



---

**KANDIDATNUMMER:**

**EKSAMEN**

**EMNENAVN: Matematikk for spillprogrammering**

**EMNENUMMER: REA2061**

**EKSAMENS DATO: 5.juni 2012**

**KLASSE: 11HBSP**

**TID: 09.00 – 14.00**

**EMNEANSVARLIG: Nils Fjeldsø**

**ANTALL SIDER UTLEVERT: 7**

**TILLATTE HJELPEMIDLER:**      **Alle trykte og skrevne  
Programmerbar kalkulator**

**INNFØRING MED PENN.**

**Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse og legges i hvert sitt omslag.**

**Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholder kandidaten.**

**Husk kandidatnummer på alle ark.**

I alle oppgavene gjelder det at regninger skal vises, og tankegang forklares. Presentasjon av et resultat uten regning og forklaring vil bli tillagt liten vekt.

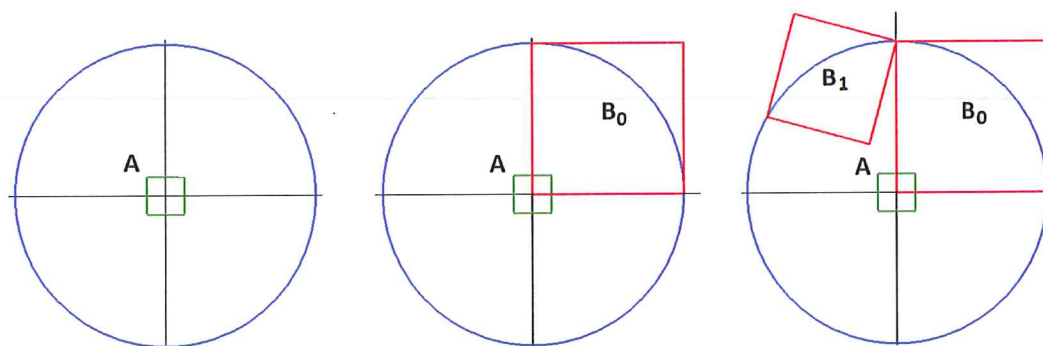
## Oppgave 1

I denne oppgaven skal tallsvar angis med hele tall, brøk og rottegn.

I et rettvinklet koordinatsystem er det gitt en sirkel med radius  $r = 4$ , og et kvadrat **A** med sidekant  $s = 1$  sentrert i origo. Sirkelen er tegnet blå på tegningene under, og kvadratet **A** er grønt.

I den midterste tegningen er det lagt til et kvadrat **B<sub>0</sub>** med ett hjørne i origo, og to hjørner på sirkelen. Dette kvadratet er tegnet rødt. Det røde kvadratet **B<sub>0</sub>** har oppstått fra det grønne kvadratet **A** ved å utføre transformasjoner.

Transformasjonen av **A** til **B<sub>0</sub>** er første steg i en prosess der kvadrater transformeres og plasseres etter hverandre med ett felles hjørne og to hjørner på sirkelen. Først **A** til **B<sub>0</sub>**, så **A** til **B<sub>1</sub>**, og så videre. Se tegningen under til høyre.



Kvadratet **B<sub>0</sub>** spenner over en vinkel  $v_0 = 90^\circ$  på sirkelen, og kvadratet **B<sub>1</sub>** spenner over en vinkel  $v_1 = 60^\circ$ .

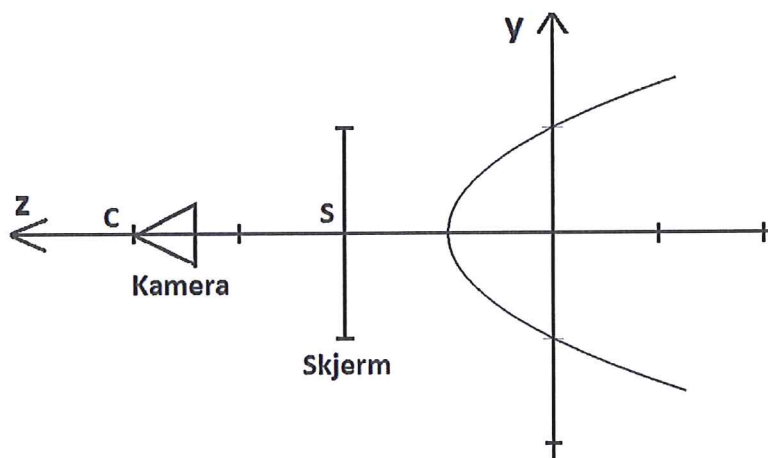
1. (a) Transformer **A** til **B<sub>0</sub>**. Angi rekkefølgen av transformasjoner og forklar hva hver enkelt transformasjon gjør.
- (b) Skriv ned transformasjonsmatrisene for transformasjon fra **A** til **B<sub>0</sub>** og beregn totalmatrisen.
- (c) Anvend denne totalmatrisen på de to øverste hjørnene til **A** og beregn de tilsvarende hjørnene i **B<sub>0</sub>**.
2. (a) Hvilke transformasjoner er nødvendige ved transformasjon fra **A** til **B<sub>1</sub>**? Tegn og fortell.
- (b) Beregn rotasjonsvinkelen ved transformasjon fra **A** til **B<sub>1</sub>**.
- (c) Beregn sidekanten til **B<sub>1</sub>**.

For hvert kvadrat **B<sub>0</sub>**, **B<sub>1</sub>** etc. som legges til på sirkelen skal forholdet mellom vinklene som to nabokvadrater utspenner (her :  $v_0$  og  $v_1$ ) være konstant.

