Codecraft2016 Linear Programming 解法小结

By 六院八队 小王

2016.11.16

1 前言

1.1 关于 LP 与 TSP

TSP 有很多很多算法，不管是精确算法还是启发式算法。推荐看 William J. Cook 的《迷茫的旅行商 一个无处不在的计算机算法问题》一书，介绍了半个世纪以来各种各样的 TSP 算法。

书中第五章“线性规划”介绍了用 Linear Programming（简称 LP）方法解决 TSP 问题的历史进程，从 Simplex Algorithm（单纯形算法：20 世纪十大经典算法之一）到 Primal-Dual Algorithm（原始-对偶算法）等等。

在初赛时候就有好多人使用求解器，但惹来很多争议。虽然复赛时不让用了，但还是有研究的价值。

1.2 求解器简介

目前求解器已经越来越不局限于求解纯线性问题了，求解混合整数规划（MIP）和二次规划（QP）等也很棒。Gurobi7.0 版本甚至允许模型可以添加 And 和 Or 这种纯 non-linear 的限制条件（7.0 有 bug，官方立马改正后发布了 7.0.1），模型甚至还可以设置多目标（所有目标为线性）。

求解器分商业和开源，前者基本上完爆后者。具体评测数据请见：http://plato.asu.edu/bench.html。求解质量上：cplex≈Gurobi>XPRESS>>其它。然而这三个求解器都是商业的，不过 cplex 和 Gurobi 都有学术完整版。

Cplex 申请：用校园邮箱在 https://ibm.onthehub.com 注册，验证邮箱，在网站上免费购买、下载、安装（mac 版无 IDE，只有命令行）。

Gurobi 申请：在 Gurobi 官网用校园邮箱注册，验证邮箱，在网站上免费申请学术验证码。登录账号后在 http://www.gurobi.com/downloads/gurobi-optimizer 下载软件，网络连接到校园网，打开软件，输入验证码、回车，验证校园网成功后即可使用。

1.3 Gurobi 简介

笔者主要使用的是 Gurobi，大家可也自行学习 cplex。学习 Gurobi 主要参考三个文件：Quick Start Guides（区分平台）、Example Tour、Reference Manual，下载地址：http://www.Gurobi.com/documentation/7.0/。

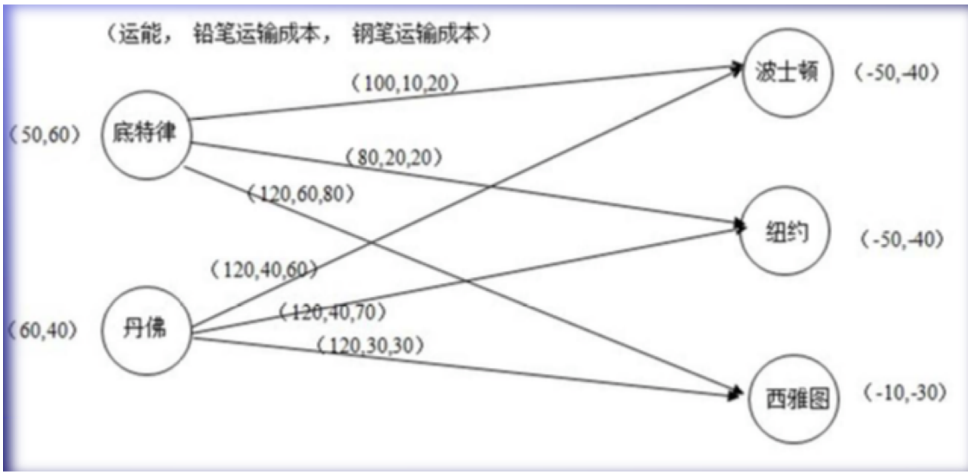
Quick Start Guides 中 8-14 章（C、C++、Java、.Net、Python、Matlab、R）分别用不同语言的接口讲解了两个例子：一个整数规划模型，一个网络流模型。如果没有任何使用求解器的经验，建议把其中某个语言的一章看完。

我使用的语言为 Python，简单易用、开发快，Gurobi 官方也推荐。

Quick Start Guides 中 12.1 Simple Python Example 讲解了一个最最简单的整数规划模型，如下图：

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{maximize} & x & + & y & + & 2z & & \\
\textbf{subject to} & x & + & 2y & + & 3z & \leq & 4 \\
 & x & + & y & & & \geq & 1 \\
 & & & \multicolumn{5}{l}{x, y, z \text{ binary}}
\end{array}
$$

