به یاد رایین

# گونای گراف و حدس Heawood

آرین همتی *

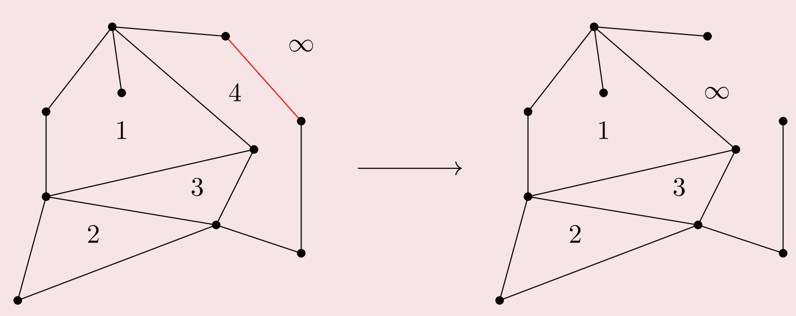
**چکیده**

اگر در زمینه گراف‌ها مطالعه کرده باشید احتمالاً به فرمول معروف اویلر برای گراف‌های مسطح برخورده‌اید. رابطه‌ای که بیان می‌دارد اگر یک گراف مسطح، (گرافی که به نحوی رسم شده است که یال‌های متفاوت آن با یکدیگر تقاطع ندارند) متناهی و همبند را روی صفحه در نظر بگیرید، رابطه $|V|-|E|+|F|=2$ برای این گراف برقرار است که در آن $|V|$ تعداد رئوس، $|E|$ تعداد یال‌ها و $|F|$ تعداد ناحیه‌های تشکیل شده در صفحه توسط گراف است. (تعریف دقیق $F$ نیاز به تعاریف اولیه دارد که در ادامه ذکر خواهند شد) از آنجا که طبیعتاً این رابطه برای خانواده بسیار بزرگی از گراف‌ها برقرار نیست، طبیعی‌ست به ذهن برسد که آیا این عدد $2$ ارتباطی به مسطح بودن گراف دارد و مهم‌تر از آن اینکه در حالات دیگر، عدد $|V|-|E|+|F|$ نشان‌دهنده چه واقعیتی درباره گراف است؟

تا قبل از ارائه تعاریف دقیق ریاضیاتی از ''تعداد نواحی'' و ''گراف مسطح'' به تعاریف شهودی خود درباره این مفاهیم اکتفا کنید. (گراف مسطح گرافی‌ست که بتوان آن را به نحوی در صفحه رسم کرد که یال‌های متفاوت جز در راس های مشترک، تقاطعی با یکدیگر نداشته باشند) همچنین دقت کنید دقیق‌تر است به جای ''گراف مسطح'' از عبارت ''رسم مسطح یک گراف'' استفاده کنیم چون طبیعتاً یک گراف مسطح می‌تواند به نحوی در صفحه رسم شود که یال‌های متفاوت آن با یکدیگر تقاطع داشته باشند و در واقع گراف مسطح گرافی‌ست که رسم مسطح داشته باشد. شایسته است در ابتدا تعدادی از قضایای اولیه درباره رابطه اویلر را ثابت کنیم:

**قضیه ۱.** در هر رسم مسطح از یک گراف مسطح متناهی و همبند، رابطه $|V|-|E|+|F|=2$ برقرار است.

**اثبات ۱.** توجه کنید ناحیه بینهایت صفحه نیز یکی از ناحیه‌های گراف محسوب می‌شود و در نتیجه $|F|$ همواره یک عدد مثبت خواهد بود. به استقرا روی $|F|$ حکم را ثابت می‌کنیم. به عنوان پایه استقرا فرض کنید $|F|=1$. دقت کنید چنین گرافی نباید دارای دور باشد. (چون قسمتی از رسم مسطح گراف که مربوط به یک دور در گراف است صفحه را به دقیقاً دو مولفه همبندی افراز می‌کند و در نتیجه گراف صفحه را به حداقل دو مولفه همبندی افراز می‌کند. (اثبات دقیق این ادعا نیازمند قضیه خم جردن است) در نتیجه چون گراف ما همبند و بدون دور است، باید یک درخت باشد و طبق یک نتیجه مقدماتی از نظریه گراف می‌دانیم در یک درخت داریم $|E|=|V|-1$. در نتیجه $|V|-|E|+|F|=|V|-(|V|-1)+1=2$ که حکم را برای پایه استقرا ثابت می‌کند. حال برای اثبات گام استقرا فرض کنید حکم برای هر گرافی که تعداد نواحی آن از $n$ کم‌تر باشد درست باشد. برای یک گراف با $|F|=n+1$، از آنجا که $|F|\geq 2$، ناحیه‌ای از گراف وجود دارد که مرز آن با مرز ناحیه بینهایت یال مشترک دارد. ابتدا دقت کنید با حذف این یال همبندی گراف حفظ می‌شود. (چون این یال روی مرز یک ناحیه قرار دارد که یک دور است و در نتیجه یال برشی نیست) سپس توجه کنید با حذف این یال مقادیر $|E|,|F|$ دقیقا یک واحد کاسته می‌شوند و در نتیجه طبق فرض استقرا برای گراف‌های با $n$ ناحیه داریم $|V|-|E|+|F|=|V|-(|E|-1)+(|F|-1)=2$ که اثبات را کامل می‌کند.




