Для исследования точности аппроксимации была рассчитана зависимость расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от

количества узлов $N = 4, 5, \dots, 20$. Данное расстояние было посчитано как равномерная норма по формуле

$$\|f(x) - L_{n-1}(x)\| = \max_{x \in [a;b]} |f(x) - L_{n-1}(x)|. \quad (5)$$

Графическое отображение значений расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ в зависимости от N изображен на рис.3.

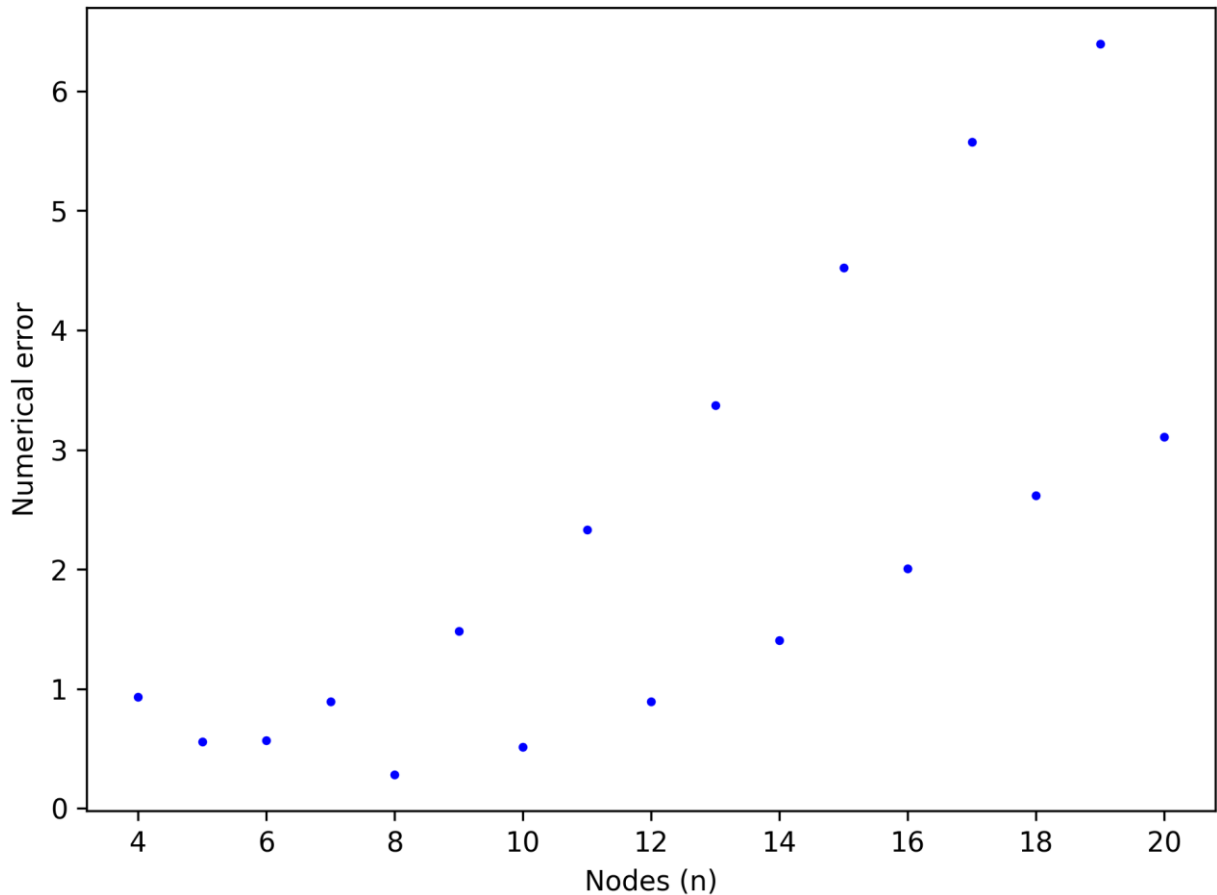


Рис. 3 – Значения расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ в зависимости от количества узлов интерполяции по равномерным узлам.

При анализе рис. 3 можно увидеть, что зависимость расстояния разделяется на 2 зависимости – для четных и для нечетных узлов. График зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ в зависимости от N для четных и для нечетных количеств узлов изображен на рис. 4.

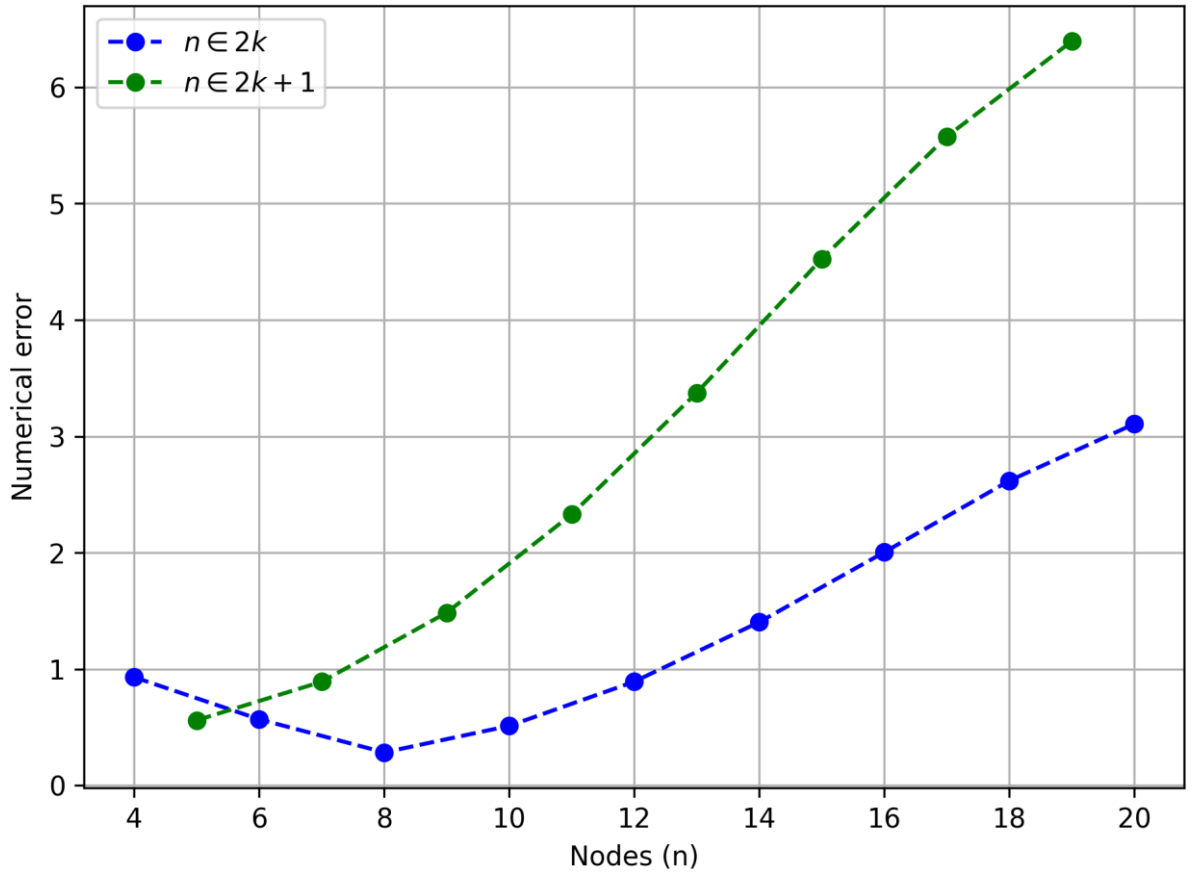


Рис. 4 – Зависимость расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от количества узлов интерполяции по равномерным узлам для четных и нечетных N .

Анализируя графики зависимости численного отклонения интерполянта для равномерных узлов от реальной функции (рис. 4) можно заметить влияние паразитных осцилляций на границах отрезка интерполяции при увеличении количества узлов. В дальнейшем исследовании погрешностей будут приводиться отдельно зависимости для четных и нечетных значений N .

Данная численная погрешность была взята в сравнение с аналитической оценкой погрешности интерполяции с помощью остаточного члена Лагранжа:

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (6)$$

Для получения данной оценки была решена задача максимизации остаточного члена и получена формула (7), которая была использована для нахождения оценки верхней границы зависимости погрешности интерполяции от количества узлов.

$$|f(x) - L_{n-1}(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right|$$

$$\leq \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!} \left| \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right|$$

$$\leq \frac{\max_{\xi \in [a;b]} |f^{(n)}(\xi)|}{n!} \max_{x \in [a;b]} \left| \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right|. \quad (7)$$

Для определения значения формулы (7) для функции $f(x)$ для количества узлов N была разработана функция *lagrange_residual_member_max(nodes, l_limit, r_limit, func_n_derivative, x_plot_dots, method)*, где *nodes* – количество узлов интерполяции Лагранжа, *l_limit*, *r_limit* – пределы интерполирования, *func_n_derivative* – функция, находящая численное значение n -й производной в точке, *x_plot_dots* – список точек, для поиска максимума, *method* – метод интерполяции.

Поскольку определение экстремума – ресурсозатратная задача, выгоднее определить значения n -й производной и полинома на определенном наборе точек и найти среди них максимум. Данный подход применен в функции *lagrange_residual_member_max*.

Для определения значения n -й производной функции $f(x)$ была выведена формула n -й производной.

Для нахождения зависимости производной n -й степени от $f(x) = e^{-x^2}$ сначала были аналитически получены непосредственные функции производных для нескольких значений степеней:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(-1)e^{-x^2} \\ f''(x) &= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \\ f'''(x) &= 4x(-2x^2 + 3)e^{-x^2} \\ f^{(4)}(x) &= 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2} \\ f^{(5)}(x) &= 8x(-4x^4 + 20x^2 + 15)e^{-x^2} \\ f^{(6)}(x) &= 8(8x^6 - 60x^4 + 90x^2 - 15)e^{-x^2} \\ f^{(7)}(x) &= 16x(-8x^6 + 84x^4 - 210x^2 + 105)e^{-x^2} \\ f^{(8)}(x) &= 16(16x^8 - 224x^6 + 840x^4 - 840x^2 + 105)e^{-x^2} \end{aligned}$$

Анализируя данные функции можно заметить зависимость коэффициента перед многочленом в скобках. Данную зависимость можно определить как

$$k_{\text{нач.}} = 2^{(n+1)div2}. \quad (8.1)$$

Последний множитель также поддается зависимости, поскольку функция $f(x)$ является экспоненциальной.

