Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Сучасні методи аналізу сигналів і процесів

Індивідуальне домашнє завдання
Варіант №4

Студента групи МФ-21

Факультету математики та інформатики

Чистякова А.Д.

Викладач

Лазоренко О.В.

Харків

2019

Мета роботи: Закріпити та відновити знання, які були здобуті на цьому курсі, навчитися використовувати методи та техніки, розглянуті протягом лекцій, вирішуючи практичні та теоретичні задачі.

Актуальність: Вивчені функції та методи використовуються у таких сферах діяльності як: обробка сигналів, передача радіо сигналів, звукозапис, архівація даних (формати .mp3, .jpeg) тощо. Розуміння основ цих технік є невід’ємною частиною при розробці більш складних, нових систем, які потрібні для вирішення сучасних проблем.

Зміст

Завдання №1

Умови:

1) Довести властивість лінійності наступного інтегрального перетворення:

Адаптивне перетворення Фур'є.

Розв'язання:

1) Щоб довести лінійність, треба показати наступне:

- $F(a+b)=F(a)+F(b)$
- $F(c*a)=c*F(a)$

Адаптивне перетворення Фур'є:

$$F(A_v S(a,\tau))=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)w(\frac{t-\tau}{a}e^{-i\pi v(\frac{t-\tau}{a})})dt$$

Доведення:

- □ $F(A_v A(a,\tau)+A_v B(a,\tau))=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}(A(t)+B(t))w(\frac{t-\tau}{a}e^{-i\pi v(\frac{t-\tau}{a})})dt=$
$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(t)w(\frac{t-\tau}{a}e^{-i\pi v(\frac{t-\tau}{a})})dt+\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} B(t)w(\frac{t-\tau}{a}e^{-i\pi v(\frac{t-\tau}{a})})dt=$
$=F(A_v A(a,\tau))+F(A_v B(a,\tau))$ ■

- □ $F(c*A_v S(a,\tau))=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}(c*S(t))w(\frac{t-\tau}{a}e^{-i\pi v(\frac{t-\tau}{a})})dt=$
$=\frac{c}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)w(\frac{t-\tau}{a}e^{-i\pi v(\frac{t-\tau}{a})})dt=$
$=c*F(A_v S(a,\tau))$ ■

Завдання №2

Умови:

1) Отримати аналітичний вираз для спектральної функції одновимірного перетворення Фур’є $S(\omega)$ для наступного сигналу:

$$S(t)=A\cos(\omega_0 t-\varphi_0)$$

2) Побудувати частотні залежності $|S(\omega)|$ та $arg\,S(\omega)$.

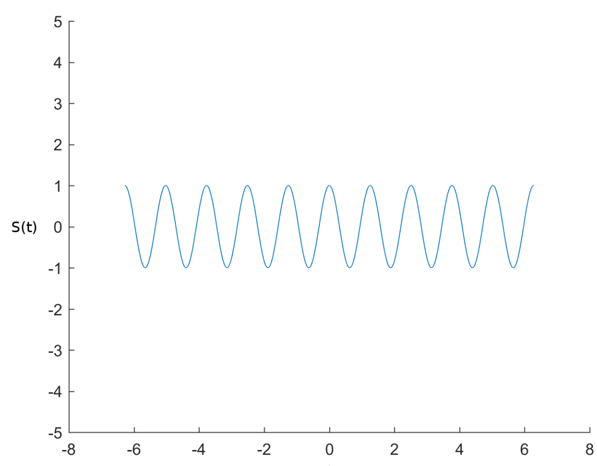
Розв’язання:

1) $$A\cos(\omega_0 t-\varphi_0)=A\frac{e^{i(\omega_0 t-\varphi_0)}+e^{-i(\omega_0 t-\varphi_0)}}{2}=\frac{A}{2}\left(\frac{e^{i\omega_0 t}}{e^{i\varphi_0}}+\frac{e^{-i\omega_0 t}}{e^{-i\varphi_0}}\right)$$