مثالی از روند استقرایی استفاده شده در اثبات

*aryanhemmati۱۳۸۲@gmail.com

**نتیجه ۱.** مقدار $|F|$ برای هر رسم مسطح از یک گراف مسطح ثابت است و در نتیجه خاصیتی از گراف است.

**نتیجه ۲.** برای هر گراف مسطح متناهی و همبند با حداقل $3$ راس، رابطه $|E| \leq 3|V| - 6$ برقرار است.

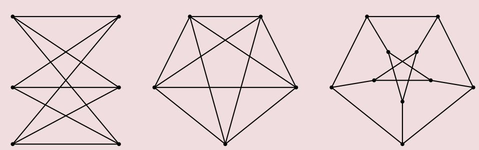
**اثبات ۲.** در هر گرافی غیر از مسیر به طول $2$، تعداد راس‌ها (و در نتیجه یال‌ها) روی مرز هر ناحیه حداقل $3$ خواهد بود و در نتیجه درجه هر ناحیه (یا معادلاً درجه راس مربوط به آن ناحیه در گراف دوگان) حداقل $3$ خواهد بود و در نتیجه مجموع درجات رئوس گراف دوگان حداقل برابر با $3|F|$. از طرفی از آنجا که هر یال یا مرز دو ناحیه مجاور است و یا تنها روی مرز یک ناحیه قرار دارد. (مانند یال موجود در ناحیه $1$ شکل اثبات قضیه $1$) در حالت اول این یال یک بار در شمارش درجه هر یک از دو ناحیه مجاور شمرده شده است و در حالت دوم هم این یال یک طوقه روی راس مربوط به این ناحیه در گراف دوگان ایجاد می‌کند. در نتیجه هر یال دقیقاً $2$ واحد مجموع درجات رئوس گراف دوگان را افزایش می‌دهد و این مجموع برابر با $2|E|$ خواهد بود. از ترکیب این دو نتیجه خواهیم داشت $2|E| \geq 3|F|$. اما حال از رابطه اویلر داریم:

$$2 = |V| - |E| + |F| \leq |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| = |V| - \frac{1}{3}|E| \implies 6 \leq 3|V| - |E| \implies |E| \leq 3|V| - 6$$

**نتیجه ۳.** در یک گراف مسطح متناهی با حداقل $3$ راس و بدون مثلث، رابطه $|E| \leq 2|V| - 4$ برقرار است.

**اثبات ۳.** فرض کنید گراف داده شده همبند باشد. توجه کنید مرز هر ناحیه با توجه به فرض مسئله حداقل شامل $4$ یال است و در نتیجه اگر مشابه اثبات اخیر عمل کنیم خواهیم داشت $2|E| \geq 4|F| \iff |E| \geq 2|F|$ و در نتیجه مشابهاً با استفاده از رابطه اویلر حکم اثبات می‌شود. حال حکم را برای گراف دلخواه ثابت کنید.

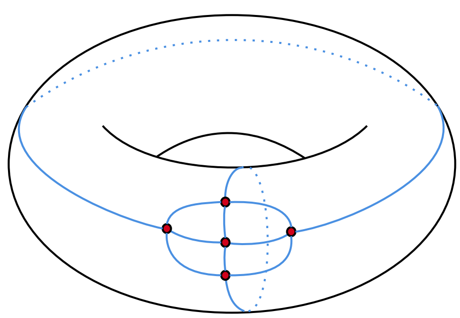
**مسئله ۱.** ثابت کنید گراف پترسن، گراف $K_5$ و گراف $K_{3,3}$ مسطح نیستند.



حال که قضایای ابتدایی را اثبات کردیم، می‌توانیم به بیانی دقیق‌تر از عبارات "گراف مسطح" و "ناحیه‌های ایجاد شده توسط گراف" بپردازیم. همانطور که پیش‌تر اشاره شد، منظور از مسطح بودن یک گراف در واقع وجود یک رسم مسطح از آن گراف است. در نتیجه نیاز است در ابتدا منظور از یک رسم مسطح از گراف را به طور دقیق تعریف کنیم.

**تعریف ۱.** اگر ترسیم گراف در صفحه را به صورت یک تابع $\rho : G \to \mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید که هر راس $v \in V(G)$ را به نقطه $\rho(v) \in \mathbb{R}^2$ و هر یال $\overline{uv} = e \in E(G)$ را به مسیری بین $\rho(u), \rho(v)$ روی صفحه می‌برد به طوری که $\rho\big|_V$ یک به یک باشد و همچنین برای هر دو یال متفاوت $e_1, e_2 \in E(G)$ تصویرهای این دو یال $\rho(e_1), \rho(e_2) \in \mathbb{R}^2$) مجموعه‌هایی مجزا باشند، مگر در حالتی که $e_1, e_2$ هر دو به راس $v \in V(G)$ متصل باشند که در این صورت $\rho(e_1) \cap \rho(e_2) = \{\rho(v)\}$. به این نگاشت $\rho$ یک **نشاندن گراف $G$ در صفحه** می‌گوییم.

(انشالله) در مسئله $1$ ثابت کردید گراف $K_5$ مسطح نیست یا نشاندنی از $K_5$ در صفحه وجود ندارد. حال شکل زیر را ببینید:



همانطور که می‌بینید گراف $K_5$ بدون هیچ تقاطع اضافه‌ای روی سطح چنبره نشسته است. بنابراین اگر معیار ما برای مسطح بودن یک گراف، وجود یک نشاندن روی چنبره باشد، $K_5$ نیز یک گراف مسطح خواهد بود. از طرف دیگر می‌توان دید که این گراف 5 ناحیه روی چنبره ایجاد کرده است. در نتیجه با محاسبه $|V|-|E|+|F|$ مقدار صفر را به دست می‌دهد. برای دریافتن معنای در پس این مشاهده، ابتدا نیاز به تعدادی ابزار توپولوژیک داریم.

