به نام خدا

مجموعه تمارین نظریه اعداد جلسه پنجم دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۴۰۱

مبحث مرتبه و قضایای مربوطه

۱. فرض کنید $n_1, n_2, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ داده شده باشند به طوری که داریم : $k \geq 2$ و همچنین $\forall 1 \leq i \leq k : n_i \mid 2^{n_{i+1}} - 1$. $(n_{k+1} = n_1)$
ثابت کنید تمام n_i ها با هم برابرند.

۲. تمام اعداد $p, q \in \mathbb{P}$ را بیابید به طوری که $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

۳. فرض کنید $a \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد. برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ مقدار $\gcd(a^m + 1, a^n + 1)$ را بیابید

۴. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، مقدار طبیعی $m \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $2^n \mid 5^m + 3$.

۵. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ یک چندجمله‌ای غیر ثابت باشد. ثابت کنید تعداد $n \in \mathbb{N}$ هایی که $\gcd(2^{2^n} + 1, P(n)) > 1$ برقرار باشد متناهی است.

۶. فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$ اعدادی فرد با مجموعه عوامل اول یکسان باشند و $n \mid m$. ثابت کنید :

$$\forall a \in \mathbb{N} : \gcd(a, n) = \gcd(a, m) = 1 \implies \operatorname{Ord}_m(a) = \operatorname{Ord}_n(a) \cdot \frac{m}{\gcd(m, a^{\operatorname{Ord}_n(a)} - 1)}$$

۷. تمام اعداد $p, q, r \in \mathbb{P}$ را بیابید به طوری که روابط $r \mid p^q + 1 \quad , \quad q \mid r^p + 1 \quad , \quad p \mid q^r + 1$ همزمان برقرار باشند.

۸. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول باشد. ثابت کنید نامتناهی عدد اول $a \in \mathbb{P}$ موجود است به طوری که $q \overset{p}{\equiv} 1$.

۹. ثابت کنید برای هر $n > 2$ بزرگترین عامل اول $2^{2^n} + 1$ بزرگتر یا مساوی با $n \cdot 2^{n+2} + 1$ است.

۱۰. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد. همچنین فرض کنید $(p-1)^p + 1 = \prod_{i=1}^{n} q_i^{\alpha_i}$. ثابت کنید $\sum_{i=1}^{n} q_i \alpha_i > p^2$.

۱۱. فرض کنید $a \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد. ثابت کنید $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $a^n - 1$ عامل اولی بزرگتر از $n \log_a(n)$ داشته باشد.

۱۲. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ داده شده باشد به طوری که $p \overset{4}{\equiv} 1$ و همچنین $p^2 \mid 2^p - 2$. ثابت کنید اگر q بزرگترین عامل اول $2^p - 1$ باشد، آنگاه $2^q > (6p)^p$.

۱۳. تمام زوج‌های $p, q \in \mathbb{P}$ را بیابید به طوری که $p > q$ و همچنین داشته باشیم :

$$\frac{(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1}{(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1} \in \mathbb{Z}$$

۱۴. فرض کنید $a \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید مجموعه $\{\frac{p-1}{\operatorname{Ord}_p(a)} \mid \forall p \in \mathbb{P}\}$ کران بالا ندارد.

۱۵. ثابت کنید برای هر $a, b \in \mathbb{N}$ نامتناهی $p \in \mathbb{P}$ موجود است به طوری که $\operatorname{Ord}_p(a) = \operatorname{Ord}_p(b)$.

۱۶. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول باشد. ثابت کنید عدد اول $q \in \mathbb{P}$ موجود است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه $q \nmid n^p - p$ برقرار باشد.

۱۷. اعداد $a, k \in \mathbb{N}$ داده شده است. ثابت کنید مجموعه $n \in \mathbb{N}$ هایی که همه عوامل اول $a^n - 1$ از k کمتر باشند، متناهی است.

۱۸. تمام توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید به طوری که :

(آ) برای هر $a \in \mathbb{N}$ داشته باشیم : $\operatorname{rad}(a) = \operatorname{rad}(f(a))$ که در آن $\operatorname{rad}(n)$ برابر با حاصل‌ضرب تمام عوامل اول (متمایز) n است.
(ب) برای هر $a, b \in \mathbb{N}$ و هر $p \in \mathbb{P}$ به طوری که $\gcd(a, p) = 1$ داشته باشیم : $\operatorname{Ord}_p\left(a^{f(b)}\right) = \operatorname{Ord}_p\left(f(a)^b\right)$.

تمارین اضافه

۱. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ و $m, n \in \mathbb{N}$ اعدادی بیشتر از ۱ باشند به طوری که $n \mid m^{p(n-1)} - 1$. ثابت کنید $\gcd(m^{n-1} - 1, n) > 1$.

۲. تمام اعداد $p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}$ را بیابید به طوری که $p^n + 1 \mid n^p + 1$.

۳. فرض کنید $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ اعدادی متمایز باشند و $p \in \mathbb{P}$ عددی اول و فرد باشد که نسبت به a, b, c, d اول است. همچنین فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که هر عضو از مجموعه $\{\nu_p(ca^n - db^n) \mid \forall n \in \mathbb{N}\}$ حداکثر برابر با m بوده و همگی هم ناصفر نباشند. ثابت کنید تمام اعضای ناصفر این مجموعه با هم برابرند.