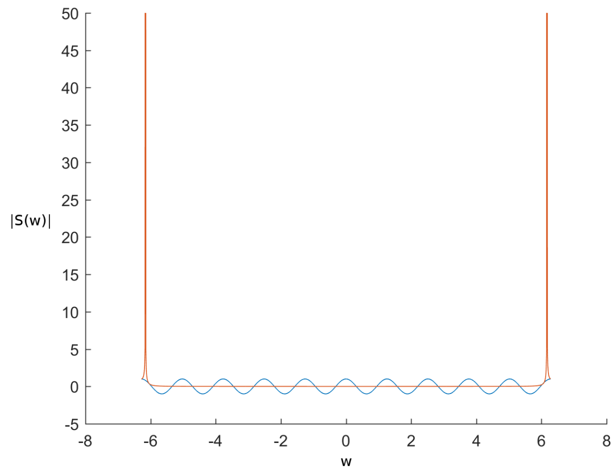
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{it(\omega_0-\omega)}dt=\delta(\omega-\omega_0)$, де $\delta(\omega-\omega_0)$ - дельта функція Дірака;
$\delta(-x)=\delta(x)$

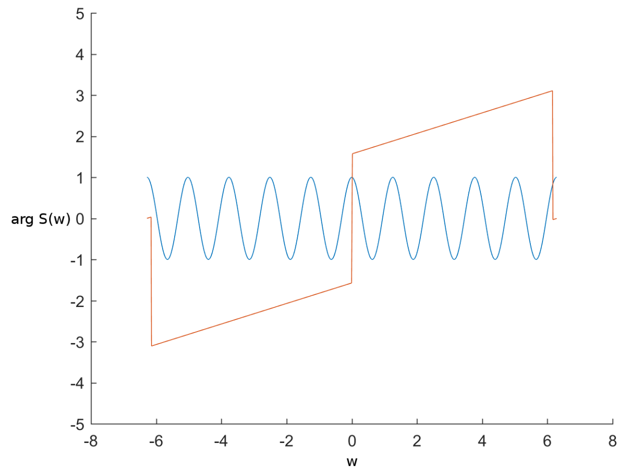
$$F=\frac{A}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{i\omega_0 t}}{e^{i\varphi_0}}+\frac{e^{-i\omega_0 t}}{e^{-i\varphi_0}}\right)e^{-i\omega t}dt=\frac{A}{2e^{i\varphi_0}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt+\frac{A}{2e^{-i\varphi_0}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt=$$
$$\frac{A\pi}{e^{i\varphi_0}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{it(\omega_0-\omega)}dt+\frac{A\pi}{e^{-i\varphi_0}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{it(-\omega_0-\omega)}dt=$$
$$=\frac{A\pi}{e^{i\varphi_0}}\delta(\omega-\omega_0)+\frac{A\pi}{e^{-i\varphi_0}}\delta(\omega+\omega_0)$$

2) Ось так виглядає сигнал на проміжку:



Ось так виглядають $|S(\omega)|$ (ліворуч) та $arg\, S(\omega)$ (праворуч):





Завдання №3

Умови:

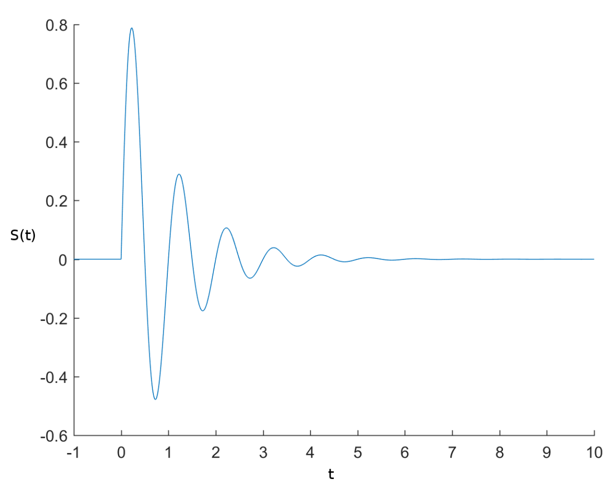
1) Змоделювати за допомоги комп'ютера наступний сигнал $S(t)$ з використанням $N=1024$ дискретних відліків цього сигналу:

$S(t)=A_0 e^{(-\alpha t)} \sin(2\pi f_0 t)\eta(t)$, де $\eta(t)$ - функція Хевісайда.