**مسئله ۲.** هر گراف متناهی نشاندنی روی صفحه دارد اگر و فقط اگر نشاندنی روی پوسته کره داشته باشد.

**مسئله ۳.** ثابت کنید هر گراف مسطح و دلخواه $G$ نشاندنی روی چنبره (پوسته دونات) هم خواهد داشت.

**تعریف ۲.** برای هر $x_0 \in \mathbb{R}^3$ و $r > 0$ **گوی باز** (open ball) به شعاع $r$ و به مرکز $x_0$ را با $B(x,r)$ نمایش می‌دهیم. در نتیجه خواهیم داشت $B(x,r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - x_0| < r\}$. یک زیرمجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^3$ را **باز** می‌نامیم اگر به ازای هر $x \in A$ مقدار به اندازه کافی کوچک $\epsilon > 0$ موجود باشد به طوری که $B(x,\epsilon) \subseteq A$. مکمل یک زیرمجموعه باز را یک زیرمجموعه **بسته** می‌نامیم.

**مثال ۱.** برای هر $x \in \mathbb{R}^3, r > 0$، گوی باز $B(x,r)$ یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^3$ است.

**مثال ۲.** نقاط با مختصات صحیح $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{Z}\}$ یک زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}^3$ است.

**مثال ۳.** تقاط با مختصات گویا $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{Q}\}$ زیرمجموعه‌ای باز و یا بسته نیست.

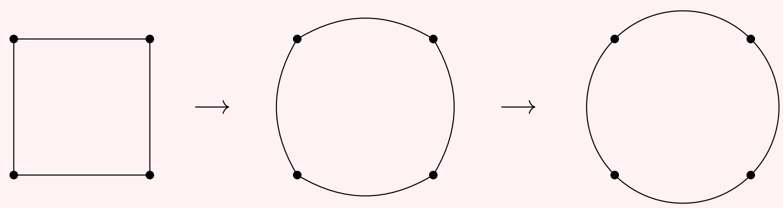
**مسئله ۴.** ثابت کنید یک زیرمجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^3$ بسته است اگر و فقط اگر نقاط حدی خود را دارا باشد. این بدین معناست که اگر دنباله همگرای $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ را در نظر بگیریم به طوری که $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in A$، آنگاه $x \in A$ باشد. برای مثال در گوی باز به مبدا مرکز و شعاع واحد، دنباله نقاط $x_n = (0,0,\frac{n-1}{n})$ از نقاط این گوی را در نظر بگیرید. این دنباله به نقطه $x = (0,0,1)$ میل می‌کند که طبق تعریف، در این گوی باز قرار ندارد. در نتیجه ثابت می‌شود که این گوی باز (و به روش مشابهی، هر گوی باز دیگر) یک زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}^3$ نیست.

**تعریف ۳.** فرض کنید زیرمجموعه‌های باز $A, B \in \mathbb{R}^3$ و تابع $f : A \to B$ داده شده باشند. در این صورت $f$ یک تابع **در $x \in A$ پیوسته** است اگر به ازای هر گوی باز $B(f(x),\epsilon)$ حول نقطه $f(x)$، گوی باز $B(x,\delta)$ حول $x$ وجود داشته باشد به طوری که $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\epsilon)$. طبق تعریف گوی باز می‌توان این شرط را به این صورت نوشت: $\forall \epsilon > 0 : [\exists \delta > 0 : \forall x' \in \mathbb{R}^3 : (|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon)]$ همچنین می‌گوییم تابع $f$ **پیوسته** است اگر در هر $x \in A$ پیوسته باشد.

**تعریف ۴.** فرض کنید زیرمجموعه‌های باز $A, B \in \mathbb{R}^3$ و تابع پیوسته و وارون‌پذیر (یک به یک و پوشا) $f : A \to B$ داده شده باشد به طوری که وارون $f$ (به عنوان تابع $f^{-1} : B \to A$) نیز پیوسته باشد. در این صورت به $f$ یک **همسان‌ریختی** (Homeomorphism) گفته می‌شود و مجموعه‌های $A, B$ **همسان‌ریخت** (Homeomorphic) خواهند بود و می‌نویسیم $A \sim B$.

**مثال ۴.** همچنین ثابت کنید هر دو پاره خط دلخواه در $\mathbb{R}^2$ همسان‌ریخت هستند. ثابت کنید هر دو گوی باز در $\mathbb{R}^3$ همسان ریخت هستند. ثابت کنید هر دو مجموعه باز متشابه یکسان‌ریخت هستند.

مثال ۵. مربع باز $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1, |y|<1\}$ با دایره باز $\{x,y\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}<1\}$ همسان‌ریخت است. تا چه حد می‌توانید این مثال را تعمیم دهید؟



مسئله ۵. مفهوم همسان‌ریختی در توپولوژی معنایی از برابری دو زیرمجموعه از یک فضا را به دست می‌دهد. برای اینکه این مفهوم واقعا خواص برابری را به همراه داشته باشد، ثابت کنید همسان‌ریختی یک رابطه هم‌ارزی روی تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^3$ تولید می‌کند.

رابطه $\sim$ روی اعضای مجموعه $S$ یک رابطه هم‌ارزی است اگر داشته باشیم:

۱. $\forall a\in S : a\sim a$

۲. $\forall a,b\in S : a\sim b \iff b\sim a$

۳. $\forall a,b,c\in S : (a\sim b, b\sim c) \implies a\sim c$

مسئله ۶. ثابت کنید یک رابطه هم‌ارزی روی $S$، مجموعه $S$ را به تعدادی کلاس هم ارزی از اعضای دو به دو هم‌ارز افراز می‌کند. منظور از کلاس هم‌ارزی $a\in S$ مجموعه $[a]=\{b\in S \mid a\sim b\}$ است.

