Radon ⟵ T_2 تعمیم

i) $n\in\mathbb{N},\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},\ y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}^+ \overset{?}{\Rightarrow} \sum\frac{x_i^2}{y_i}\geq\frac{(\sum x_i)^2}{\sum y_i}$ ✓

Proof: $\sum\frac{x_i^2}{y_i}\sum y_i\geq(\sum x_i)^2$

Equality Case: $\frac{x_i^2/y_i}{y_i}=c \Leftarrow 2\ \frac{|x_i|}{y_i}=c \Rightarrow \frac{|x_1|}{y_1}=\frac{|x_2|}{y_2}=\dots$

ii) $n\in\mathbb{N},\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^+,\ y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}^+,\ m\geq 0 \overset{?}{\Rightarrow} \sum\frac{x_i^{m+1}}{y_i^m}\geq\frac{(\sum x_i)^{m+1}}{(\sum y_i)^m}$

I) $m\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum\frac{x_i^{m+1}}{y_i^m}\underbrace{\sum y_i\sum y_i\cdots\sum y_i}_{m\ \text{بار}}\geq(\sum x_i)^{m+1}$

با حالت خاص II) $m\in\mathbb{Q}$ $\left(\sum\frac{x_i^{\frac{p+q}{q}}}{y_i^{p/q}}\right)^q\overset{?}{\geq}\frac{(\sum x_i)^{p+q}}{(\sum y_i)^p}$ ✓ $\Leftarrow \underbrace{(\sum y_i)^p\left(\sum\frac{x_i^{\frac{p+q}{q}}}{y_i^{\frac{p}{q}}}\right)^q}_{p+q\ \text{تا}} \underset{\text{Hölder}}{\geq}\left(\sum\sqrt[p+q]{\frac{x_i^{p+q}}{y_i^p}\cdot y_i^p}\right)^{p+q}=(\sum x_i)^{p+q}$

III) $m\in\mathbb{R}$ $f(\overbrace{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n}^{X\in(\mathbb{R}^+)^{2n}})=\sum\frac{x_i^{m+1}}{y_i^m}-\frac{(\sum x_i)^{m+1}}{(\sum y_i)^m}$, $X\in(\mathbb{R}^+)^{2n}\Rightarrow\forall m\in\mathbb{R}^+\Rightarrow g(m):=\sum\frac{x_i^{m+1}}{y_i^m}-\frac{(\sum x_i)^{m+1}}{(\sum y_i)^m}$

i) $\forall c\in\mathbb{R}^+\Rightarrow c^x$ پیوسته
ii) $f+g,\ fg$ پیوسته‌اند $\Leftarrow$ f,g پیوسته $f,g>0$
iii) f^m پیوسته $\Leftarrow$ f پیوسته $f>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

: g تابعی پیوسته

$\Rightarrow$ ادعا: f تابعی پیوسته است بطوریکه

$\forall x\in\mathbb{Q}\Rightarrow f(x)\geq 0$

$\Rightarrow\forall x\in\mathbb{Q}'\Rightarrow f(x)\geq 0$

اثبات: با تعریف پیوستگی داریم:

$r\in\mathbb{Q}'\Rightarrow\exists\{q_i\}_{i=1}^{\infty}\Rightarrow\lim_{i\to\infty}q_i=r\Rightarrow\lim_{i\to\infty}(f(r)-f(q_i))=0$

$|f(r)-f(q_i)|>|f(r)|\Leftarrow f(r)<0$ اما

IV) Radon: $\forall n\in\mathbb{N},\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^+,\ y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}^+,\ m\geq 0,\ p\geq 1$

$$\Rightarrow\sum\frac{x_i^{m+p}}{y_i^m}\geq\frac{(\sum x_iy_i^{p-1})^{m+p}}{(\sum y_i^p)^{m+p-1}}$$

Corollary I: Hölder ⟷ Bernoulli ⟷ Radon ⟷ (حالت خاص) رادون ⟷ ینسن وزن دار

Jensen Proof: $U_n(p)=\sum x_iy_i^{p-1},\ Y_n(p)=\sum y_i^p$

$\Rightarrow\sum\frac{x_i^{m+p}}{y_i^m}=Y_n(p)\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}\left(\frac{x_i}{y_i}\right)^{m+p}\overset{?}{\geq}\frac{U_n(p)^{m+p}}{Y_n(p)^{m+p-1}}$

$h(x)=x^{m+p}$ کوژ روی $\mathbb{R}^+$ $\Rightarrow\forall q_1,\dots,q_n\in(0,1],\ \sum q_i=1\Rightarrow\sum q_if(\omega_i)\geq f(\sum q_i\omega_i)$, $\omega_1,\dots,\omega_n\in\mathbb{R}^+$

$q_i:=\frac{y_i^p}{Y_n(p)},\ \omega_i:=\frac{x_i}{y_i}\Rightarrow\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}\left(\frac{x_i}{y_i}\right)^{m+p}\geq\left(\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}\frac{x_i}{y_i}\right)^{m+p}$

