

法律声明

- ■课程详情请咨询
 - ◆微信公众号:北风教育
 - ◆官方网址: http://www.ibeifeng.com/





人工智能之机器学习

主题模型

主讲人: Gerry

上海育创网络科技有限公司





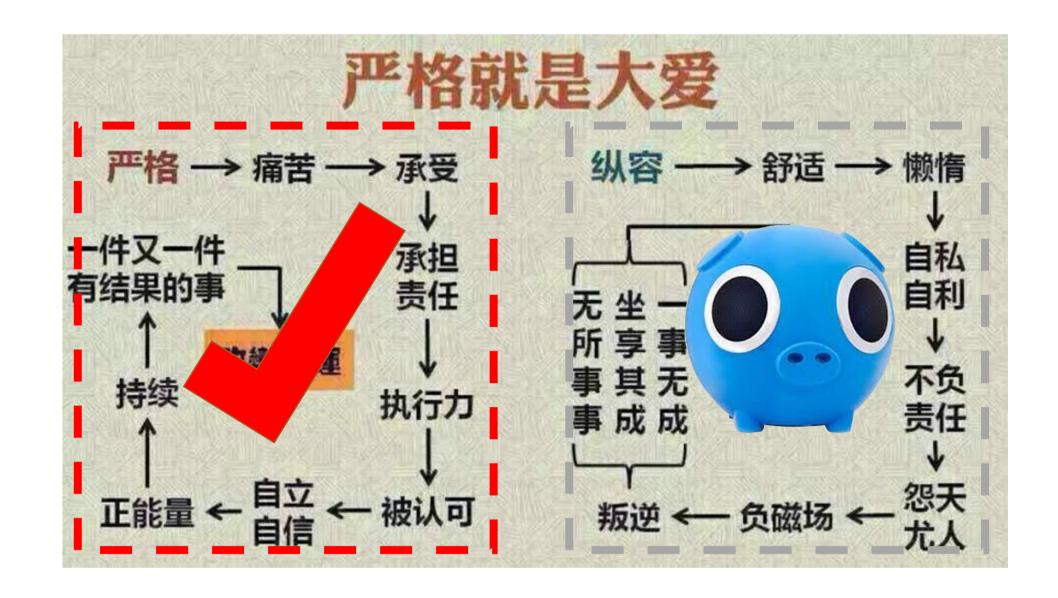


课程要求

- ■课上课下"九字"真言
 - ◆认真听,善摘录,勤思考
 - ◆多温故,乐实践,再发散
- ■四不原则
 - ◆不懒散惰性,不迟到早退
 - ◆不请假旷课,不拖延作业
- ■一点注意事项
 - ◆违反"四不原则",不包就业和推荐就业



严格是大爱





寄语



做别人不愿做的事,

做别人不敢做的事,

做别人做不到的事。



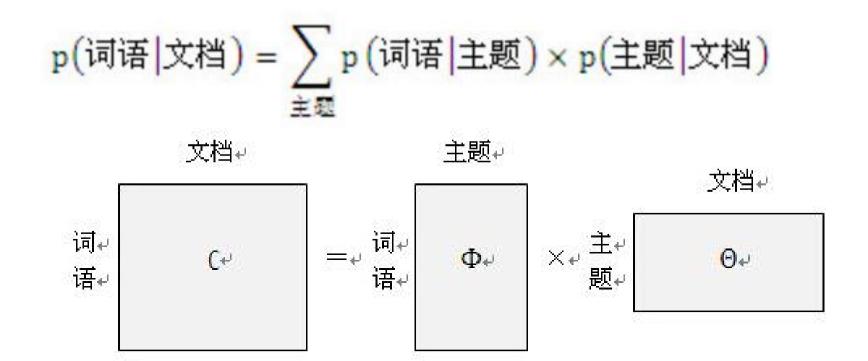
课程内容

- ■主题模型
- LSA
- LDA



主题模型

■怎样才能生成主题?对文章的主题应该怎么分析?这是主题模型要解决的问题。





LSA

■ 潜在语义分析(Latent Semantic Analysis, LSA), 也叫做Latent Semantic Indexing, LSI. 是一种常用的简单的主题模型。LSA是基于奇异值分解(SVD)的方法得到文本主题的一种方式。

