

**ESERCIZI DI GEOMETRIA**  
(C.d.L. ING. INFORMATICA)

**Esercizio 1.** Tra le seguenti matrici, eseguire tutti i possibili prodotti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 2.** Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ , calcolare  $A \cdot A - {}^t A + I_3$ .

**Esercizio 3.** Per ognuna delle seguenti matrici, si calcoli il determinante e, se possibile, la matrice inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4.** Calcolare il determinante di:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \\ -2 & 5 & 12 & -29 \end{pmatrix}$$

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2\alpha & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

**Esercizio 5.** Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali, e - in caso affermativo - trovarne una base:

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\},$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 3\}$$

$$\begin{aligned}
U_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = y + 1\} \\
U_4 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z = 0, t = 3x\} \\
U_5 &= \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \det A = 0\} \\
U_6 &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a = 0 \right\}
\end{aligned}$$

**Esercizio 6.** Dire se i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{(1, 2, 3), (4, -1, 5), (-3, 3, -2), (6, 3, 11)\} \\
W_2 &= \{(1, 2, 3), (4, -1, 5), (-3, 3, -2)\} \\
W_3 &= \{(1, 2, 3), (4, -1, 5)\} \\
W_4 &= \{(1, 1, 0), (-5, 1, 1), (6, 0, 1)\} \\
W_5 &= \{(1, 1, 0), (-5, -3, 1), (6, 0, -3)\}
\end{aligned}$$

**Esercizio 7.** Dire se i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^2[t]$  sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{1 + t + 2t^2, 1 + t^2, 3 - t + 2t^2\} \\
H_2 &= \{-3 + t + 2t^2, 1 - 3t^2, 3 - t + 2t^2\}
\end{aligned}$$

**Esercizio 8.** Dire se il seguente sottoinsieme dello spazio vettoriale  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  è linearmente dipendente o indipendente:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \right\}$$

**Esercizio 9.** Determinare la dimensione ed una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned}
U &= L((1, 0, 1), (2, 1, 1), (-6, -2, -4)) \subset \mathbb{R}^3 \\
U' &= L((1, 2, 3), (4, -1, 5), (-3, 3, -2), (6, 3, 11)) \subset \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

$$W_h = L((3, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (2h, h + 2, h, h + 1)) \subset \mathbb{R}^4, \quad (h \in \mathbb{R})$$

Completare poi la base di ciascun sottospazio ad una base dello spazio vettoriale ambiente.

**Esercizio 10.** Estrarre una base  $\mathcal{B}$  dal seguente sistema di generatori per  $\mathbb{R}^3$ :

$$H = \{(1, 2, 3), (4, -1, 5), (-3, 3, -2), (6, 3, 11), (0, 1, 1)\}$$

Determinare poi le componenti dei vettori  $\mathbf{u} = (7, 3, 12)$  e  $\mathbf{v} = (11, -3, 14)$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ ; determinare infine il vettore  $\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} (-1, 1, 5)$ .

**Esercizio 11.** Determinare la dimensione ed una base per la somma e per l'intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^3$ :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, x + y - z = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 6y - 2z = 0\}$$

Si dica inoltre se  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali complementari in  $\mathbb{R}^3$  oppure no.

**Esercizio 12.** Determinare la dimensione (ed una base) per la somma e per l'intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = L((1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0)) \quad W = L((2, 1, -1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$$

**Esercizio 13.** Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono trasformazioni lineari e per esse determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine:

$$f_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_1(x, y, z, t) = (x - y, y + z, t)$$

$$g_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g_1(x, y, z) = (x + 3y, y - 4z - x)$$

$$h = g_1 \circ f_1$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_2(x, y) = (x + y, y, x)$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, f_3(x, y) = (3x, x, 2x, 0)$$

$$f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f_4(x, y, z) = (x + 3, y)$$

$$f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_5(x, y, z) = (2x + y, z, x - y),$$