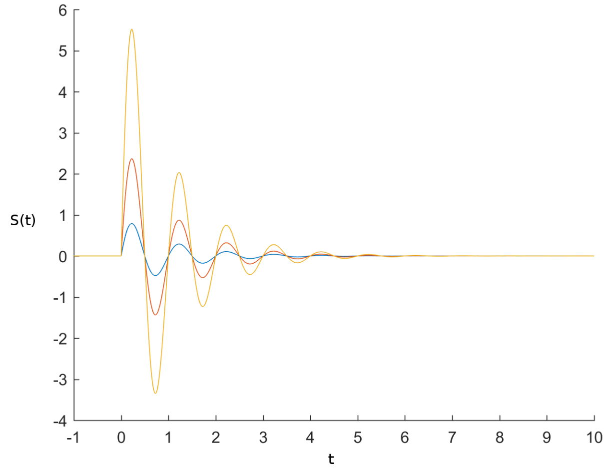
2) З'ясувати фізичний сенс параметрів сигналу. Побудувати графіки $S(t)$ за декількох різних значень цих параметрів, що пояснюють з'ясований сенс.

Розв'язання:

1) Ось так виглядає сигнал:

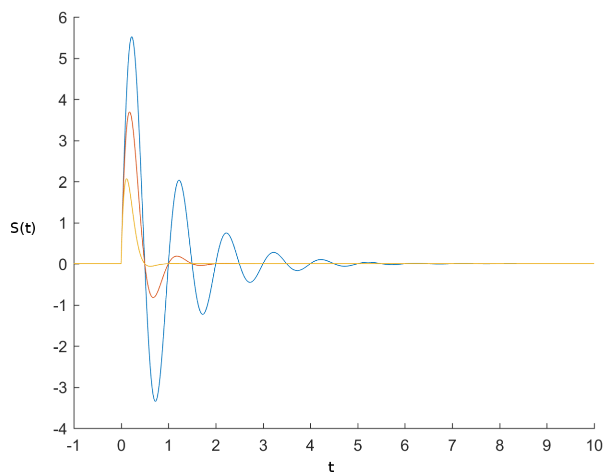


2) - Побудуємо цей сигнал змінюючи параметр A_0 :



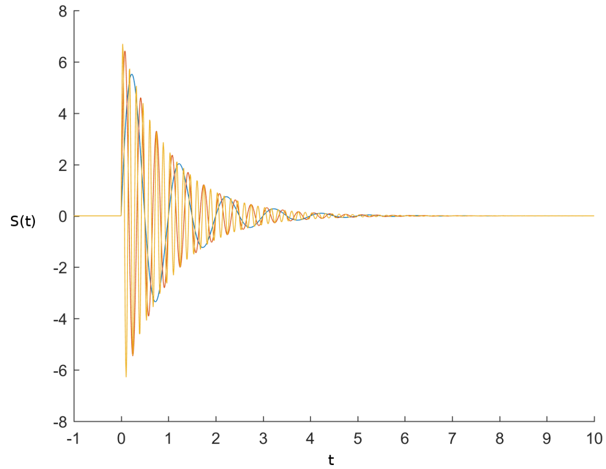
Побачимо, що даний параметр змінює **амплітуду** сигналу.

- Побудуємо цей сигнал змінюючи параметр α :



Побачимо, що даний параметр змінює потужність **згасання** сигналу.

- Побудуємо цей сигнал змінюючи параметр f_0 :



Побачимо, що даний параметр змінює **частоту** сигналу.

Завдання №4

Умови:

1) За допомоги числових методів отримати спектральну функцію $S(\omega)$ одновимірного перетворення Фур'є для сигналу, який було змодельовано у попередньому завданні для довільної комбінації параметрів. Побудувати частотні залежності $|S(\omega)|$ та $arg\,S(\omega)$.

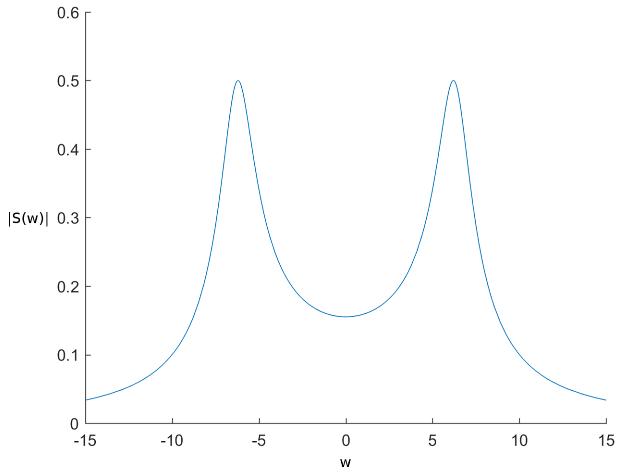
2) Отримати на практиці підтвердження існування явища Гібса. Для цього у спектральній функції сигналу з попереднього завдання необхідно поступово зануляти високочастотну частину, після чого проводити обернене одновимірне перетворення Фур'є і порівнювати відбудований сигнал із початковим. Побудувати серію графіків, що відображають динаміку процесу, що відбувається. Зробити висновки.