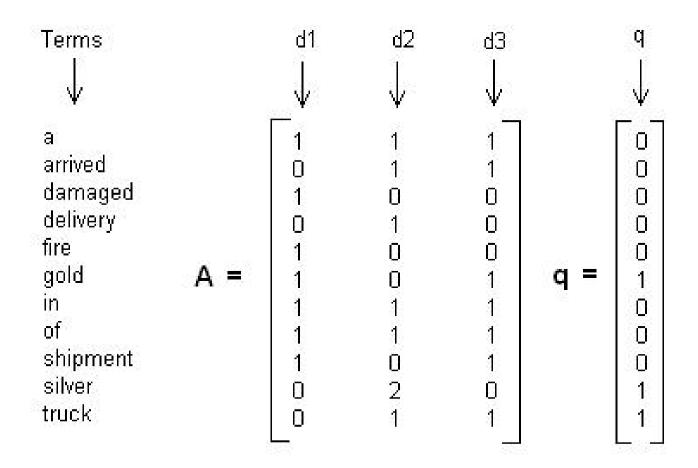
$$A_{m*_n} = U_{m*_m} \sum_{m*_n} V_{n*_n}^T \qquad A_{m*_n} \approx U_{m*_k} \sum_{k*_k} V_{n*_k}^T$$

 总结:我们输入的有m个文本,每个文本有n个词。而A_{ij}则对应第i个文本的第j 个词的特征值。k是我们假设的主题数,一般要比文本数少。SVD分解后,U_{il}对 应第i个文本和第l个主题的相关度。V_{jm}对应第j个词和第m个词义的相关度。Σ_{lm} 对应第l个主题和第m个词义的相关度。



LSA案例

■ 假设有10个词、3个文本对应的词频TF矩阵如下:





LSA案例

■ 假定主题数为2,通过SVD降维后的三个矩阵分布为:

$$\mathbf{V} \approx \mathbf{V_k} = \begin{bmatrix} -0.4945 & 0.6492 \\ -0.6458 & -0.7194 \\ -0.5817 & 0.2469 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V^T} \approx \mathbf{V_k^T} = \begin{bmatrix} -0.4945 & -0.6458 & -0.5817 \\ 0.6492 & -0.7194 & 0.2469 \end{bmatrix}$$



LSA

■ 通过SVD矩阵分解我们可以得到文本、词与主题、语义之间的相关性,但是这个时候计算出来的内容存在负数,我们比较难解释,所以我们可以对LSI得到文本主题矩阵使用余弦相似度计算文本的相似度的计算。最终我们得到第一个和第三个文档比较相似,和第二个文档不太相似。(备注:这个时候直接在文本主题矩阵的基础上直接应用聚类算法即可)

$$sim(d_1, d_2) = \frac{(-0.4945)*(-0.6458)+0.6492*(-0.7194)}{\sqrt{(-0.4945)^2 + 0.6492^2}*\sqrt{(-0.6458)^2 + (-0.7194)^2}} = -0.1872$$

$$sim(d_1, d_3) = \frac{(-0.4945)^*(-0.5817) + 0.6492^* \cdot 0.2469}{\sqrt{(-0.4945)^2 + 0.6492^2} * \sqrt{(-0.5817)^2 + 0.2469^2}} = 0.8686$$



LSA主题模型总结

■ 除非数据规模比较小,而且希望快速的粗粒度的找出一些主题分布关系,否则我们一般不会使用LSA主题模型。

■优点:

◆ 原理简单,一次SVD分解即可得到主题模型,可以同时解决词义的问题。

■ 缺点:

- ◆ SVD分解的计算非常耗时,对于高维度矩阵做SVD分解非常困难;
- ◆ 主题模型数量的选取对于结果的影响非常大,很难选择合适的k值;
- ◆ LSA模型不是概率模型,缺乏统计基础,结果难以直观的解释。