Quick Start Guides 中 12.2 Python Dictionary Example 讲解了一个简单的网络流模型，如下图。该例子可参考中文 pdf：*Gurobi (数学规划优化引擎) 可视化建模环境—python 编程*，下载目录为：https://github.com/Victoriayhk/future_net/tree/master/Linear-Programming。



1.4 模型存储的文件格式

不同求解器可能使用不同的程序接口，虽然不难，但是学习成本还是有的。使用统一格式的文件存储模型，使得模型文件不用任何修改就可在其它求解器中运行。但请注意，文件格式（MPS、LP 等）尚未有统一的标准，不同求解器还是有一些差别的。例如，Gurobi 的 LP 文件可以使用中括号[]表示数组元素，但 Cplex 就不识别。

常见的格式有 MPS (Mathematical Programming System)，LP (Linear Programming) 等等，LP 文件较 MPS 文件更方便阅读，更多格式详见：http://www.rpi.edu/dept/math/math-programming/cplex66/sun4x_58/doc/refman/html/appendixE.html。

在 Gurobi 的 Quick Start Guides 第 5 章 Solving a Simple Model - The Gurobi Comman 中，就有介绍一个例子，使用 LP 格式存储模型，使用命令行求解。

2 LP 求解 TSP 的数学模型

TSP 可以被规范化为一个整数规划问题：

minimize:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i, j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

subject to:

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i,j = 1,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,\cdots,n \qquad ①$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,\cdots,n \qquad ②$$

$$u_i \in Z \qquad i = 1,\cdots,n$$

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n-1 \qquad 2 \leq i \neq j \leq n \qquad ③$$

用数字$1,\cdots,n$来标记 n 个城市。

$\mathrm{u_i}$是辅助变量：记录城市先后顺序。

c_{ij}表示城市 i 到 j 的距离。

x_{ij}=1 表示城市 i 到 j *相连*，x_{ij}=0 表示城市 i 到 j *不相连*。

第一组等式①：out degrees=1

第二组等式②：in degrees=1

第三组约束③：只有等式组①和②的约束是不够的，因为会产生多个环（subtour）。而不等式组③就保证了只有一个环，证明请往下看。为了保证只有一个 tour，用到了辅助变量u_i。

证明不等式组③保证只有一个环：

如果某个 subtour 不包含城市 1，设这个 subtour 中城市为$\mathrm{i},\cdots,i+k-1$，

令：$\mathrm{x_{i,i+1} = x_{i+1,i+2} = \cdots = x_{i+k-1,i}} = 1$

则有 k 个满足③的不等式：

$$\mathrm{u_i - u_{i+1} \leq n-1}$$
$$\mathrm{u_{i+1} - u_{i+2} \leq n-1}$$
$$\cdots$$
$$\mathrm{u_{i+k-1} - u_i \leq n-1}$$

叠加后，得：

$$nk \leq (n-1)k$$

产生矛盾，因此所有 subtour 必须包含城市 1，这些 subtour 又因为重合了城市 1 又合成为一个 tour。因此满足③的可行解只有一个 tour，得证。

3 初赛（单条路）的 LP 解法

3.1 建模

初赛题目区别于 TSP：

（1）有起点和终点，求的是一条路而不是环路

（2）某些节点为非必须节点，可以不经过

对上一章 TSP 模型做的修改：

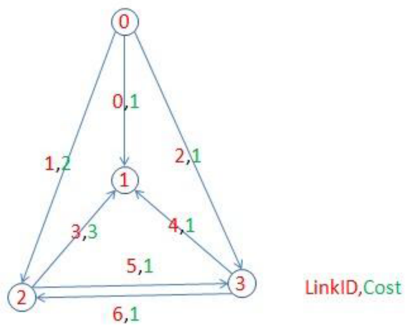
（1）起点 s 和终点 t 单独做度的约束，s 只约束出度，t 只约束入度

（2）对于必须节点，约束不变：入度==出度==1

对于非必须节点，约束改成：入度==出度<=1

（3）对于辅助变量 u：$u_s = 1, u_t = n$，其它关于 u 的约束不变

3.2 一个例子



上图为官方提供的 demo 例子，下图是该模型示例代码 future_net1.py，在终端输入 Gurobi.sh future_net1.py 即可。这个代码只是为了说明问题，真正的求解代码需要读入文件中的节点和边的信息，生成目标函数和约束条件。