Основного исследования требует многочлен, который является следствием того, что $f(x)$ является сложной функцией, откуда степень многочлена растет с ростом степени производной. Эмпирически было установлено, что коэффициенты перед x подчиняются зависимости от биномиальных коэффициентов

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (8.2)$$

А именно: можно заметить, что степени членов полинома убывают с шагом 2; тогда при делении коэффициентов при членах на (8.2) при $k = i = 0, 2, 4, 8 \dots, n$ получим значения, описанные в Таблице 1.

Таблица 1. Значения частного между коэффициентами перед членами полинома производной и биномиальными коэффициентами

n – степень производной	i			
	0	2	4	6
1	1			
2	2	1		
3	2	1		
4	4	2	3	
5	4	2	3	
6	8	4	6	15
7	8	4	6	15
8	16	8	12	30

Пусть значения Таблицы 1 – коэффициенты K_n^i , на которые необходимо домножить соответствующий биномиальный коэффициент, чтобы получить конечный коэффициент при члене полинома производной.

Поскольку значения Таблицы 1 образуют диагональ, значение каждого следующего столбца получено из предыдущего. А именно – приняв во внимание, что строки дублируются, образуя пары, то значение каждого следующего столбца можно получить перемножением значения из предыдущей пары строк предыдущего столбца на $i - 1$. Из данных суждений была построена зависимость для K_n^i :

$$K_n^i = 2^{(n-i)\text{div}2} \prod_{\substack{j=1, \\ j=2k+1, k \in \mathbb{Z}}}^{i-1} (i - j). \quad (8.3)$$

Дальнейший анализ функций производных показывает, что коэффициенты при членах полинома имеют чередование знаков, которое было представлено формулой:

$$(-1)^{\left(n + \left(\frac{i}{2}\right) \bmod 2\right) \bmod 2}. \quad (8.4)$$

Принимая во внимание все выводы анализа производных функции $f(x)$, объединяя (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), была получена формула для определения n -ой производной функции $f(x)$:

$$f^{(n)} = (e^{-x^2})^{(n)} = 2^{(n+1)\text{div}2} \left[\sum_{\substack{i=0, \\ i=2k, k \in \mathbb{Z}}}^n (-1)^{\left(n + \left(\frac{i}{2}\right) \bmod 2\right) \bmod 2} C_n^i K_n^i x^{n-i} \right] e^{-x^2}, \quad (9)$$

где C_n^i – биномиальные коэффициенты, K_n^i – коэффициенты домножения, определяемые формулой (8.3).

При подстановке n можно убедиться, что функция производной совпадает с производной, полученной аналитически.

Для программной реализации формулы (9) была разработана функция *exponent_n_derivative*(n, x), вычисляющая значение n -й производной функции $f(x)$ в точке x .

Для возможности сравнения с численным дифференцированием, а также для возможности исследования других функций, была разработана функция-адаптер *scipy_der_adapter*(n, x), вызывающая в своей реализации функцию *derivative* библиотеки *scipy*.

С помощью функции *lagrange_residual_member_max*, используя в качестве функции расчета производной *exponent_n_derivative*, были рассчитаны

значений аналитической оценки верхней границы погрешности от количества узлов а также построен график их зависимости (рис. 5).

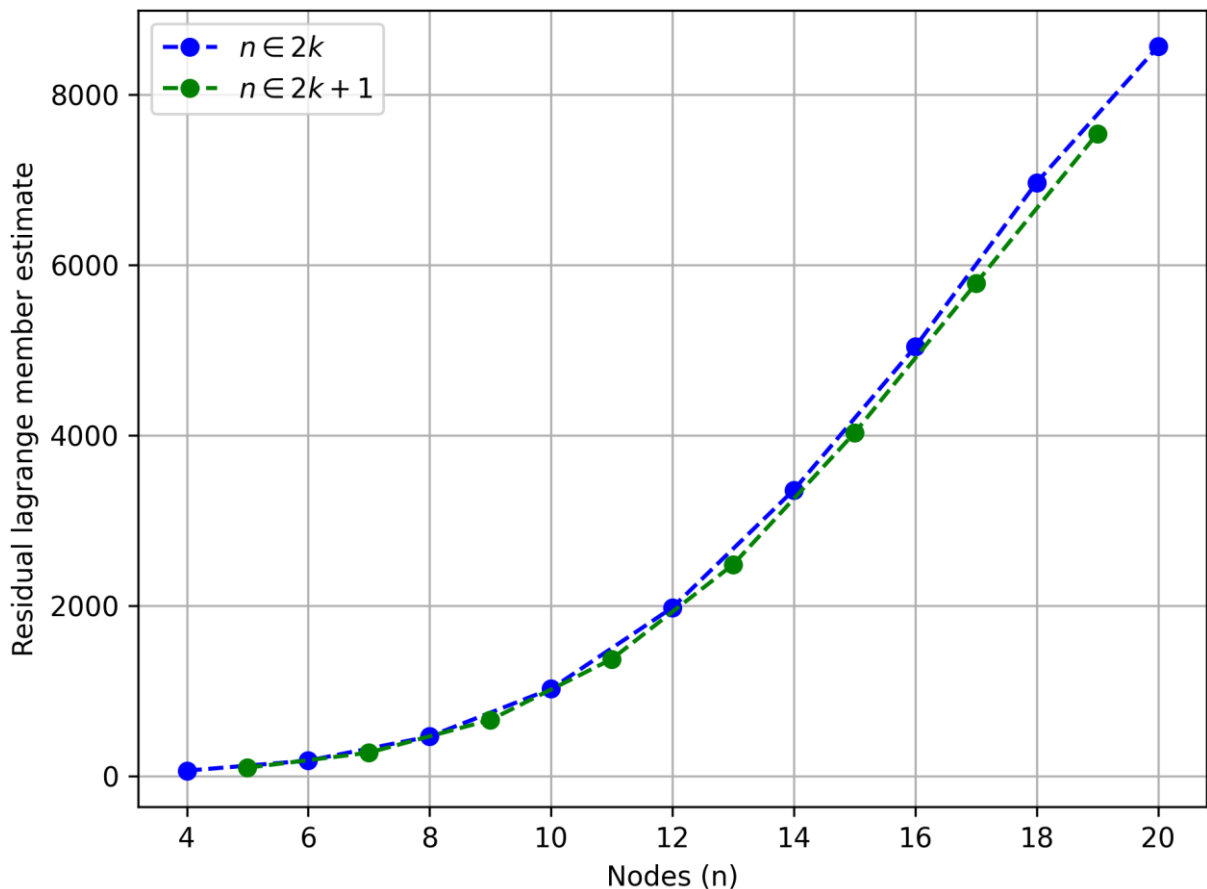


Рис. 5 - Зависимость аналитической оценки верхней границы погрешности через остаточный член от количества узлов интерполяции по равномерным узлам для четных и нечетных N .

Анализируя график на рис. 5 можно заметить рост значения верхней границы погрешности с ростом количества узлов, что наблюдалось и при численной погрешности. Зависимости для четных и нечетных значений N не сильно различаются и их различие может быть объяснено вычислительной погрешностью.

Также для сравнения функции *exponent_n_derivative* с численным дифференцированием на одном графике были построены зависимости аналитической оценки верхней границы погрешности с использованием обеих этих функций (рис. 6).

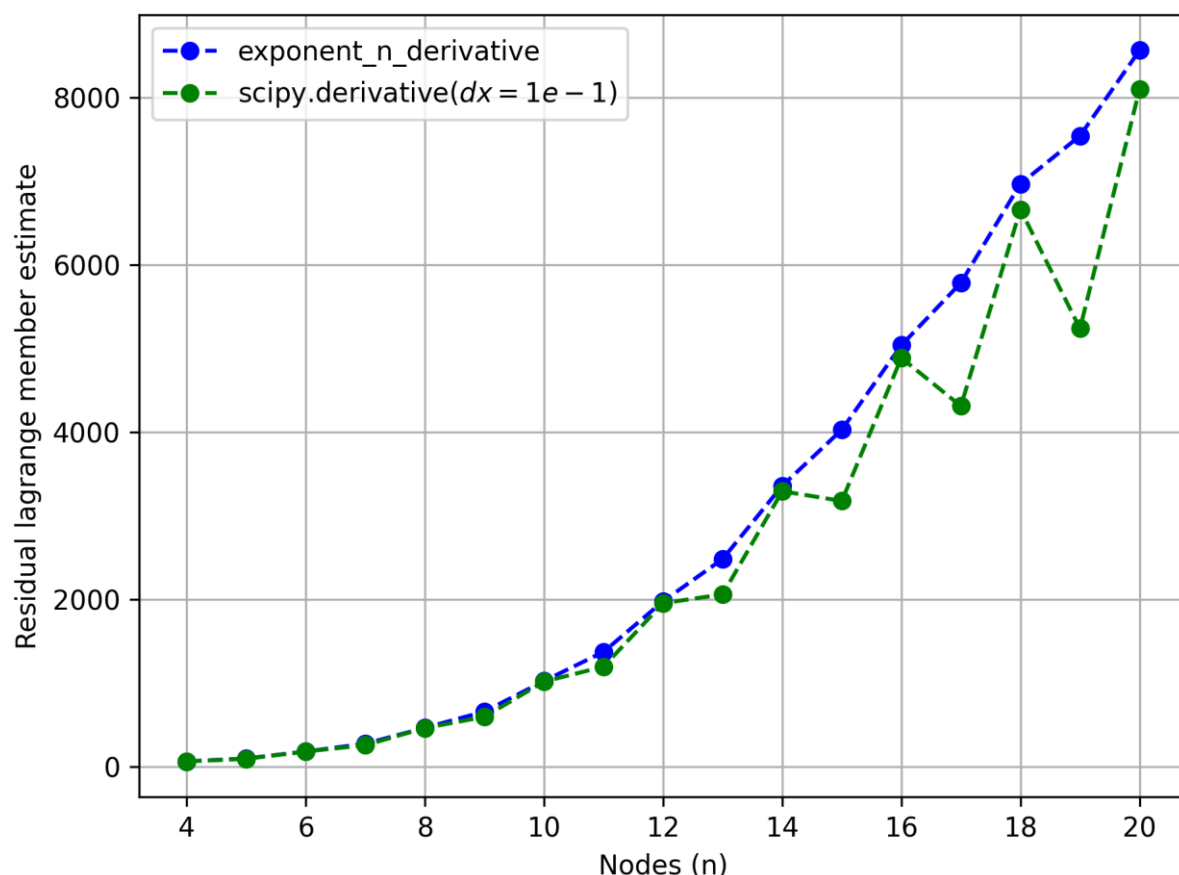


Рис. 6 – Сравнение зависимости аналитической оценки верхней границы погрешности через остаточный член от количества узлов интерполяции по равномерным узлам при использовании функций *exponent_n_derivative* и *scipy.derivative* с шагом интегрирования $dx=1e-1$.