در نتیجه چون همسان‌ریختی یک رابطه هم‌ارزی بین زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^3$ (و در حالت کلی هر $\mathbb{R}^n$) ایجاد می‌کند، می‌توان کلاس‌های همسان‌ریختی زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^3$ را در نظر گرفت. از دیدگاه توپولوژی، دو زیرمجموعه همسان‌ریخت تفاوتی با هم ندارند و در واقع رابطه همسان‌ریختی به معنایی تساوی بین دو فضای توپولوژیک خواهد بود و هر خاصیت توپولوژیک تحت یک همسان‌ریختی حفظ خواهند شد.

نکته ۱. این تعاریف برای هر فضای $\mathbb{R}^n$ قابل تعمیم هستند. خوب است این تعاریف را در $n=2$ بیان کنید.

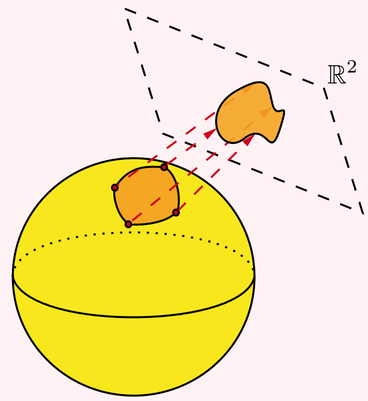
تعریف ۵. منظور از یک مسیر روی $A$ بین نقاط $x,y\in A\subseteq\mathbb{R}^3$ یک همسان‌ریختی $f:[0,1]\to A$ است که $f(0)=x, f(1)=y$.

مسئله ۷. رابطه $\to$ را روی نقاط یک زیرمجموعه $A\subseteq\mathbb{R}^3$ به این صورت تعریف می‌کنیم که $\forall x,y\in A : x\to y$ اگر مسیری از $x$ به $y$ روی $A$ موجود باشد. ثابت کنید این رابطه یک رابطه هم‌ارزی روی نقاط $A$ به دست می‌دهد و در نتیجه $A$ را به تعدادی کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند. به کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه هم‌ارزی، مولفه‌های همبندی $A$ می‌گوییم. اگر $A$ تنها یک مولفه همبندی داشته باشد، آن را همبند می‌نامیم.

و حال بالاخره می‌توانیم یک تعریف دقیق از "ناحیه‌های نشاندن" ارائه دهیم. منظور از ناحیه‌های یک نشاندن $\rho:G\to\mathbb{R}^2$، مولفه‌های همبندی مجموعه $\mathbb{R}^2\setminus\rho(G)$ است که آن را با $F$ نمایش می‌دهیم و در نتیجه $|F|$ تعداد مولفه‌های همبندی خواهد بود. دقت کنید در نشاندن یک گراف متناهی روی صفحه، تمام مولفه‌های همبندی $\mathbb{R}^2\setminus\rho(G)$ به استثنای یک مولفه، کران‌دار هستند و یک مولفه همبندی این مجموعه بدون کران است که به آن ناحیه بینهایت می‌گوییم. دقت کنید این تعریف قویاً وابسته به نگاشت نشاندن $\rho$ است. همچنین توجه کنید برای مثال در یک نشاندن گراف روی پوسته کره، ناحیه بینهایت وجود ندارد و تمام ناحیه‌های نشاندن کران‌دار هستند. (چون در واقع خود پوسته کره یک مجموعه کران‌دار است)

مسئله ۸. در ادامه مسئله 2 ثابت کنید تعداد ناحیه‌های نشاندن یک گراف روی صفحه با تعداد ناحیه‌های نشاندن آن روی پوسته کره برابر است.

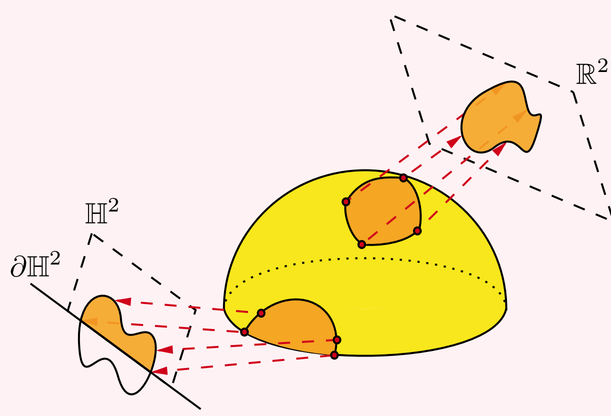
**تعریف ۶.** زیرمجموعه $M \subseteq \mathbb{R}^3$ را یک رویه بدون لبه می‌نامیم اگر موضعاً همسان‌ریخت با صفحه باشد. این بدین معناست که برای هر $x \in M$ و هر گوی باز به اندازه دلخواه کوچک $B(x,\epsilon)$ حول $x$، ناحیه $M \cap B(x,\epsilon)$ همسان‌ریخت با یک مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^2$ باشد. یک رویه لزوماً خود همسان‌ریخت با صفحه نیست. برای مثال می‌توان ثابت کرد پوسته کره همسان‌ریخت با صفحه نیست اما موضعاً همسان‌ریخت با صفحه است.




با کمی دقت می‌توان فهمید مثال‌های بسیاری از اشکالی که در نگاه اول رویه هستند، در واقع یک رویه محسوب نمی‌شوند. برای مثال دایره توپر بسته واحد ($x^2 + y^2 \leq 1$) احتمالاً باید یک رویه در $\mathbb{R}^3$ تشکیل دهد اما با اندکی توجه می‌توان دید که نقاط روی مرز این دایره، هیچ همسایگی (به هر اندازه کوچک) ای از این نقطه روی دایره توپر بسته واحد وجود ندارد که همسان‌ریخت با یک باز از $\mathbb{R}^2$ باشد. در واقع به تعبیری، لبه دایره مانعی از رویه بودن این شکل است. اما از طرف دیگر، رویه‌ها به صورت طبیعی بعد از عملیات‌هایی اعم از "برش زدن" دارای لبه می‌شوند و در نتیجه تعریف رویه نیازمند تعمیم است تا "لبه" را به رسمیت بشناسد!

