HØGSKOLEN I GJØVIK

KANDIDATNUMMER:

EKSAMEN

EMNENAVN: Matematikk for spillprogrammering

EMNENUMMER: REA2061

EKSAMENSDATO: 7. juni

KLASSE:

TID: 09-14

EMNEANSVARLIG: Nils Fjeldsø

ANTALL SIDER UTLEVERT: 4 (med forside)

TILLATTE HJELPEMIDLER: Alle trykte og skrevne. Programmerbar kalkulator.

INNFØRING MED PENN.

Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse og legges i hvert sitt omslag.

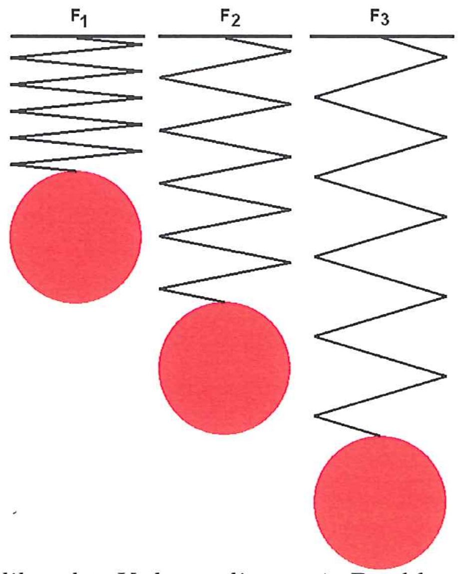
Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholder kandidaten.

Husk kandidatnummer på alle ark.

I alle oppgavene gjelder det at regninger skal vises, og tankegang forklares. Presentasjon av et resultat uten regning og forklaring vil bli tillagt liten vekt.

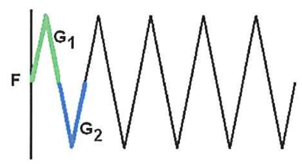
1.

Ei kule henger i ei fjær i et koordinatsystem med x-aksen mot høyre og y-aksen opp. Fjæra er festet i origo, og kula kan bevege seg opp og ned langs y-aksen omkring et likevektspunkt. Tre situasjoner er vist ved siden av. Den første ($\mathbf{F_1}$) viser fjæra presset sammen til halv lengde, den andre ($\mathbf{F_2}$) viser likevektsituasjonen uten verken sammenpressing eller strekking, og den tredje ($\mathbf{F_3}$) viser fjæra utstrukket en halv lengde.



Fjæra har lengde 4 når systemet er i likevekt. Kulas radius er 1. Bredden til fjæra er 2 (samme som diameter til kule).

På bildet under er likevektsstillingen til fjæra tegnet horisontalt, og et "grunnelement" $\mathbf{G_1}$ er tegnet i grønt.



I regningene under skal du hele tiden bruke bare hele tall og brøk.

(a) Kall den blå delen av fjæra for $\mathbf{G_2}$. Skriv ned matrisene til de transformasjonene du trenger for å tegne $\mathbf{G_2}$ gitt $\mathbf{G_1}$. Gi transformasjonene navn (som for eksempel $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$). Finn så $\mathbf{G_2}$ ved å anvende disse symbolene (navnene) på $\mathbf{G_1}$.

Er rekkefølgen av disse transformasjonene likegyldig ? Begrunn svaret.

(b) Hva er koordinatene til toppunktet til $\mathbf{G_1}$?

Bruk disse koordinatene sammen med transformasjonsmatrisene du fant i forrige punkt til å beregne det tilsvarende transformerte punktet i $\mathbf{G_2}$.

(c) Hele fjæra kan du angi ved symbolet $\mathbf{F}$. Hvilke transformasjoner trenger du for å tegne den sammentrykte fjæra $\mathbf{F_1}$?

Beregn den samlete transformasjonsmatrisen $\mathbf{M}$ slik at $\mathbf{F_1} = \mathbf{MF}$.

Er rekkefølgen av transformasjoner likegyldig ? Begrunn svaret.