future_net1.py

```python
# coding:utf-8
# future_net1.py

from gurobipy import *

m = Model("TSP")

# cost/distance of node
c01 = 1
c02 = 2
c03 = 1
c21 = 3
c23 = 1
c31 = 1
c32 = 1

# create variables
x01 = m.addVar(vtype=GRB.BINARY)
x02 = m.addVar(vtype=GRB.BINARY)
x03 = m.addVar(vtype=GRB.BINARY)
x21 = m.addVar(vtype=GRB.BINARY)
x23 = m.addVar(vtype=GRB.BINARY)
x31 = m.addVar(vtype=GRB.BINARY)
x32 = m.addVar(vtype=GRB.BINARY)

# set objective
obj = c01*x01 + c02*x02 + c03*x03 + c21*x21 + c23*x23 + c31*x31 + c32*x32
m.setObjective(obj, GRB.MINIMIZE)

# degree constraint
m.addConstr(x01 + x02 + x03 == 1)   # out degree of start node s
m.addConstr(x21 + x31 == 1)         # in degree of end node t
m.addConstr(x02 + x32 == x21 + x23) # must node 2: out degree == in degree
m.addConstr(x21 + x23 == 1)         # must node 2: out degree == 1
m.addConstr(x03 + x23 == x31 + x32) # must node 3: out degree == in degree
m.addConstr(x31 + x32 == 1)         # must node 3: out degree == 1

# variable u constraint
n = 4
u0 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, lb=1, ub=n)
u1 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, lb=1, ub=n)
u2 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, lb=1, ub=n)
u3 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, lb=1, ub=n)
m.addConstr(u0 == 1)
m.addConstr(u1 == n)
m.addConstr(u0 - u1 + x01 * n <= n - 1)
m.addConstr(u0 - u2 + x02 * n <= n - 1)
m.addConstr(u0 - u3 + x03 * n <= n - 1)
m.addConstr(u2 - u1 + x21 * n <= n - 1)
m.addConstr(u2 - u3 + x23 * n <= n - 1)
m.addConstr(u3 - u1 + x31 * n <= n - 1)
m.addConstr(u3 - u2 + x32 * n <= n - 1)

# Compute optimal solution
m.optimize()

#print result
print "cost sum  =", int(m.objVal), "\n"

print "x01 =", x01.x
print "x02 =", x02.x
print "x03 =", x03.x
print "x21 =", x21.x
print "x23 =", x23.x
print "x31 =", x31.x
print "x32 =", x32.x, "\n"

print "u0 =", u0.x
print "x1 =", u1.x
print "x2 =", u2.x
print "x3 =", u3.x
```

3 复赛/决赛（两条路）的 LP 解法

3.1 建模

复赛是求两条路径（主/备），而且有 2 个目标：

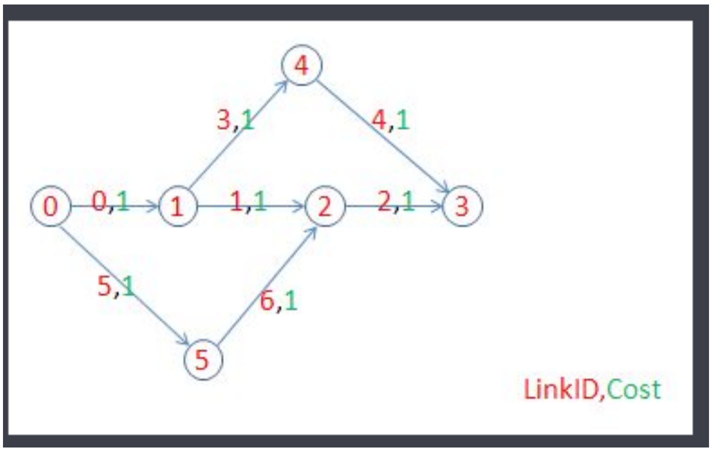
（1）主要目标：主备路径重复边个数最小

（2）次要目标：主备路径权值和最小

思路：单独求解主备路，图中每条边对应两个变量，分别是主备路径的使用与否（值为 0 或 1），相乘这两个变量，再相加所有乘积，就得到主要目标。先让模型计算出最优的主要目标，然后带入最优的主要目标值作为约束，再求次要目标。

