به نام خدا

مجموعه تمارین نظریه اعداد جلسه هفتم دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۴۰۱

مبحث ریشه اولیه

۱. برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $\{a_1, \cdots, a_{\varphi(n)}\}$ دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانه n باشد. مقدار $a_1 \cdots a_{\varphi(n)} \pmod n$ را به دست آورید.

۲. فرض کنید اعداد $a, b, m, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$ داده شده است به طوری که $\gcd(m,n) = 1$ و همچنین $a^n \overset{p}{\equiv} b^m$. ثابت کنید $c \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که داشته باشیم : $b \overset{p}{\equiv} c^n \quad , \quad a \overset{p}{\equiv} c^m$.

۳. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول و فرد باشد و $\mathbb{S}$ مجموعه تمام ریشه‌های اولیه p باشد. ثابت کنید $\prod_{s \in \mathbb{S}} s \overset{p}{\equiv} 1$.

۴. فرض کنید $p > 3$ عددی اول باشد. ثابت کنید جایگشت $\pi_1, \cdots, \pi_{p-1}$ از اعداد $1, \cdots, p-1$ موجود است به طوری که مجموعه $\{\pi_1, \pi_1\pi_2, \pi_1\pi_2\pi_3, \cdots\}$ یک دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانه p باشد.

۵. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول و بزرگتر از ۳ و به فرم $2^n + 1$ باشد. ثابت کنید ۳ ریشه اولیه به پیمانه p است.

۶. فرض کنید $p, q \in \mathbb{P}$ موجود باشند به طوری که $p = 2q + 1$ و همچنین $q \overset{4}{\equiv} 1$. ثابت کنید ۲ ریشه اولیه به پیمانه p است.

۷. حاصل‌ضرب تمام باقی‌مانده‌های ممکن به پیمانه p^2 به طوری که به پیمانه p ریشه اولیه باشند اما به پیمانه p^2 ریشه اولیه نباشند را بیابید.

۸. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول و فرد و g یک ریشه اولیه به پیمانه p باشد. ثابت کنید دقیقا یکی از اعضای مجموعه $\{g, g+p, \cdots, g+(p-1)p\}$ ریشه اولیه به پیمانه p^2 نیست.

۹. فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$ داده شده اند به طوری که a فرد و b زوج است و $\gcd(a, 2^b - 1) = 1$. ثابت کنید $a \mid 1^b + \cdots + a^b$.

۱۰. برای هر $n \in \mathbb{N}$، kتایی $(a_1, \cdots, a_k)$ را یک ابرریشه اولیه می‌نامیم اگر kتایی $(m_1, \cdots, m_k)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in \mathbb{N}$ که نسبت به n اول است، kتایی یکتای $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ موجود باشد به نحوی که $1 \le \alpha_i \le m_i$ و همچنین $a \overset{n}{\equiv} {a_1}^{\alpha_1} \cdots {a_k}^{\alpha_k}$. ثابت کنید هر $n \in \mathbb{N}$ یک ابرریشه اولیه دارد.

۱۱. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول به فرم $9k + 1$ باشد. ثابت کنید $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $p \mid n^3 - 3n + 1$.

۱۲. فرض کنید $p, q \in \mathbb{P}$ اعدادی اول و فرد باشند. ثابت کنید $x \in \mathbb{Z}$ موجود است که $q \mid (x+1)^p - x^p$ اگر و فقط اگر $q \overset{p}{\equiv} 1$.

۱۳. اعداد طبیعی $a, b \in \mathbb{N}$ داده شده‌اند. ثابت کنید نامتناهی $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $n^b + 1 \nmid a^n + 1$.