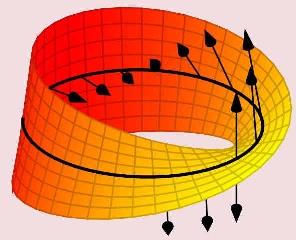
**تعریف ۷.** منظور از نیم‌صفحه نامنفی صفحه حقیقی مجموعه $\mathbb{H}^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \subsetneq \mathbb{R}^2$ می‌باشد. یک زیرمجموعه از $\mathbb{H}^2$ باز نامیده می‌شود اگر اشتراک یک مجموعه باز از $\mathbb{R}^2$ با $\mathbb{H}^2$ باشد (برای مثال نیم‌دایره باز بالای صفحه دکارتی با معادله $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ یک مجموعه باز از $\mathbb{H}^2$ محسوب می‌شود).

**تعریف ۸.** زیرمجموعه $M \subseteq \mathbb{R}^3$ را یک رویه لبه‌دار می‌نامیم اگر زیرمجموعه $\partial M \subseteq M$ موجود باشد به نحوه که برای هر $x \in M \setminus \partial M$ و هر گوی باز به اندازه دلخواه کوچک $B(x,\epsilon)$ حول $x$، ناحیه $M \cap B(x,\epsilon)$ همسان‌ریخت با یک مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^2$ باشد و همچنین برای هر $x \in \partial M$ و هر گوی باز به اندازه دلخواه کوچک $B(x,\epsilon)$ حول $x$، ناحیه $M \cap B(x,\epsilon)$ همسان‌ریخت با یک مجموعه باز $\mathbb{H}^2$ باشد. در این صورت به $\partial M$ لبه رویه $M$ گفته می‌شود.



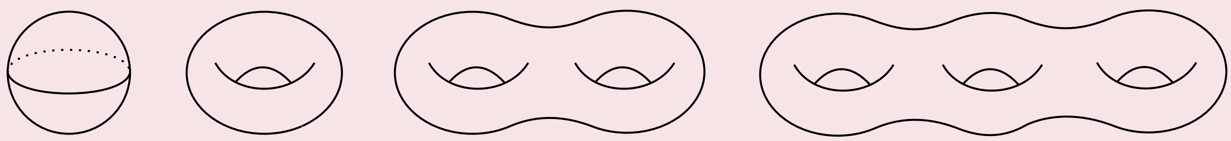

تعریف دقیق رویه جهت‌پذیر نیازمند دانش مقدماتی از هندسه دیفرانسیل است و بنابراین ما اینجا صرفاً به یک تعریف شهودی در این باره بسنده می‌کنیم. چون یک رویه در هر نقطه موضعا شبیه به صفحه و یا نیم‌صفحه است، هر رویه در هر نقطه به طور موضعی دو "سمت" از فضا را مشخص می‌کند. اگر بتوان در هر نقطه از رویه یکی از این دو "سمت" را با استفاده از یک بردار مشخص کرد به طوری که نگاشت نقاط رویه به این بردارها پیوسته باشد، رویه $M$ را جهت‌پذیر می‌نامیم. پوسته کره مثالی از یک رویه جهت‌پذیر است چون به صورت واضحی می‌توان در هر نقطه از آن بردار جهت به سمت مرکز کره را انتخاب کرد و این نگاشت پیوسته خواهد بود. اما نوار موبیوس (Möbius band) مثالی از یک رویه جهت‌ناپذیر است.

**مسئله ۹.** با توجه به تعریف جهت‌پذیری و با استفاده از شکل زیر ثابت کنید نوار موبیوس جهت‌ناپذیر است.



می‌گوییم رویه $M$ **بسته** است اگر کران‌دار بوده و $M \subseteq \mathbb{R}^3$ زیرمجموعه‌ای بسته باشد. (توجه کنید این مفهوم را با صرف مفهوم بسته بودن اشتباه نکنید) حال قضیه‌ای بنیادی در نظریه رویه‌ها به نام ”قضیه رده‌بندی رویه‌های جهت‌پذیر“ را بدون اثبات بیان می‌کنیم که کلاس همسان‌ریختی رویه‌های همبند و بسته و جهت‌پذیر را مشخص می‌کند:

**قضیه ۲.** فرض کنید $M_g$ پوسته یک چنبره با $g$ حفره باشد. در این صورت هر رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر مثل $M$ با دقیقاً یکی از رویه‌های $M_g$ همسان‌ریخت است. در این صورت به $g$ **گونا** (genus) رویه $M$ می‌گوییم و آن را با $\gamma(M)$ نمایش می‌دهیم.

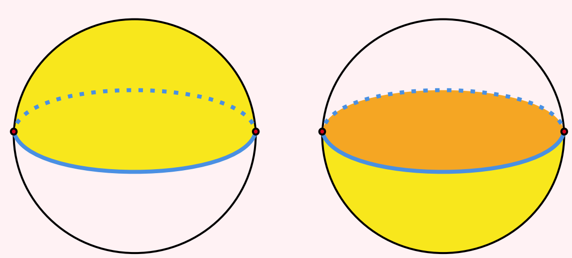


تصویر رویه‌های $M_0, M_1, M_2, M_3$

اما یک گراف چه ارتباطی به یک رویه می‌تواند داشته باشد؟ برای توضیح این ارتباط، ابتدا یک راه ترکیبیاتی برای تعریف رویه‌ها ارائه می‌دهیم (برای رعایت دقت ریاضیاتی، برای ”دور تا دور یک رویه“ به جای واژه ”مرز“ از ”لبه“ استفاده می‌کنیم چون تمام یک رویه در $\mathbb{R}^3$ از لحاظ توپولوژیک مرز محسوب می‌شود.) زین پس واژه ”رویه“ به رویه‌های لبه‌دار یا بدون لبه اطلاق خواهد شد.