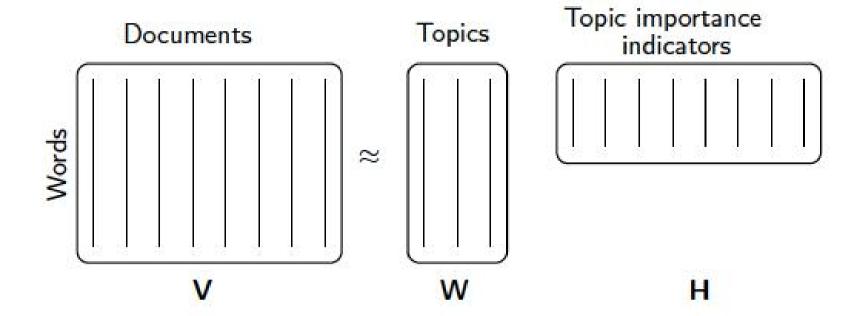


- 非负矩阵分解(Non-negative Matrix Factorization, NMF)是一种常用的矩阵分解方式,常用于矩阵分解、降维、主题模型等应用场景。
- NMF虽然和SVD一样都是矩阵分解,但是NMF不同的是:它的目标希望是将矩阵分解成为两个子矩阵。
- 参考: https://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/papers/pgradnmf.pdf

$$V_{m^*n} \approx W_{m^*k} H_{k^*n}$$



■ 在NMF中求解出来的W和H,分别体现的是文本和主题的概率相关度,以及词和主题的概率相关度;





■ NMF的期望是找到两个W、H矩阵,使得WH的矩阵乘积结果和对应的原矩阵V 对应位置的值相比误差尽可能的小。

$$\min_{W,H} \quad f(W,H) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(V_{ij} - (WH)_{ij} \right)^{2}$$
subject to
$$W_{ia} \ge 0, H_{bj} \ge 0, \ \forall i, a, b, j.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (V_{ij} - (WH)_{ij})^{2} = ||V - WH||_{F}^{2}$$



■ NMF的目标函数中总共包含了m*k+k*n个参数,可以直接使用梯度下降法或者 拟牛顿法来讲行求解。

$$W^{k+1} = \max(0, W^k - \alpha_k \nabla_W f(W^k, H^k))$$

$$H^{k+1} = \max(0, H^k - \alpha_k \nabla_H f(W^k, H^k))$$



■ 为了防止过拟合,也可以在NMF的目标函数的基础上添加一个正则化项

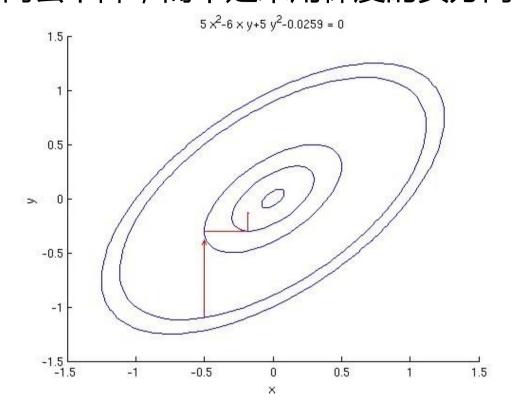
$$\frac{1}{2}||X-WH||_{Fro}^2 + \alpha\rho||W||_1 + \alpha\rho||H||_1 + \frac{\alpha(1-\rho)}{2}||W||_{Fro}^2 + \frac{\alpha(1-\rho)}{2}||H||_{Fro}^2$$

■ 但是当加入L1正则项后,由于没法求解出正常的导函数出来(导函数不是连续的),也就没法使用梯度下降法和拟牛顿法求解参数,此时一般采用坐标轴下降法来进行参数的求解。



坐标轴下降法

■ 坐标轴下降法(Coordinate Descent, CD)是一种迭代法,通过启发式的方法一步步的迭代求解函数的最小值,和梯度下降法(GD)不同的时候,坐标轴下降法是沿着坐标轴的方向去下降,而不是采用梯度的负方向下降。

