SOLUZIONI ESERCIZI DI GEOMETRIA (C.d.L. ING. INFORMATICA)

Esercizio 1. Tra le seguenti matrici, eseguire tutti i possibili prodotti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzioni: $A \cdot B$ non possibile, $A \cdot C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \cdot D$ non possibile, $A \cdot E$ non possibile, $A \cdot F = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 10 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B \cdot C = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B \cdot D$ non possibile, $B \cdot E$ non possibile, $B \cdot F = \begin{pmatrix} 36 & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$, $C \cdot A$ non possibile, $C \cdot B$ non possibile, $C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C \cdot E$ non possibile, $C \cdot F$ non possibile, $D \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D \cdot B$ non possibile, $D \cdot C = 3$, $D \cdot E$ non possibile, $D \cdot F = \begin{pmatrix} 10 & 3 \end{pmatrix}$, $E \cdot A$ non possibile, $E \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 8 \\ 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}$, $E \cdot C$ non possibile, $E \cdot D$ non possibile. $E \cdot F$ non possibile, $F \cdot A$ non possibile, $F \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 \\ 0 & 12 & 18 \\ 4 & 18 & 25 \end{pmatrix}$, $F \cdot C$ non possibile, $F \cdot D$ non possibile, $F \cdot E = \begin{pmatrix} -20 & -10 \\ 12 & 20 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, calcolare $A \cdot A - {}^tA + I_3$.

Soluzioni: $A \cdot A - {}^tA + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti matrici, si calcoli il determinante e, se possibile, la matrice inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzioni: $\det A = 7$, $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$, $\det B = 0$, $\det C = -14$, $C^{-1} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 18 & -12 \\ -3 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -10 & 16 & -6 \\ 3 & -1 & -11 & -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Calcolare il determinante di:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \\ -2 & 5 & 12 & -29 \end{pmatrix}$$

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2\alpha & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Soluzioni:

$$\det A = -145, \ \det B = 48, \ \det C = 4(\alpha - 1)(\alpha - 6)$$

.

Esercizio 5. Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali, e - in caso affermativo - trovarne una base:

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0\},$$

$\mathcal{B}_{U_1} = \{(1, -1)\}$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 3\}$$

U_2 NON linearmente chiuso

$$U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x = y + 1\}$$

U_3 NON linearmente chiuso

$$U_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - z = 0, \ t = 3x\}$$

$\mathcal{B}_{U_4} = \{(1, 0, 1, 3), (0, 1, 1, 0)\}$

$$U_5 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ detA = 0\}$$

U_5 NON linearmente chiuso

$$U_6 = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ a = 0\right\}$$

$$\mathcal{B}_{U_6} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 6. Dire se i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$W_1 = \{(1,2,3),(4,-1,5),(-3,3,-2),(6,3,11)\}$$

LD

$$W_2 = \{(1,2,3),(4,-1,5),(-3,3,-2)\}$$

LD

$$W_3 = \{(1,2,3),(4,-1,5)\}$$

LI

$$W_4 = \{(1,1,0),(-5,1,1),(6,0,1)\}$$

LI

$$W_5 = \{(1,1,0),(-5,-3,1),(6,0,-3)\}$$

LD

Esercizio 7. Dire se i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[t]$ sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$H_1 = \{1+t+2t^2, 1+t^2, 3-t+2t^2\}$$

LD

$$H_2 = \{-3+t+2t^2, 1-3t^2, 3-t+2t^2\}$$

LI

Esercizio 8. Dire se il seguente sottoinsieme dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è linearmente dipendente o indipendente:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \right\}$$

LD

Esercizio 9. Determinare la dimensione ed una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = L((1,0,1),(2,1,1),(-6,-2,-4)) \subset \mathbb{R}^3$$

$$U' = L((1,2,3),(4,-1,5),(-3,3,-2),(6,3,11)) \subset \mathbb{R}^3$$

$$W_h = L((3,0,1,1),(1,1,0,1),(2h,h+2,h,h+1)) \subset \mathbb{R}^4, \quad (h \in \mathbb{R})$$

Completare poi la base di ciascun sottospazio ad una base dello spazio vettoriale ambiente.