Из рис.2 видно, что формула n -й производной функции $f(x)$ (9) была определена верно и обладает большей точностью, поскольку вычисляет точное значение функции, а не приближенное численное. Разделение зависимости для численного дифференцирования на зависимости от четного количества узлов и нечетного обусловлено недостаточным шагом интегрирования. Но при больших значениях dx ошибка численного дифференцирования возрастает на несколько порядков.

Также на одном графике для сравнения были построены зависимости аналитической погрешности и численной от количества узлов N (рис. 7).

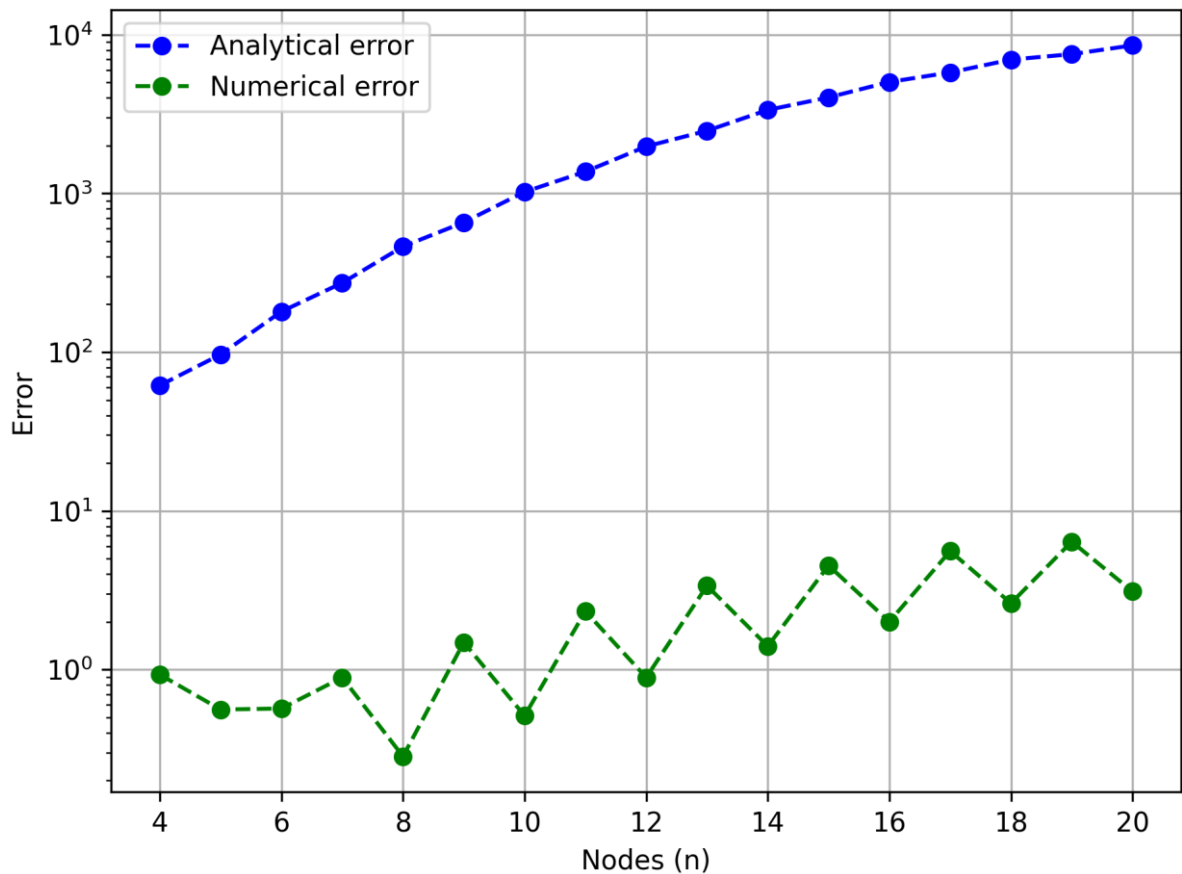


Рис. 7 – Сравнение аналитической оценки верхней границы погрешности через остаточный член и расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от количества узлов интерполяции по равномерным узлам.

Анализ рис. 7 показывает большую разницу между значениями численной и аналитической погрешностей. Данную разницу можно объяснить тем, что в случае аналитической погрешности была решена задача поиска верхней границы погрешности через остаточный член Лагранжа, в ходе которой максимизация значений n -й производной и полинома производилась независимо друг от друга. В то время как на самом деле ξ зависит от x по определению остаточного члена [1](глава 2.5)). Таким образом, аналитическая оценка показывает главным образом поведение погрешности, которое совпадает с поведением численной.

Относительно численной погрешности можно отметить, что использование четного количества узлов при равномерно распределенных узлах более оптимально, так как приводит к большей точности.

4. Анализ интерполяции Лагранжа для случая оптимально расположенных узлов.

Оптимально расположенными узлами являются корни многочлена Чебышева [1](глава 2.7.2) или чебышевские узлы.

Для получения корней многочлена Чебышева n -й степени на отрезке $[-1, 1]$ была разработана функция *chebyshev_nodes(n)*, программно реализующая формулу

$$\tilde{x}_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Для отображения данного распределения на исследуемый отрезок $[-5; 5]$ была использована функция линейного перехода:

$$x_i = \frac{1}{2}[(b-a)\tilde{x}_i + a + b], \quad (11)$$

где a и b – левый и правый пределы отрезка, на который происходит отображение, соответственно.

Используя данное распределение, были построены графики интерполяции Лагранжа $L_{n-1}(x)$ для случая оптимально расположенных (чебышевских) узлов функции $f(x)$ и график функции $f(x)$ на одной координатной плоскости (рис. 8).

Анализ рис. 8 дает понять, что при увеличении количества узлов интерполяции интерполяция функции $f(x)$ приближается к реальным значениям исследуемой функции, тем самым давая более точный результат.

Аналогично случаю равномерно распределенных узлов были построены графики зависимости интерполяции для четных и нечетных значений N . (рис. 9)

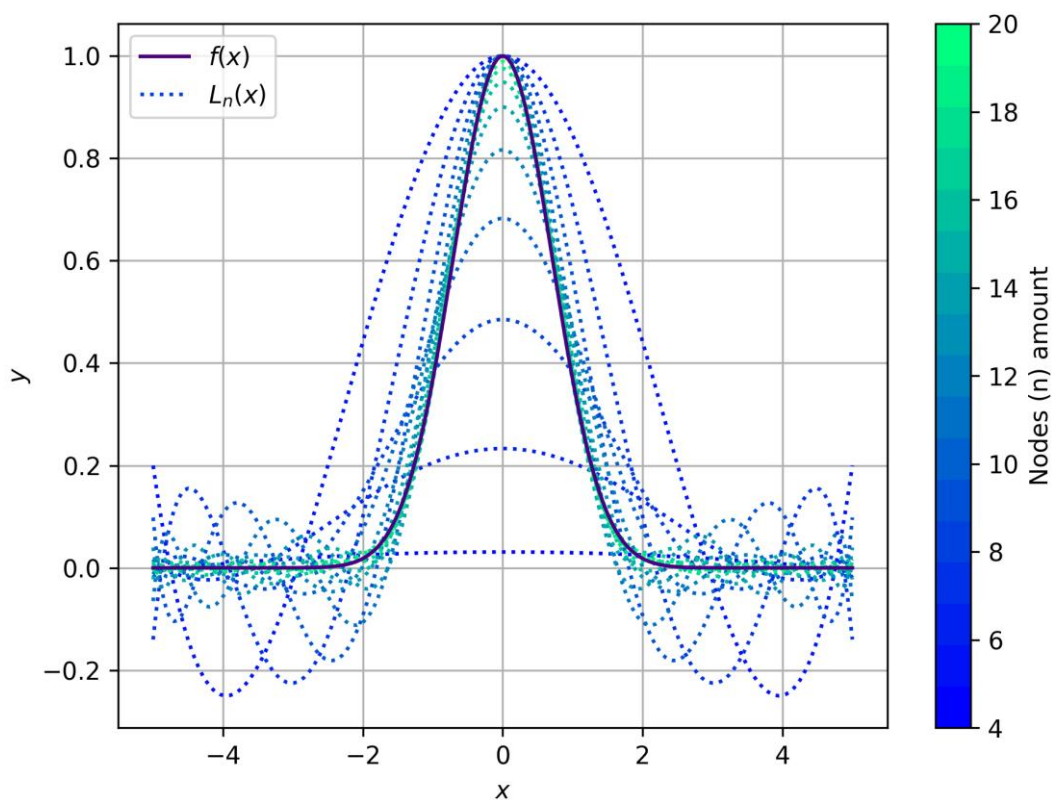


Рис. 8 - Функция $f(x)$ и интерполяция Лагранжа для $f(x)$ при оптимально распределенных (чебышевских) узлах для разных значений количества узлов.