3. (a) Beregn  $v_2$  og  $v_3$  for kvadratene **B<sub>2</sub>** og **B<sub>3</sub>**.
- (b) Skriv ned en rekursjonsformel for  $v_n$ . Finn den eksplisitte løsningen for  $v_n$ .
- (c) Vil kvadratene tilsammen kunne spenne over hele sirkelen om vi legger til mange nok av dem? Begrunn svaret.

## Oppgave 2

Et oppsett for 2D-raytracing er tegnet under. Vi skal se på hva som skjer i  $yz$ -planet, og ser bort fra  $x$ -koordinaten.



Kameraet befinner seg i  $C = (y_C, z_C) = (0, 4)$ . Midten av skjermen er i  $S = (y_S, z_S) = (0, 2)$ . Skjermen har størrelse 2, og oppløsningen er 20 piksler. Pikslene er nummererte fra 0-19, piksel nummer 0 er nederst på skjermen. Objektet som skal tegnes er en parabel gitt ved likningen  $z = -y^2 + 1$ .

1. En stråle som går midt gjennom piksel nummer 12 (litt inn på øvre halvdel av skjermen) kan ha en parameterframstilling som ser ut som

$$(y, z) = (0.25t, 4 - 2t).$$

Utleid denne (eller en annen) parameterframstilling for strålen.

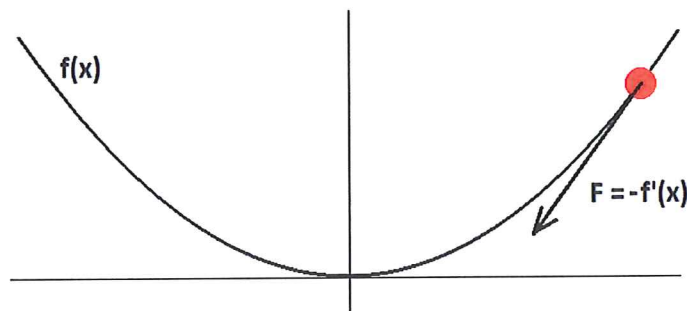
2. Beregn skjæringene mellom strålen og parabelen. Kall skjæringen nærmest kamera for  $P_0$ , og skjæringen lengst fra kamera for  $P_1$ .
3. En lyskilde  $L$  er plassert i  $(y_L, z_L) = (2, 0)$ . Beregn retningsvektoren  $\mathbf{l}$  fra  $P_0$  til  $L$ , og normalen  $\mathbf{n}$  til parabelen i  $P_0$ . Begge vektorene skal normaliseres. Beregn intensiteten  $I$  til lyset som prikkproduktet  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}$ .

Tegn stor og detaljert illustrasjon.

4. Vil parabelen ha noen del som ikke kommer til syne på skjermen? Begrunn svaret.

### Oppgave 3

Ei kule kan bevege seg friksjonsløst langs en parabel. Denne parabelen er gitt ved funksjonen  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ . En kraft  $F$  gitt ved  $F = -f'(x)$ , der  $f'(x)$  er den deriverte av parabelfunksjonen. Denne kraften virker på kula, hele tiden langs parabelen. Se tegningen under.



Du kan anta at massen til kula er  $m = 1$ . Bruk symbolene  $t$  for tid,  $h$  for tidsskritt,  $x$  for posisjon og  $v$  for fart.

1. Beskriv med ord hvordan kula vil oppføre seg hvis den blir sluppet der den er tegnet på figuren.

Skriv ned differensiallikningene som styrer denne bevegelsen.

2. Skriv ned Eulerlikningene (Symplektisk Euler) for kula.

Gi startverdiene  $x_0 = 1$  for posisjon og  $v_0 = 1$  for fart ved tiden  $t = 0$ . Bruk tidsskritt  $h = 0.1$ , og beregn  $x_2$  (posisjon etter to tidsskritt). Angi i en tabell alle beregnete størrelser.

### Oppgave 4

Noen dataspillere pådrar seg høyt blodtrykk ved hard spillaktivitet over tid. En gruppe på 10 slike individer ble behandlet med kalsium (melk?), og blodtrykket ble målt før og etter behandling. Se tabellen under.

Før	106	110	123	128	112	111	107	112	136	102
Etter	100	113	105	111	115	116	107	102	125	103
Nedgang	6	-3	18	17	-3	-5	0	10	11	-1

1. Beregn gjennomsnitt og standardavvik for nedgang i blodtrykk for disse 10 spillerne.
2. Beregn et 90%-konfidensintervall for forventet nedgang i blodtrykk.
3. Er nedgangen i blodtrykk reell? Formuler og utfør en hypotesetest med signifikansnivå  $\alpha = 0.05$  som gir svar på spørsmålet.

Hva blir  $p$ -verdien til testen?

## Formelark og tabeller

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\cos \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\sin \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

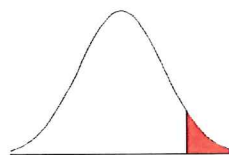
$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$a + bi = re^{i\theta} \quad \text{der} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$



# Standardnormalfordeling $N(0, 1)$

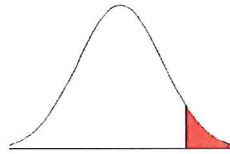


$Z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010

For  $\alpha$  fra  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -konfidensintervall :

$\alpha/2$	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
$Z$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

# Students $T$ -fordeling



$\alpha \rightarrow$						$\alpha \rightarrow$					
DF	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	DF	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	1000	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	$\infty$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845						