Soluzioni: $\dim(U) = 2$, $\mathcal{B}_U = \{(1,0,1),(2,1,1)\}$
$\dim(U') = 2$, $\mathcal{B}_{U'} = \{(1,2,3),(4,-1,5)\}$
$dim(W_h) = 3$ per ogni h diverso da -1; $dim(W_h) = 2$ per $h = -1$.

Esercizio 10. Estrarre una base $\mathcal{B}$ dal seguente sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$:

$$H = \{(1,2,3),(4,-1,5),(-3,3,-2),(6,3,11),(0,1,1)\}$$

Determinare poi le componenti dei vettori $\mathbf{u} = (7,3,12)$ e $\mathbf{v} = (11,-3,14)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$; determinare infine il vettore $\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} (-1,1,5)$.

Soluzioni: $\mathcal{B}_U = \{(1,2,3),(4,-1,5),(0,1,1)\}$, $\mathbf{u} = (7,3,12) \equiv_{\mathcal{B}} (3,1,-2)$, $\mathbf{v} = (11,-3,14) \equiv_{\mathcal{B}} (-1,3,2)$, $\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} (-1,1,5) = (3,2,7)$.

Esercizio 11. Determinare la dimensione ed una base per la somma e per l'intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y=0, \ x+y-z=0\}$$

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+6y-2z=0\}$$

Si dica inoltre se U e W sono sottospazi vettoriali complementari in $\mathbb{R}^3$ oppure no.

Soluzioni: dim(U)= 1; base $\{(1,1,2)\}$. dim(W)= 2; base $\{(-6,1,0),(2,0,1)\}$, dim(U+W)= 3, per cui $U+W = \mathbb{R}^3$ e l'intersezione contiene solo il vettore nullo.

Esercizio 12. Determinare la dimensione (ed una base) per la somma e per l'intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((1,0,1,0),(1,1,1,0)) \quad W = L((2,1,-1,0),(0,1,1,1),(0,0,0,1))$$

Soluzioni: dim(U)= 2; base $\{(1,0,1,0),(1,1,1,0)\}$, dim(W)= 3; base $\{(2,1,-1,0),(0,1,1,1),(0,0,0,1)$
dim(U+W)= 4, per cui $U+W = \mathbb{R}^4$; $\dim(U \cap W) = 1$, con base $\{(2,4,2,0)\}$.

Esercizio 13. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono trasformazioni lineari e per esse determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine:

$$f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, f_1(x,y,z,t) = (x-y, y+z, t)$$

$$g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g_1(x,y,z) = (x+3y, y-4z-x)$$

$$h \ = \ g_1 \circ f_1$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f_2(x, y) = (x + y, y, x)$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, f_3(x, y) = (3x, x, 2x, 0)$$

$$f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f_4(x, y, z) = (x + 3, y)$$

$$f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f_5(x, y, z) = (2x + y, z, x - y),$$

Soluzioni: f_1 trasformazione lineare, $\dim(Ker(f_1)) = 1$, con base $\{(1, 1, -1, 0)\}$, g_1 trasformazione lineare, $\dim(Ker(g_1)) = 1$, con base $\{(-3, 1, 1)\}$ e $\dim(Im(g_1)) = 2$, con base $\{(1, -1), (0, -4)\}$, h trasformazione lineare, $\dim(Ker(h)) = 2$, con base $\{(-2, 1, 0, 1), (-3, 0, 1, 1)\}$, $\dim(Im(h)) = 2$, con base $\{(1, -1), (0, -4)\}$, f_2 trasformazione lineare, $\dim(Ker(f_2)) = 0$,, $\dim(Im(f_2)) = 2$, con base $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$, f_3 trasformazione lineare, $\dim(Ker(f_3)) = 1$, con base $\{(0, 1)\}$, $\dim(Im(f_3)) = 1$, con base $\{(3, 1, 2, 0)\}$, f_4 non trasformazione lineare, f_5 trasformazione lineare, $\dim(Ker(f_5)) = 0$, $\dim(Im(f_5)) = 3$.