**Esercizio 14.** Date le seguenti trasformazioni lineari, determinare, al variare del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la dimensione del nucleo e dell'immagine:

$$f_\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, f_\lambda(x, y, z) = (x - y + (1 - \lambda)z, \lambda x + 2y + \lambda z, 2x, \lambda y + 2z)$$

$$g_\lambda : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, g_\lambda(x, y, z, t) = (\lambda x, y - t, 2x + \lambda z)$$

**Esercizio 15.** Determinare, se esiste, la trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$T((1, 0, 1, 0)) = (2, 1, 3) \quad T((0, -1, 0, 0)) = (0, -1, 1)$$

$$T((2, 0, 0, -2)) = (4, 0, 4) \quad T((0, 3, 1, -1)) = (0, 4, -4)$$

**Esercizio 16.** Determinare, se esiste, la trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  avente nucleo  $\text{Ker } T = L((1, 2, 3), (0, -1, 1))$  e tale che  $T((0, 0, 1)) = (-1, 0, 2, 0)$ . Trovare la immagine in  $T$  del vettore  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ .

**Esercizio 17.** Determinare la matrice associata alla trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $T(x, y, z, t) = (2x, y + z, t - y + 3x)$  rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0), (2, 0, 0, -2), (0, 3, 1, -1)) \text{ di } \mathbb{R}^4 \text{ e}$$

$$\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (0, -1, 0), (1, 0, 1)) \text{ di } \mathbb{R}^3$$

**Esercizio 18.** Determinare la trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  che ha come matrice associata rispetto alla base

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, -1, 0), (1, 0, 1))$$

la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare anche l'immagine del vettore  $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ .

**Esercizio 19.** Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 5 & -5 & 9 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 9 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 20.** Calcolare, al variare del parametro reale  $k$ , il rango delle seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 4 & k \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} 2-k & 3 & 8 \\ 2 & 4+k & 14 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix} \quad D_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & k & 2 & k \end{pmatrix}$$

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix} \quad F_k = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 0 \\ 1 & -k & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & -k & k-1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 21.** Discutere e - se possibile - risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - t = 1 \\ x + y - z - 2t = 2 \\ x - 4y + 6z + t = -1 \\ 5x - 5y + 9z - 4t = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 6 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + 5y - 2z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 3z + 6t = 0 \\ 2x - y + 3z + 3t = 0 \\ 3x + 5y - 2z + 11t = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 22.** Discutere e - nei casi possibili - risolvere i seguenti sistemi lineari, al variare del parametro reale  $k$ :

$$\begin{cases} (2-k)x + 3y + 8z = 8 \\ 2x + (4+k)y + 14z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + y + 3z = 3 \\ x - z = -2 \\ 2x + ky + 2z = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5y + 6z = 0 \\ x - ky = k + 1 \\ y - kz = k - 1 \end{cases}$$

**Esercizio 23.** É data la trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$T((x, y)) = (x - y, -x + 3y).$$

Attraverso la similitudine di matrici, determinare la matrice associata a  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = ((1, 2), (2, -2))$  di  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 24.** É data la trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^2[t] \rightarrow \mathbb{R}^2[t]$  che al generico polinomio  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$  associa

$$T(p(t)) = (a_0 + a_1) - a_1t - a_2t^2.$$

Attraverso la similitudine di matrici, determinare la matrice associata a  $T$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = (2 + t, t + t^2, t - t^2)$  di  $\mathbb{R}^2[t]$ .

**Esercizio 25.** Si dica se esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sia associata rispetto a  $\mathcal{B}$  all'endomorfismo  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da

$$T((x, y, z)) = (2x - y, y + z, z).$$

**Esercizio 26.** Si dica se esiste una base  $\mathcal{B}'$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sia associata rispetto a  $\mathcal{B}'$  all'endomorfismo  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da

$$T((x, y, z)) = (2x - y, y + z, z).$$

**Esercizio 27.** Determinare autovalori, autovettori e autospazi dell'endomorfismo  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da

$$T((x, y, z)) = (3x + y + z, -3x + 6y + z, 2x - y + 4z).$$

**Esercizio 28.** Si studi la diagonalizzabilità per similitudine delle seguenti matrici di  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

.

**Esercizio 29.** Determinare, se esiste, la trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avente nucleo  $\text{Ker } T : x - z = 0$  e tale che  $\mathbf{v} \equiv (1, 0, 0)$  sia autovettore relativo all'autovalore 3. Si dica anche se  $T$  ammette una matrice associata di tipo diagonale e, in caso affermativo, la si determini.

**Esercizio 30.** Si studi la diagonalizzabilità per similitudine delle seguenti matrici a coefficienti reali, al variare del valore dei rispettivi parametri reali:

$$A_h = \begin{pmatrix} 2h & 2 & h \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 31.** Si determinino, se esistono,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tali che la matrice

$$M_{\alpha, \beta, \gamma} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 5 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

risulti simile alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 32.** Fissato in  $\mathbb{R}^3$  il prodotto scalare standard, determinare la dimensione, una base e una rappresentazione cartesiana per i complementi ortogonali  ${}^\perp U$  e  ${}^\perp U'$ , ove

$$U = L((3, 1, 2), (5, 0, -1)) \quad U' = L((1, 2, 3))$$

**Esercizio 33.** Fissato in  $\mathbb{R}^4$  il prodotto scalare standard, si calcolino le norme dei due vettori  $\mathbf{v} = (1, 3, 4, 0)$  e  $\mathbf{w} = (6, 0, 2, 3)$  e si dica se tali vettori sono o non sono tra loro ortogonali. Si determinino poi la dimensione, una base e una rappresentazione cartesiana per il complemento ortogonale  ${}^\perp W$ , ove  $W = L(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ .

**Esercizio 34.** Fissato in  $\mathbb{R}^4$  il prodotto scalare standard, si costruisca una base ortonormale per il sottospazio

$$H = L((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 2, 3, 4)).$$

Si estenda poi tale base ad una base ortonormale per  $\mathbb{R}^4$ .

Si determinino infine una rappresentazione cartesiana sia per  $H$  che per  ${}^\perp H$ .

**Esercizio 35.** Fissato in  $\mathbb{R}^3$  il prodotto scalare (non standard) definito da

$$\prec (x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3) \succ = x^1 y^1 + 2x^2 y^2 - x^1 y^2 - x^2 y^1 + x^3 y^3$$

si costruisca una base ortonormale (rispetto a  $\prec \cdot, \cdot \succ$ ) per il sottospazio

$$W = L((1, 1, 1), (1, 0, 1), (3, 2, 3))$$

Si estenda poi tale base ad una base ortonormale (rispetto a  $\prec \cdot, \cdot \succ$ ) per  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 36.** Fissato in  $\mathbb{R}^3$  il prodotto scalare standard, determinare i prodotti vettoriali  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$  e  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$  e il prodotto misto  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle$ , dove

$$\mathbf{u} = (3, 1, 2), \quad \mathbf{v} = (5, 0, -1) \quad \mathbf{w} = (1, 2, 3)$$

**Esercizio 37.** Siano  $P_1 \equiv (3, 2)$ ,  $P_2 \equiv (1, 1)$  e  $P_3 \equiv (5, -1)$  tre vertici consecutivi di un parallelogramma del piano euclideo  $\mathcal{E}^2$ . Trovare:



- (a) le equazioni dei lati del parallelogramma;
- (b) il quarto vertice  $P_4$ ;
- (c) le equazioni delle diagonali e il loro punto di intersezione.

**Esercizio 38.** Data nel piano euclideo  $\mathcal{E}^2$  la retta  $r$  di equazione  $x + 2y + 3 = 0$ , trovare:

- (a) la retta  $s$  perpendicolare ad  $r$  e passante per  $P \equiv (0, 1)$ ;
- (b) la retta  $t$  parallela ad  $r$  e passante per  $Q \equiv (1, 0)$ ;
- (c) il punto  $B$  appartenente ad  $r$  tale che l'area del triangolo  $ABC$  sia 28, con  $A \equiv (-3, 0)$  e  $C = s \cap t$ .

**Esercizio 39.** Nel piano euclideo  $\mathcal{E}^2$  si considerino le rette

$$r : x + 3y + 1 = 0 \quad s : 3x + 4y - 2 = 0.$$

Nel fascio di rette da esse individuato determinare:

- (a) le equazioni delle rette parallele agli assi coordinati;
- (b) l'equazione della retta parallela alla retta  $t : 3x - y + 3 = 0$ ;
- (c) l'equazione della retta perpendicolare alla retta  $p : 4x - 3y - 12 = 0$ ;
- (d) le equazioni delle rette aventi distanza 1 dall'origine  $O$  del riferimento.

**Esercizio 40.** Trovare le equazioni cartesiane della retta dello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$ :

- (a) contenente i punti  $A \equiv (1, 0, 1)$  e  $B \equiv (1, 2, 3)$ ;
- (b) contenente il punto  $A \equiv (1, 0, 1)$  e parallela alla retta  $r : \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$ ;
- (c) contenente il punto  $A \equiv (1, 0, 1)$  e perpendicolare al piano  $\alpha : x + 2y - 3z + 5 = 0$ .

**Esercizio 41.** Trovare il piano dello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$ :

- (a) contenente i punti  $A \equiv (1, 2, 0)$ ,  $B \equiv (0, 0, -3)$  e  $C \equiv (2, 0, -1)$ ;
- (b) contenente il punto  $A \equiv (1, 2, 0)$  e parallelo al piano  $\sigma : 2x - 3y + 7z - 3 = 0$ ;
- (c) contenente il punto  $A \equiv (1, 2, 0)$  e perpendicolare alla retta  $r : \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$ ;
- (d) contenente il punto  $A \equiv (1, 2, 0)$  e la retta  $s : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - z - 5 = 0 \end{cases}$

**Esercizio 42.** Nello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$ , si considerino le rette

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

- (a) Stabilire la mutua posizione di  $r$  ed  $s$ ;
- (b) calcolare la distanza tra  $r$  ed  $s$ .
- (c) Scrivere le equazioni della retta  $t$  passante per  $P \equiv (1, 0, 0)$  e ortogonale ad  $r$  e ad  $s$ ;
- (d) scrivere l'equazione del piano passante per  $P$  e ortogonale a  $t$ .

**Esercizio 43.** Nello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$ , é data la retta  $s$  passante per il punto  $A \equiv (-1, 3, 0)$  ed avente coefficienti direttori  $(1, 2, 2)$ .

- (a) Stabilire, al variare del parametro reale  $\lambda$ , la mutua posizione tra  $s$  e la retta

$$r_\lambda : \begin{cases} \lambda x - 2y + (\lambda - 1)z + 7 = 0 \\ 2x - y + (\lambda - 2)z - 2 = 0 \end{cases}$$

- (b) determinare, se esistono, i valori del parametro  $\lambda$  tali che  $s$  ed  $r_\lambda$  siano tra loro ortogonali;
- (c) trovare le equazioni dei due piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , ortogonali ad  $s$  ed aventi distanza  $d = 2$  dal punto  $A$ .

**Esercizio 44.** Nello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$ , si considerino le rette  $r_\alpha$  ed  $s_\alpha$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$r_\alpha : \begin{cases} (3 - \alpha)x - 3y + 5z = 3 - \alpha \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \quad s_\alpha : \begin{cases} 3y + 2z = \alpha \\ (1 - \alpha)x - 2y + (1 + \alpha)z = 1 - \alpha \end{cases}$$

- (a) Studiare la mutua posizione di  $r_\alpha$  ed  $s_\alpha$ , al variare di  $\alpha$ .
- (b) Nei casi in cui  $r_\alpha$  ed  $s_\alpha$  sono distinte e complanari, scrivere l'equazione del piano che le contiene.

**Esercizio 45.** Studiare, al variare del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la mutua posizione della retta

$$r_\lambda : \begin{cases} 3(\lambda - 2)x + 3y + \lambda z = \lambda \\ x + 2y + 2z = \lambda - 1 \end{cases}$$

e del piano  $\pi_\lambda : x + (\lambda - 2)y + (\lambda - 2)z = 1$  nello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$ .

Posto  $\lambda = 4$ , determinare:

- (a) il piano contenente  $r$  e ortogonale a  $\pi$ ;
- (b) il piano contenente  $r$  e parallelo a  $\pi$ .

**Esercizio 46.** Nello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$ , si considerino i piani

$$\pi_1 : x + y - z = 0 \quad \pi_2 : x - y - 2z = -1$$

- (a) Si determini il piano  $\pi_3$ , parallelo al piano  $\alpha : 4x - 6z - 3 = 0$  ed appartenente al fascio  $\mathcal{F}$  individuato da  $\pi_1$  e  $\pi_2$ ;

- (b) si calcoli la distanza dell'origine del riferimento dalla retta  $r$ , asse del fascio  $\mathcal{F}$ ;  
 (c) si determini il punto equidistante dai piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  ed appartenente al semiasse positivo delle ascisse.

**Esercizio 47.** Nello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$ , si considerino i punti  $A \equiv (1, 0, 0)$ ,  $B \equiv (1, 0, -1)$  e la retta  $r : x + 2 = y = z - 1$ .

- (a) Scrivere l'equazione del piano  $\alpha$  passante per  $A$  e per  $B$  e parallelo ad  $r$ ;  
 (b) scrivere l'equazione del piano  $\beta$  contenente  $r$  e che interseca i due piani  $\pi_1 : x + y + 3 = 0$  e  $\pi_2 : 5x - z - 1 = 0$  in due rette tra loro parallele;  
 (c) determinare i punti  $C$  della retta  $r$  che formano con  $A$  e  $B$  un triangolo di area  $\frac{3}{2}$ .

**Esercizio 48.** Nello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$ , si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2z \end{cases} \quad s : \begin{cases} y = z + 2 \\ x - y = z \end{cases}$$

- (a) Stabilire la mutua posizione di  $r$  ed  $s$ .  
 (b) Detti  $R$  ed  $S$  i punti di intersezione di  $r$  ed  $s$  rispettivamente con i piani coordinati  $xz$  e  $xy$ , determinare il volume del tetraedro  $OPRS$ , con  $O \equiv (0, 0, 0)$  e  $P \equiv (1, 1, 1)$ .

**Esercizio 49.** Nello spazio euclideo  $\mathcal{E}^3$  si considerino i punti  $P \equiv (0, 0, 1)$ ,  $Q \equiv (0, 1, 0)$  e le rette

$$r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad r' : \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = -s \\ z = 1 - 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

- (a) Calcolare la distanza tra  $r$  ed  $r'$ .  
 (b) Detta  $r''$  la retta contenente i punti  $P$  e  $Q$ , determinare la retta incidente le rette  $r$  ed  $r'$  e parallela ad  $r''$ .

**Esercizio 50.** Si consideri la retta  $r : 6x + 8y - 3 = 0$  del piano euclideo  $\mathcal{E}^2$ . Determinare:

- (a) le coordinate della proiezione ortogonale  $P'$  del punto  $P \equiv (2, 2)$  sulla retta  $r$ ;  
 (b) le coordinate del simmetrico  $P''$  del punto  $P$  rispetto alla retta  $r$ ;  
 (c) l'equazione cartesiana della retta  $r'$  simmetrica di  $r$  rispetto alla retta  $s : 4x - 3y - 12 = 0$ ;  
 (d) le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette  $r$  ed  $s$ .

**Esercizio 51.** Nel piano euclideo  $\mathcal{E}^2$ , scrivere le equazioni della simmetria ortogonale rispetto alla retta  $r : x - 2y + 5 = 0$ . Determinare l'immagine del punto  $P \equiv (2, -1)$ .