

Чистяков Артем

1. Моделирование двумерной случайной величины по совместной функции распределения

Исходные данные:

$$A1(-2, 6)$$

$$A2(5, 4)$$

$$A3(-4, -2)$$

Решение

Вычисление двумерной функции распределения

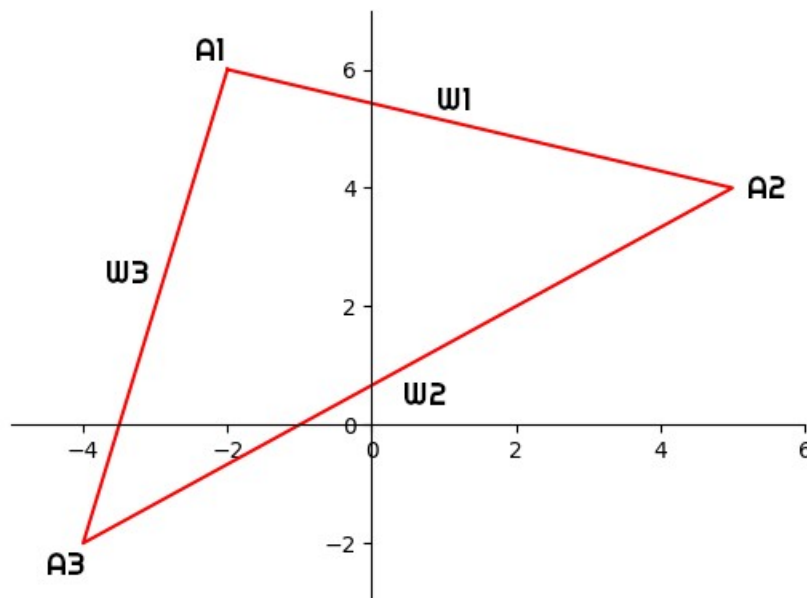
Вычислим уравнения сторон:

$$W1(x, y) = 2x + 7y - 38$$

$$W2(x, y) = 6x - 9y + 6$$

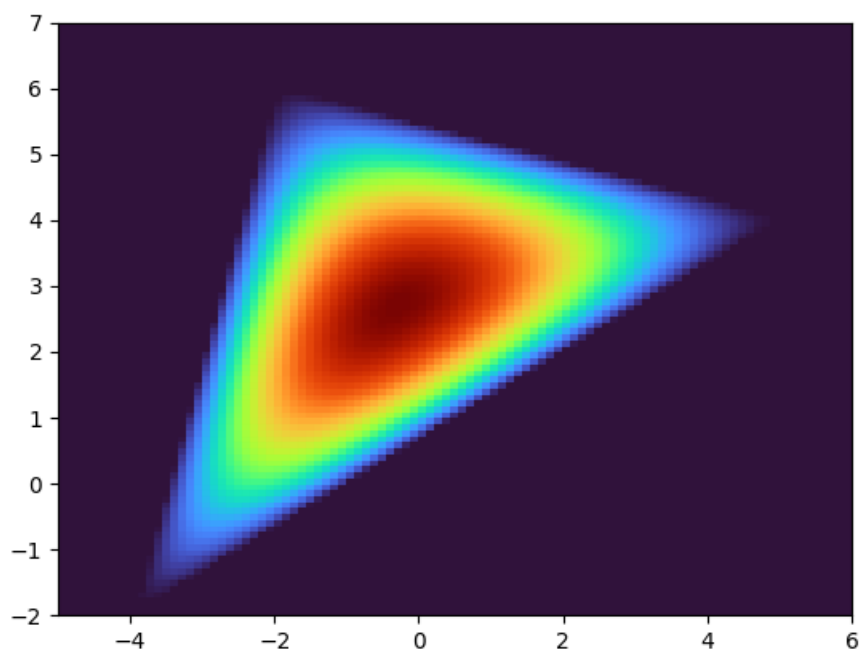
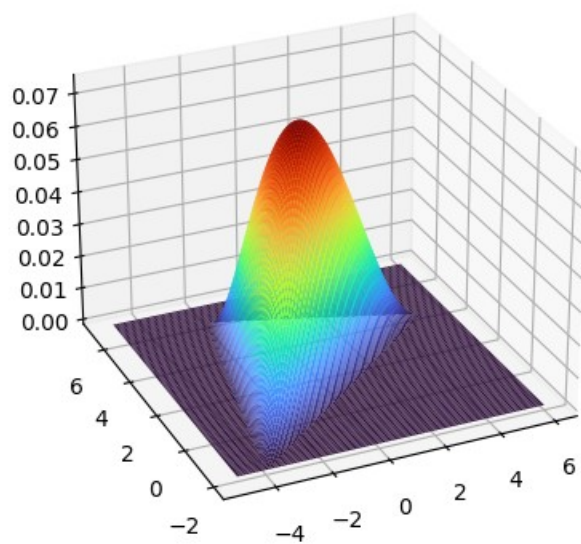
$$W3(x, y) = -8x + 2y - 28$$