Esercizio 14. Date le seguenti trasformazioni lineari, determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensione del nucleo e dell'immagine:

$$f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f_\lambda(x, y, z) = (x - y + (1 - \lambda)z, \lambda x + 2y + \lambda z, 2x, \lambda y + 2z)$$

$$g_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, g_\lambda(x, y, z, t) = (\lambda x, y - t, 2x + \lambda z)$$

Soluzioni: Se $\lambda = 2$ allora $\dim(Ker(f_2)) = 1$, con base $\{(0, -1, 1)\}$ $\dim(Im(f_2)) = 2$, con base $\{(1, 2, 2, 0), (-1, 2, 0, 2)\}$, Se $\lambda \neq 2$ allora $\dim(Ker(f_\lambda)) = 0$, $\dim(Im(f_\lambda)) = 3$, con base $\{(1, \lambda, 2, 0), (-1, 2, 0, \lambda), (1 - \lambda, \lambda, 0, 2)\}$. Se $\lambda = 0$ allora $\dim(Ker(g_0)) = 2$, con base $\{(0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$, $\dim(Im(g_0)) = 2$, con base $\{(0, 0, 2), (0, 1, 0)\}$, Se $\lambda \neq 0$ allora $\dim(Ker(g_\lambda)) = 1$ con base $\{(0, 1, 1, 0)$, $\dim(Im(g_\lambda)) = 3$, con base $\{(\lambda, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 0, \lambda)\}$.

Esercizio 15. Determinare, se esiste, la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T((1, 0, 1, 0)) = (2, 1, 3) \quad T((0, -1, 0, 0)) = (0, -1, 1)$$

$$T((2, 0, 0, -2)) = (4, 0, 4) \quad T((0, 3, 1, -1)) = (0, 4, -4)$$

Soluzioni: $T((x, y, z, t)) = (2x, y + z, 3x - y + t)$

Esercizio 16. Determinare, se esiste, la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ avente nucleo $Ker\, T = L((1, 2, 3), (0, -1, 1))$ e tale che $T((0, 0, 1)) = (-1, 0, 2, 0)$

Trovare la immagine in T del vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

Soluzioni: $T((x, y, z)) = (5x - y - z, 0, -10x + 2y + 2z, 0)$, $T(\mathbf{v}) = (3, 0, -6, 0)$.

Esercizio 17. Determinare la matrice associata alla trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z, t) = (2x, y + z, t - y + 3x)$ rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0), (2, 0, 0, -2), (0, 3, 1, -1)) \ di \ \mathbb{R}^4 \ e$$

$$\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (0, -1, 0), (1, 0, 1)) \ di \ \mathbb{R}^3$$

Soluzioni:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

.

Esercizio 18. Determinare la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha come matrice associata rispetto alla base

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, -1, 0), (1, 0, 1))$$

la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare anche l'immagine del vettore $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$.

Soluzioni:

$$T((a, b, c)) = (3a - b + 2c, a + b - 3c, 5c)$$

.

Esercizio 19. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 5 & -5 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 9 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Soluzioni:

$$\rho(A) = 2, \ \rho(B) = 2, \ \rho(C) = 2.$$

Esercizio 20. Calcolare, al variare del parametro reale k, il rango delle seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 4 & k \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} 2-k & 3 & 8 \\ 2 & 4+k & 14 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix} \qquad D_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & k & 2 & k \end{pmatrix}$$

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix} \qquad F_k = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 0 \\ 1 & -k & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & -k & k-1 \end{pmatrix}$$

Soluzioni: $\rho(A_k) = 2 \ \forall k \in \mathbb{R}$.
$\rho(B_k) = 2$ per $k = 1, 15$; $\rho(B_k) = 3 \ \forall k \in R - \{1, 15\}$.
$\rho(C_k) = 2$ per $k = 1, -4$; $\rho(C_k) = 3 \ \forall k \in R - \{1, -4\}$.
$\rho(D_k) = 2$ per $k = 1$; $\rho(D_k) = 3 \forall k \in R - \{1\}$.
$\rho(E_k) = 2$ per $k = 2, 3$; $\rho(D_k) = 3 \forall k \in R - \{2, 3\}$.
$\rho(F_k) = 2$ per $k = 3$; $\rho(F_k) = 3 \forall k \in R - \{3\}$.

