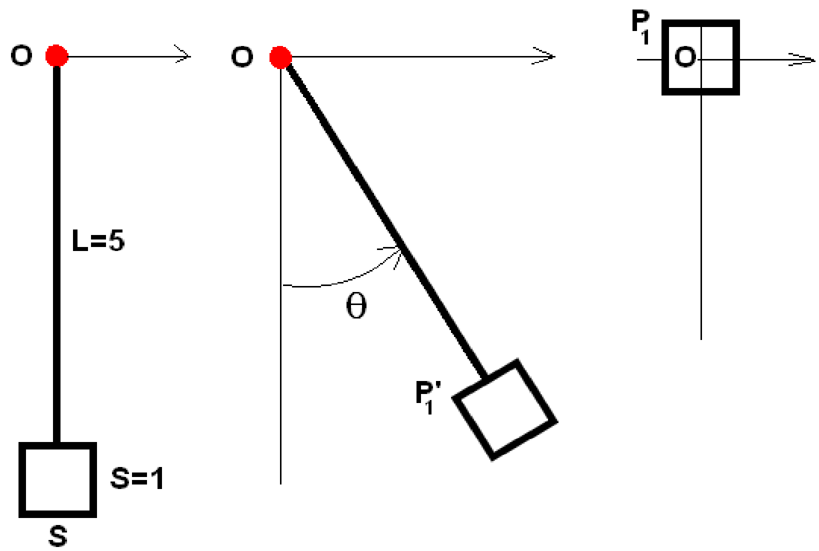
I alle oppgavene gjelder det at regninger skal vises, og tankegang forklares. Presentasjon av et resultat uten regning og forklaring vil bli tillagt liten vekt.

1)

I et spill skal det implementeres en pendel som består av en lett stang og en boks. Stangen har lengden $L = 5$, og boksen sidekant $S = 1$. Pendelen er festet i et punkt **O** (origo). En skisse av situasjonen er vist under. Pendelen skal svinge fritt slik at boksen hele tiden beholder orienteringen relativt til stangen den er festet i. Til venstre på tegningen er pendelen vist hengende rett ned. Ved siden av er pendelen vist svingt ut en vinkel θ til høyre. Vinkelen θ er positiv slik den er tegnet.

Helt til høyre på tegningen vises boksen tegnet i sitt eget koordinatsystem.



a) Skriv ned matrisen **T** som translaterer boksen fra sin plassering med **O** i midten, til enden av stangen slik det er vist på tegningen til venstre. Bruk symbolene **L** og **S** for lengden til stangen og sidekant til boks, henholdsvis.

   Skriv også ned rotasjonsmatrisen **R** for rotasjon en vinkel θ.

b) Finn den samlete transformasjonsmatrisen **M** som plasserer boksen for enden av stangen når utslaget er θ slik det er vist for figuren i midten på tegningen over.

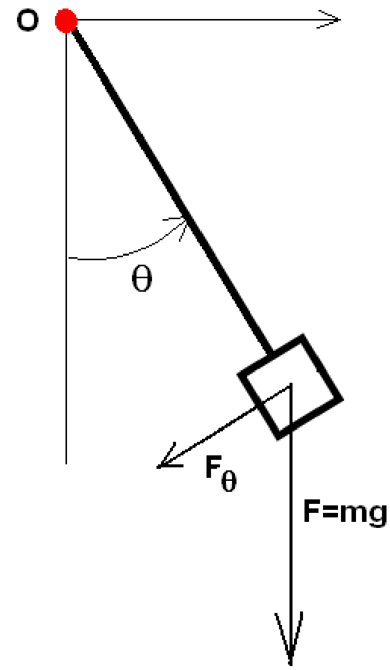
c) I denne oppgaven skal du benytte oppgitte verdier for sidekanten **S** og lengden **L**, og at vinkelen er $\theta = \pi/6$ (omtrent som på tegningen).

   Kall øvre venstre hjørne av boksen i sitt eget koordinatsystem for $\mathbf{P_1}$. Angi $\mathbf{P_1}$ med homogene koordinater.