**تعریف ۹.** ابتدا مجموعه $X_0$ از نشاندن‌های تعدادی نقطه (گوی توپر صفر بعدی) در $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. (تصویر این نشاندن‌ها یک مجموعه از نقاط در فضا خواهد بود) حال مجموعه $X_1$ از نشاندن‌های تعدادی پاره‌خط واحد (گوی توپر یک‌بعدی) در $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید به طوری که $\forall(\sigma : I \to \mathbb{R}^3) \in X_1 : \sigma\big|_{\partial I} \subseteq X_0$. (منظور از $\partial I$ لبه $I$ است و در نتیجه $\{\partial I = \{0,1$) به بیان دیگر، $X_1$ چسباندن تعدادی پاره‌خط بین نقاط انتخاب شده در $X_0$ است. در آخر مجموعه $X_2$ از نشاندن‌های تعدادی دیسک واحد (گوی توپر دوبعدی) در $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید به طوری که $\forall(\sigma : \mathbb{D} \to I) \in X_2 : \sigma\big|_{\partial\mathbb{D}} \in X_1$. به بیان دیگر، $X_2$ چسباندن تعدادی دیسک روی صفحه است به طوری که لبه آنها روی $X_1$ قرار بگیرد. در این صورت $M := \bigcup X_i \in \mathbb{R}^3$ یک رویه در تعریف می‌کند. در این صورت به مجموعه $X_0$ حاوی نشاندن‌های نقطه در فضا **اسکلت صفرم** (0-skeleton) رویه $M$ می‌گوییم. مشابهاً به $X_1$ **اسکلت اول** (1-skeleton) و همچنین به $X_2$ **اسکلت دوم** (2-skeleton) رویه $M$ می‌گوییم. به این ساختار یک CW-complex برای رویه $M$ گفته می‌شود. دقت کنید ساختار CW-complex مربوط به یک رویه یکتا نیست.

**مثال ۶.** یک CW-complex از پوسته کره: نقاط $X_0$ با رنگ قرمز، یال‌های $X_1$ با رنگ آبی و وجه‌های $X_2$ با رنگ زرد نمایش داده شده‌اند. توجیه کنید که این ساختار یک CW-complex به دست می‌دهد.



تعریف ۱۰. برای یک رویه $M$ مجهز به یک ساختار CW-complex، مشخصه اویلر (Euler characteristic) این رویه را برابر با مقدار $\chi(M) = |X_0| - |X_1| + |X_2|$ تعریف می‌کنیم. می‌توان ثابت کرد فضاهای همسان‌ریخت، مشخصه اویلر یکسانی دارند و در نتیجه مشخصه اویلر یک رویه، مستقل از CW-complex انتخاب شده برای آن است.

گونا و مشخصه اویلر هر دو تحت همسان‌ریختی ناوردا هستند. در واقع بیش از این می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد:

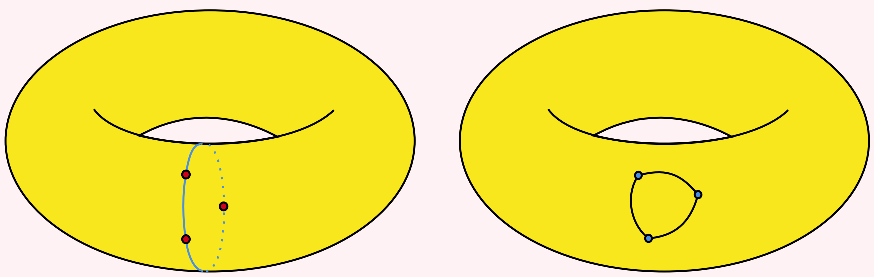
قضیه ۳. برای رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر $M$ رابطه $\chi(M) = 2 - 2\gamma(M)$ بین گونا و مشخصه اویلر برقرار است.

حال فرض کنید $M$ یک رویه همبند مجهز به یک CW-complex باشد. آنگاه توجه کنید که اسکلت اول این CW-complex یک گراف همبند روی رویه $M$ است. (چرا؟) اما اگر یک گراف دلخواه روی رویه $M$ نشانده شده باشد، در صورتی که ناحیه‌های تولید شده توسط این گراف همگی همسان‌ریخت با گوی توپر دوبعدی (دیسک) باشند، می‌توان به سادگی با استفاده از این گراف یک ساختار CW-complex روی $M$ تولید کرد.

تعریف ۱۱. فرض کنید رویه همبند و بسته $M$ و گراف $G$ و نگاشت نشاندن $\rho : G \to M$ داده شده باشد به نحوی که تمام ناحیه‌های تولید شده توسط $G$ روی رویه $M$ همسان‌ریخت با گوی توپر دوبعدی (دیسک) باشد. در این صورت $\rho$ را یک نشاندن دو سلولی می‌نامیم.

نکته ۲. برای گراف $G$ و رویه $M$، تعداد ناحیه‌های $G$ روی رویه $M$ به نگاشت نشاندن وابسته است و با $M, G$ به طور یکتا تعیین نمی‌شود.