Esercizio 21. Discutere e - se possibile - risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - t = 1 \\ x + y - z - 2t = 2 \\ x - 4y + 6z + t = -1 \\ 5x - 5y + 9z - 4t = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 6 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + 5y - 2z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 3z + 6t = 0 \\ 2x - y + 3z + 3t = 0 \\ 3x + 5y - 2z + 11t = 0 \end{cases}$$

Soluzioni:

$$Sol(S_1) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R} | (7 - 2z + 7t, 3 + 7z + 3t, 5z, 5t)\}$$

$$Sol(S_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | (2 - z, 1 + z, z)\}$$

$$Sol(S_3) = \{(-z - 2t, z - t, z, t) \in \mathbb{R} | z, t \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 22. Discutere e - nei casi possibili - risolvere i seguenti sistemi lineari, al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} (2-k)x + 3y + 8z = 8 \\ 2x + (4+k)y + 14z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + y + 3z = 3 \\ x - z = -2 \\ 2x + ky + 2z = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5y + 6z = 0 \\ x - ky = k + 1 \\ y - kz = k - 1 \end{cases}$$

Soluzioni: Se $k = 1$ allora S_1 impossibile, se $k = 15$ allora S_1 impossibile, se $k \in \mathbb{R} - \{1, 15\}$allora S_1 possibile con ∞^0 soluzioni e $Sol(S_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | x = \frac{-8k+75}{(k-15)(k-1)}, y = \frac{k+66}{(k-15)(k-1)}, z = \frac{-10k-57}{2(k-15)(k-1)}\}$.
Se $k = 1$ allora S_2 possibile con ∞^1 soluzioni, se $k = -4$ allora S_2 impossibile, se $k \in \mathbb{R} - \{1, -4\}$allora S_2 possibile con ∞^0 soluzioni.
Se $k \in \{2, 3\}$ allora S_3 possibile con ∞^1 soluzioni, se $k \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$ allora S_3 possibile con una sola soluzione.

Esercizio 23. É data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T((x, y)) = (x - y, -x + 3y).$$

Attraverso la similitudine di matrici, determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = ((1, 2), (2, -2))$ di $\mathbb{R}^2$.

Soluzioni: $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -4/3 \\ -7/6 & 8/3 \end{pmatrix}$ [con $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ed $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$]

Esercizio 24. É data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t]$ che al generico polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ associa

$$T(p(t)) = (a_0 + a_1) - a_1 t - a_2 t^2.$$

Attraverso la similitudine di matrici, determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = (2 + t, t + t^2, t - t^2)$ di $\mathbb{R}^2[t]$.

Soluzioni: $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ -5/4 & -5/4 & -1/4 \\ -5/4 & -1/4 & -5/4 \end{pmatrix}$ con $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ed $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Esercizio 25. Si dica se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sia associata rispetto a $\mathcal{B}$ all'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T((x, y, z)) = (2x - y, y + z, z).$$

Soluzioni: Non esiste.

Esercizio 26. Si dica se esiste una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sia associata rispetto a $\mathcal{B}'$ all'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T((x, y, z)) = (2x - y, y + z, z).$$

Soluzioni: Non esiste.

Esercizio 27. Determinare autovalori, autovettori e autospazi dell'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T((x, y, z)) = (3x + y + z, -3x + 6y + z, 2x - y + 4z).$$

Soluzioni:

$$\lambda_1 = 5, U_{\lambda_1} = L((0, 1, -1))$$
$$\lambda_2 = 4, U_{\lambda_2} = L((1, 2, -1))$$

Esercizio 28. Si studi la diagonalizzabilitá per similitudine delle seguenti matrici di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Soluzioni: A non diagolizzabile, B diagonalizzabile con matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, C diagonalizzabile con matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 29. Determinare, se esiste, la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente nucleo $Ker\, T :\ x - z = 0$ e tale che $\mathbf{v} \equiv (1, 0, 0)$ sia autovettore relativo all'autovalore 3. Si dica anche se T ammette una matrice associata di tipo diagonale e, in caso affermativo, la si determini.