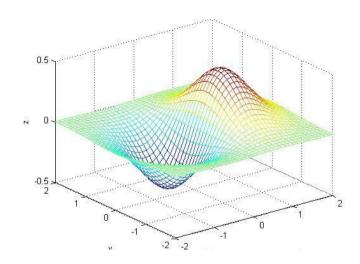




坐标轴下降法

- 坐标轴下降法利用EM算法的思想,在参数更新过程中,每次均先固定m-1个参数值,求解剩下的一个参数的局部最优解;然后进行迭代式的更新操作。
- 坐标轴下降法的核心思想是多变量函数F(X)可以通过每次沿着一个方向优化来获取最小值;其数学依据是:对于一个可微凸函数 $f(\theta)$,其中 θ 为n*1的向量,如果对于一个解 θ =($\theta_1,\theta_2,...,\theta_n$),使得 $f(\theta)$ 在某个坐标轴 θ_i (i=1,2,...,n)上都能达到最小值,

则 $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ 就是的 $f(\theta)$ 全局的最小值点





坐标轴下降法

■ 在坐标轴下降法中,优化方向从算法的一开始就固定了,即沿着坐标的方向进行变化。在算法中,循环最小化各个坐标方向的目标函数。即:如果x^k给定,那么x^{k+1}的第i维度为:

$$\mathbf{x}_{i}^{k+1} = \underset{y \in \mathbb{R}}{\operatorname{arg\,min}} \ f(x_{1}^{k+1}, ..., x_{i-1}^{k+1}, y, x_{i+1}^{k}, ..., x_{n}^{k});$$

■ 因此,从一个初始的x0求得函数F(x)的局部最优解,可以迭代获取x0、x1、x2... 的序列,从而可以得到:

$$F(\mathbf{x}_0) \geq F(\mathbf{x}_1) \geq F(\mathbf{x}_2) \geq \cdots$$



坐标轴下降法算法过程

- 1. 给θ向量随机选取一个初值,记做θ°;
- 2. 对于第k轮的迭代,从θ₁k开始计算,θ₁k到为止,计算公式如下:

$$\begin{aligned} \theta_1^k &= \arg\min_{\theta_1} \ J\left(\theta_1, \theta_2^{k-1}, \theta_3^{k-1}, ..., \theta_n^{k-1}\right) \\ \theta_2^k &= \arg\min_{\theta_2} \ J\left(\theta_1^k, \theta_2, \theta_3^{k-1}, ..., \theta_n^{k-1}\right) \\ &\cdots \\ \theta_n^k &= \arg\min_{\theta} \ J\left(\theta_1^k, \theta_2^k, \theta_3^k, ..., \theta_n\right) \end{aligned}$$

- 检查θ^k和θ^{k-1}向量在各个维度上的变化情况,如果所有维度的变化情况都比较小的话,那么认为结束迭代,否则继续k+1轮的迭代。
- 备注:在求解每个参数局部最优解的时候可以求导的方式来求解。



二项分布

■二项分布是从伯努利分布推进的。伯努利分布,又称两点分布或0-1分布,是一个离散型的随机分布,其中的随机变量只有两类取值,非正即负 $\{+,-\}$ 。而二项分布即重复n次的伯努利试验,记为 $X \sim b(n,p)$ 。简言之,只做一次实验,是伯努利分布,重复做了n次,是二项分布。二项分布的概率密度函数为:

$$P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$
 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$



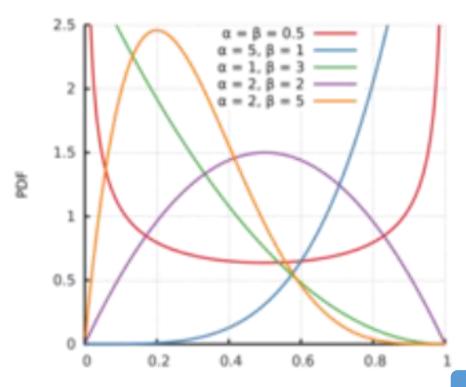
Beta分布

■ Beta分布是二项分布的共轭分布,条件概率公式如下:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha - 1} (1 - x)^{\beta - 1}, x \in [0, 1]$$

$$\frac{1}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$





多项分布

- ■是二项分布扩展到多维的情况
- ■多项分布是指单次试验中的随机变量的取值不再是0-1的,而是有多种离散值可能(1,2,3...,k)。比如投掷6个面的骰子实验,N次实验结果服从K=6的多项分布。其中 $\sum_{i=1,p_i>0}^k$

■ 多项分布的概率密度函数为:

$$P(x_1, x_2, ..., x_k; n, p_1, p_2, ..., p_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$



