KANDIDATNUMMER:

EKSAMEN

EMNENAVN: MATEMATIKK FOR SPILLPROGR.

EMNENUMMER: REA2061

EKSAMENSDATO: 6.januar 2012

KLASSE: 10HBSP

TID: 09.00 – 14.00

EMNEANSVARLIG: Nils Fjeldsø

ANTALL SIDER UTLEVERT: 5

TILLATTE HJELPEMIDLER: Alle trykte og skrevne
Kalkulator

INNFØRING MED PENN.

Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse og legges i hvert sitt omslag.

Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholder kandidaten.

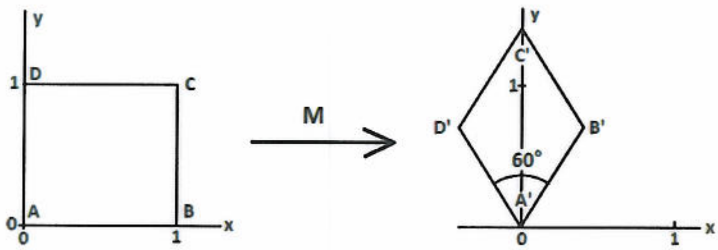
Husk kandidatnummer på alle ark.

For alle oppgaver gjelder at regninger og begrunnelser må tas med.

1) I denne oppgaven skal du beholde rottegn og brøk.

På tegningen under ser du til venstre et kvadrat **ABCD** med sidekant 1. Til høyre er det samme kvadratet rotert og skalert til en rombe **A′B′C′D′**. (En rombe er en firkant der alle sider er like lange.) Avstanden **A′C′** er den samme som avstanden **AC**.

Både kvadrat og rombe befinner seg i samme koordinatsystem, men er tegnet hver for seg for oversiktens skyld.

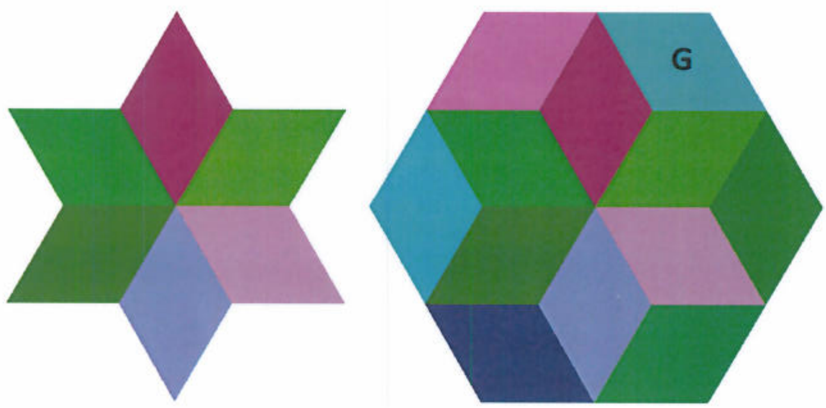


(a) Begrunn at rotasjonsmatrisen **R** og skaleringsmatrisen **S** som utfører transformasjonene på tegningen er gitt ved

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Beregn den totale matrisen **M** for transformasjonen.
Anvend så matrisen **M** på punktet **B** og finn koordinatene til **B′**.

Det transformerte kvadratet kan tegnes 6 ganger rotert rundt origo slik at det dannes en sekskantet stjerne, se tegningen under til venstre. Utenfor denne stjernen kan det nå plasseres romber som akkurat fyller ut stjernen til en regulær sekskant.



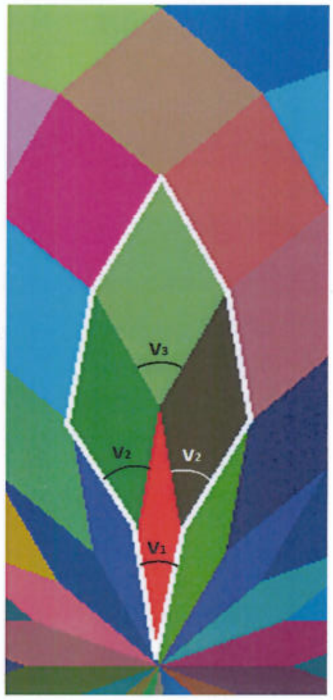
(c) Skriv ned et sett transformasjoner, som, anvendt på det opprinnelige kvadratet **ABCD**, gir romben markert med **G** på tegningen.

I eksemplet over er sirkelen delt inn i 6 segmenter, hvert på 60°. Generelt kan sirkelen deles inn i 3 segmenter à 120°, 4 à 90°, 5 à 72°, etc.

Under til venstre ser du en tegning der sirkelen er delt inn i 18 segmenter à 20°. Til høyre er et utsnitt tatt ut og førstørret, og 4 nabo-romber er framhevet ved at de er streket opp med hvitt.

For hvert nytt "lag" av romber utover fra sentrum angir vi vinklene som $\mathbf{v_n}$. På bildet under er det 8 lag, med vinkler $\mathbf{v_1}$ til $\mathbf{v_8}$.

På utsnittet er det markert de 3 vinklene $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ og $\mathbf{v_3}$.