Soluzioni: matrice associata alla trasformazione $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, diagonalizzabile con matrice diagonale $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 30. Si studi la diagonalizzabilitá per similitudine delle seguenti matrici a coefficienti reali, al variare del valore dei rispettivi parametri reali:

$$A_h = \begin{pmatrix} 2h & 2 & h \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzioni: A simile alla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2h & 0 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$ per h diverso da 1/2, 2, -1. NON diagonalizzabile per similitudine per $h = 1/2$, n per $h = 2$, n per $h = -1$.

B simile alla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2k} \end{pmatrix}$ per k diverso da 0, 2.

C simile alla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3\alpha} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3\alpha} \end{pmatrix}$ per α diverso da 0, altrimenti non diagonalizzabile.

Esercizio 31. Si determinino, se esistono, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 5 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

risulti simile alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzioni: M ed A hanno stesso polinomio caratteristico solo per $\alpha = -11$, $\beta = -5$ e $\gamma = 3$. Pero', la corrispondente matrice M NON e' diagonalizzabile per similitudine, mentre A (simmetrica reale) lo e'.

Esercizio 32. Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare standard, determinare la dimensione, una base e una rappresentazione cartesiana per i complementi ortogonali ${}^{\perp}U$ e ${}^{\perp}U'$, ove

$$U = L((3,1,2),(5,0,-1)) \qquad U' = L((1,2,3))$$

Soluzioni: $\mathcal{B}({}^{\perp}U) = \{(1,-13,5)\}$, $\mathcal{B}({}^{\perp}U') = \{(2,-1,0),(0,3,-2)\}$.

Esercizio 33. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si calcolino le norme dei due vettori $\mathbf{v} = (1,3,4,0)$ e $\mathbf{w} = (6,0,2,3)$ e si dica se tali vettori sono o non sono tra loro ortogonali. Si determinino poi la dimensione, una base e una rappresentazione cartesiana per il complemento ortogonale ${}^{\perp}W$, ove $W = L(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Soluzioni: $B_{{}^{\perp}W} = ((3,11,-9,0),(3,-1,0,-6))$. ${}^{\perp}W : \begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ 6x + 2z + 3t = 0 \end{cases}$

Esercizio 34. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si costruisca una base ortonormale per il sottospazio

$$H = L((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,2,3,4)).$$

Si estenda poi tale base ad una base ortonormale per $\mathbb{R}^4$.
Si determinino infine una rappresentazione cartesiana sia per H che per ${}^{\perp}H$.

Soluzioni: $H : 4x - 4y + 4z - t = 0$, ${}^{\perp}H : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$

Esercizio 35. Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare (non standard) definito da

$$\prec (x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3) \succ = x^1y^1 + 2x^2y^2 - x^1y^2 - x^2y^1 + x^3y^3$$

si costruisca una base ortonormale (rispetto a $\prec \cdot, \cdot \succ$) per il sottospazio

$$W = L((1,1,1),(1,0,1),(3,2,3))$$

Si estenda poi tale base ad una base ortonormale (rispetto a $\prec \cdot, \cdot \succ$) per $\mathbb{R}^3$.

Soluzioni:

$$\mathcal{B}_{ortogonale_W} = ((1,1,1),(1/2,-1/2,1/2))$$

$$\mathcal{B}_{ortonormale_W} = ((1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6}))$$

$W: x{-}z = 0$ $B_{ortogonale_{R^3}} = ((1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6}),(2/3,1/3,-1/3))$
$B_{ortonormale_{R^3}} = ((1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6}),(2/\sqrt{3},1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3}))$

Esercizio 36. Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare standard, determinare i prodotti vettoriali $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}$ e il prodotto misto $<\mathbf{u},\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}>$, dove

$$\mathbf{u} = (3,1,2), \qquad \mathbf{v} = (5,0,-1) \qquad \mathbf{w} = (1,2,3)$$

Soluzioni: $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = (-1,13,-5)$, $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = (2,-16,10)$, $\mathbf{w}\wedge\mathbf{u} = (1,7,-5)$.
$<\mathbf{u},\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}>= 10$.

Esercizio 37. Siano $P_1 \equiv (3,2)$, $P_2 \equiv (1,1)$ e $P_3 \equiv (5,-1)$ tre vertici consecutivi di un parallelogramma del piano euclideo $\mathcal{E}^2$. Trovare:
(a) le equazioni dei lati del parallelogramma;
(b) il quarto vertice P_4;
(c) le equazioni delle diagonali e il loro punto di intersezione.