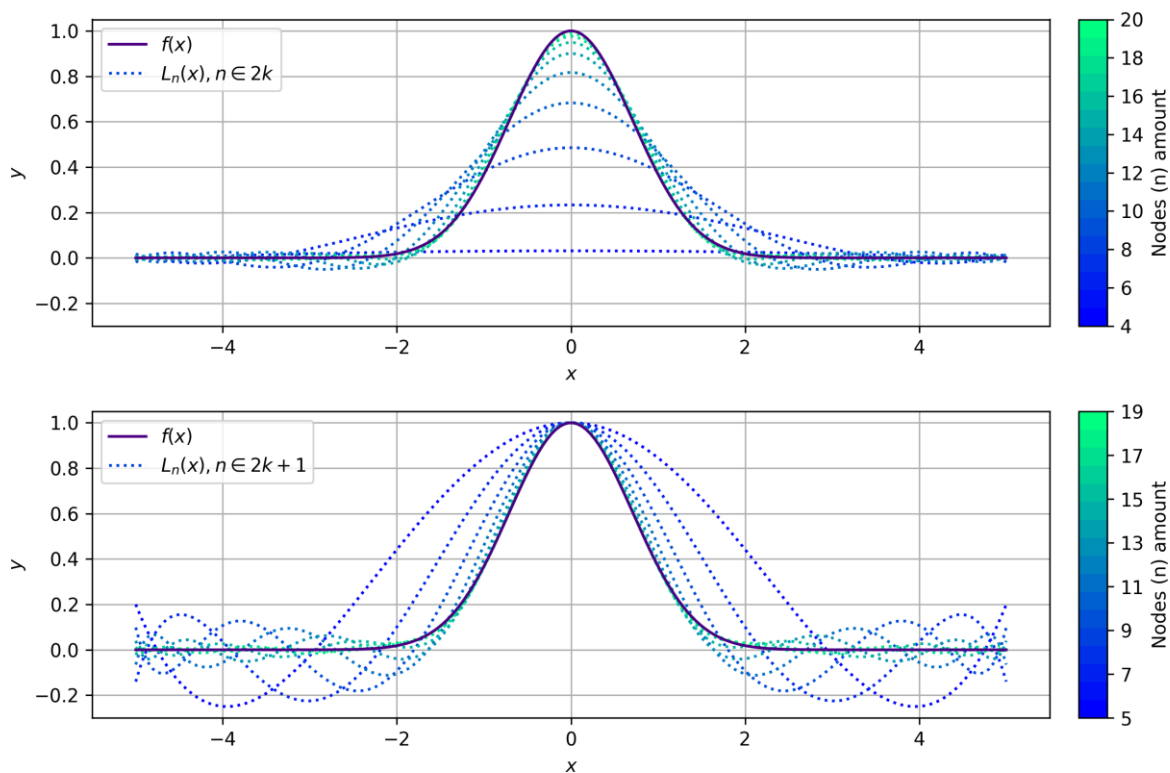


Рис. 9 - интерполяция Лагранжа для $f(x)$ при оптимально распределенных (чебышевских) узлах четных (верхний график) значений количества узлов N и нечетных (нижний график) значений N .

Анализируя поведение интерполяции для четных и нечетных N на рис.9 можно заметить, что для случая четных узлов возникает большая погрешность относительно значения $f(x)$ в точке $x = 0$, однако аппроксимация в остальных точка лучше, чем для случая нечетного количества узлов, при котором наблюдаются незначительные осцилляции между узлами интерполяции.

Для исследования точности аппроксимации была рассчитана зависимость расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от количества узлов $N = 4, 5, \dots, 20$ как равномерная норма по формуле (5).

График зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ в зависимости от N для четных и для нечетных количеств узлов изображен на рис. 10.

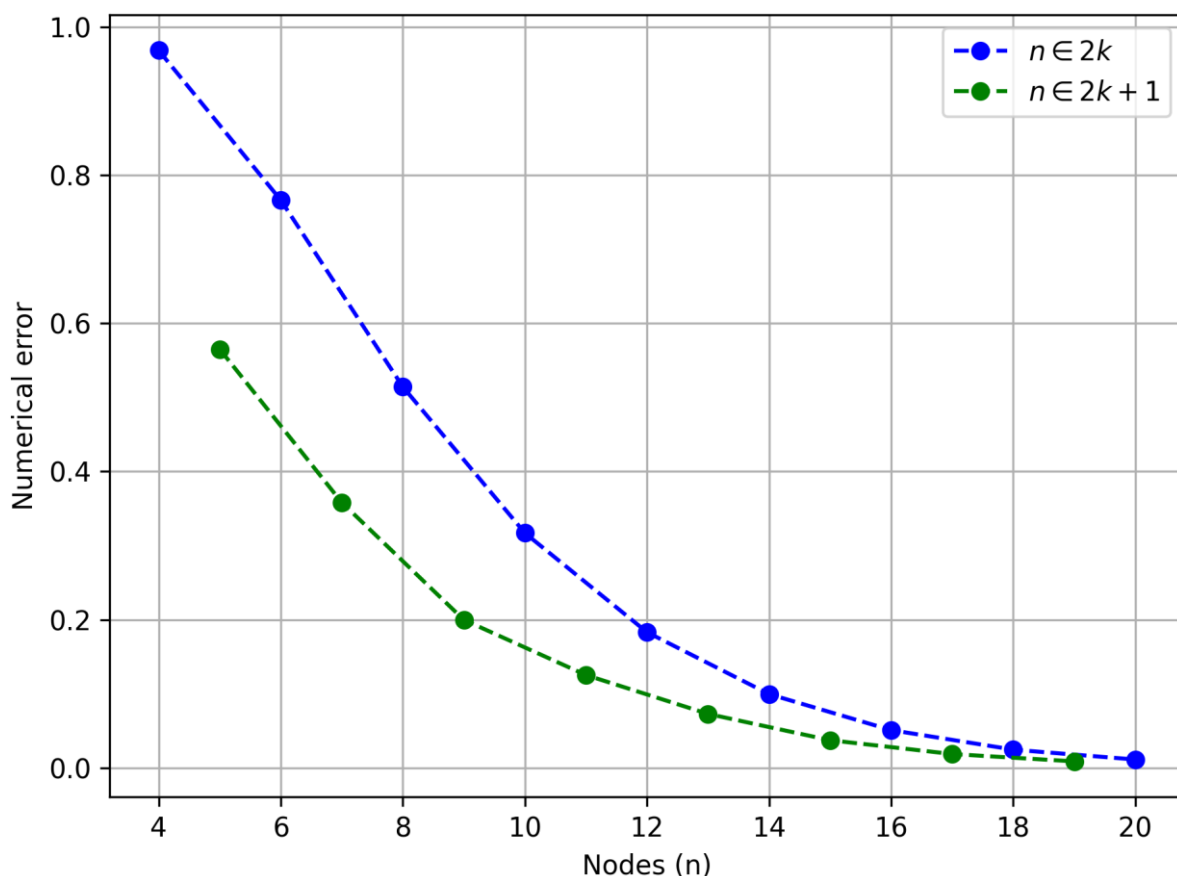


Рис. 10 - Зависимость расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от количества узлов интерполяции по оптимально распределенным (чебышевским) узлам для четных и нечетных N .

Анализируя графики зависимости численного отклонения интерполанта для равномерных узлов от реальной функции (рис. 10), было замечено разделение на 2 зависимости – для четных и нечетных значений N , по которым можно сделать вывод, что аппроксимация при нечетных значениях количества узлов точнее, чем при четных, несмотря на незначительные осцилляции между

узлами. После значения $N = 20$ значения отклонения в двух зависимостях сходятся друг к другу, из чего можно сделать вывод, что при значениях количества узлов больше 20 оптимально будет использовать как четные значения, так и нечетные значения N .

Как и для случая равномерно распределенных узлов, были посчитаны значения аналитической погрешности для разного значения N , которая выражается в аналитической оценке верхней границы погрешности интерполяции с помощью остаточного члена (5).

Предварительно формула оценки остаточного члена (5) была преобразована в соответствии с [1] (Теорема 2.7.2) к оценке остаточного члена интерполяции при оптимальных узлах:

$$\max_{x \in [-1; 1]} |f(x) - L_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}n!} \max_{x \in [-1; 1]} |f^{(n)}(x)|. \quad (12)$$

С обобщением на отрезок произвольной длины с помощью (11) и [3](Теорема 1.11) была получена окончательная формула оценки верхней границы погрешности интерполяции для случая оптимально расположенных узлов на отрезке $[a; b]$:

$$\max_{x \in [a; b]} |f(x) - L_{n-1}(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}n!} \max_{x \in [a; b]} |f^{(n)}(x)|. \quad (13)$$

Формула (13) была программно реализована в составе функции *lagrange_residual_member_max*. При этом для ее корректной работы была импортирована функция возведения в степень *pow* стандартной библиотеки python – *math*. Данное решение обусловлено тем, что подключение библиотеки *numpy* влечет за собой изменение способа вычисления выражений, а именно – использование фиксированной разрядной сетки с ограничением до значения $2^{63} - 1$. В контексте вычисления аналитической погрешности в формуле (13) происходит возведение в степень n длины интервала интерполяции. В контексте решаемой задачи максимальное значение $(b-a)^n$ может достигать 10^{20} , что вызовет переполнение разрядной сетки и приведет к неверным результатам. Вычисления в контексте стандартной библиотеки языка python обладают данными проблемами не несут.

Были построены зависимости значений аналитической оценки верхней границы погрешности интерполяции по формуле (13) для четных и нечетных значений N (рис. 11).