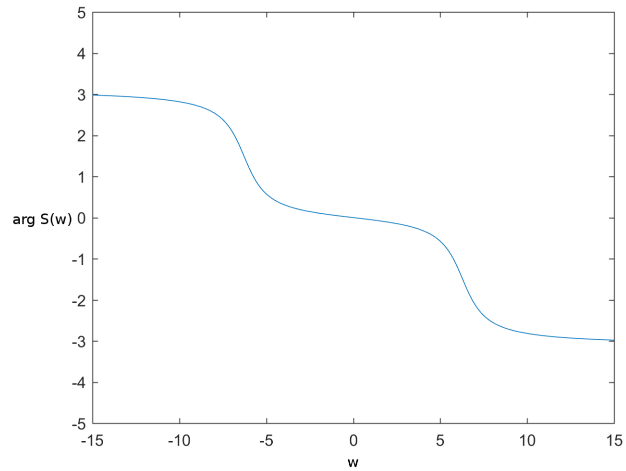
Розв'язання:

1) Після застосування одновимірного перетворення Фур'є, сигнал має такий вигляд:

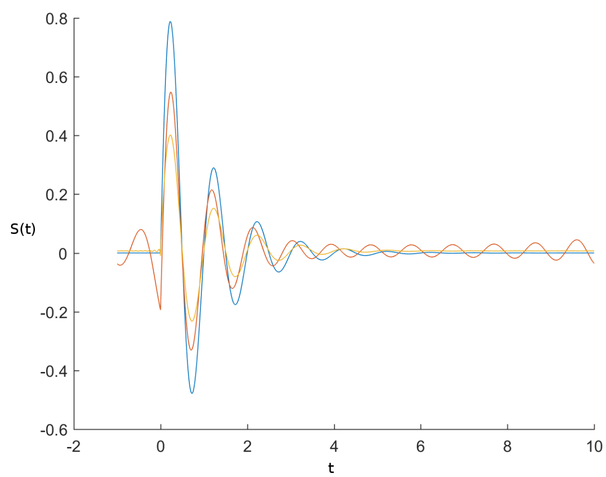
$$F=\frac{-i}{2(\omega i-\pi\cdot 2i+1)}+\frac{i}{2(\omega i+\pi\cdot 2i+1)}$$

Графіки $|S(\omega)|$ (ліворуч) та $arg\, S(\omega)$ (праворуч) виглядають наступним чином:





2) Явище Гібса можна побачити на графіку:



Висновки:

Чим більші частоти, які зануляються, тим більше функція схожа на себе після застосування оберненого перетворення Фур’є. Чим ці частоти менші, тим більше період осциляцій, які з’являються, що і демонструють явище Гібса.

Завдання №5

Умови:

1) Для сигналу, побудованого у завданні 3, числовими методами отримати спектральні функції $Sf(\omega,\tau)$ динамічного перетворення Фур'є та $Gf(\omega,\tau)$ перетворення Габора для одного обраного вікна, але для трьох різних значень його ширини. На часо-частотній площині побудувати залежності $|(Sf(\omega,\tau))|$, $arg\,Sf(\omega,\tau)$, $|(Gf(\omega,\tau))|$, $arg\,Gf(\omega,\tau)$. Порівняти їх між собою. Зробити висновки.

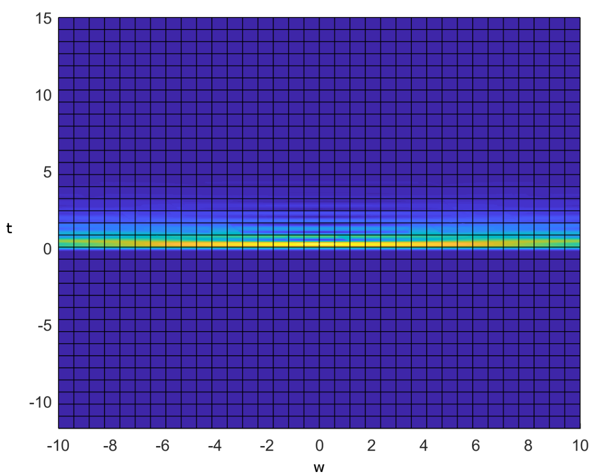
Розв'язання:

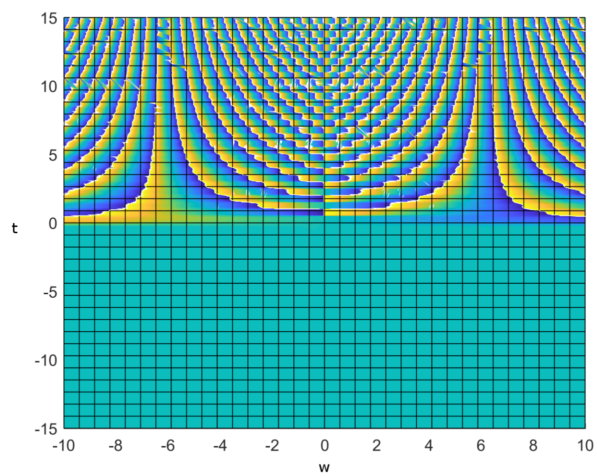
1) Перетворена функція за допомогою ДПФ виглядає наступним чином:

$$F=\int_{-\infty}^{+\infty} A_0 e^{(-\alpha t)} \sin(2\pi f_0 t)\, heaviside(t)\, W(t-\tau)\, e^{(-i\omega t)}\, dt$$

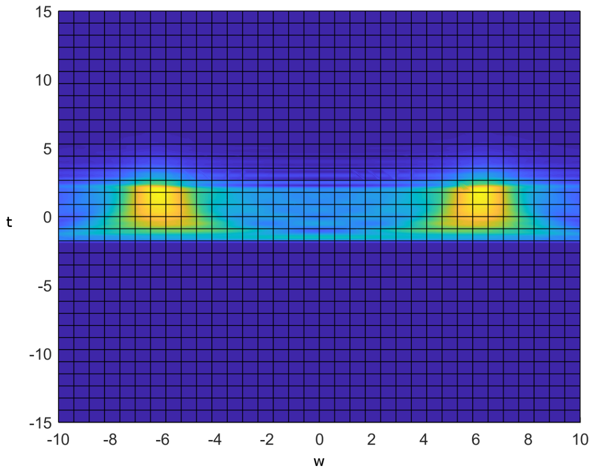
Далі демонструються графіки, де $|(Sf(\omega,\tau))|$ ліворуч та $arg\,Sf(\omega,\tau)$ праворуч (було обрано прямокутне вікно).

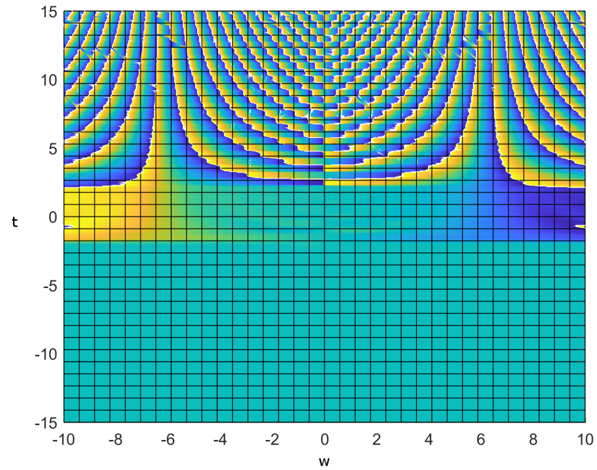
Ширина вікна дорівнює 0.5:



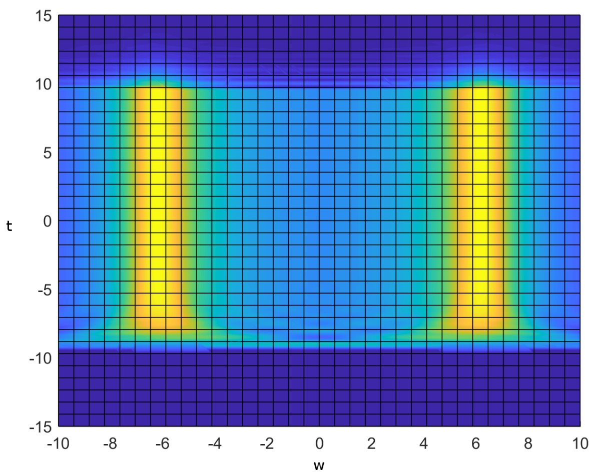


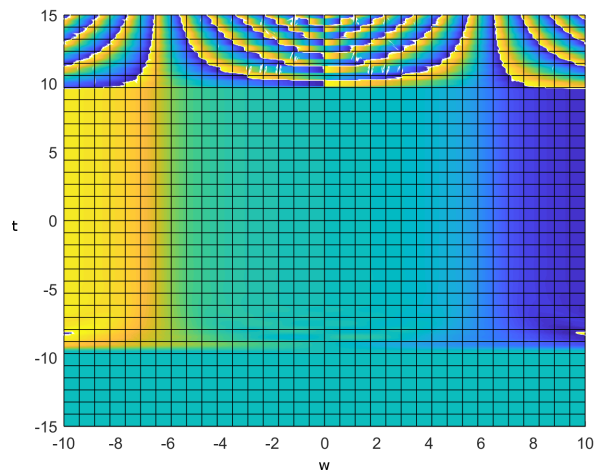
Ширина вікна дорівнює 5:





Ширина вікна дорівнює 20:



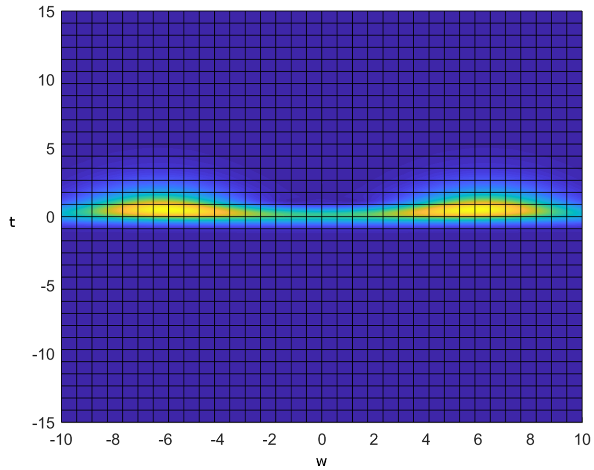


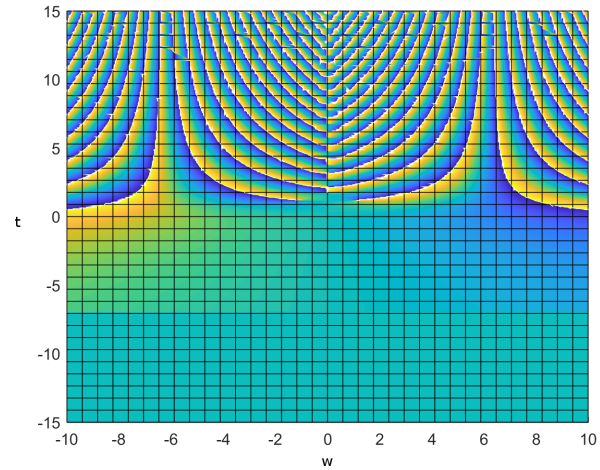
1) Перетворена функція за допомогою ПГ виглядає наступним чином:

$$F=\frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}}\int_{-\infty}^{+\infty} A_0 e^{(-\alpha t)}\sin(2\pi f_0 t)\,heaviside(t)\,e^{\frac{-(t-\tau)^2}{2\sigma^2}}\,e^{(-i\omega t)}dt$$

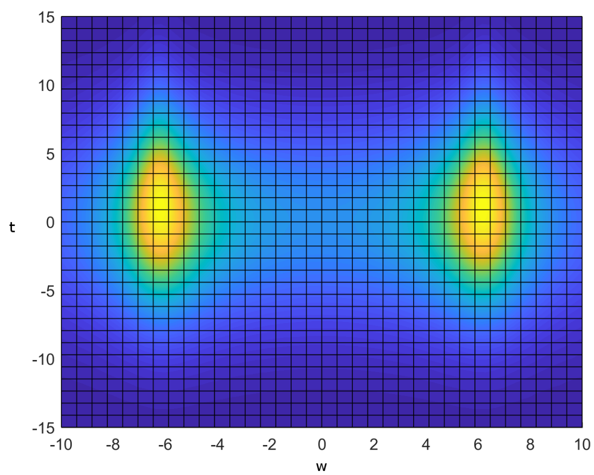
Далі демонструються графіки, де $|(Gf(\omega,\tau))|$ ліворуч та $arg\,Gf(\omega,\tau)$ праворуч.