Dirichlet分布

■ 是Beta分布扩展到多维的情况

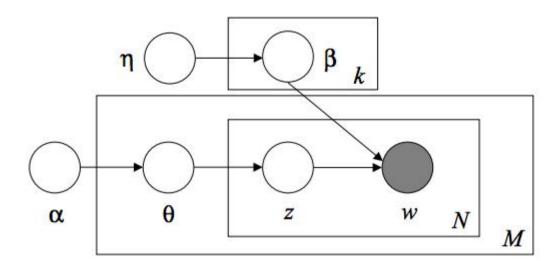
$$f(x_1,\dots,x_K;\alpha_1,\dots,\alpha_K) = \frac{1}{B(\alpha)} \prod_{K=1}^{i=1} x_i^{\alpha_i-1},$$

$$B(\alpha) = \frac{\prod_{i=1}^{K} \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{K} \alpha_i)}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$$



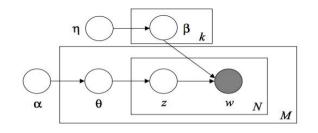
LDA

- 隐含狄利克雷分布(Latent Dirichlet Allocation, LDA)是一种基于贝叶斯算法模型,利用先验分布对数据进行似然估计并最终得到后验分布的一种方式。LDA是一种比较常用的主题模型。
- LDA假设文档主题是多项分布,多项分布的参数(先验分布)是服从Dirichlet分布, 其实LDA是一种三层的贝叶斯模型。





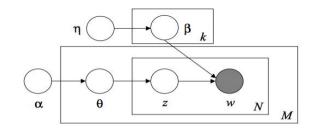
LDA



- 共有M篇文档,每个文档有Nm个单词,一共涉及到K个主题;
- 每篇文档都有各自的主题,主题分布是多项式分布,该多项式分布的参数服从 Dirichlet分布,该Dirichlet分布的参数为α;
- 每个主题都有各自的词分布,词分布为为多项式分布,该多项式分布的参数服从 Dirichlet分布,该Dirichlet分布的参数为n;
- 对于某篇文档d中的第n个词,首先从该文档的主题分布中采用一个主题,然后再这个主题对应的词分布中采用一个词,不断重复该操作,直到m篇文档全部完成上述过程。



LDA详细解释



- 词汇表中共有V个term(不可重复);
- 语料库中共有m篇文档d₁,d₂,..,d_m;对于文档d_i , 是由N_i个word组成的(word可重复);语料库共有K个主题T₁,T₂,...,T_k;
- α和η是先验分布(Dirichlet分布)的参数;
- 0是每篇文档的主题分布,是一个K维的向量;
- 对于第i篇文档d_i,在主题分布θ_i下,可以确定一个具体的主题z_{ii}=k
- β是每个主题的**词分布**,是一个V维的向量;
- lacksquare 由 z_{ij} 选择 β_{zij} ,表示由词分布 β_{zij} 确定term,即可得到最终的观测值 w_{ij} 。



- 对于一个n维的概率分布 $\pi(x_1,x_2,...,x_n)$,可以通过在n个坐标上轮换采样,来得到新的样本,对于轮换到任意一个坐标 x_i 上的转移,马尔可夫链的状态转移概率为 $p(x_i|x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$,即固定n-1个坐标轴,在某一个坐标上移动。
- Gibbs采样算法在高维空间采样的时候具有比较高的优势,Glbbs采样的过程比较类似这个坐标轴下降法。



LDA参数学习-Gibbs采样算法流程

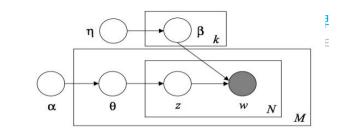
- 1. 输入稳定的分布 $\pi(x_1,x_2,...,x_n)$ 或者对应特征的条件概率分布,设定状态转移次数阈值 n_1 ,需要的样本数 n_2 ;
- 2. 随机初始化状态值(x₁¹,x₂¹,...,x_n¹);
- 3. 进行迭代数据采样(迭代n₁+n₂-1次)
 - 从条件概率分布中采样得到对应的样本

$$x_j^{t+1} \rightarrow p(x_j|x_1^{t+1}, x_2^{t+1}, ..., x_{j-1}^{t+1}, x_{j+1}^t, ..., x_n^t)$$