Soluzioni: (a) $P_1P_2 : x-2y+1=0$; $P_2P_3 : x+2y-3=0$; $P_1P_4 : x+2y-7=0$; $P_3P_4 : x-2y-7=0$. (b) $P_4 = (7,0)$. (c) $3x+2y-13=0; x+6y-7=0$; $(1,1/2)$.

Esercizio 38. Data nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$ la retta r di equazione $x+2y+3=0$, trovare:
(a) la retta s perpendicolare ad r e passante per $P \equiv (0,1)$;
(b) la retta t parallela ad r e passante per $Q \equiv (1,0)$;
(c) il punto B appartenente ad r tale che l'area del triangolo ABC sia 28, con $A \equiv (-3,0)$ e $C = s\cap t$.

Soluzioni: (a) $2x-y+1=0$. (b) $x+2y-1=0$. (c) $C(-1/5,3/5)$, $B_1(-31,14)$, $B_2(25,-14)$.

Esercizio 39. Nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$ si considerino le rette

$$r: \; x+3y+1=0 \qquad s: \; 3x+4y-2=0.$$

Nel fascio di rette da esse individuato determinare:
(a) le equazioni delle rette parallele agli assi coordinati;
(b) l'equazione della retta parallela alla retta $t: \; 3x-y+3=0$;
(c) l'equazione della retta perpendicolare alla retta $p: \; 4x-3y-12=0$;
(d) le equazioni delle rette aventi distanza 1 dall'origine O del riferimento.

Soluzioni: (a) $y+1=0$; $x-2=0$. (b) $3x-y-7=0$. (c) $3x+4y-2=0$. (d) $y+1=0$; $4x+3y-5=0$.

Esercizio 40. Trovare le equazioni cartesiane della retta dello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$:
(a) contenente i punti $A\equiv(1,0,1)$ e $B\equiv(1,2,3)$;
(b) contenente il punto $A\equiv(1,0,1)$ e parallela alla retta $r:\begin{cases}x+y+2=0\\x-y-z+3=0\end{cases}$
(c) contenente il punto $A\equiv(1,0,1)$ e perpendicolare al piano $\alpha:\ x+2y-3z+5=0$.

Soluzioni: (a) $\begin{cases}x-1=0\\y-z+1=0\end{cases}$. (b) $\begin{cases}x+y-1=0\\x-y-z=0\end{cases}$. (c) $\begin{cases}2x-y-2=0\\3x+z-4=0\end{cases}$.

Esercizio 41. Trovare il piano dello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$:
(a) contenente i punti $A\equiv(1,2,0)$, $B\equiv(0,0,-3)$ e $C\equiv(2,0,-1)$;
(b) contenente il punto $A\equiv(1,2,0)$ e parallelo al piano $\sigma:\ 2x-3y+7z-3=0$
(c) contenente il punto $A\equiv(1,2,0)$ e perpendicolare alla retta $r:\begin{cases}x-y+7=0\\x+y+z-3=0\end{cases}$
(d) contenente il punto $A\equiv(1,2,0)$ e la retta $s:\begin{cases}x+y-z+3=0\\2x-z-5=0\end{cases}$

Soluzioni: (a) $x+y-z-3=0$. (b) $2x-3y+7z+4=0$. (c) $x+y-2z-3=0$. (d) $5x+y-3z-7=0$.

Esercizio 42. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, si considerino le rette

$$r:\begin{cases}2x+y-z=2\\x+2z=1\end{cases}\qquad s:\begin{cases}2x+2y=2\\y-2z=2\end{cases}$$

(a) Stabilire la mutua posizione di r ed s;
(b) calcolare la distanza tra r ed s.
(c) Scrivere le equazioni della retta t passante per $P\equiv(1,0,0)$ e ortogonale ad r e ad s;
(d) scrivere l'equazione del piano passante per P e ortogonale a t.

Soluzioni: (a) rette sghembe. (b) $d=\frac{2}{\sqrt{5}}$. (c) $\begin{cases}2x-z-2=0\\y=0\end{cases}$. (d) $x+2z-1=0$.

