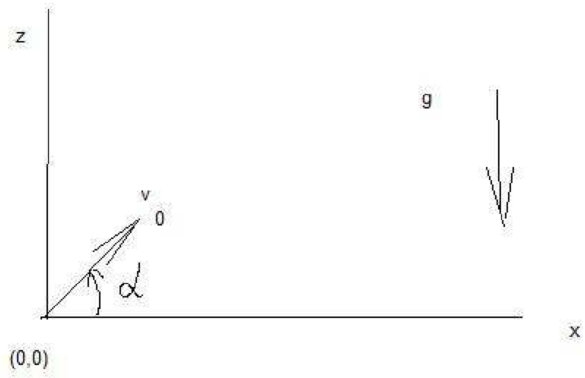
ВВО
Задача1
Моделирование движения тела в постоянном поле силы тяжести.



Тело массы m вылетает из точки (0,0) со скоростью v_0 под углом α к оси x и движется в постоянном поле силы тяжести $F_{gz} = -mg$, испытывая силу трения $\mathbf{F}_{\mathrm{fr}} = -\beta(v)(\mathbf{v}/v) = -\beta(v)(\mathbf{e}_x \frac{v_x}{v} + \mathbf{e}_z \frac{v_z}{v})$

Уравнения движения тела

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_{fr,x}(v) = -\beta(v)v_x$$ здесь F_{fr} - сила трения

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg + F_{fr,z}(v) = -mg - \beta(v)v_z$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$$

Для аналитического решения рассмотрим силу трения пропорциональную первой степени скорости

$$\beta(v) = \beta_0 v$$

В общем случае $\beta(v)$ заданная функция.

Начальные условия в момент времени $t = 0$

$x(0) = 0$

$z(0) = 0$

$v_x(0) = v_{x0} = v_0 \cos\alpha$

$v_z(0) = v_{z0} = v_0 \sin\alpha$

$0 \le \alpha \le \pi / 2$

Аналитическое решение задачи

Уравнения движения тела

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\beta_0 v_x$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg - \beta_0 v_z$$

Уравнения для скорости запишем в виде

$$\frac{dv_x}{v_x} = -(\beta_0 / m)dt, v_x(0) = v_{x0}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - (\beta_0 / m)v_z, v_z(0) = v_{z0}$$

Решение уравнения для v_x

$$\ln v_x = -(\beta_0 / m)t + \ln C$$

$$v_x(t) = Ce^{-(\beta_0 / m)t}$$

Из начального условия

$$v_x(t=0) = C = v_{x0}$$

получим решение

$$v_x(t) = v_{x0}e^{-(\beta_0 / m)t}$$

Решение уравнения для v_z.

$$\frac{dv_z}{g + (\beta_0 / m)v_z} = -dt$$

отсюда

$$\frac{d(g + (\beta_0 / m)v_z)}{g + (\beta_0 / m)v_z} = -(\beta_0 / m)dt$$

и

$$\ln[g + (\beta_0 / m)v_z] = -(\beta_0 / m)t + \ln C$$

Решение имеет вид

$$v_z = C\frac{m}{\beta_0}e^{-(\beta_0 / m)t} - \frac{m}{\beta_0}g$$

С учетом начального условия

$$v_z(t=0) = C\frac{m}{\beta_0} - \frac{m}{\beta_0}g = v_{z0}$$

Найдем C

$$C = \frac{\beta_0}{m} v_{z0} + g$$

Тогда решение имеет вид

$$v_z = (v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})e^{-(\beta_0/m)t} - \frac{m}{\beta_0}g$$

Итак, решение для скоростей имеет вид

$$v_x(t) = v_{x0} e^{-(\beta_0/m)t}$$

$$v_z(t) = (v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})e^{-(\beta_0/m)t} - \frac{m}{\beta_0}g$$