■ 4. 最终得到的样本集为:

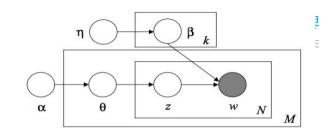
$$\{(x_1^{n_1}, x_2^{n_1}, \dots, x_n^{n_1}), \dots, (x_1^{n_1+n_2-1}, x_2^{n_1+n_2-1}, \dots, x_n^{n_1+n_2-1})\}$$





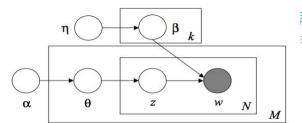
- 给定一个文档集合,w是可以观察到的值,α和η是根据经验给定的先验参数,其它的各个z,θ、β都是未知的隐含变量,都是需要根据观测到的数据进行学习的。
- 具体来讲,所有文档联合起来形成的词向量w是已知数据,但是不知道语料库的主题z的分布。假设可以先求解出w、z的联合分布p(w,z),进而就可以求出某个词w_i对应主题特征z_i的条件概率分布p(z_i=k|w,z_{-i}),其中z_{-i}表示去掉下标为i后的主题分布,有了条件概率,那么就可以使用Gibbs采样,最终可以得到第i个词的主题。
- 如果通过采样得到所有词的主题,那么可以通过统计所有词的主题数,从而得到各个主题的词分布。接着统计各个文档对应词的主题数,从而可以得到各个文档的主题分布。





■ 简化Dirichlet分布表达式:

$$Dirichlet(\vec{p}|\vec{\alpha}) = \frac{\Gamma(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k)}{\prod_{k=1}^{K} \Gamma(\alpha_k)} \prod_{k=1}^{K} p_k^{\alpha_k - 1} = \frac{1}{\triangle(\vec{\alpha})} \prod_{k=1}^{K} p_k^{\alpha_k - 1}$$



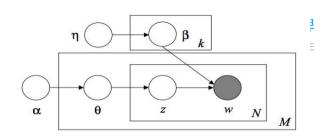
計算文档的主题条件分布:
$$p(\vec{z}_d|\vec{\alpha}) = \int p(\vec{z}_d|\vec{\theta}_d) p(\theta_d|\vec{\alpha}) d\vec{\theta}_d$$

$$= \int \prod_{k=1}^K p_k^{n_d^{(k)}} Dirichlet(\vec{\alpha}) d\vec{\theta}_d$$

$$= \int \prod_{k=1}^K p_k^{n_d^{(k)}} \frac{1}{\triangle(\vec{\alpha})} \prod_{k=1}^K p_k^{\alpha_k - 1} d\vec{\theta}_d$$

$$= \frac{1}{\triangle(\vec{\alpha})} \int \prod_{k=1}^K p_k^{n_d^{(k)} + \alpha_k - 1} d\vec{\theta}_d$$

$$= \frac{\triangle(\vec{n}_d + \vec{\alpha})}{\triangle(\vec{\alpha})}$$



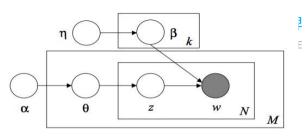
■在第d个文档中,第k个主题的词的个数表示为:n_d^(k), 对应的多项分布的计数可以表示为:

$$\vec{n}_d = (n_d^{(1)}, n_d^{(2)}, ...n_d^{(K)})$$

■有了一个文档的主题条件分布,则可以得到所有文档的主题条件分布为:

$$p(\vec{z}|\vec{\alpha}) = \prod_{d=1}^{M} p(\vec{z}_d|\vec{\alpha}) = \prod_{d=1}^{M} \frac{\triangle(\vec{n}_d + \vec{\alpha})}{\triangle(\vec{\alpha})}$$





■ 使用同样的方式,可以得到第k个主题对应的词的条件分布p(w|z,η)为:

$$p(\vec{w}|\vec{z}, \vec{\eta}) = \prod_{k=1}^{K} p(\vec{w}_k | \vec{z}, \vec{\eta}) = \prod_{k=1}^{K} \frac{\triangle(\vec{n}_k + \vec{\eta})}{\triangle(\vec{\eta})}$$