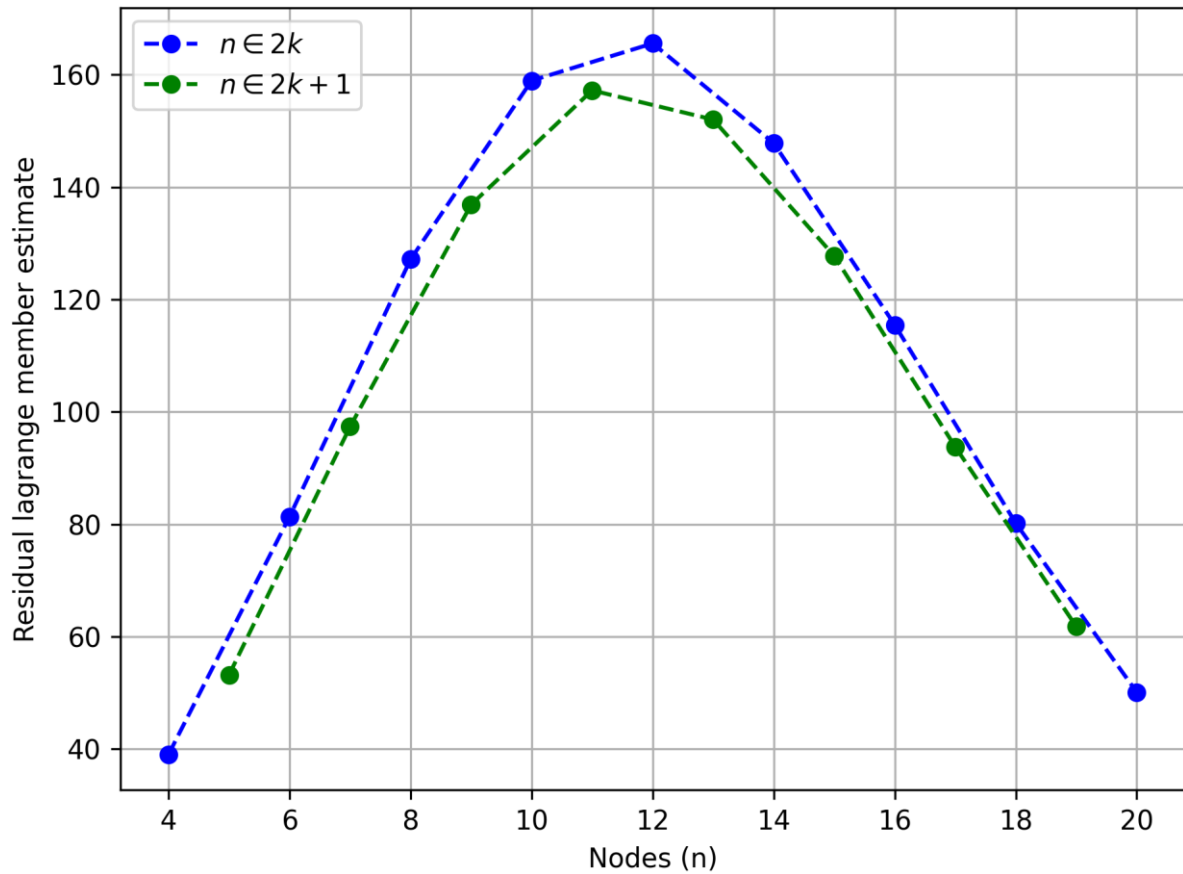


Рис. 11 - Зависимость аналитической оценки верхней границы погрешности через остаточный член от количества узлов интерполяции по оптимально распределенным (чебышевским) узлам для четных и нечетных N .

Анализ поведения зависимостей аналитической погрешности на рис. 11 позволяет сделать вывод, что как и для численной погрешности, верхняя граница аналитической погрешности меньше для случая нечетного количества узлов N , что означает более точную аппроксимацию. Также при увеличении количества узлов при $N > 12$ погрешность убывает, а значит точность интерполяции растет, что соответствует поведению реальной численной погрешности.

На одной координатной плоскости для сравнения были построены графики численной и аналитической погрешностей (рис. 12).

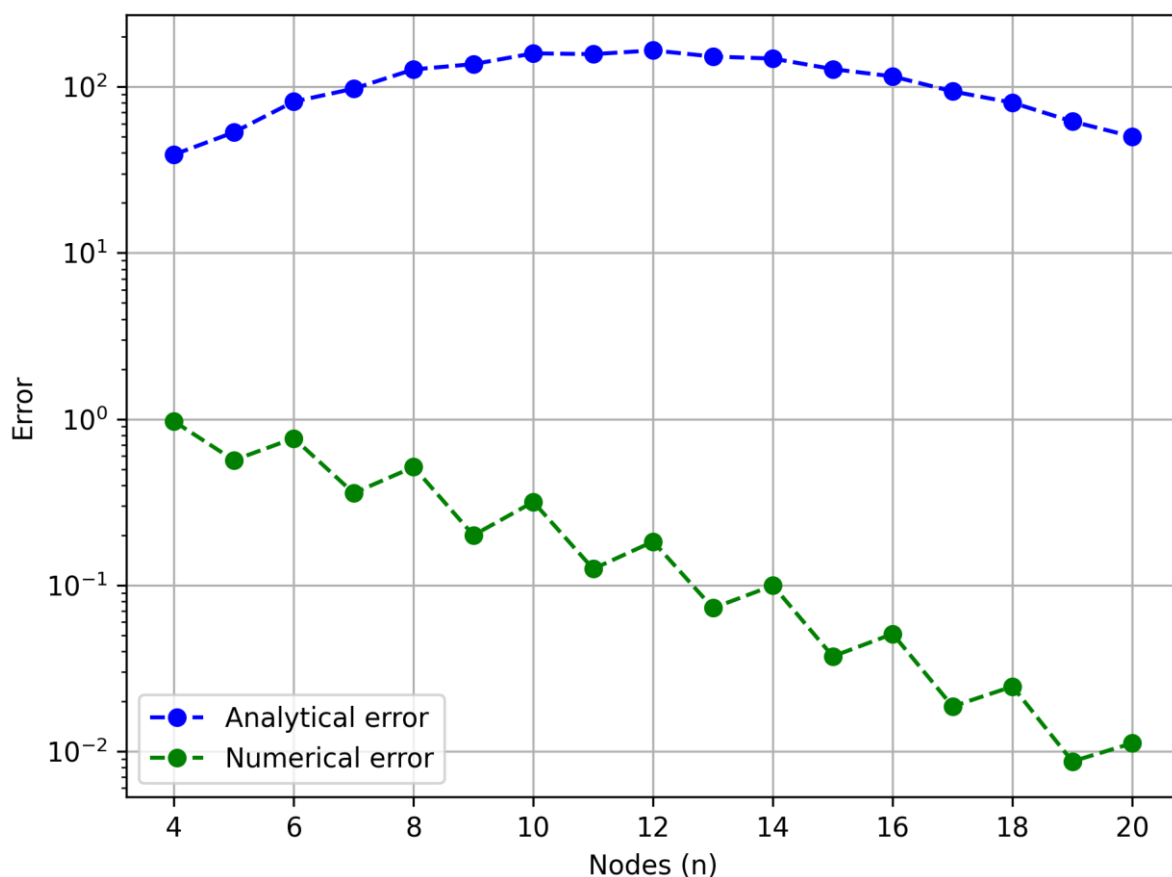


Рис. 12 - Сравнение аналитической оценки верхней границы погрешности через остаточный член и расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от количества узлов интерполяции по оптимально распределенным (чебышевским) узлам.

Как и в случае с равномерно распределенными узлами, для случая чебышевских узлов при анализе рис. 12 наблюдается различие в значениях погрешности на несколько порядков. Аналогично случаю с равномерными узлами, данное различие вызвано оценке остаточного члена при независимости ξ и x . Поведения зависимостей схожи что говорит о правильной аналитической и численной оценке.

Также можно отметить, что оптимальное расположение узлов позволило избавиться от паразитных осцилляций на концах интервала интерполирования, поэтому погрешность в данном случае убывает с ростом N , а не возрастает, что наблюдалось в случае равномерно расположенных узлов.

5. Анализ кусочно-линейной интерполяции при равномерном расположении узлов.

Кусочно-линейная интерполяция является видом локальной интерполяции и заключается в задании кусочной функции, где ее компонентами являются интерполянты Лагранжа 2-й степени, который представляет собой уравнение прямой.

Расписав уравнение интерполянта Лагранжа 2-й степени -

$$L_1 = f(x_1) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} - f(x_2) \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}, \quad (14)$$

И обобщив его на случай кусочной функции, была получена формула для вычисления кусочно-линейной интерполяции в точке x :

$$\begin{aligned} L_1(x) &= f(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - f(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_i - x_{i+1}}, \\ x_i &\leq x < x_{i+1}, \\ i &= 1, \dots, n - 1. \end{aligned} \quad (15)$$

В программной реализации функции *lagrange_interpol* алгоритм вычисления значения интерполяции начинается с определения того, между какими узлами расположена точка x , а затем в вычислении интерполяции от 2-х узлов для найденных узлов.

Используя данный алгоритм, были построены графики кусочно-линейной интерполяции функции $f(x)$ в зависимости от количества узлов N и график функции $f(x)$ на одной координатной плоскости (рис. 13).

Анализ рис. 13 дает понять, что при увеличении количества узлов интерполяции интерполяция функции $f(x)$ приближается к реальным значениям исследуемой функции, тем самым давая более точный результат.

Также были построены графики зависимости интерполяции для четных и нечетных значений N . (рис. 14)

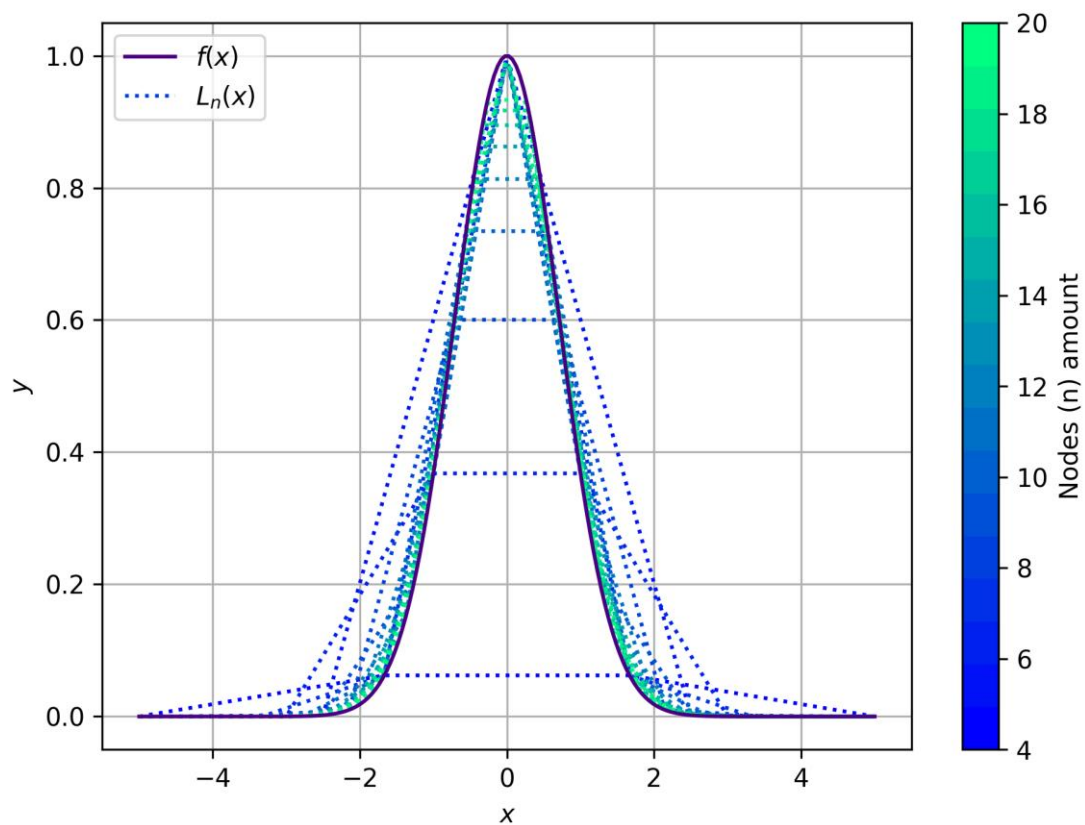


Рис. 13 - Функция $f(x)$ и кусочно-линейная интерполяция для $f(x)$ при разном значении количества узлов.