Вычислим интеграл по области, ограниченной треугольником:



$$\int_{-4}^{-2} \int_{\frac{6}{9}x + \frac{6}{9}}^{\frac{4}{3}x + \frac{14}{3}} w1(x, y) w2(x, y) w3(x, y) dy dx + \int_{-2}^5 \int_{\frac{6}{9}x + \frac{6}{9}}^{\frac{-2}{7}x + \frac{38}{7}} w1(x, y) w2(x, y) w3(x, y) dy dx =$$
$$= \frac{-368000}{27} - \frac{2548000}{27} = 108000$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(2x+7y-38)(6x-9y+6)(-8x+2y-28)}{108000}, & \text{при } 2x+7y-38 < 0, 6x-9y+6 < 0, -8x+2y-28 < 0 \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$



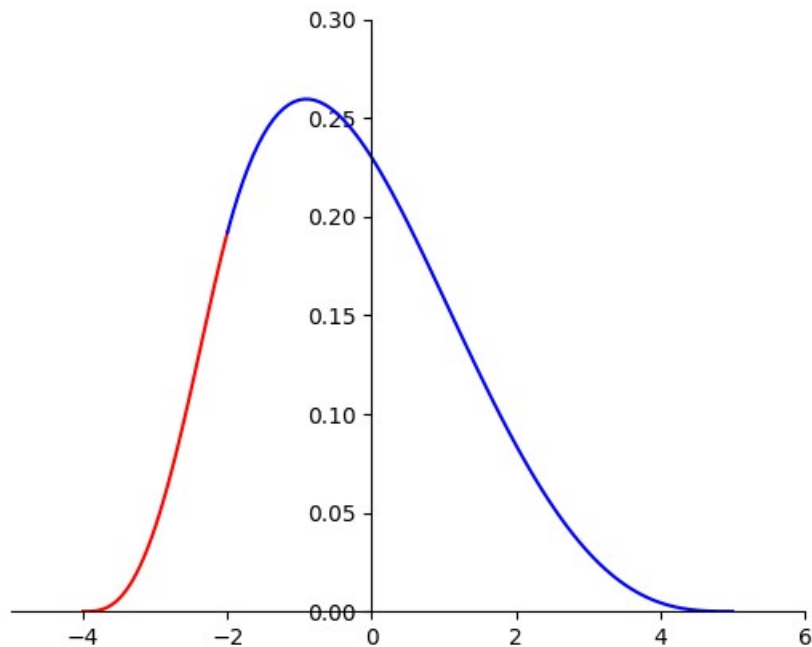
Вычисление маргинальной плотности

На отрезке $[-4, -2]$:

$$f(x) = \int_{\frac{6x}{9} + \frac{6}{9}}^{\frac{4x+14}{7}} \frac{(2x+7y-38)(6x-9y+6)(-8x+2y-28)}{108000} dy = \frac{5(x+4)^3(11x+8)}{2916}$$