(d) Bruk et geometrisk argument, altså egenskaper ved romber og vinklene deres, til å vise at

$$v_3 = 2v_2 - v_1 \,.$$

Begrunn at i alminnelighet gjelder rekursjonsformelen

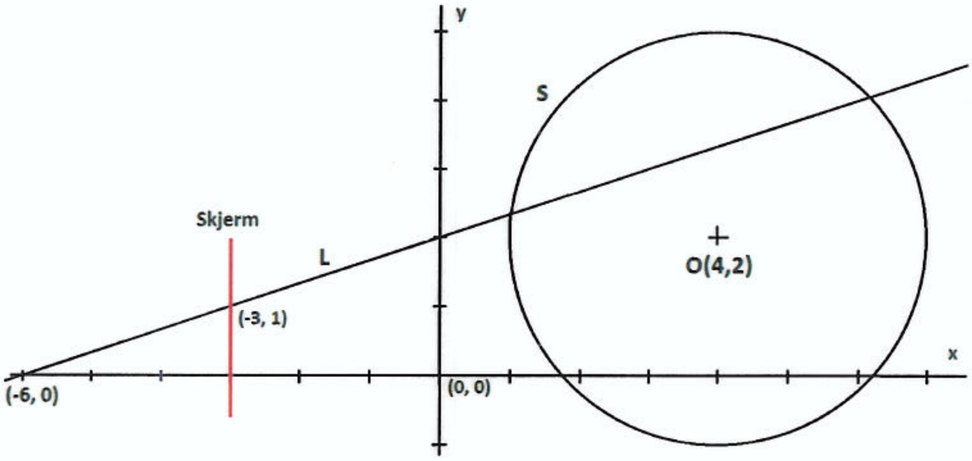
$$v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n \,.$$

(e) Det er gitt at rekursjonsformelen over har startverdier v_1 og $v_2 = 2v_1$ (for eksemplet blir startverdiene $v_1 = 20°$ og $v_2 = 40°$). Vis at løsningen blir

$$v_n = nv_1 \,.$$

2) Tegningen under viser

- en rett linje **L** som går gjennom punktene $(-6, 0)$ og $(-3, 1)$
- en sirkel **S** med radius $\mathbf{R} = 3$ og senter i $\mathbf{O} = (4, 2)$



(a) Skriv ned en parameterframstilling for linjen **L**. Forklar tankegangen.

(b) Skriv ned likningen for sirkelen **S**.

Bruk parameterframstillingen for **L** og likningen for **S** til å finne de to skjæringene mellom **L** og **S**.

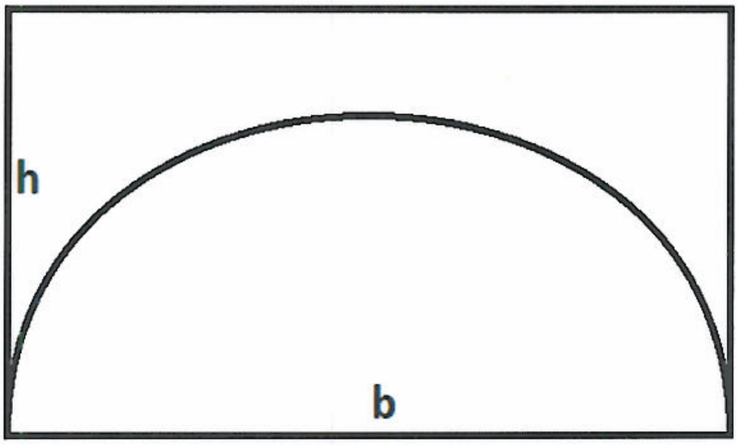
(c) Vi kan tenke oss dette som et oppsett til raytracing i **2D**. Skjermen befinner seg i $x = -3$, og strekker seg fra -2 til 2 i y-retningen.

Kameraet befinner seg på x-aksen for $x = -6$.

Hvor på skjermen (for hvilken y-verdi) kommer det nærmeste punktet på sirkelen **S**, sett fra kamera, til å bli tegnet?

Tegn situasjonen.

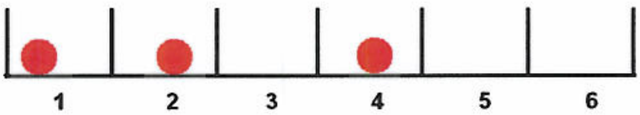
3) En kubisk Bezier-spline skal brukes til å modellere et buet tak. Et tverrsnitt av taket er vist på tegningen under. Kontrollpunktene er i hvert av hjørnene for rektanglet som omslutter splinefunksjonen. Dette rektanglet har bredde **b** og høyde **h**.



(a) Beregn splinefunksjonen uttrykt ved bredden **b** og høyden **h** i rektanglet. Multipliser ut og forenkle uttrykkene så mye som mulig.

(b) Finn største takhøyde uttrykt ved **h**. Forklar og vis regning.

4 Det er satt opp 6 "båser" som det slippes kuler i tilfeldig. En kule har til å begynne med samme sannsynlighet for å falle en hvilken som helst bås.



(a) På hvor mange måter kan tre kuler falle ned i båsene ?

(b) Hva er sannsynligheten for at tre kuler faller i hver sin bås ?

I de neste punktene er det sannsynlighet p_1 for at en kule faller i bås nummer 1, $p_2 = \frac{1}{2}p_1$ for at en kule faller i bås nummer 2, $p_3 = \frac{1}{2}p_2$ for at en kule faller i bås nummer 3 og så videre. Det er halvparten så sannsynlig for en kule å falle i en gitt bås som det er å falle i nabobåsen med lavere nummer.

(c) Vis at $p_1 = \frac{32}{63}$.

(d) Beregn sannsynligheten for at tre kuler faller som vist på tegningen.