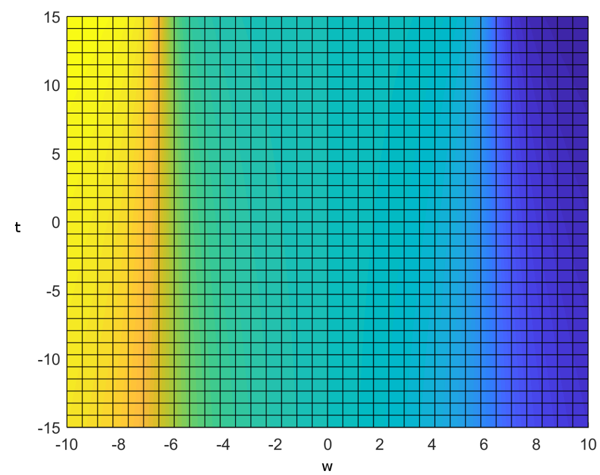
Ширина вікна дорівнює 0.5:



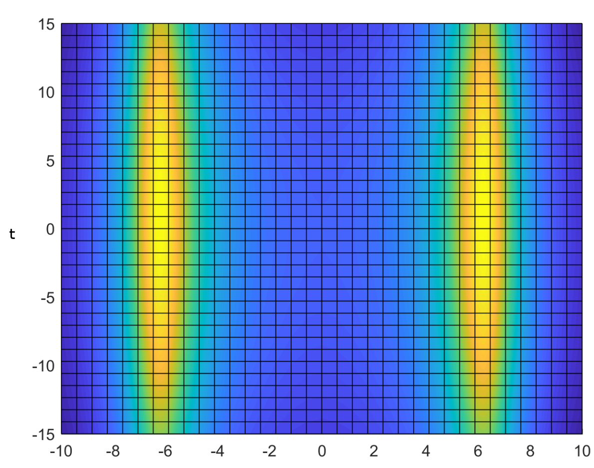


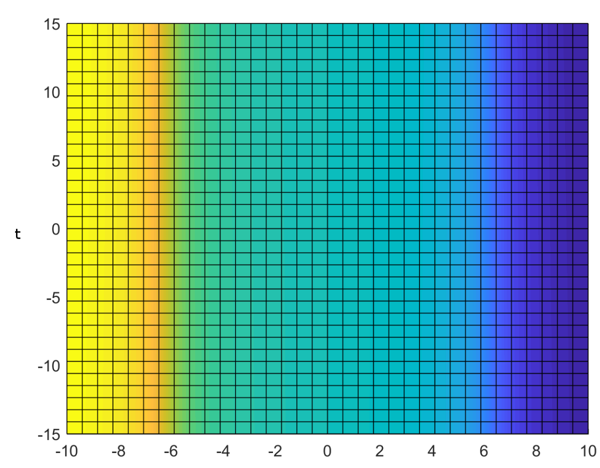
Ширина вікна дорівнює 5:





Ширина вікна дорівнює 20:





Висновки:

Можна побачити, що при маленькій ширині вікна функція має гарне розрізнення по частоті, але погане по часу. Якщо почати збільшувати ширину, розрізнення по часу покращиться, а по частоті - погіршиться. Також треба звернути увагу на те, що перетворення Габора набагато краще відображає сигнал, ніж динамічне перетворення Фур'є з обраним прямокутним вікном.

Завдання №6

Умови:

1) З використанням вейвлетів Хаара

$$\begin{cases} -1 & -1 \le t \textbf{ and } t < 0 \\ 1 & 0 \le t \textbf{ and } t \le 1 \\ 0 & 1 < |t| \end{cases}$$

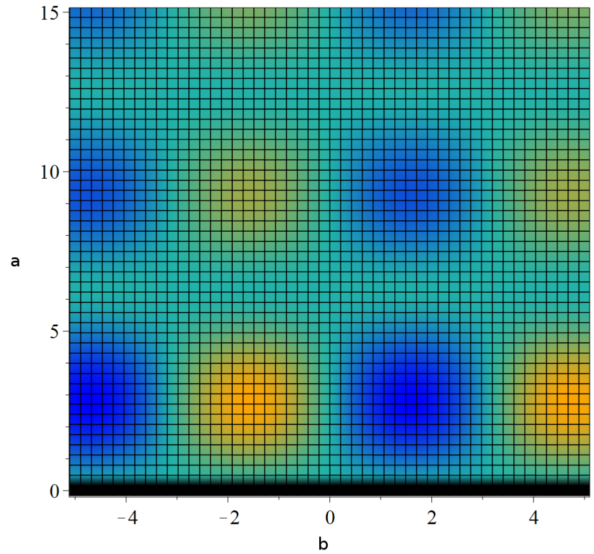
і Гауса $\psi(t) = t\,e^{\left(\frac{-t^2}{2}\right)}$ числовими методами отримати спектральні функції $Wf(a,b)$ безперервного вейвлет-перетворення сигналу із завдання 2. Порівняти отримані аналітичні та числові результати, побудувати відповідні графіки на часо-частотній площині.

