Введем характерные величины

$t_{ch} = 2T$ характерное время

L характерная длина

$v_{ch} = L / t_{ch} = v_{x0}$

Безразмерные переменные

$$
\begin{aligned}
&\hat{t} = t / t_{ch} \\
&\hat{x} = x / L \\
&\hat{z} = z / L \\
&\hat{v}_x = v_x / v_{ch} \\
&\hat{v}_z = v_z / v_{ch}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Получим безразмерные уравнения движения тела

$$\frac{L}{t_{ch}} \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \frac{L}{t_{ch}} \hat{v}_x$$

$$\frac{L}{t_{ch}} \frac{d\hat{z}}{d\hat{t}} = \frac{L}{t_{ch}} \hat{v}_z$$

$$
\begin{aligned}
&m \frac{L}{(t_{ch})^2} \frac{d\hat{v}_x}{d\hat{t}} = -\beta_0 \frac{L}{(t_{ch})} \hat{v}_x \\
&m \frac{L}{(t_{ch})^2} \frac{d\hat{v}_z}{d\hat{t}} = -mg - \beta_0 \frac{L}{(t_{ch})} \hat{v}_z
\end{aligned} \tag{2}
$$

отсюда

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \hat{v}_x \\
&\frac{d\hat{z}}{d\hat{t}} = \hat{v}_z \\
&\frac{d\hat{v}_x}{d\hat{t}} = -\beta_0 \frac{t_{ch}}{m} \hat{v}_x \\
&\frac{d\hat{v}_z}{d\hat{t}} = -g \frac{(t_{ch})^2}{L} - \beta_0 \frac{t_{ch}}{m} \hat{v}_z
\end{aligned} \tag{3}
$$

здесь

$$\beta_0 \frac{t_{ch}}{m} = \beta_0 \frac{2T}{m} = \beta_0 \frac{2}{m} \frac{v_{z0}}{g}$$

$$g \frac{(t_{ch})^2}{L} = g \frac{4T^2}{v_{x0} 2T} = g \frac{2T}{v_{x0}} = g \frac{2}{v_{x0}} \frac{v_{z0}}{g} = 2 \frac{v_{z0}}{v_{x0}}$$

Начальные условия в момент времени $t = 0$

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}(0) = 0 \\
&\hat{z}(0) = 0 \\
&\hat{v}_x(0) = 1 \\
&\hat{v}_z(0) = v_{z0} / v_{z0} = v_0 \sin\alpha / v_{z0} \\
&0 \le \alpha \le \pi / 2
\end{aligned} \tag{4}
$$

Безразмерные уравнения движения тела

Пусть характерные переменные равны $L_{ch} = 2v_{x0}\dfrac{v_{z0}}{g}$, $t_{ch} = 2T = 2\dfrac{v_{z0}}{g}$, $v_{ch} = \dfrac{L_{ch}}{t_{ch}}$

Тогда безразмерные уравнения примут вил

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \hat{v}_x$$

$$\frac{d\hat{z}}{d\hat{t}} = \hat{v}_z$$

$$\frac{d\hat{v}_x}{d\hat{t}} = -\beta_0\frac{t_{ch}}{m}\hat{v}_x = -\beta_0\frac{2v_{z_0}}{mg}\hat{v}_x = -\hat{\beta}\hat{v}_x \text{, здесь } \hat{\beta} = \beta_0\frac{2v_{z_0}}{mg}$$

$$\frac{d\hat{v}_z}{d\hat{t}} = -g\frac{t_{ch}}{v_{ch}} - \beta_0\frac{t_{ch}}{m}\hat{v}_z = -g\frac{2v_{z0}}{gv_{ch}} - \hat{\beta}\hat{v}_z = -\frac{2v_{z0}}{v_{ch}} - \hat{\beta}\hat{v}_z = -2\hat{v}_{z0} - \hat{\beta}\hat{v}_z \tag{5}$$