مثال ۷. در شکل روبرو گراف مثلث با دو نشاندن متفاوت روی چنبره تصویر شده است. در حالت اول (رنگ قرمز) تعداد نواحی تولید شده توسط گراف روی چنبره $1$ است در حالی که در حالت دوم (رنگ آبی) تعداد این ناحیه‌ها برابر با $2$ است.



تعداد ناحیه‌های تولید شده توسط $G$ روی $M$ توسط نشاندن $\rho$ را با $|F_\rho|$ نشان می‌دهیم که برابر با تعداد مولفه‌های همبندی $M \setminus \rho(G)$ است.

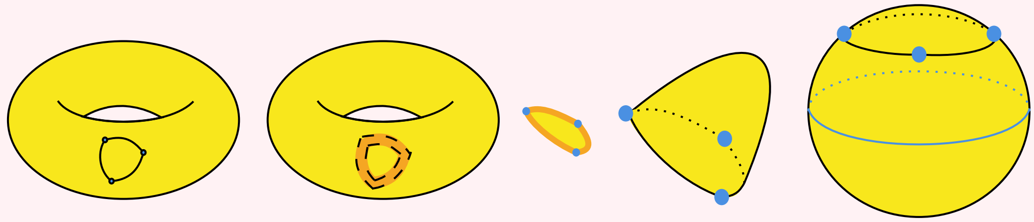
در نتیجه در واقع توانستیم قضیه مهم زیر را ثابت کنیم:

قضیه ۴. رابطه اویلر تعمیم‌یافته: برای هر گراف همبند و متناهی $G$ به طوری که نشاندن دو سلولی $\rho : G \to M$ روی رویه همبند و بسته $M$ وجود داشته باشد، رابطه $|V| - |E| + |F| = \chi(M)$ برقرار است. در حالت $M = \mathbb{R}^2$، این قضیه رابطه اویلر را به دست می‌دهد. (چرا؟)

نتیجه ۴. فرض کنید گراف همبند و متناهی $G$، رویه همبند و بسته دلخواه $M$ و نشاندن‌های دو سلولی $\rho_1, \rho_2 : G \to M$ داده شده باشند. در این صورت تعداد ناحیه‌های تولید شده توسط $G$ روی $M$ با نشاندن‌های $\rho_1, \rho_2$ با هم برابر است. (به بیان دیگر داریم $|F_{\rho_1}| = |F_{\rho_2}|$)

در نتیجه نشاندن‌های دو سلولی خانواده خوش‌رفتاری از نشاندن‌ها برای مطالعه ساختار یک گراف هستند اما همانطور که در مثال 7 دیدید، هر نشاندنی دو سلولی نیست. اما می‌توان امیدوار بود که بتوانیم مولفه‌هایی که همسان‌ریخت با دیسک نیستند را با تعدادی دیسک جایگزین کنیم به طوری که نشاندن گراف روی رویه جدید دو سلولی باشد. ساختار زیر به ما کمک می‌کند هر نشاندن غیر دو سلولی را به یک نشاندن دو سلولی تبدیل کنیم:

تعریف ۱۲. عمل کلاهک‌گذاری[۱]: فرض کنید $\rho : G \to M$ یک نشاندن غیر دو سلولی از یک گراف همبند و متناهی روی یک رویه همبند و بسته باشد. فرض کنید مولفه همبندی $S \subseteq M \setminus \rho(G)$ داده شده باشد به طوری که همسان‌ریخت با دیسک (کره توپر دوبعدی) نباشد. لبه $S$ را با $\partial S$ نشان دهید و تعریف کنید $\overline{S} = S \cup \partial S$. در صورتی که $M \setminus \overline{S}$ یک رویه باشد، می‌توانیم $S$ را از رویه حذف کنیم و یک دیسک (کلاهک قضیه) را طوری روی آن بچسبانیم که لبه دیسک روی $\partial S$ قرار بگیرد. در نتیجه این ناحیه همسان‌ریخت با یک دیسک خواهد شد.



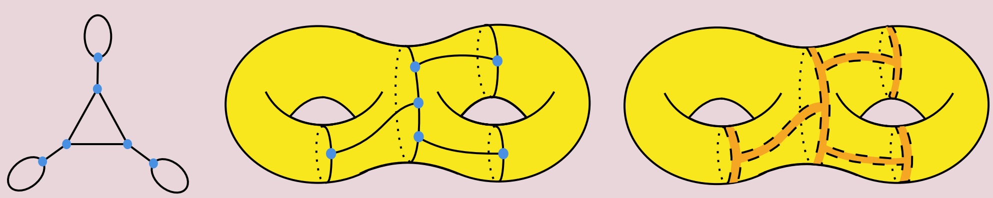
**نکته ۳.** بر خلاف آنچه به نظر می‌رسد، $M \setminus \overline{S}$ لزوماً یک رویه نخواهد بود. به عنوان یک نمونه، شکل دیگر مثال 7 را بررسی کنید.

برای رفع این مشکل یک لم را بدون اثبات بیان کنیم. اهمیت این لم در شهود هندسی آن است بنابراین مثال این لم را به دقت بررسی کنید.