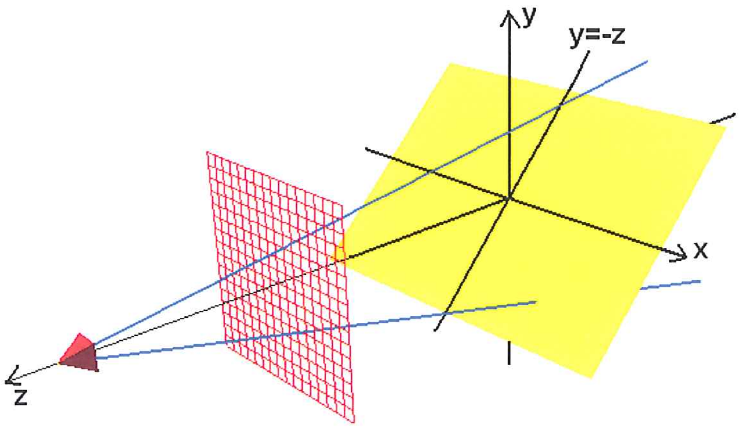
En kraft F_y som virker fra fjæra på kula i y-retningen er gitt ved $F_y = -ky$. Fjærkonstanten er $k = 2$.

(d) Bruk Newtons første lov $F_y = ma$ til å skrive ned differensiallikningene for kulas oppførsel. Her er a akselerasjonen til kula i y-retningen, og $m = \frac{1}{2}$ er massen til kula.

(e) Diskretiser likningene du har funnet med Symplektisk Euler. Beskriv størrelsene som inngår. Bruk kulas senter som posisjon, og angi startverdiene som svarer til situasjonen $\mathbf{F_3}$ i den første tegningen.

Beregn verdier for posisjon og fart etter én oppdatering med de verdiene du har valgt.

2. Kameraet for en raytracer er plassert i $z = 5$. Skjermen har oppløsning på 16×16 piksler, og er plassert i $z = 3$. Størrelse til skjermen er 2×2, og den går fra -1 til 1 i både x-retning og y-retning. Et plan som skal tegnes er plassert slik at x-aksen ligger i planet, og linjen $y = -z$ ligger i planet. To stråler fra kameraet er tegnet med blå farge. Se tegningen under.



Langs x-aksen går planet fra -2 til 2. Minste verdi for både y og z er -1, og største verdi for y og z er 1. Pikslene på skjermen angis med en parameter p_x i x-retningen og p_y i y-retningen. Både p_x og p_y har verdier i mengden $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$. Minste verdier $(p_x, p_y) = (0, 0)$ er i nedre venstre hjørne.

(a) Vis at parameterframstillingen for en stråle $S(t)$ fra kameraet gjennom piksel nummer (p_x, p_y) kan bli

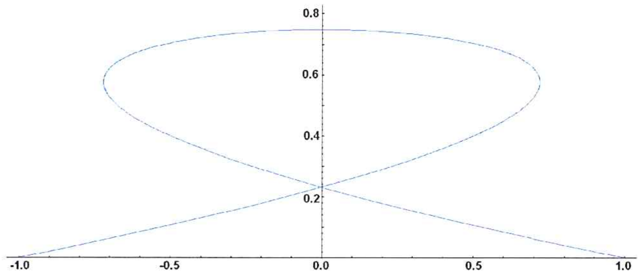
$$S(t) = \left(t\left(\frac{p_x}{8} - 1\right), t\left(\frac{p_y}{8} - 1\right), 5 - 2t\right).$$

Tegn skjermen og angi sammenhengen mellom pikselkoordinat og skjermkoordinat.

(b) Den tegnete strålen som ikke treffer planet går fra kameraposisjonen og gjennom punktet $(1.0, 1.5, -1.0)$. Hvilken piksel går denne strålen gjennom ?

(c) Strålen som treffer planet går gjennom piksel nummer $(p_x, p_y) = (11, 5)$. Hvor på planet treffer denne strålen ?

3. På tegningen under er gjengitt en kubisk bezier-spline.



(a) Tegn spline-funksjonen sammen med kontrollpunktene slik du mener de må være. Kontrollpunktene skal nummereres og gis koordinater.

(b) Bruk kontrollpunktene fra punkt (a) og beregn spline-funksjonen. Bruk $t \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$ og beregn verdiene til funksjonen. Gjengi verdiene i en tabell. Tegn grafen.

4. En rotasjons-kvaternione q_θ er gitt ved

$$q_\theta = (0.8, \mathbf{a} \cdot 0.6) \qquad \text{med rotasjonsakse} \qquad \mathbf{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(a) Hvorfor kan q_θ benyttes til rotasjon ? Beregn rotasjonsvinkelen θ.

(b) Gitt en vektor-kvaternione q_v ved

$$q_v = (0, \mathbf{v}) \qquad \text{der vektoren } \mathbf{v} \text{ er gitt ved} \qquad \mathbf{v} = (3, 1, 0)\,.$$

Hvorfor representerer q_v en vektor (eller et punkt) ?

Skriv ned uttrykket som roterer $\mathbf{v}$ en vinkel θ om aksen $\mathbf{a}$. Alle symboler skal erstattes med tall.