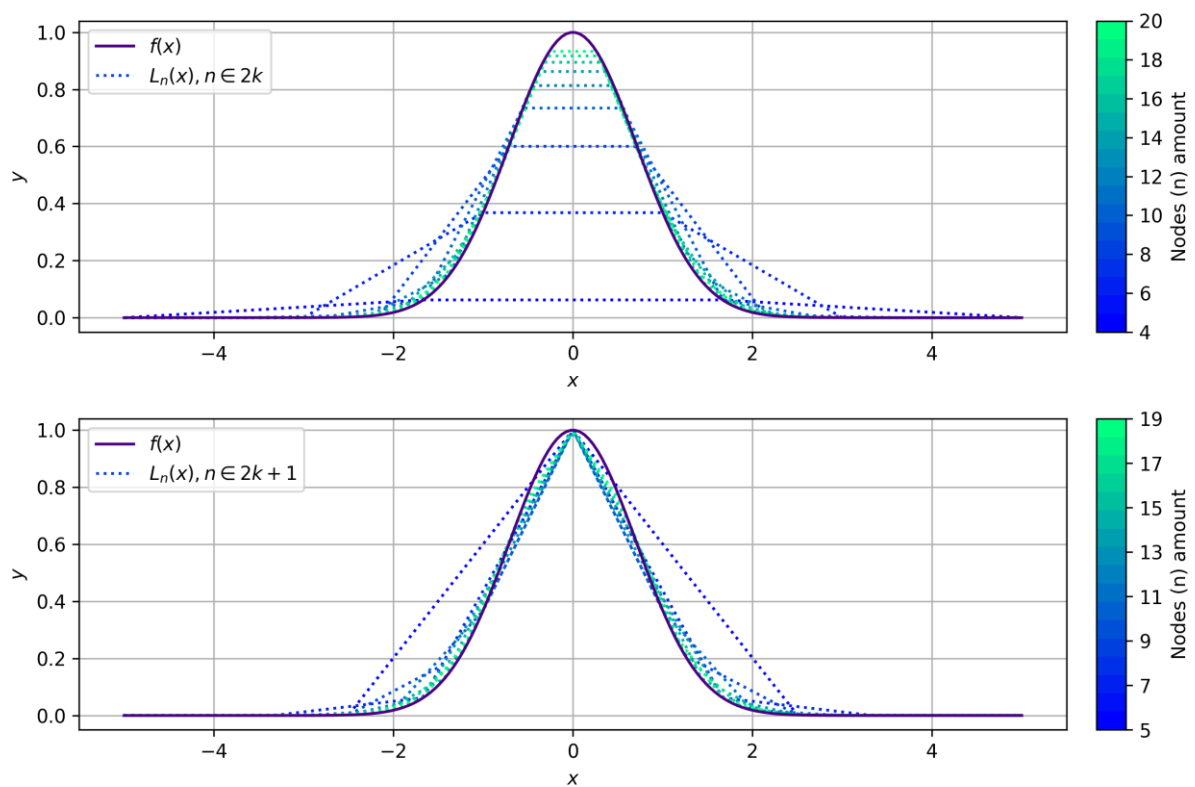


Рис. 14 – кусочно-линейная интерполяция для $f(x)$ четных (верхний график) значений количества узлов N и нечетных (нижний график) значений N .

Анализируя поведение интерполяции для четных и нечетных N на рис.14 можно заметить, что для случая четных узлов возникает большая погрешность относительно значения $f(x)$ в точке $x = 0$, что приводит к меньшей точности по сравнению с нечетными значениями N .

Для исследования точности аппроксимации была рассчитана зависимость расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от количества узлов $N = 4, 5, \dots, 20$ как равномерная норма по формуле (5).

График зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ в зависимости от N для четных и для нечетных количеств узлов изображен на рис. 15.

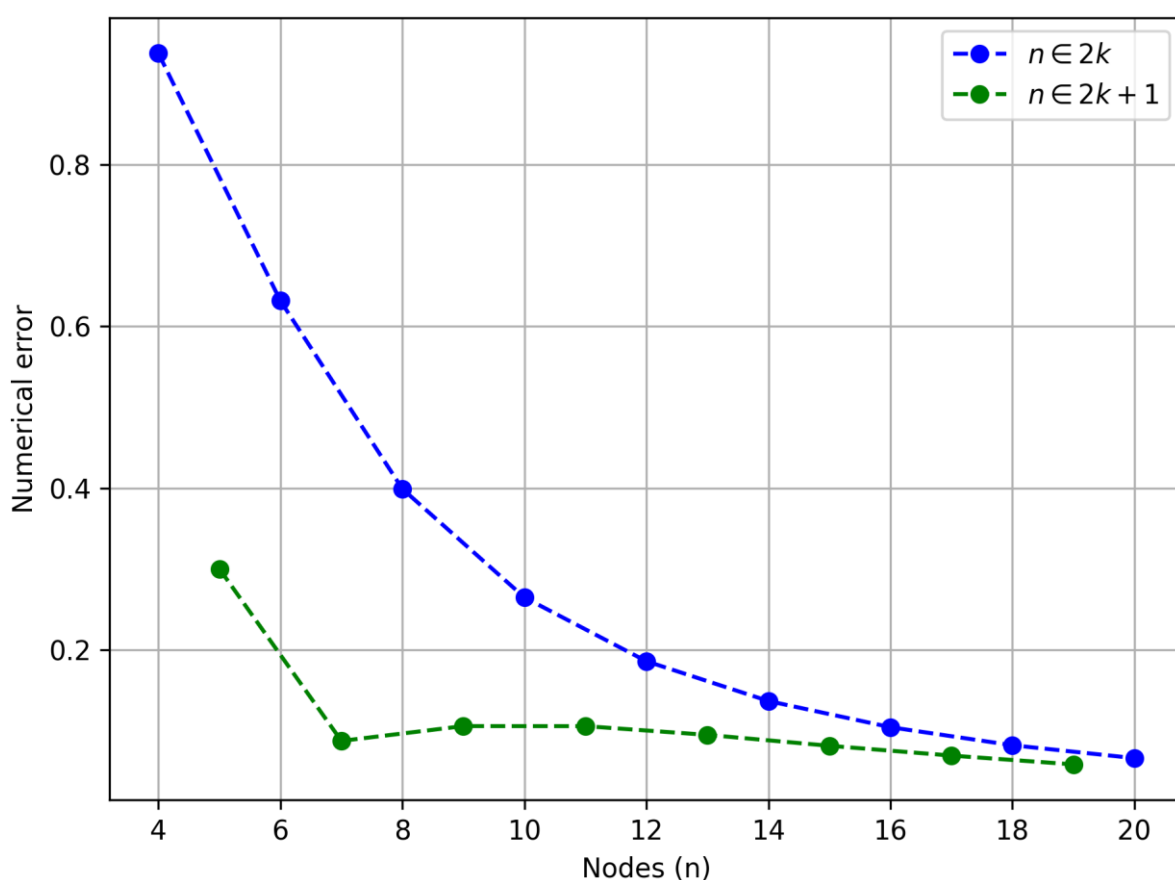


Рис. 15 - Зависимость расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от количества узлов кусочно-линейной интерполяции для четных и нечетных N .

Анализируя графики зависимости численного отклонения кусочно-линейной интерполяции от реальной функции (рис. 15), можно заметить, что аппроксимация при нечетных значениях количества узлов точнее, чем при четных. Однако после значения $N = 20$ значения отклонения в двух зависимостях сходятся друг к другу, из чего можно сделать вывод, что при значениях количества узлов больше 20 оптимально будет использовать как

четные значения, так и нечетные значения N . Но при малом количестве узлов более оптимальным будет выбор нечетного количества узлов.

Для сравнения с численной погрешностью были посчитаны значения аналитической погрешности для разного значения N , которая выражается в аналитической оценке верхней границы погрешности интерполяции с помощью остаточного члена (5).

Предварительно формула оценки остаточного члена (5) была преобразована к случаю кусочно-линейной интерполяции:

$$|f(x) - L_1(x)| = \left| \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \right|. \quad (16)$$

Для получения оценки верхней границы погрешности была решена задача максимизации остаточного члена кусочно-линейной интерполяции (16) с учетом $x_i = ih, x_{i+1} = (i + 1)h$, где $h = \frac{b-a}{n-1}$ – шаг интерполяции, следующего вида:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a; b]} |f(x) - L_1(x)| &\leq \max_{x \in [a; b]} \left| \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x - ih)(x - (i + 1)h) \right| \\ &\leq \frac{\max_{\xi \in [a; b]} |f^{(2)}(\xi)|}{2} \max_{x \in [x_i; x_{i+1}]} |(x - ih)(x - (i + 1)h)|. \end{aligned} \quad (17)$$

Из [2](Пример 4) известно, что

$$\max_{x \in [x_i; x_{i+1}]} |(x - ih)(x - (i + 1)h)| = \frac{h^2}{4}. \quad (18)$$

Таким образом, объединяя (17) и (18), была получена формула для определения оценки верхней границы погрешности кусочно-линейной интерполяции:

$$\max_{x \in [a; b]} |f(x) - L_1(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a; b]} |f^{(2)}(\xi)|}{2} \frac{h^2}{4}. \quad (19)$$

Формула (19) была программно реализована в составе функции *lagrange_residual_member_max*, с помощью которой были построены зависимости значений аналитической оценки верхней границы погрешности интерполяции по формуле (13) для четных и нечетных значений N (рис. 16).