Esercizio 43. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, é data la retta s passante per il punto $A\equiv(-1,3,0)$ ed avente coefficienti direttori $(1,2,2)$.
(a) Stabilire, al variare del parametro reale λ, la mutua posizione tra s e la retta

$$r_\lambda:\begin{cases}\lambda x-2y+(\lambda-1)z+7=0\\2x-y+(\lambda-2)z-2=0\end{cases}$$

(b) determinare, se esistono, i valori del parametro λ tali che s ed r_λ siano tra loro ortogonali;
(c) trovare le equazioni dei due piani π_1 e π_2, ortogonali ad s ed aventi distanza $d = 2$ dal punto A.

Soluzioni: (a) rette sghembe $\forall\lambda \in \mathbb{R} - \{(2, 23/2)\}$; parallele e disgiunte per $\lambda = 2$; incidenti per $\lambda = 23/2$. (b) 7/2, -1.

Esercizio 44. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, si considerino le rette r_α ed s_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$r_\alpha : \begin{cases} (3-\alpha)x - 3y + 5z = 3 - \alpha \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \qquad s_\alpha : \begin{cases} 3y + 2z = \alpha \\ (1-\alpha)x - 2y + (1+\alpha)z = 1 - \alpha \end{cases}$$

(a) Studiare la mutua posizione di r_α ed s_α, al variare di α.
(b) Nei casi in cui r_α ed s_α sono distinte e complanari, scrivere l'equazione del piano che le contiene.

Soluzioni: (a) rette sghembe $\forall\alpha \in \mathbb{R} - \{(0, 13)\}$; coincidenti per $\alpha = 0$; incidenti per $\alpha = 13$. (b) $6x + y - 7z - 6 = 0$.

Esercizio 45. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, la mutua posizione della retta

$$r_\lambda : \begin{cases} 3(\lambda - 2)x + 3y + \lambda z = \lambda \\ x + 2y + 2z = \lambda - 1 \end{cases}$$

e del piano $\pi_\lambda :\ x + (\lambda - 2)y + (\lambda - 2)z = 1$ nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$.
Posto $\lambda = 4$, determinare:
(a) il piano contenente r e ortogonale a π;
(b) il piano contenente r e parallelo a π.

Soluzioni: La retta e il piano sono incidenti in un punto $\forall\lambda \in \mathbb{R} - \{3, 4\}$; la retta é contenuta nel piano per $\lambda = 3$; la retta e il piano sono paralleli disgiunti per $\lambda = 4$. (a) $34x - 13y - 4z + 24 = 0$. (b) $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

Esercizio 46. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, si considerino i piani

$$\pi_1 :\ x + y - z = 0 \qquad \pi_2 :\ x - y - 2z = -1$$

(a) Si determini il piano π_3, parallelo al piano $\alpha :\ 4x - 6z - 3 = 0$ ed appartenente al fascio $\mathcal{F}$ individuato da π_1 e π_2;
(b) si calcoli la distanza dell'origine del riferimento dalla retta r, asse del fascio $\mathcal{F}$;
(c) si determini il punto equidistante dai piani π_1 e π_2 ed appartenente al semiasse positivo delle ascisse.

Soluzioni: (a) $2x - 3z + 1 = 0$. (b) $\sqrt{21/98}$.

Esercizio 47. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, si considerino i punti $A \equiv (1,0,0)$, $B \equiv (1,0,-1)$ e la retta $r:\ x+2=y=z-1$.
(a) Scrivere l'equazione del piano α passante per A e per B e parallelo ad r;
(b) scrivere l'equazione del piano β contenente r e che interseca i due piani $\pi_1:\ x+y+3=0$ e $\pi_2:\ 5x-z-1=0$ in due rette tra loro parallele;
(c) determinare i punti C della retta r che formano con A e B un triangolo di area $\frac{3}{2}$.

Soluzioni: (a) $x-y=1$. (b) $3x-2y-z+7=0$ (rette di coefficienti direttori $(1,-1,5)$) (c) $C_1 \equiv (-2,0,1)$; $C_2 \equiv (1,3,4)$.