Розв'язання:

1) Після застосування БВП з вейвлетом Хаара, функція має такий вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{I}\,(\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)-\sin(b))}{\sqrt{-a}} - \dfrac{\mathrm{I}\,(\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)+\sin(b))}{\sqrt{-a}} & a \le 0 \\ -\dfrac{\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)+\sin(b)}{\sqrt{a}} + \dfrac{\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)-\sin(b)}{\sqrt{a}} & 0 < a \end{cases}$$

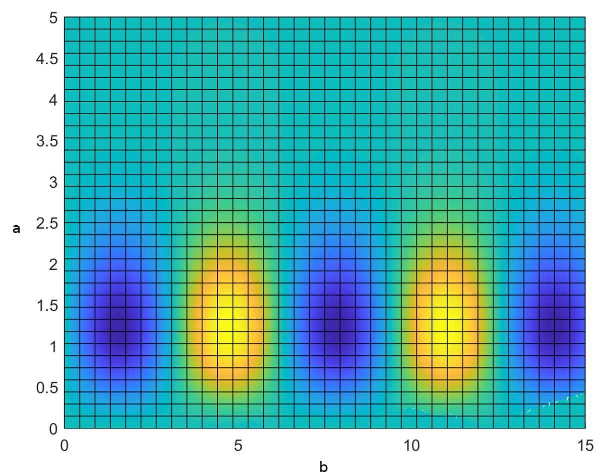
Далі наведено графік БВП з використанням вейвлета Хаара:



Після застосування БВП з вейвлетом Гауса, функція має такий вигляд:

$$F(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} A\cos(\omega_0 t-\varphi_0)\frac{t-b}{a}\mathrm{e}^{\left(\frac{-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}{2}\right)}dt$$

Далі наведено графік БВП з використанням вейвлета Гауса:



Завдання №7

Умови:

1) З використанням вейвлетів Хаара та Гауса отримати числовими методами отримати спектральну функцію $Wf(a,b)$ безперервного вейвлет-перетворення сигналу із завдання 3. Побудувати відповідні графіки на часо-частотній площині. Порівняти з результатами, що отримано у завданні 5. Зробити висновки.

Розв'язання:

1) Після застосування БВП з вейвлетом Хаара, функція має такий вигляд:

Нажаль ця функція виявилася надто великою для демонстрації.

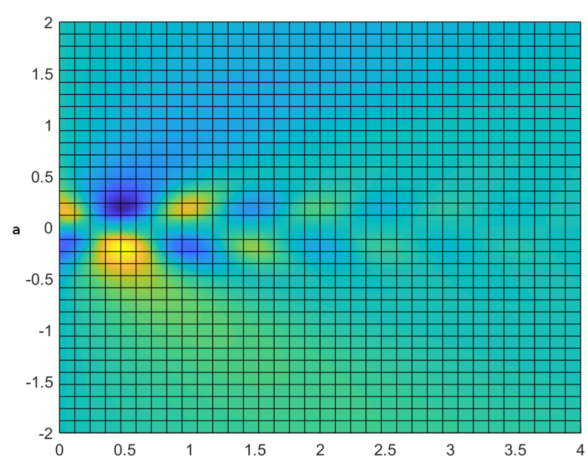
Далі наведено графік БВП з використанням вейвлета Хаара:

Користуючись Matlab та Maple,
ці програми були невзмозі побудувати графік.

Після застосування БВП з вейвлетом Гауса, функція має такий вигляд:

$$F(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} A_0 e^{(-\alpha t)}\sin(2\pi f_0 t)\,heviside(t)\,e^{\frac{-(t-\tau)^2}{2\sigma^2}}\frac{t-b}{a}e^{\left(\frac{-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}{2}\right)}dt$$

Далі наведено графік БВП з використанням вейвлета Гауса:



Використана література

1) О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор Сверхширокополосные сигналы и физические процессы. // 2. Методы анализа и применение.
Радиофизика и радиоастрономия, 2008, т. 13, №4, с. 270-322.