3.2 一个例子

上面文字比较繁琐，直接看官方这个例子。



设图中六条边对应主路径是否使用的变量为：*x01,x05,x12,x14,x23,x43*。相应地，备选路径：*y01,y05,y12,y14,y23,y43*。这 12 个变量均为二进制变量。

主路径的必经节点为 0,3,1，非必须节点为 2,4,5。

备选路的必经节点为 0,3,2，非必须节点为 1,4,5。

模型如下：

minimize:

*obj1=x01*y01+x05*y05+x12*y12+x14*y14+x23*y23+x43*y43*

obj2= (x01+x05+x12+x14+x23+x43) + (y01+y05+y12+y14+y23+y43)

subject to:

主路径：

节点 0 出度：$x01+x05=1$

节点 3 入度：$x23+x43=1$

节点 1 入度和出度：$x01=x12+x14=1$

节点 2 入度和出度：$x12+x52=x23\leq 1$

节点 4 入度和出度：$x14=x43\leq 1$

节点 5 入度和出度：$x05 = x52 \leq 1$

备选路径：

节点 0 出度：$y01 + y05 = 1$

节点 3 入度：$y23 + y43 = 1$

节点 1 入度和出度：$x01 = x12 + x14 \leq 1$

节点 2 入度和出度：$y12 + y52 = y23 = 1$

节点 4 入度和出度：$\mathrm{y14} = \mathrm{y43} \leq 1$

节点 5 入度和出度：$\mathrm{y05} = \mathrm{y52} \leq 1$

注 1：Gurobi7.0 中虽然可以设置多目标，但是这些目标函数***必须都是线性的***。而本模型中 obj1 是非线性的，所以不能使用 Gurobi7.0 "多目标函数" 的特性。如果只是单目标就可以是多种形式的：线性的、二次、分段等。所以只能先设置目标函数为 obj1，将得到的最优解 obj1_optimal 设置为约束条件：obj1==obj1_optimal，再设置目标函数为 obj2，重新求解模型。

注 2：obj1 中的乘法运算其实是为了模拟逻辑&运算，Gurobi7.0 新增了 And 和 Or 约束函数，比乘法要效率高一些。另外在某些模型中，也可以用线性不等式模拟&运算，比如 c=a&b 可以改写成 a+b<=1+c（c 不能有其它约束，c 需要在目标函数中线性出现，目标函数是 minimize 的）。

4 实验结果&结论

做复赛/决赛（两条路）的测试，一共测试了 43 个 case，和基于 LKH 算法的结果进行对比。因为 Gurobi 很需要内存和计算，由于是笔记本跑的程序，内存和计算能力很差，如果在大内存高计算能力的机器上跑，结果可能差别很大。Gurobi 模型代码和实验结果下载：
https://github.com/Victoriayhk/future_net/tree/master/Linear-Programming。
其中 source-pre/为单条路代码，source-semi/为双路代码，test_result.xlsx 为测试结果数据。

可行解个数	Gurobi	基于 LKH 算法
重复边个数 obj1	23(全部最优)	40(22 个最优)
双路权值和 obj2	33(全部最优)	

注 1：Gurobi 是先后求解 obj1 和 obj2 的，而 LKH 是一起求。
注 2：模型目标函数是 maximize 或 minimize，所以 Gurobi 的解都是最优解。
注 3：Gurobi 未求出解的 case 都是规模很大的 case，此时模型中的变量和约束很多，导致模型在可行时间内跑不出解。
注 4：LKH 未求出解的 3 个 case 都是稀疏图，而且有几个 case 即使求出解，但 obj1 非常差。而 Gurobi 却可以轻易求解这些 case。
注 5：对于大规模模型输入，有可能会产生结果错误，因为 Gurobi 是使用确定位数表示所以变量（整数、连续型），所以有可能会出现可接受的错误。比如说，一个 binary 的变量最后的取值可能是 0.0000011。

结论 1：LKH 适合求解稠密图，对于求解大规模 case 有很大优势，结果是近似解（但 LKH 很强大，很高概率得到最优解）。求解器适合求解中小规模 case，在稀疏图上有很大优势，使用的是精确算法，结果是最优解。
结论 2：如果不考虑时间因素或一定要求最优解的时候，优先推荐求解器，因为求解器得到的解是最优解。