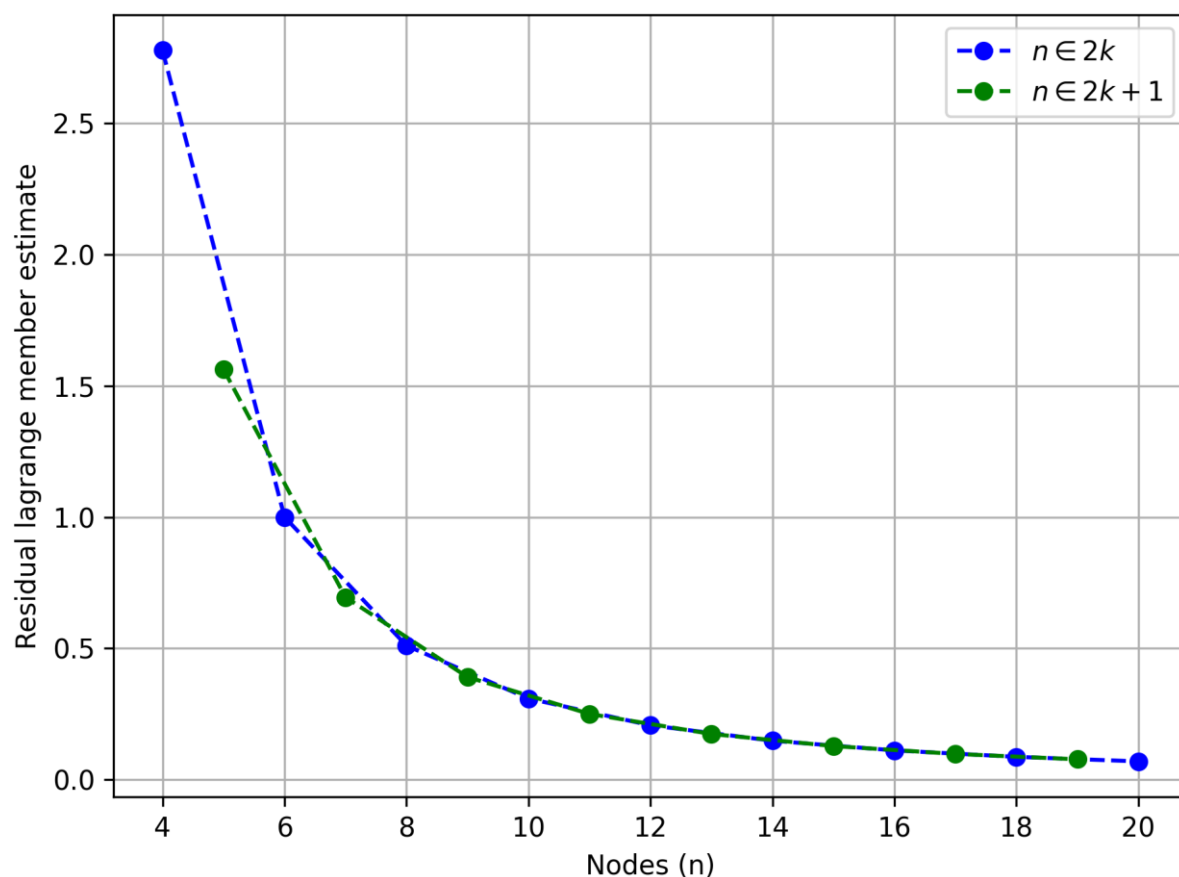


Рис. 16 - Зависимость аналитической оценки верхней границы погрешности через остаточный член от количества узлов кусочно-линейной интерполяции для четных и нечетных N .

Анализируя поведения зависимостей аналитической погрешности на рис. 16 можно заметить, что четность или нечетность количества узлов интерполяции не влияет на аналитическую погрешность. При увеличении количества узлов точность аппроксимации растет.

На одной координатной плоскости для сравнения были построены графики численной и аналитической погрешностей (рис. 17).

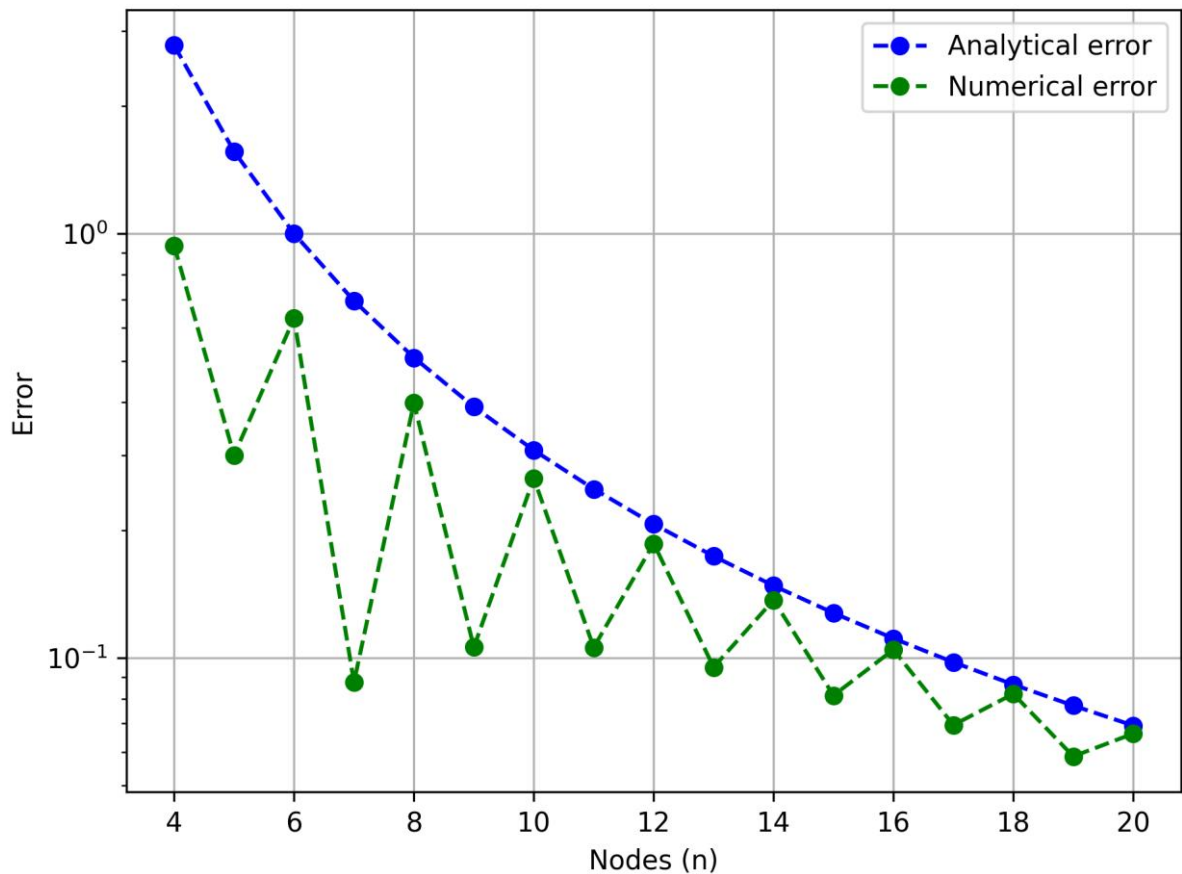


Рис. 17 - Сравнение аналитической оценки верхней границы погрешности через остаточный член и расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от количества узлов кусочно-линейной интерполяции.

Из рис. 17 видно, что для четных значений количества узлов при $N > 14$ значения численной и аналитической погрешностей сходятся, что свидетельствует о том, что в случае локальной интерполяции аналитическая оценка верхней границы погрешности интерполяции намного точнее, чем в случае глобальной интерполяции. Но в то же время аналитическая оценка не учитывает уменьшения погрешности в случае нечетного количества узлов.

6. Сравнение и анализ зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ для трех случаев интерполяции.

После проведения исследования интерполяции Лагранжа для случая равномерно распределенных узлов, для случая оптимально расположенных узлов и для случая кусочно-линейной интерполяции, на одной координатной плоскости были построены графики зависимостей численной погрешности от количества узлов для трех случаев интерполяции (рис. 18).

