به نام خدا

مجموعه تمارین نظریه اعداد جلسه دوم دوره تابستانی ۱۴۰۱

قضیه باقیمانده چینی

۱. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌توان n عدد طبیعی متوالی یافت به طوری که هیچ یک از آنها توان کامل یک عدد اول نباشند.

۲. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد. تعداد اعداد $x \in \mathbb{Z}_n$ را بیابید به طوری که $x^2 \overset{n}{\equiv} x$ برقرار باشد. همچنین ثابت کنید اگر k تعداد عوامل اول متمایز n باشد، عدد طبیعی $1 < x < \frac{n}{k} + 1$ موجود است به طوری که در رابطه فوق صدق کند.

۳. با اثبات کامل معین کنید، آیا جایگشتی از اعداد طبیعی مانند $\pi_1, \pi_2, \cdots$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم : $n \mid \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n$؟

۴. فرض کنید مجموعه $\{s_1, s_2, \cdots, s_{\varphi(n)}\}$ یک دستگاه مخفف مانده ها به پیمانه $n \in \mathbb{N}$ باشد. تمام اعداد $a \in \mathbb{Z}_n$ را بیابید به طوری که مجموعه $\{s_1 + a, s_2 + a, \cdots, s_{\varphi(n)} + a\}$ هم یک دستگاه مخفف مانده ها به پیمانه n باشد.

۵. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید اعداد صحیح و دو به دو نسبت به هم اول $k_0, k_1, \cdots, k_n$ وجود دارند به طوری که همگی بزرگتر از ۱ باشند و همچنین $k_0 k_1 \cdots k_n - 1$ به صورت ضرب دو عدد صحیح متوالی قابل نمایش باشد.

۶. ثابت کنید هر عدد گویا را می‌توان به صورت $\dfrac{a^7 + b^{19}}{c^{13} + d^{97}}$ نمایش داد.

۷. تمام اعداد $n > 1$ را بیابید به طوری که اعداد طبیعی $b_1, b_2, \cdots, b_n$ وجود داشته باشند که همگی با هم برابر نباشند و همچنین برای هر $k \in \mathbb{N}$ عبارت $(b_1 + k)(b_2 + k) \cdots (b_n + k)$ توان کامل باشد.

۸. آیا تصاعد حسابی با ۱۴۰۱ جمله وجود دارد به طوری که هر عضو آن توان کامل عددی طبیعی باشد؟

۹. ثابت کنید برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ عدد طبیعی k وجود دارد به طوری که $2^k - m$ حداقل n عامل اول متمایز داشته باشد.

۱۰. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ اعداد $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ موجودند به طوری که برای هر $i \neq j$ رابطه $a_i - a_j \mid a_i$ برقرار باشد.

۱۱. ثابت کنید دنباله صعودی $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که (الف) برای هر $k \in \mathbb{N}$ (ب) برای هر $k \in \mathbb{Z}$، دنباله $\{a_i + k\}_{i \in \mathbb{N}}$ تنها شامل متناهی عدد اول باشد.

۱۲. فرض کنید n عددی طبیعی و $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ اعدادی طبیعی و متمایز از بازه $[1, n]$ باشند $(k \geq 2)$ به طوری که داشته باشیم :

$$\forall 1 \leq i \leq k - 1 \implies n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$$

ثابت کنید $n \nmid a_k(a_1 - 1)$.

۱۳. فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی باشند به نحوی که داشته باشیم $\varphi(a) = \varphi(b) = k$. ثابت کنید مجموعه k عضوی $\mathbb{S} = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ موجود است به طوری که $\mathbb{S}$ همزمان یک دستگاه مخفف مانده ها به پیمانه a و همچنین یک دستگاه مخفف مانده ها به پیمانه b باشد.

۱۴. ابوالفضل و علیرضا مشغول انجام یک بازی هستند. مجموعه A با متناهی عضو مفروض است و هر دو بازیکن اعضای این مجموعه را می‌دانند. ابتدا علیرضا یک عضو مثل $a \in A$ را انتخاب می‌کند و ابوالفضل نیز عددی دلخواه مثل b بر می‌گزیند که لزوما عضو A نیست. در نهایت علیرضا تعداد مقسوم‌علیه های عدد ab را به ابوالفضل می‌گوید. ثابت کنید ابوالفضل می‌تواند عددش را طوری انتخاب کند که بتواند عدد انتخاب شده توسط علیرضا (a) را بفهمد.

۱۵. ثابت کنید عدد ثابت $c > 0$ موجود است به طوری که اگر $a, b, n \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی باشند و رابطه $\gcd(a+i, b+j) > 1$ برای هر $0 \leq i, j \leq n$ برقرار باشد، آنگاه داشته باشیم $\min(a, b) > (cn)^n$.

۱۶. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه $\mathbb{S}$ شامل n عدد طبیعی وجود دارد به طوری که برای هر دو عضو متمایز $a, b \in \mathbb{S}$، داشته باشیم :

$$a - b \mid a \quad , \quad a - b \mid b \quad , \quad \forall s \in \mathbb{S}, s \neq a, s \neq b \implies a - b \nmid s$$

۱۷. فرض کنید $m_1, m_2, \cdots, m_{2013} > 1$ اعدادی طبیعی و دو به دو نسبت به هم اول باشند و $A_1, A_2, \cdots, A_{2013}$ مجموعه هایی باشند (ممکن است بعضی از این مجموعه ها تهی باشند) به طوری که $A_i \subseteq \{1, 2, \cdots, m_i - 1\}$. ثابت کنید عدد طبیعی N موجود است به طوری که داشته باشیم :

$$N \leq (2|A_1| + 1)(2|A_2| + 1) \cdots (2|A_{2013}| + 1) \quad , \quad \forall 1 \leq i \leq 2013 \implies \nexists a \in A_i : m_i \mid N - a$$

.

تمرینات اضافه

۱. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید مجموعه ای n عضوی از اعداد طبیعی موجود است به طوری که مجموع اعضای هیچ زیرمجموعه‌ای از آن توان کامل عددی طبیعی نباشد. سپس ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید مجموعه ای n عضوی از اعداد طبیعی موجود است به طوری که مجموع اعضای هر زیرمجموعه ای از آن توان کامل عددی طبیعی باشد.

۲. همه سه تایی های اعداد طبیعی مثل (a,b,c) را بیابید به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ به طوری که n هیچ عامل اولی کمتر از 2014 نداشته باشد، داشته باشیم : $n+c \mid a^n+b^n+n$.

۳. برای هر مجموعه متناهی X، مقادیر $S(X)$ را برابر مجموع اعضای X و $P(X)$ را برابر حاصل‌ضرب تمام اعضای X تعریف میکنیم. فرض کنید A, B دو مجموعه با تعداد اعضای برابر باشند به طوری که $P(A) = P(B)$ اما $S(A) \neq S(B)$. فرض کنید برای هر $n \in A \cup B$، توان تمام عوامل اول n دقیقا برابر با ۳۶ باشد. ثابت کنید :

$$\mid S(A) - S(B) \mid > 5 \times 10^7$$

۴. آیا جایگشتی از اعداد طبیعی مثل $\pi_1, \pi_2, \cdots$ موجود است به طوری که داشته باشیم : (برای هر $n \in \mathbb{N}$ مقدار $\tau(n)$ برابر با تعداد مقسوم علیه های n است)

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \mid \tau(n{\pi_{n+1}}^n + (n+1){\pi_n}^{n+1})$$