   Beregn koordinatene til det transformerte punktet $\mathbf{P'_1}$ slik det blir på tegningen i midten. **Benytt brøk og rottegn så langt du kan.**

d) Du har beregnet transformasjonsmatrisen **M** på en bestemt måte. Angi en alternativ måte, der du bytter om rekkefølgen av operasjonene translasjon og rotasjon. Skriv ned disse alternative matrisene for rotasjon og translasjon.

Det er gravitasjonen som holder pendelen i gang : pendelen trekkes ut et en vinkel θ, slippes og svinger fritt, uten friksjon eller andre energitap.
Ved siden av er situasjonen tegnet idet pendelen slippes. Gravitasjonskraften virker nedover og er angitt ved $F = mg$, der vi setter massen $m = 1$, og gravitasjonen $g = -1$ (minus-tegn for retning ned). Den delen av kraften som virker på pendelen og får den til å bevege seg står normalt på pendelstangen og kalles F_θ.



e) Begrunn at $F_\theta = -\sin\theta$.

Vinkelen θ er vår posisjonsvariabel i stedet for x. Denne vinkelen varierer med tiden t slik at $\theta = \theta(t)$. I stedet for fart v har vi nå vinkelfart ω (omega) der $\omega = \theta'$ (vinkelfarten er den deriverte av vinkelen). Vi har altså at

$$x \to \theta, \qquad v \to \omega\,.$$

f) Forklar at differensiallikningene som styrer pendelen blir

$$\theta'' = -\sin\theta \qquad \text{eller} \qquad \omega' = -\sin\theta \text{ og } \theta' = \omega\,.$$

g) La tidsskrittet være h og skriv ned de diskretiserte likningene (Symplektisk Euler) for systemet.

Hvilke startverdier (verdier ved $t = 0$) er det naturlig å angi for θ og ω ut fra beskrivelsen over ?

h) La tidsskrittet være $h = 0,1$, og beregn to iterasjoner med likningene du fant i forrige punkt.

i) Finn de to første leddene til Taylor-utviklingen av $\sin\theta$ omkring 0.

j) Begrunn at for små vinkler θ (pendelen svinger bare såvidt) kan vi forenkle differensiallikningen og få at

$$\theta'' = -\theta\,.$$

Ser du en løsning for denne likningen ?

2) Kortspillet **"MiniPoker"** har en kortstokk bestående av 12 kort. Disse kortene har tre **farger** : **R**, **G** og **B**. I hver farge er det 4 **verdier** : **A**, **2**, **3** og **4**. Symbolet **A** angir kortstokkens ess, som kan ha verdiene 1 eller 5 etter behov. De andre kortenes verdi er pålydende.

   Et spill kan bare ha 2 eller 3 spillere. Det deles ut 3 kort til hver av spillerne. (Senere er det anledning for hver spiller å bytte et av kortene, men det inngår ikke i denne oppgaven.)

   a) Hvor mange forskjellige "hender" (tre kort) er det mulig å dele ut med en slik kortstokk ?

   b) På hvor mange måter kan en spiller få **tress** (tre kort med samme verdi) ? Hva blir sannsynligheten for å få **tress** ?

   c) Finn sannsynligheten for å få **straight** (tre kort der verdiene er i rekkefølge).

3) Gitt de tre punktene $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (0, 0)$ og $P_2 = (1, 2)$.

   a) Beregn en kvadratisk Bezier-spline med disse tre punktene som kontrollpunkter.

   b) Beregn minst 5 forskjellige punkter for denne spline-funksjonen, og tegn grafen.

4) Gitt et punkt $P = (16, -30)$, og en vinkel v ved at $\cos v = \frac{8}{17}$.

   a) Vis at $\sin v = \frac{15}{17}$. Skriv ned rotasjonsmatrisen for rotasjon en vinkel v. Bruk denne til å rotere P til punktet P'.

   b) Utfør den samme rotasjonen med komplekse tall.

   c) Skriv ned de kvaternionene du trenger for å utføre rotasjonen med kvaternioner. Du får opplyst at $\cos \frac{v}{2} = \frac{5}{\sqrt{34}}$, og at $\sin \frac{v}{2} = \frac{3}{\sqrt{34}}$.