۱۴. فرض کنید $a \in \mathbb{Z}$ داده شده باشد. تعریف می‌کنیم $f(n) = 101n - 100 \times 2^n$. ثابت کنید برای هر $0 \le a, b, c, d \le 99$ داریم :

$$f(a) + f(b) \overset{10100}{\equiv} f(c) + f(d) \implies \{a, b\} = \{c, d\}$$

۱۵. فرض کنید $p, q \in \mathbb{P}$ اعدادی اول باشند به طوری که $p - 1 = 2q$. ثابت کنید اعداد طبیعی $k, m \in \mathbb{N}$ موجودند به طوری که $k \ge q - 1$ و همچنین $p - 1$ تایی‌های $\left(1^{m^i}, \cdots, (p-1)^{m^i}\right)$ برای هر $0 \le i \le k-1$ دستگاه کامل مانده‌ها باشد و این $k - 1$ تا $p - 1$ تایی دو به دو ترتیب‌های متفاوتی داشته باشند.

۱۶. فرض کنید $n, k \in \mathbb{N}$ داده شده باشند به طوری که k زوج بوده و برای هر $p \in \mathbb{P}, p \mid n$ داشته باشیم : $p - 1 \mid k$. همچنین فرض کنید $\{a_1, \cdots, a_{\varphi(n)}\}$ دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانه n باشد. مقدار ${a_1}^k + \cdots + {a_{\varphi(n)}}^k \pmod n$ را به دست آورید.

۱۷. برای هر $n \in \mathbb{N}$ بزرگتر از ۱ ثابت کنید $n \mid (1^{n-1} + \cdots + (n-1)^{n-1}) + 1$ اگر و فقط اگر هر عامل اول $p \mid n$ دارای این خاصیت باشد که $p(p-1) \mid \frac{n}{p} - 1$.

۱۸. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید $a_1, \cdots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}$ موجودند به طوری که اعداد $a_i + a_j$ که در آن $1 \le i, j \le p-1$، به پیمانه $p(p-1)$ دو به دو ناهمنهشت باشند.

۱۹. تمام $p \in \mathbb{P}$ ها را بیابید به طوری که ریشه اولیه g به پیمانه p موجود باشد به طوری که :

$$\{n^2 + 1 \mid 1 \le n \le \frac{p-1}{2}\} \overset{p}{\equiv} \{g^n \mid 1 \le n \le \frac{p-1}{2}\}$$

۲۰. برای هر $p \in \mathbb{P}$ اول و فرد ثابت کنید $x \in \mathbb{Z}$ موجود است به نحوی که $x, 4x$ هر دو ریشه اولیه به پیمانه p باشند.

۲۱. فرض کنید $p > 10^9$ عددی اول باشد به طوری که $4p + 1$ نیز عددی اول است. ثابت کنید بسط اعشاری کسر $\frac{1}{4p+1}$ شامل تمام ارقام $0, \cdots, 9$ می‌باشد.

تمارین اضافه

۱. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد به طوری که $\varphi(p-1) > \frac{p-1}{3}$. ثابت کنید p دو ریشه اولیه متوالی دارد.

۲. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول بوده و $k = \omega(n)$ که در آن $\omega(n)$ برابر تعداد عوامل اول متمایز n است. همچنین فرض کنید $p > \left(\frac{p-1}{\varphi(p-1)}\right)^2 \times 2^{2k+2}$. ثابت کنید در هر بازه از اعداد طبیعی متوالی به طول $2\lfloor \frac{2^k(p-1)\sqrt{p}}{\varphi(p-1)} \rfloor - 1$ حداقل یک ریشه اولیه از p موجود است.

۳. (اختیاری) فرض کنید $\epsilon > 0$ عددی حقیقی و مثبت باشد. ثابت کنید $c \in \mathbb{R}$ موجود است به طوری که هر عدد اول و فرد، ریشه اولیه‌ای کمتر از $cp^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ داشته باشد.

۴. (اختیاری) ثابت کنید هر عدد اول به اندازه کافی بزرگ مثل p دارای ریشه اولیه‌ای کمتر از p است که نسبت به $p-1$ اول است.