Заметим, что в отсутствии силы трения $\beta_0 \to 0$ полученные решения примут вид

$$v_x(t) = v_{x0}$$

$$v_z(t) = (v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})(1 - \frac{\beta_0}{m}t) - \frac{m}{\beta_0}g = (v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0}) - (v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})(\frac{\beta_0}{m})t - \frac{m}{\beta_0}g =$$

$$= v_{z0} - gt - v_{z0}(\frac{\beta_0}{m})t \to v_{z0} - gt$$

Получим теперь решения для координаты x из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) = v_{x0}e^{-(\beta_0/m)t}, x(t=0) = x_0$$

Его общее решение

$$x(t) = C - \frac{m}{\beta_0}v_{x0}e^{-(\beta_0/m)t}$$

Из начального условия

$$x(t=0) = C - \frac{m}{\beta_0}v_{x0} = x_0$$

Тогда

$$C = x_0 + \frac{m}{\beta_0}v_{x0}$$

И решение имеет вид

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{\beta_0}v_{x0}(1 - e^{-(\beta_0/m)t})$$

При $\beta_0 \to 0$ это решение примет вид

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{\beta_0}v_{x0}(1 - (1 - \frac{\beta_0}{m}t)) = x_0 + v_{x0}t$$

Проверим

$$x(t=0) = x_0 + \frac{m}{\beta_0}v_{x0}(1 - e^{-(\beta_0/m)0}) = x_0$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = v_{x0}e^{-(\beta_0/m)t} = v_x(t)$$

Верно

Получим теперь решения для координаты z из уравнения

$$\frac{dz}{dt} = v_z(t) = (v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})e^{-(\beta_0/m)t} - \frac{m}{\beta_0}g, z(t=0) = z_0$$

Его общее решение

$$z(t) = -\frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})e^{-(\beta_0/m)t} - \frac{m}{\beta_0}gt + C$$

Из начального условия

$$z(t=0) = -\frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})e^{-(\beta_0/m)0} - \frac{m}{\beta_0}g0 + C = z_0$$

Следует

$$-\frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0}) + C = z_0$$

Тогда

$$C = z_0 + \frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})$$

И решение имеет вид

$$z(t) = -\frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})e^{-(\beta_0/m)t} - \frac{m}{\beta_0}gt + z_0 + \frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0}) =$$

$$= z_0 - \frac{m}{\beta_0}gt + \frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})(1 - e^{-(\beta_0/m)t})$$

При $\beta_0 \to 0$

$$z(t) = z_0 - \frac{m}{\beta_0}gt + \frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})(1 - e^{-(\beta_0/m)t})$$

$$z(t) = z_0 - \frac{m}{\beta_0}gt + \frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})(1 - (1 - \frac{\beta_0}{m}t + \frac{1}{2}(\frac{\beta_0}{m}t)^2)) =$$

$$= z_0 - \frac{m}{\beta_0}gt + \frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})(\frac{\beta_0}{m}t - \frac{1}{2}(\frac{\beta_0}{m}t)^2)) =$$

$$= z_0 - \frac{m}{\beta_0}gt + \frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})\frac{\beta_0}{m}t - \frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})\frac{1}{2}(\frac{\beta_0}{m}t)^2 =$$

$$= z_0 - \frac{m}{\beta_0}gt + \frac{m}{\beta_0}(v_{z0}\frac{\beta_0}{m}t + gt) - \frac{m}{\beta_0}(v_{z0}\frac{1}{2}(\frac{\beta_0}{m}t)^2 - g\frac{m}{\beta_0}\frac{1}{2}(\frac{\beta_0}{m}t)^2) =$$

$$= z_0 + v_{z0}t - g\frac{1}{2}t^2 - v_{z0}\frac{1}{2}(\frac{\beta_0}{m})t^2 \to z_0 + v_{z0}t + -\frac{g}{2}t^2$$

Итак, решение для координат имеет вид

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{\beta_0}v_{x0}(1 - e^{-(\beta_0/m)t})$$

$$z(t) = z_0 - \frac{m}{\beta_0}gt + \frac{m}{\beta_0}(v_{z0} + g\frac{m}{\beta_0})(1 - e^{-(\beta_0/m)t})$$