$\Rightarrow Y_n(p)\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}\left(\frac{x_i}{y_i}\right)^{m+p}\geq Y_n(p)\Big(\underbrace{\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}\frac{x_i}{y_i}}_{U_n(p)/Y_n(p)}\Big)^{m+p}\overset{?}{\geq}\frac{U_n(p)^{m+p}}{Y_n(p)^{m+p-1}}$ ✓

Bernoulli Inequality:
i) $\forall r\in\mathbb{Z}^{\geq 0},\ x\in\mathbb{R}^{\geq -1}\Rightarrow(1+x)^r\geq 1+rx$, EC: $x=0,\ r=1$ استقرا
ii) $\forall r\in\mathbb{Z}^{\geq 0},\ x\in\mathbb{R}^{\geq -2}\Rightarrow(1+x)^r\geq 1+rx$: حالت تبدیل، استقرا
iii) $\forall r\in\mathbb{R}^{\geq 1},\ x\in\mathbb{R}^{\geq -1}\Rightarrow(1+x)^r\geq 1+rx$
iv) $\forall r\in[0,1],\ x\in\mathbb{R}^{\geq -1}\Rightarrow(1+x)^r\leq 1+rx$ $\Big\}\Rightarrow$ اثبات با مشتق

$\left.\begin{array}{l}\sum\frac{x_i^{m+p}}{y_i^m}\geq\frac{(\sum x_iy_i^{p-1})^{m+p}}{(\sum y_i^p)^{m+p-1}},\quad m=\frac{a}{c}\\ p=\frac{b}{c}\end{array}\right]\Rightarrow b\geq c$

$\Rightarrow\sum\frac{x_i^{\frac{a+b}{c}}}{y_i^{\frac{a}{c}}}\geq\frac{(\sum x_iy_i^{\frac{b-c}{c}})^{\frac{a+b}{c}}}{(\sum y_i)^{\frac{a+b-c}{c}}}$

i) $m\to$ //
ii) $p\to$ استدلال پیوستگی $m,p\in\mathbb{Q}'$

$\Leftrightarrow(\sum y_i)^{\overbrace{a+b-c}^{\geq 0}}\left(\sum\frac{x_i^{\frac{a+b}{c}}}{y_i^{\frac{a}{c}}}\right)^c\underset{\text{Hölder}}{\geq}(\sum x_iy_i^{b-c})^{a+b}\Rightarrow m,p\in\mathbb{Q}$

$U_n(p)=\sum x_iy_i^{p-1},\quad Y_n(p)=\sum y_i^p$

$\sum\frac{x_i^{m+p}}{y_i^m}\geq\frac{U_n(p)^{m+p}}{Y_n(p)^{m+p-1}}\Leftrightarrow\sum\frac{x_i^{m+p}}{y_i^m}\frac{Y_n(p)^{m+p-1}}{U_n(p)^{m+p}}\overset{?}{\geq}1$

$\sum\frac{x_i^{m+p}}{y_i^m}\cdot\frac{Y_n(p)^{m+p-1}}{U_n(p)^{m+p}}=\sum\left(\frac{x_i}{U_n(p)}\right)^{m+p}\frac{Y_n(p)^{m+p-1}}{y_i^m}=\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}\left(\frac{x_iY_n(p)}{y_iU_n(p)}\right)^{m+p}$

$=\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}\Big(1+\underbrace{\frac{x_iY_n(p)-y_iU_n(p)}{y_iU_n(p)}}_{\geq -1}\Big)^{m+p}\overset{\geq 1}{\geq}\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}\left(1+(m+p)\left(\frac{x_iY_n(p)-y_iU_n(p)}{y_iU_n(p)}\right)\right)$

$1=\underbrace{\sum\left(\frac{y_i^p}{Y_n(p)}+(m+p)\left(\frac{y_i^{p-1}x_i}{U_n(p)}-\frac{y_i^p}{Y_n(p)}\right)\right)}\leq\sum\left(\frac{x_i}{U_n(p)}\right)^{m+p}\frac{Y_n(p)^{m+p-1}}{y_i^m}$

$=(m+p)\sum\frac{y_i^{p-1}x_i}{U_n(p)}-(m+p)\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}+\sum\frac{y_i^p}{Y_n(p)}$

$(m+p)\qquad-\qquad(m+p)\qquad+\qquad 1\qquad=1$

Corollary: $n\in\mathbb{N},\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^+,\ y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}^+,\ r,s\in\mathbb{R}^+,\ r\geq s+1$

$\sum\frac{x_i^r}{y_i^s}\geq\frac{(\sum x_i)^r}{(\sum y_i)^s\cdot n^{r-s-1}}$ ⟵ $\boxed{\text{با رادون ثابت کنید}}$