На отрезке $[-2, 5]$:

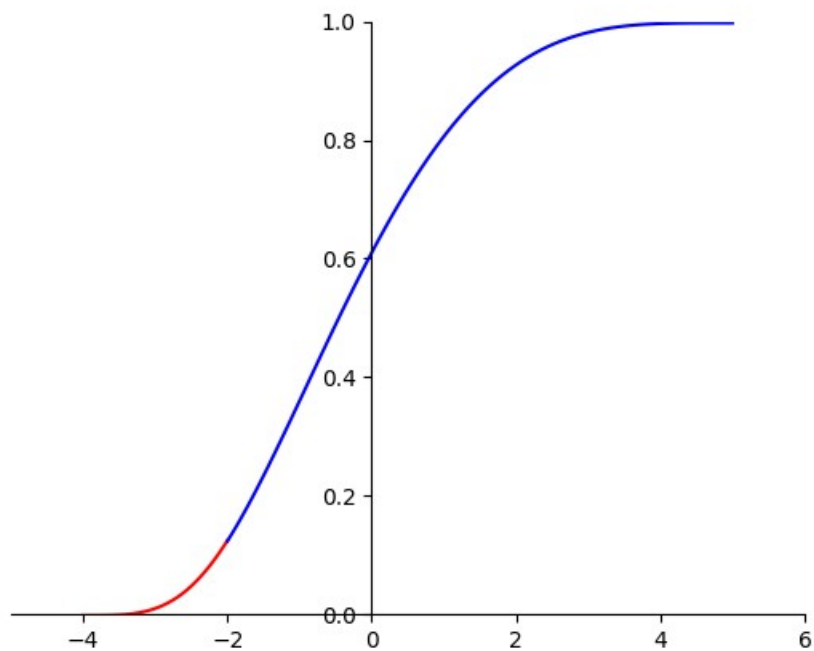
$$f(x) = \int_{\frac{6x}{9} + \frac{6}{9}}^{\frac{-2x}{7} + \frac{38}{7}} \frac{(2x+7y-38)(6x-9y+6)(-8x+2y-28)}{108000} dy = \frac{20(x-5)^3(8x+23)}{250047}$$



Нахождение обратной функции к функции распределения $f(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & [-\infty, -4] \\ \frac{5(\frac{11t^5}{5} + 35t^4 + 208t^3 + 544t^2 + 512t)}{2916}, & [-4, -2] \\ \frac{20(\frac{8t^5}{5} - \frac{97t^4}{4} + 85t^3 + \frac{725t^2}{2} - 2875t)}{250047}, & [-2, 5] \\ 1, & [5, +\infty] \end{cases}$$



Равномерная сетка на отрезке $[-4, 5]$:

$$x = -4 + 5 \frac{i}{N}, i = 0, 1.. N$$

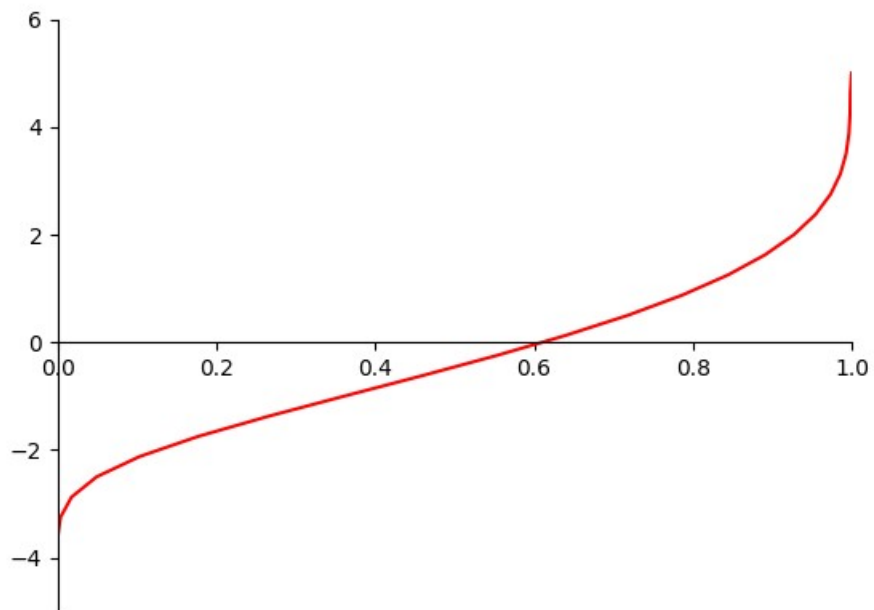
$$y = F(x)$$

Для x :

-4	-3.625	-3.25	-2.875	-2.5
-2.125	-1.75	-1.375	-1	-0.625
-0.25	0.125	0.5	0.875	1.25
1.625	2	2.375	2.75	3.125
3.5	3.875	4.25	4.625	5

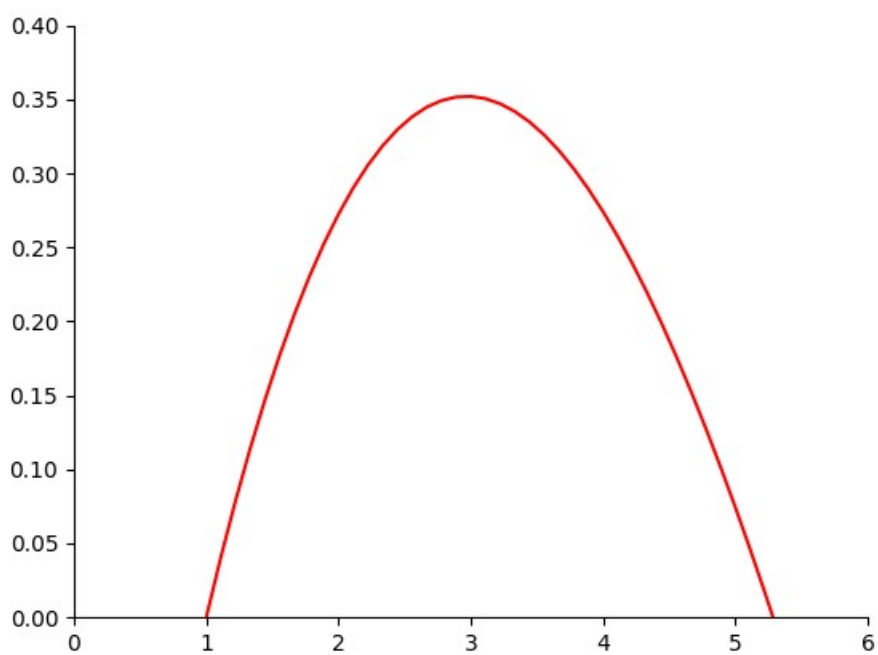
Соответствующие y (округлено):

0	0.0005	0.00319	0.01712	0.04868
0.10252	0.17650	0.26522	0.36091	0.45791
0.55181	0.63927	0.71799	0.78652	0.84420
0.89101	0.92748	0.95456	0.97352	0.98582
0.99302	0.99663	0.99805	0.99840	1



$$fn(y/\xi=x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

- Реализация = 0.71
- $x = F^{-1}(0.71) = 0.5$
- $f(x) = f(0.5) = -0.197$
- $fn(y/\xi=0.5) = \frac{(-37+7y)(9-9y)(-32+2y)}{-21276}$, (при $1 < x < 5.286$)