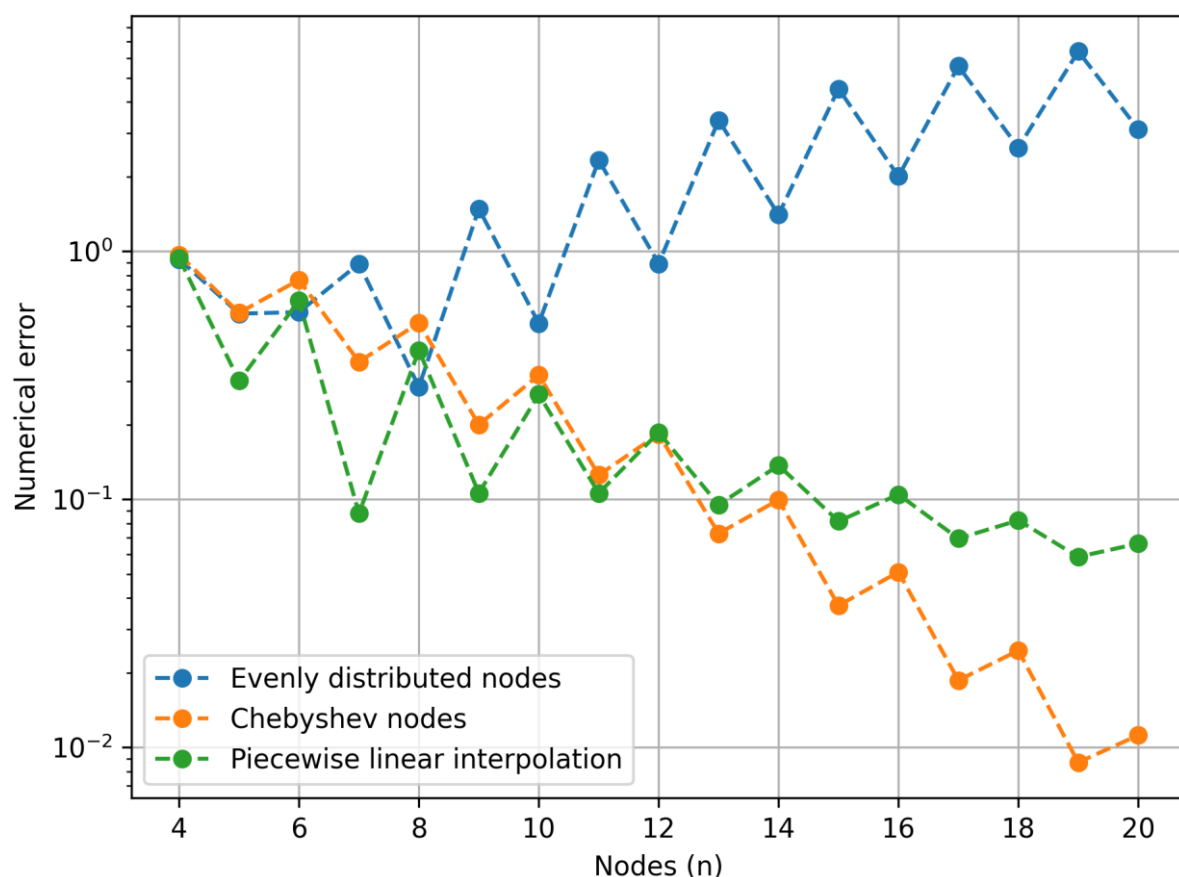


Рис. 18 – Сравнение зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ от количества узлов для трех случаев интерполяции.

Анализируя рис. 18 можно сделать следующие выводы:

- Интерполяция Лагранжа для случая равномерно распределенных узлов является самой неточной и при увеличении количества узлов N ведет к увеличению погрешности ввиду паразитных осцилляций.
- Кусочно-линейная интерполяция показывает более высокую точность при нечетном и малом количестве узлов. При увеличении N точность

аппроксимации растет быстрее всего в случае интерполяции Лагранжа для случая оптимально расположенных (чебышевских) узлов.

- Локальная интерполяция является более точной при небольшом количестве узлов.

7. Аппроксимация значения функции ошибок $erf(x)$.

Функция ошибок встречается в решении некоторых дифференциальных уравнений, например, уравнениях теплопроводности, а также в системах цифровой оптической коммуникации как вероятность ошибки на бит.

Для поиска приближенного значения функции ошибок $erf(x)$ для $x = 2$ была использована кусочно-линейная интерполяция функции $f(x)$ для $N = 3, 5, 7, 9$.

Использование кусочно-линейной интерполяции упрощает вычисление интеграла, который в геометрическом смысле представляет собой площадь под графиком функции. При кусочно-линейной интерполяции эта площадь представляет собой сумму площадей трапеций, в следствие чего интеграл можно точно выразить как:

$$\int_{-x}^x \tilde{f}(t) dt = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i), \quad (20)$$

где $\tilde{f}(t)$ – кусочно-линейная интерполяция функции $f(x)$, а x_i – узлы интерполяции, которые также являются вершинами трапеций.

Для программной реализации вычисления приближенного значения функции ошибок были реализованы функция для определения суммы площади трапеций под графиком кусочно-линейной интерполяции *linear_interpolation_integral* и функция для подсчета приближенного значения функции ошибок для заданного x .

В результате вычисления приближенного значения функции ошибок для $x = 2$ для разного количества узлов были получены данные, зафиксированные в таблице 2.

Таблица 2 – приближенные значения функции ошибок в зависимости от количества узлов кусочно-линейной интерполяции.

N	$erf(x)$
3	1.1490461524496047
5	0.9896305736453971
7	0.9924858486302132
9	0.9936717209022357

По полученным значениям был построен график, на котором также отображено эталонное значение функции ошибок в точке $x = 2$, вычисленное с помощью функции `erf` библиотеки `scipy` (рис. 19).

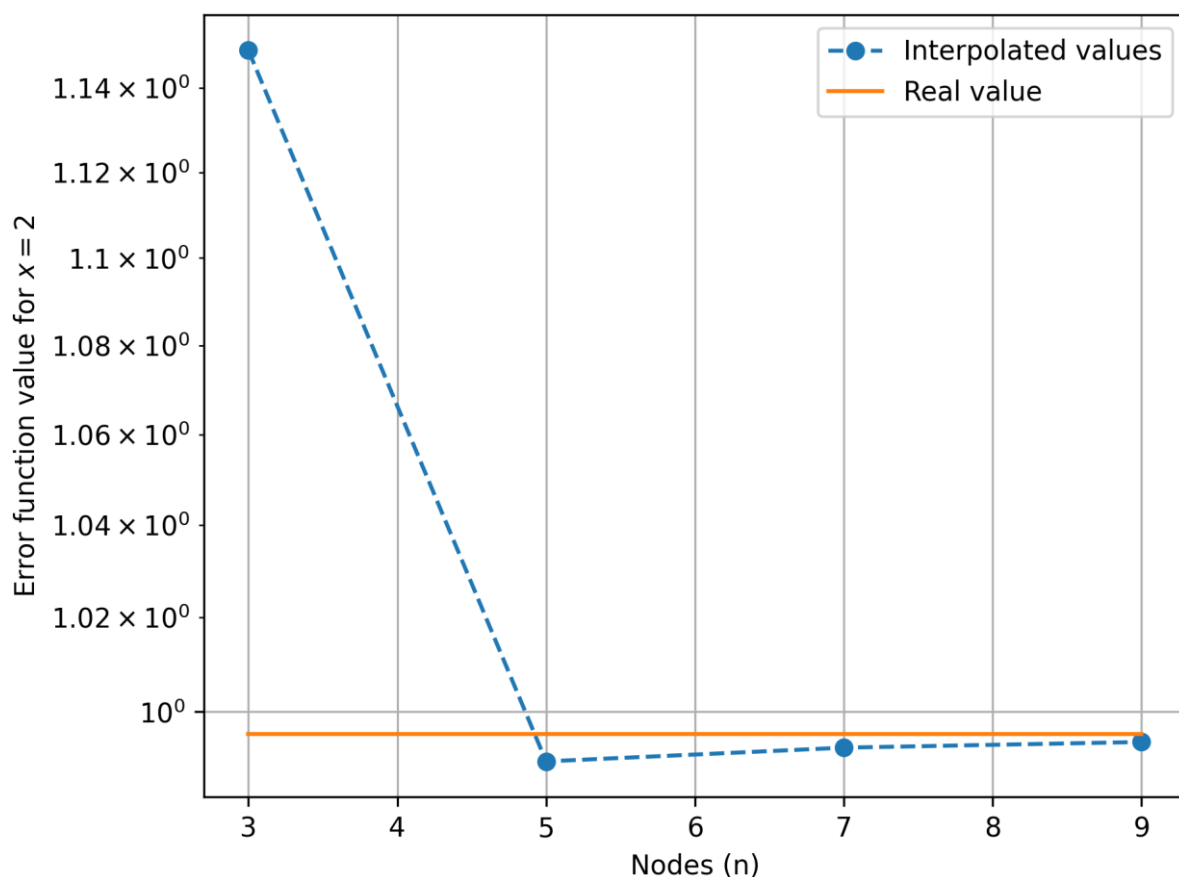


Рис. 19 – Приближенные значения функции ошибок для $x = 2$, полученных в результате аппроксимации $f(x)$ кусочно-линейной интерполяцией для разных значений количества узлов N , по сравнению эталонным значением.

Анализ графика на рис.19 позволяет установить факт приближения приближенного значения функции ошибок $erf(x)$ при увеличении количества узлов кусочно-линейной интерполяции, что ведет к увеличению точности аппроксимации, а следовательно и к более точному значению самой функции ошибок.

Заключение

В ходе лабораторной работы были исследованы три случая интерполяции: интерполяция Лагранжа для случая равномерно распределенных узлов, интерполяция Лагранжа для случая оптимально расположенных (чебышевских) узлов, кусочно-линейная интерполяция.

Были исследованы зависимости точности аппроксимации в зависимости от количества узлов интерполяции, в результате чего можно сформировать следующие выводы:

- В случае интерполяции Лагранжа для случая равномерно распределенных узлов при увеличении количества узлов точность аппроксимации понижается, так как на границах скапливаются паразитные осцилляции, приводящие к резкому росту погрешности.
- Проблему паразитных осцилляций решает интерполяция Лагранжа для случая с оптимально расположенными узлами, анализ точности аппроксимации которой показывает, что при увеличении количества узлов погрешность интерполяции уменьшается.
- В случае локальной интерполяции, примером которой является кусочно-линейная интерполяция, наблюдается самая высокая точность аппроксимации для небольшого количества узлов, что делает данный вид интерполяции самым оптимальным при небольшом наборе узлов.
- Важна четность/нечетность количества узлов интерполяции, которая может приводить к большей точности аппроксимации при правильном выборе количества набора точек.

Также было рассмотрено практическое применение интерполяции на примере аппроксимации значения функции ошибок.

Список использованных источников

1. **Першин А.Ю.** *Лекции по вычислительной математике (черновик)*. [Электронный ресурс] // Кафедра РК6 (Системы автоматизированного проектирования). МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2020 г., 142 с.
2. **Першин А.Ю.** *Семинар №2 по курсу «Вычислительная математика»*. [Электронный ресурс] // Кафедра РК6 (Системы автоматизированного проектирования). МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2020 г., 6 с.
3. **Тимербаев М.Р.** *Численные методы. Приближение функций. Численное интегрирование. Учебное пособие*. [Электронный ресурс] // Казанский Федеральный Университет, Москва, 2015 г., 94 с.
4. *Функция ошибок*. [Электронный ресурс] // https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_ошибок#Применение – (Дата обращения: 22.03.20)