тогда

$$\frac{d\hat{v}_x}{d\hat{t}} = -\hat{\beta}\hat{v}_x,$$

$$\frac{d\hat{v}_z}{d\hat{t}} = -2\hat{v}_{z0} - \hat{\beta}\hat{v}_z$$

Итак, уравнения движения в безразмерных переменных примут вид

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \hat{v}_x$$

$$\frac{d\hat{z}}{d\hat{t}} = \hat{v}_z$$

$$\frac{d\hat{v}_x}{d\hat{t}} = -\hat{\beta}\hat{v}_x \tag{6}$$

$$\frac{d\hat{v}_z}{d\hat{t}} = -2\hat{v}_{z0} - \hat{\beta}\hat{v}_z$$

Неявная разностная схема

Уравнения для координат $\hat{x}, \hat{z}$

$$\hat{x}^{n+1} = \hat{x}^n + 0.5(\hat{v}_x^{n+1} + \hat{v}_x^n)\Delta t$$

$$\hat{z}^{n+1} = \hat{z}^n + 0.5(\hat{v}_z^{n+1} + v_{z_z}^n)\Delta\hat{t} \tag{7}$$

Уравнения для скоростей $\hat{v}_x, \hat{v}_z$

$$\hat{v}_x^{n+1} = \hat{v}_x^n - \hat{\beta}0.5(\hat{v}_x^{n+1} + \hat{v}_x^n)\Delta\hat{t}$$

$$v_z^{n+1} = v_z^n - 2\hat{v}_z^0\Delta t - \hat{\beta}0.5(v_z^{n+1} + v_z^n)\Delta t \tag{8}$$

Перепишем (8)

$$\hat{v}_x^{n+1} = \hat{v}_x^n(1 - \hat{\beta}0.5\Delta\hat{t})/(1 - \hat{\beta}0.5\Delta t) \tag{9}$$

$$\hat{v}_z^{n+1} = \hat{v}_z^n(1 - \hat{\beta}0.5\Delta\hat{t})/(1 - \hat{\beta}0.5\Delta t)$$

Итак, неявная разностная схема

$$\hat{v}_x^{n+1} = \hat{v}_x^n (1 - \hat{\beta} 0.5 \Delta \hat{t}) / (1 - \hat{\beta} 0.5 \Delta t) \qquad (10)$$

$$\hat{v}_z^{n+1} = \hat{v}_z^n (1 - \hat{\beta} 0.5 \Delta \hat{t}) / (1 - \hat{\beta} 0.5 \Delta t)$$

$$\hat{x}^{n+1} = \hat{x}^n + 0.5(\hat{v}_x^{n+1} + \hat{v}_x^n)\Delta t \qquad (11)$$

$$\hat{z}^{n+1} = \hat{z}^n + 0.5(\hat{v}_z^{n+1} + v_{\underset{z}{z}}^n)\Delta \hat{t}$$

Подставляя начальные скорости $\hat{v}_x^{n=0}, \hat{v}_z^{n=0}$. в (10), находим скорости $\hat{v}_x^{n=1}, \hat{v}_z^{n=1}$.в момент $t^{n=1}$. Подставляя найденные скорости $\hat{v}_x^{n=1}, \hat{v}_z^{n=1}$.в (11), находим координаты $\hat{x}^{n=1}, \hat{z}^{n=1}$. в момент $t^{n=1}$.

Далее, зная скорости $\hat{v}_x^{n=1}, \hat{v}_z^{n=1}$.и координаты $\hat{x}^{n=1}, \hat{z}^{n=1}$. в момент $t^{n=1}$, с помощью (10) и (11) находим скорости $\hat{v}_x^{n=2}, \hat{v}_z^{n=2}$.и координаты $\hat{x}^{n=2}, \hat{z}^{n=2}$. в момент $t^{n=2}$. И так далее. Находим решение для всех t^n, $n = 1,2,3,...., N_{\max}$

Задание

1) Написать функцию вычисления аналитического решения системы уравнений движения частицы. Нарисовать графики аналитических траекторий $z(x)$ и $x(t), y(t), v_x(t), v_z(t)$ для различных параметров

2) Написать программу для решения уравнений движения частицы неявной схемой (10) (11) Нарисовать графики численных траекторий $z(x)$ и $x(t), y(t), v_x(t), v_z(t)$ для различных параметров

3) вычислить и нарисовать графики $\delta x(t), \delta z(t), \delta vx(t), \delta vz(t)$ точности численного решения от времени

$$\delta x(t^n) = abs(x_{\text{аналитическое}}(t^n) - x_{\text{численное}}(t^n))$$

$$\delta z(t^n) = abs(z_{\text{аналитическое}}(t^n) - z_{\text{численное}}(t^n))$$

$$\delta vx(t^n) = abs(vx_{\text{аналитическое}}(t^n) - vx_{\text{численное}}(t^n))$$

$$\delta vz(t^n) = abs(vz_{\text{аналитическое}}(t^n) - vz_{\text{численное}}(t^n))$$