Esercizio 48. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, si considerino le rette

$$r:\ \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=2z \end{cases} \qquad\qquad s:\ \begin{cases} y=z+2 \\ x-y=z \end{cases}$$

(a) Stabilire la mutua posizione di r ed s.
(b) Detti R ed S i punti di intersezione di r ed s rispettivamente con i piani coordinati xz e xy, determinare il volume del tetraedro $OPRS$, con $O \equiv (0,0,0)$ e $P \equiv (1,1,1)$.

Soluzioni: (a) rette sghembe. (b) volume= $2/3$.

Esercizio 49. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ si considerino i punti $P \equiv (0,0,1)$, $Q \equiv (0,1,0)$ e le rette

$$r:\ \begin{cases} x=3t \\ y=2t \\ z=t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad r':\ \begin{cases} x=2s-1 \\ y=-s \\ z=1-2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

(a) Calcolare la distanza tra r ed r'.
(b) Detta r'' la retta contenente i punti P e Q, determinare la retta incidente le rette r ed r' e parallela ad r''.

Soluzioni: (a) $2\sqrt{122}/61$. (b) $\begin{cases} x=-1/5 \\ y+z=-1/5 \end{cases}$.

Esercizio 50. Si consideri la retta $r:\ 6x+8y-3=0$ del piano euclideo $\mathcal{E}^2$. Determinare:
(a) le coordinate della proiezione ortogonale P' del punto $P \equiv (2,2)$ sulla retta r;
(b) le coordinate del simmetrico P'' del punto P rispetto alla retta r;
(c) l'equazione cartesiana della retta r' simmetrica di r rispetto alla retta $s:\ 4x-3y-12=0$;
(d) le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette r ed s.

Soluzioni: (a) $(1/2,0)$. (b) $(-1,-2)$. (c)$60x-25y=156$. (d) $2x-14y-21=0$, $14x-2y-27=0$.

Esercizio 51. Nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$, scrivere le equazioni della simmetria ortogonale rispetto alla retta $r:\ x - 2y + 5 = 0$. Determinare l'immagine del punto $P \equiv (2, -1)$.

Soluzioni: $(-8/5, 31/5)$.

Esercizio 52. Nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$, sono date le trasformazioni

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Stabilire se sono isometrie e, in caso affermativo, classificarle.

Soluzioni: (a) rotazione. (b) glissoriflessione.

Esercizio 53. Studiare in modo completo (classificazione, centro, assi, vertici, eq. canonica, fuochi) la conica del piano euclideo di equazione:

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x - 14y + 19 = 0$$

Soluzioni: Ellisse di centro $(2, 3)$, con assi $x - y + 1 = 0$, $x + y - 5 = 0$ e vertici $(2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$, $(2-\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$, $(3, 2)$, $(1, 4)$. Equazione canonica $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ e fuochi $(3, 4)$, $(1, 2)$.

Esercizio 54. Studiare in modo completo (classificazione, centro, asintoti, assi, vertici, eq. canonica, fuochi) la conica del piano euclideo di equazione:

$$3x^2 + 4xy - 2x - 1 = 0$$

Soluzioni: Iperbole non equilatera di centro $(0, 1/2)$, con asintoti $x = 0$, $3x+4y-2 = 0$, assi $x - 2y + 1 = 0$, $4x + 2y - 1 = 0$, vertici $(\sqrt{5}/5, \frac{5+\sqrt{5}}{10})$, $(-\sqrt{5}/5, \frac{5-\sqrt{5}}{10})$. Equazione canonica $\frac{x^2}{1/4} - y^2 = 1$ e fuochi $(-1, 0)$, $(1, 1)$.

Esercizio 55. Studiare in modo completo (classificazione, centro, asse, vertice, eq. canonica, fuoco, direttrice) la conica del piano euclideo di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 10y + 1 = 0$$

Soluzioni: Parabola di centro $[0, -1, 1]$, con asse $x + y - 3 = 0$, vertice $(5/2, 1/2)$, equazione canonica $y = \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$, fuoco $(2, 1)$, direttrice $x - y - 3 = 0$.

Esercizio 56. Studiare in modo completo (classificazione, centro, assi, vertici, eq. canonica) la conica del piano euclideo di equazione:

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 68x - 24y - 32 = 0$$