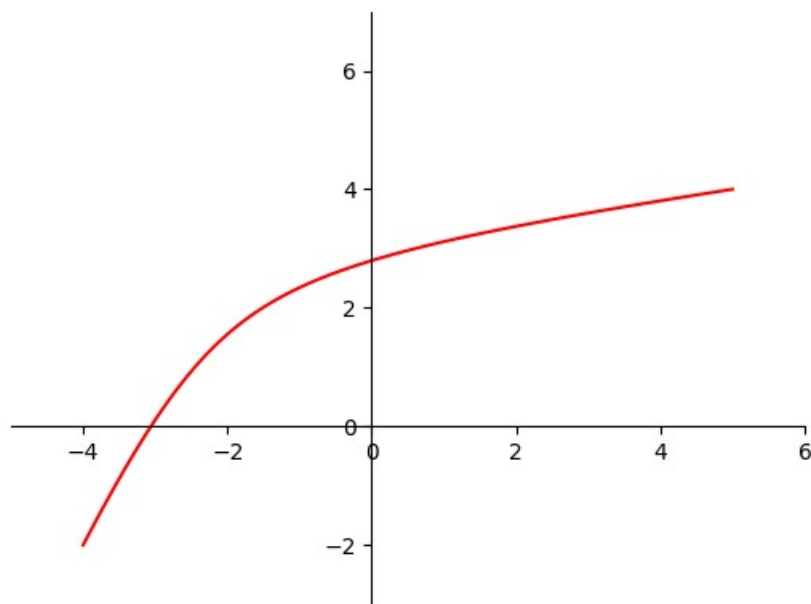


Найдем максимум $\frac{f(x, y)}{f(x)}$. Зафиксируем x .

$$f'_y(x, y) = \frac{-7x^2}{4500} + \frac{23xy}{2250} - \frac{29x}{750} - \frac{7y^2}{2000} + \frac{211y}{4500} - \frac{467}{4500} = 0$$

Решим относительно y и выберем максимум.

$$y = \frac{1}{63}(92x - 10\sqrt{67x^2 + 338x + 604} + 422)$$



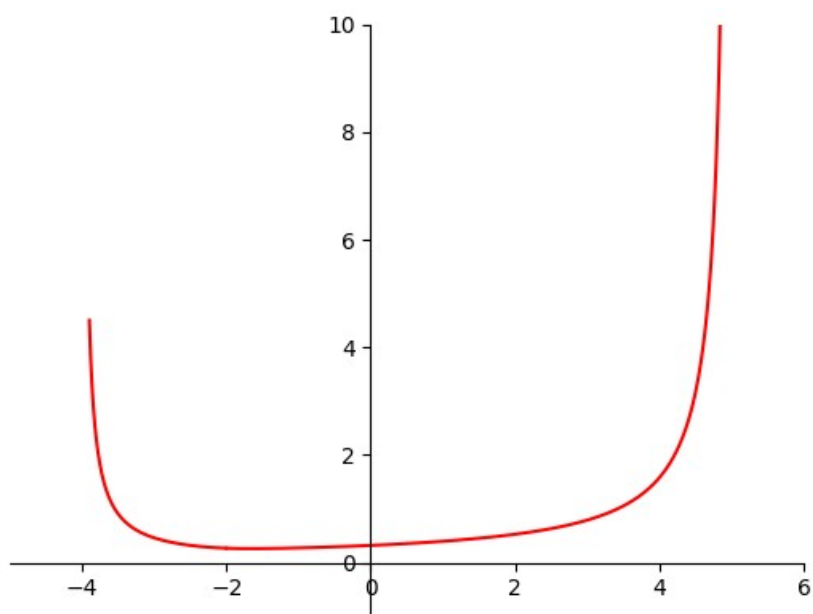
На отрезке $[-4; -2]$:

$$\frac{2(-16x - \sqrt{67x^2 + 338x + 604} - 46)(-5x + \sqrt{67x^2 + 338x + 604} - 38)(11x - \sqrt{67x^2 + 338x + 604} + 8)}{735(x+4)^3(11x+8)}$$