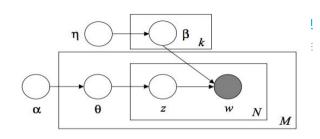
■ 其中第k个主题中,第v个词的个数表示为n_kv;对应的多项式分布计数表示为:

$$\vec{n}_k = (n_k^{(1)}, n_k^{(2)}, ...n_k^{(V)})$$

■ 最终得到主题和词向量的联合分布为:

$$p(\vec{w}, \vec{z}) \propto p(\vec{w}, \vec{z} | \vec{\alpha}, \vec{\eta}) = p(\vec{z} | \vec{\alpha}) p(\vec{w} | \vec{z}, \vec{\eta}) = \prod_{d=1}^{M} \frac{\triangle(\vec{n}_d + \vec{\alpha})}{\triangle(\vec{\alpha})} \prod_{k=1}^{K} \frac{\triangle(\vec{n}_k + \vec{\eta})}{\triangle(\vec{\eta})}$$





■ 基于联合分布,就可以使用求解Gibbs采样所需要的条件分布p(z_i=k|w,z_{-i});对于下标i,由于它对应的词wi是可以观察到的,因此有公式如下:

$$p(z_i = k | \vec{w}, \vec{z}_{\neg i}) \propto p(z_i = k, w_i = t | \vec{w}_{\neg i}, \vec{z}_{\neg i})$$

■ 对于zi=k, wi=t, 只涉及到第d篇文档和第k个主题两个Dirichlet共轭,即:

$$\vec{\alpha} \to \vec{\theta}_d \to \vec{z}_d$$

 $\vec{\eta} \to \vec{\beta}_k \to \vec{w}_{(k)}$

至于其他的Dirichlet共轭和这两个是互相独立的,也就是说从语料库中去掉zi和wi后,并不会改变共轭结构。所以对应的后验分布为:

$$p(\vec{\theta_d}|\vec{w}_{\neg i}, \vec{z}_{\neg i}) = Dirichlet(\vec{\theta_d}|\vec{n}_{d,\neg i} + \vec{\alpha}) \quad p(\vec{\theta_d}|\vec{w}_{\neg i}, \vec{z}_{\neg i}) = Dirichlet(\vec{\theta_d}|\vec{n}_{d,\neg i} + \vec{\alpha})$$

■ 开始计算Gibbs采样

的条件概率:

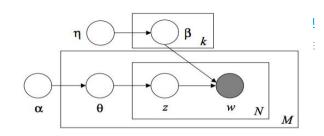
$$p(z_i = k | \vec{w}, \vec{z}_{\neg i}) \propto p(z_i = k, w_i = t | \vec{w}_{\neg i}, \vec{z}_{\neg i})$$
$$= \int p(z_i = k, w_i = t, \vec{\theta}_d, \vec{\beta}_k | \vec{w}_{\neg i}, \vec{z}_{\neg i}) d\vec{\theta}_d d\vec{\beta}_k$$

$$= \int p(z_i = k, \vec{\theta}_d | \vec{w}_{\neg i}, \vec{z}_{\neg i}) p(w_i = t, \vec{\beta}_k | \vec{w}_{\neg i}, \vec{z}_{\neg i}) d\vec{\theta}_d d\vec{\beta}_k$$

$$= \int p(z_i = k | \vec{\theta}_d) p(\vec{\theta}_d | \vec{w}_{\neg i}, \vec{z}_{\neg i}) p(w_i = t | \vec{\beta}_k) p(\vec{\beta}_k | \vec{w}_{\neg i}, \vec{z}_{\neg i}) d\vec{\theta}_d d\vec{\beta}_k$$
$$= \int p(z_i = k | \vec{\theta}_d) Dirichlet(\vec{\theta}_d | \vec{n}_{d,\neg i} + \vec{\alpha}) d\vec{\theta}_d$$

$$\begin{split} *\int p(w_i = t | \vec{\beta}_k) Dirichlet(\vec{\beta}_k | \vec{n}_{k,\neg i} + \vec{\eta}) d\vec{\beta}_k \\ &= \int \theta_{dk} Dirichlet(\vec{\theta}_d | \vec{n}_{d,\neg i} + \vec{\alpha}) d\vec{\theta}_d \int \beta_{kt} Dirichlet(\vec{\beta}_k | \vec{n}_{k,\neg i} + \vec{\eta}) d\vec{\beta}_k \end{split}$$





Dirichlet分布的期望公式如下,带入条件概率中,可以得到最终的条件概率公

式:

$$E_{Dirichlet(\theta_d)}(\theta_{dk}) = \frac{n_{d,\neg i}^k + \alpha_k}{\sum_{s=1}^K n_{d,\neg i}^s + \alpha_s} \qquad E_{Dirichlet(\beta_k)}(\beta_{kt}) = \frac{n_{k,\neg i}^t + \eta_t}{\sum_{f=1}^V n_{k,\neg i}^f + \eta_f}$$

$$E_{Dirichlet(\beta_k)}(\beta_{kt}) = \frac{n_{k,\neg i}^t + \eta_t}{\sum_{f=1}^V n_{k,\neg i}^f + \eta_f}$$

$$p(z_i = k | \vec{w}, \vec{z}_{\neg i}) = \frac{n_{d, \neg i}^k + \alpha_k}{\sum_{s=1}^K n_{d, \neg i}^s + \alpha_s} \frac{n_{k, \neg i}^t + \eta_t}{\sum_{f=1}^V n_{k, \neg i}^f + \eta_f}$$



LDA参数学习-Gibbs采样训练流程

- 1. 选择合适的主题数K,选择合适的超参数α、η
- 2. 对于语料库中每一篇文档的每一个词,随机的赋予一个主题编号z
- 3. 重新扫描语料库,对于每一个词,利用Gibbs采样公式更新它的topic的编号, 并更新语料库中该词的编号
- 4. 重复第三步中基于坐标轴轮询的Gibbs采样,直到Gibbs采样收敛。
- 5. 统计语料库中各个文档各个词的主题,得到文档主题分布;然后统计语料库中各个主题词的分布,得到主题与词的分布。



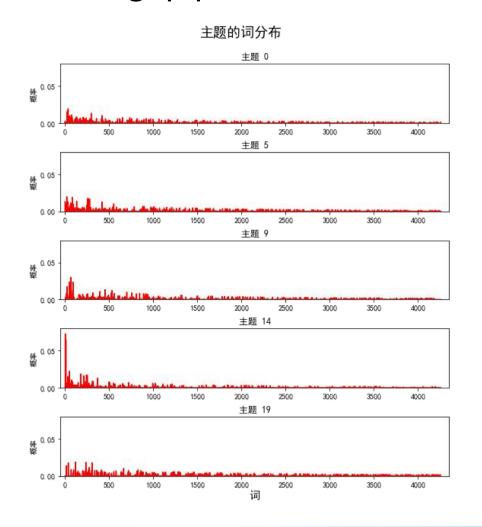
LDA参数学习-Gibbs采样预测流程

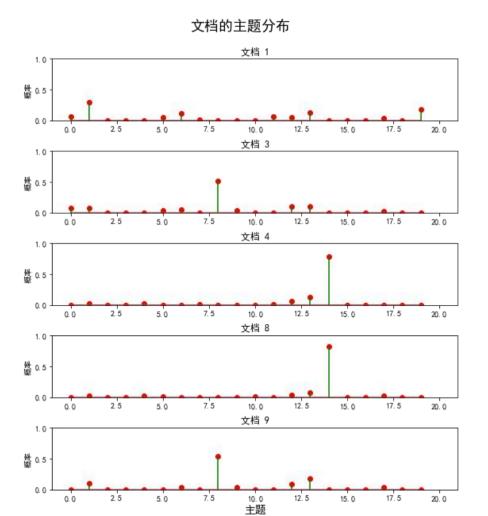
- 1. 对应当前文档的每一个词,随机的赋予一个主题编号z
- 2. 重新扫描当前文档,对于每一个词,利用Gibbs采样算法更新它的topic编号
- 3. 重复第二步的基于坐标轴轮换的Gibbs采样,直到Gibbs采样收敛
- 4. 统计文档中各个词的主题,得到该文档主题分布。



LDA主题模型案例

■ 安装lda, eg: pip install lda









上海育创网络科技有限公司