نامساوی حالت تعمیم یافته را ثابت کنید

در حالت خاص T_2: $\boxed{+\max_{i\neq j}\frac{y_ix_j-x_iy_j}{yy_j(y_i+y_j)}}$

Generalized Radon: $\forall n\geq 2,\ p>0,\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^+,\ y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}^+$:

$$\sum\frac{x_i^{p+1}}{y_i^p}\geq\frac{(\sum x_i)^{p+1}}{(\sum y_i)^p}+p\cdot\max_{i\neq j}\frac{(x_i+x_j)^{p-1}(y_ix_j-x_iy_j)^2}{y_iy_j(y_i+y_j)^p}\ ?$$

Corollary: $\sum\frac{x_i^{p+1}}{y_i^p}\geq\frac{(\sum x_i)^{p+1}}{(\sum y_i)^p}+\frac{2p}{n(n-1)}\sum\frac{(x_i+x_j)^{p-1}y_iy_j\left(\frac{x_i}{y_i}-\frac{x_j}{y_j}\right)^2}{(y_i+y_j)^p}$

Proof: $\boxed{n=2\ ?}$

$n>2\Rightarrow$ Let i_0,j_0 Provide the max $\Rightarrow$

$\sum\frac{x_i^{p+1}}{y_i^p}=\sum_{i\neq i_0,j_0}\frac{x_i^{p+1}}{y_i^p}+\underbrace{\left(\frac{x_{i_0}^{p+1}}{y_{i_0}^p}+\frac{x_{j_0}^{p+1}}{y_{j_0}^p}\right)}_{n=2}\geq\frac{(\sum_{i\neq i_0,j_0}x_i)^{p+1}}{(\sum_{i\neq i_0,j_0}y_i)^p}+\frac{(x_{i_0}+x_{j_0})^{p+1}}{(y_{i_0}+y_{j_0})^p}+\text{MAX}$

$\left.\begin{array}{ll}A=\sum x_i & C=x_{i_0}+x_{j_0}\\ B=\sum y_i & D=y_{i_0}+y_{j_0}\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\frac{A^{p+1}}{B^p}+\frac{C^{p+1}}{D^p}\geq\frac{(A+C)^{p+1}}{(B+D)^p}}\Rightarrow\sum\frac{x_i^{p+1}}{y_i^p}\geq\frac{(\sum x_i)^{p+1}}{(\sum y_i)^p}+\text{MAX}$

$\frac{a^{p+1}}{b^p}+\frac{c^{p+1}}{d^p}\geq\frac{(a+c)^{p+1}}{(b+d)^p}+\left(\frac{(a+c)^{p-1}bd\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)^2}{(b+d)^p}\right)p$

$\frac{x^{p+1}}{a^p}+\frac{y^{p+1}}{b^p}-\frac{(x+y)^{p+1}}{(a+b)^p}\geq\frac{p(x+y)^{p-1}(bx-ay)^2}{ab(a+b)^p}$

$\forall p>0,\ 0<u<v$: $pu^{p-1}(v-u)<v^p-u^p<pv^{p-1}(v-u)$

LHS $=\frac{x(bx(a+b))^p+y(ay(a+b))^p-(x+y)(ab(x+y))^p}{a^pb^p(a+b)^p}=$

$\frac{x\Big(\underbrace{(abx+b^2x)^p-(abx+aby)^p}_{v\qquad u}\Big)-y\Big(\underbrace{(abx+aby)^p-(a^2y+aby)^p}_{v\qquad u}\Big)}{a^pb^p(a+b)^p}$, $b(bx-ay)$, $a(bx-ay)$

$\to$ i) $bx\geq ay$
ii) $ay\geq bx$ مشابه (i) حل می‌شود

$\geq\frac{x(p(abx+aby)^{p-1}b(bx-ay))-y(p(abx+aby)^{p-1}a(bx-ay))}{a^pb^p(a+b)^p}$, $a^{p-1}b^{p-1}$

$\overset{?}{\geq}\frac{p(x+y)^{p-1}(bx-ay)^2}{ab(a+b)^p}\Leftrightarrow bx-ay\geq bx-ay$ Q.E.D

تمرین ⟵ $\boxed{\text{@ARYAAAAAN3105}}$

$\sum\frac{a^3}{b+c-a}\geq\frac{(2\sum ab-1)^3}{(4\sum ab-3)^2}$: ثابت کنید $\sum a^2=1$ اعداد حقیقی مثبت باشند بطوریکه a,b,c مسئله: فرض کنید

$\overset{m=1}{\underset{p=2}{\Rightarrow}}\sum\frac{a^3}{b+c-a}\geq\frac{(\sum a(b+c-a))^3}{(\sum(b+c-a)^2)^2}=\frac{(2\sum ab-\sum a^2)^3}{(3\sum a^2-2\sum ab)^2}=\frac{(2\sum ab-1)^3}{(4\sum ab-3)^2}$ Q.E.D