На отрезке $[-2; 5]$:

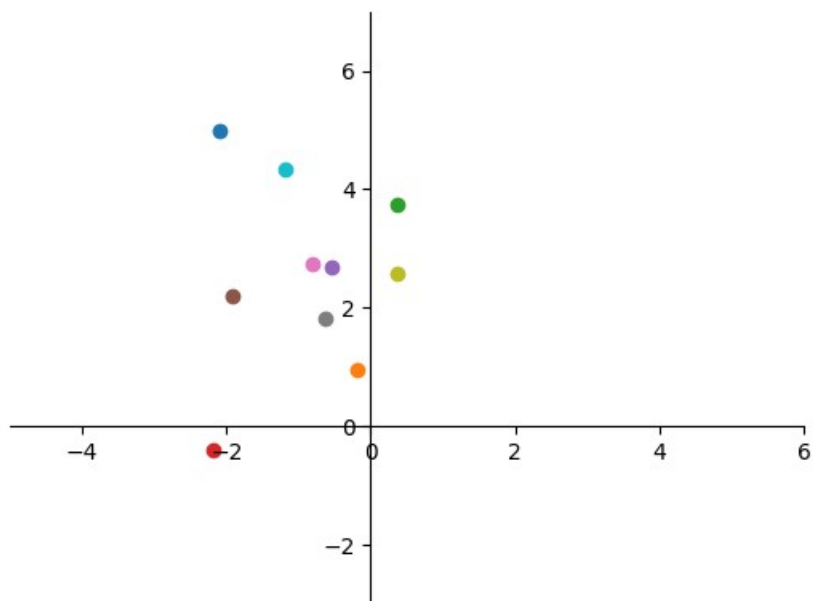
$$\frac{7(-16x - \sqrt{67x^2 + 338x + 604} - 46)(-5x + \sqrt{67x^2 + 338x + 604} - 38)(11x - \sqrt{67x^2 + 338x + 604} + 8)}{120(x-5)^3(8x+23)}$$

График с отступами в 0.1 от крайних точек $[-4, 5]$

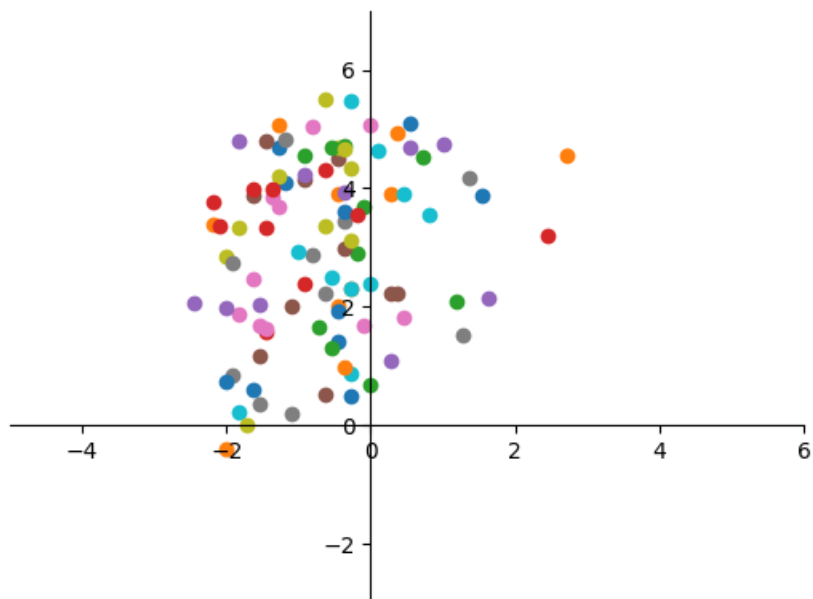


Визуализация:

Генерируем выборку из 10 точек:



Генерируем выборку из 100 точек:



Генерируем выборку из 1000 точек:

