به نام خدا

مجموعه تمارین نظریه اعداد جلسه اول دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۴۰۱

مباحث مقدماتی

۱. فرض کنید $n \geq 2$ عددی طبیعی باشد و $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ تمام مقسوم‌علیه های n باشند. قرار دهید $A = d_1d_2 + \cdots + d_{k-1}d_k$. ثابت کنید $A < n^2$ و سپس تمام مقادیر طبیعی n را بیابید که $A \mid n^2$.

۲. آیا دنباله نامتناهی $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ از اعداد طبیعی موجود است به نحوی که داشته باشیم :

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : \quad \gcd(a_i, a_j) = 1 \iff \mid i - j \mid = 1$$

۳. فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی‌اند به نحوی که برای هر $n \in \mathbb{N}$، مقدار $2^n a + b$ مربع یک عدد طبیعی است. ثابت کنید $a = 0$.

۴. تمام توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید به طوری که برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $f(n) \mid f(m) + n - m$.

۵. فرض کنید $a_1 \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی است و $a_{n+1} = a_n + b_n$ که b_n بیانگر یکان a_n است. ثابت کنید در این دنباله نامتناهی توان دو وجود دارد اگر و فقط اگر $5 \nmid a_1$.

۶. تمام مقادیر طبیعی a_1 را بیابید به طوری که دنباله بازگشتی $a_{n+1} = 3a_n - 2\lfloor \sqrt[3]{a_n} \rfloor$ کراندار باشد.

۷. فرض کنید $b, n \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی هستند به طوری که برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، عدد طبیعی $a_k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به نحوی که $k \mid b - {a_k}^n$. ثابت کنید b توان nاُم کامل یک عدد طبیعی است.

۸. فرض کنید p_k برابر با kاُمین عدد اول باشد. تعریف می‌کنیم $u_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، بین u_n, u_{n+1} حداقل یک مربع کامل وجود دارد.

۹. فرض کنید $f : \mathbb{Z}^{\aleph_0} \to \mathbb{Z}$ یک تابع با خواص زیر باشد :

(آ) جمعی باشد، یعنی : $f(A+B) = f(A) + f(B) \quad : \quad \forall A, B \in \mathbb{Z}^{\aleph_0}$.

(ب) برای هر بردار یکه واحد مثل $e_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$ داشته باشیم $f(e_i) = 0$.

ثابت کنید $f(1, 2, 4, 8, \cdots) = 0$. سپس ثابت کنید $\forall A \in \mathbb{Z}^{\aleph_0} : f(A) = 0$.

۱۰. فرض کنید $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد طبیعی باشد به طوری که $a_0 > 1$ و همچنین $a_{n+1} = P(a_n) + 2020$ که در آن $P(a_n)$ برابر با بزرگترین عامل اول a_n است. ثابت کنید دنباله مذکور کران دار است.

۱۱. برای هر $N \in \mathbb{N}$ فرض کنید $f(N)$ برابر با تعداد جفت های $a, b \in \mathbb{N}$ باشد به طوری که $N \mid \frac{ab}{a+b}$. ثابت کنید $f(N)$ همواره مربع کامل عددی طبیعی است.

۱۲. ثابت کنید نامتناهی $n \in \mathbb{N}$ موجود است به نحوی که $n^2 + 1$ عامل اولی بزرگتر از $2n + \sqrt{2n}$ داشته باشد.

۱۳. آیا زیرمجموعه های $A_1, A_2, \cdots \subset \mathbb{N}$ وجود دارند به طوری که داشته باشیم : $\forall i \neq j : \mid A_i \cap A_j \mid = \gcd(i, j)$.

۱۴. فرض کنید $a > b > c > d$ اعدادی طبیعی باشند و همچنین داشته باشیم : $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d + c - a)$. ثابت کنید $ab + cd$ عددی مرکب است.

۱۵. فرض کنید $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد طبیعی باشد که روی $\mathbb{N}$ پوشاست. همچنین فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی باشند. ثابت کنید اعضای متوالی $y_l, y_{l+1}, \cdots, y_{l+k}$ از این دنباله موجودند به طوری که :

$$y_l + y_{l+1} + \cdots + y_{l+k} \overset{a}{\equiv} b$$

۱۶. فرض کنید p عددی اول و فرد باشد و $\mathbb{S}$ مجموعه ای از $p+1$ عدد صحیح باشد. ثابت کنید اعداد دو به دو متمایز $a_1, \cdots, a_{p-1} \in \mathbb{S}$ موجودند به طوری که :

$$p \mid a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (p-1)a_{p-1}$$

۱۷. فرض کنید $p = 4k + 1$ عددی اول باشد که در آن k عددی طبیعی است. ثابت کنید : $\sum_{i=1}^{k} \lfloor \sqrt{ip} \rfloor = \frac{p^2 - 1}{12}$.

تمارین اضافه

۱. تمام سه‌تایی های $(p,q,r) \in \mathbb{P}$ (مجموعه اعداد اول) را بیابید به طوری که $\frac{r^2+3p}{p+q}, \frac{q^2+9r}{r+p}, \frac{p^2+2q}{q+r} \in \mathbb{N}$.

۲. فرض کنید $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$،$\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد طبیعی باشند به طوری که سه شرط زیر را دارا باشند :

(آ) $a_1 \geq 2$

(ب) برای هر $i \in \mathbb{N}$، عدد p_i کوچکترین عامل اول a_i است.

(ج) برای هر $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_{i+1} = a_i + \frac{a_i}{p_i}$

ثابت کنید $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که داشته باشیم :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad : \quad a_{n+3} = 3a_n$$

۳. فرض کنید $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد طبیعی باشد. همچنین می‌دانیم $a_1, \cdots, a_k$ اعدادی متمایز هستند و برای هر $n > k$، عدد a_n کوچکترین عدد طبیعی است که برابر جمع تعدادی از اعداد $a_1, \cdots, a_{n-1}$ نیست. ثابت کنید $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که داریم :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad : \quad a_n = 2a_{n-1}$$

۴. تمام توابع یک به یک $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید به طوری که برای هر $\mathbb{S} \subset \mathbb{N}$ متناهی که به ازای آن $\displaystyle\sum_{s \in \mathbb{S}} \frac{1}{s} \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $\displaystyle\sum_{s \in \mathbb{S}} \frac{1}{f(s)} \in \mathbb{N}$.