При $\beta_0 \to 0$ это решение примет вид

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t$$

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t - \frac{g}{2}t^2$$

Максимальное приращение высоты $H = z_{\max} - z_0$ в момент времени T

$$z'(T) = v_{z0} - gT = 0$$

$$T = \frac{v_{z0}}{g}$$

$$H = z_0 + v_{z0}(\frac{v_{z0}}{g}) - \frac{g}{2}(\frac{v_{z0}}{g})^2 - z_0 = \frac{(v_{z0})^2}{2g}$$

Длина вдоль x

$$L = v_{x0} 2T = 2v_{x0} \frac{v_{z0}}{g}$$

$$L = 2\frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

Отсюда видно, что максимальная дальность $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$ достигается при $\alpha_{\max} = \pi / 4$

$$H / L = \frac{(v_{z0})^2}{2g} / (\frac{2v_{x0}v_{z0}}{g}) = \frac{v_{z0}}{2} / (2v_{x0}) = \frac{v_{z0}}{4v_{x0}} = \frac{\sin\alpha}{4\cos\alpha}$$

Отсюда видно, что $H / L > 1$ при $tg\alpha > 4$, т.е. при $\alpha > \arg tg(4) = 1.33$ радиан = 76 градусов

Введем характерные величины -

$t_{ch} = 2T$ характерное время

$L_{ch} = L$ характерная длина

$v_{ch} = L_{ch} / t_{ch} = v_{x0}$

Безразмерные переменные

$\hat{t} = t / t_{ch}$

$\hat{x} = x / L$

$\hat{z} = z / L$

$\hat{v}_x = v_x / v_{ch}$

$\hat{v}_z = v_z / v_{ch}$

Безразмерные уравнения движения тела

$$\frac{L}{t_{ch}} \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \frac{L}{t_{ch}} \hat{v}_x$$

$$\frac{L}{t_{ch}} \frac{d\hat{z}}{d\hat{t}} = \frac{L}{t_{ch}} \hat{v}_z$$

$$m \frac{L}{(t_{ch})^2} \frac{d\hat{v}_x}{d\hat{t}} = -\beta_0 \frac{L}{(t_{ch})} \hat{v}_x$$

$$m \frac{L}{(t_{ch})^2} \frac{d\hat{v}_z}{d\hat{t}} = -mg - \beta_0 \frac{L}{(t_{ch})} \hat{v}_z$$

Уравнения в безразмерных величинах

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \hat{v}_x$$

$$\frac{d\hat{z}}{d\hat{t}} = \hat{v}_z$$

$$\frac{d\hat{v}_x}{d\hat{t}} = -\beta_0 \frac{t_{ch}}{m} \hat{v}_x$$

$$\frac{d\hat{v}_z}{d\hat{t}} = -g \frac{(t_{ch})^2}{L} - \beta_0 \frac{t_{ch}}{m} \hat{v}_z$$

$$\beta_0 \frac{t_{ch}}{m} = \beta_0 \frac{2T}{m} = \beta_0 \frac{2}{m} \frac{v_{z0}}{g}$$

$$g \frac{(t_{ch})^2}{L} = g \frac{4T^2}{v_{x0} 2T} = g \frac{2T}{v_{x0}} = g \frac{2}{v_{x0}} \frac{v_{z0}}{g} = 2 \frac{v_{z0}}{v_{x0}}$$

Начальные условия

$x(0) = 0$

$z(0) = 0$

$v_x(0) = v_{x0} = v_0 \cos\alpha$

$v_z(0) = v_{z0} = v_0 \sin\alpha$

$0 \le \alpha \le \pi / 2$

Начальные условия в безразмерном виде

$\hat{x}(0) = 0$

$\hat{z}(0) = 0$

$\hat{v}_x(0) = 1$

$\hat{v}_z(0) = v_{z0} / v_{x0} = tg\alpha$

$0 \le \alpha \le \pi / 2$