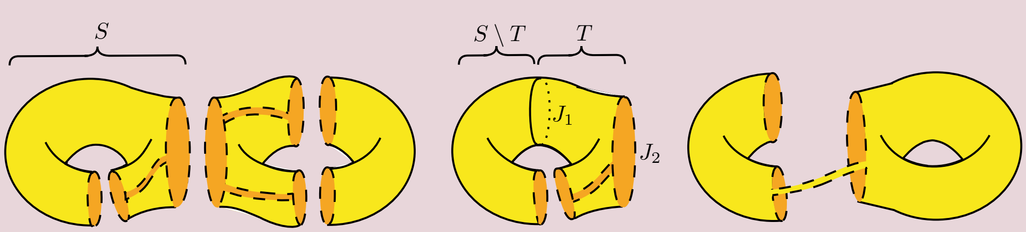
**لم ۱.** اگر $M$ یک رویه همبند و بسته باشد و $\varnothing \neq K \subsetneq M$ یک زیرمجموعه همبند و بسته و کران‌دار باشد (برای مثال نشاندن یک گراف متناهی و همبند روی $M$) و $S$ یک مولفه همبندی از $M - K$ باشد، آنگاه رویه $T \subseteq S$ موجود است به طوری که $\partial T$ متشکل از مولفه‌های همبندی $J_1, \cdots, J_s$ باشد که $J_i$ ها خم‌های بسته ساده باشند. همچنین مولفه‌های همبندی $S \setminus T$ را $L_1, \cdots, L_s$ همگی همسان‌ریخت با استوانه‌های توخالی هستند که از یکی از قاعده‌ها به $J_i$ و از قاعده دیگر به زیرمجموعه‌ای از $K$ چسبیده شده‌اند.

حال با استفاده از این لم می‌توان به جای کل $S$ زیررویه بزرگی از آن را انتخاب کرد به طوری که تضمین شود با کلاهک‌گذاری آن و تبدیل آن به یک ناحیه همسان‌ریخت با دیسک، کل ناحیه $S$ نیز همسان‌ریخت با دیسک خواهد شد. حال این روند را برای تمام ناحیه‌های غیر همسان‌ریخت با دیسک انجام می‌دهیم تا به یک نشاندن دو سلولی برسیم. به این عملیات، کلاهک‌گذاری نشاندن $\rho$ می‌گویند.

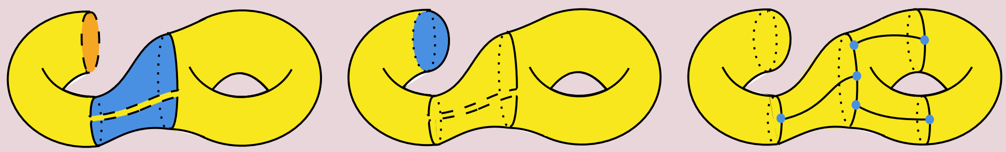
**گام ۱.** برای فهم بهتر از این قضیه، یک مثال را به صورت گام به گام جلو می‌بریم. گراف مسطح زیر را در نظر بگیرید که به نحوه نمایش داده شده روی چنبره با 2 حفره نشانده شده است. انتظار می‌رود طی عملیات کلاهک‌گذاری بتوان این نشاندن را به یک نشاندن روی پوسته کره تبدیل کرد. در ابتدا ناحیه‌های ایجاد شده توسط نشاندن داده‌شده را در نظر می‌گیریم. تعبیر هندسی این عمل بدین صورت است که رویه را در امتداد یال‌های نشاندن داده شده می‌بریم و هر قطعه بریده شده یکی از مولفه‌های همبندی است. (چرا؟)



**گام ۲.** با جدا کردن قطعات بریده شده به سه قطعه نمایش داده‌شده در شکل می‌رسیم. خطوط برش با خط‌چین و خطوط خارج از دید با نقطه‌چین مشخص شده‌اند. همچنین پوسته درونی رویه با رنگ تیره‌تر (نارنجی) تمیز داده شده است. قطعه $S$ را مشابه شکل انتخاب کرده و زیررویه $T$ را از آن انتخاب می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌شود، لبه $T$ شامل دو مولفه همبندی است که هر یک خم بسته ساده هستند. همچنین $T \setminus S$ شامل یک مولفه همبندی است که به وضوح همسان‌ریخت با استوانه توخالی است. همچنین دقت کنید یک سر این استوانه به $J_1$ و سر دیگر آن به یالی از گراف نشانده شده چسبیده است. مطابق روند توضیح داده شده در تعریف، بجای کندن کل ناحیه $S$، صرفاً زیررویه $T$ از آن را از رویه اصلی (چنبره با دو حفره) حذف می‌کنیم تا به شکل سمت راست برسیم.

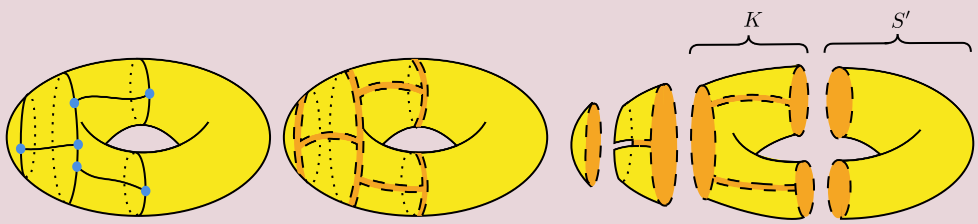


گام ۳. لبه رویه به دست آمده از حذف زیررویه $T$ از روی رویه $S$ دارای دو مولفه همبندی می‌باشد که هر یک از آنها باید همسان‌ریخت با دیسک باشند. (چرا؟ آیا می‌توانید در حالت کلی دلیلی برای این گزاره پیدا کنید؟) بنابراین دو دیسک را می‌توان از روی لبه‌شان به مولفه‌های همبندی لبه رویه به دست آمده چسباند. (دیسک در حال چسبانده شدن به رویه با رنگ آبی نمایش داده شده است) طی این عمل، حفره‌های ایجاد شده روی رویه اصلی به سبب حذف $T$ با تعدادی ''کلاهک'' از جنس دیسک بسته می‌شوند. شکل سمت راست نشاندن گراف روی رویه جدید را نشان می‌دهد که تفاوتی با نشاندن اولیه نکرده است.



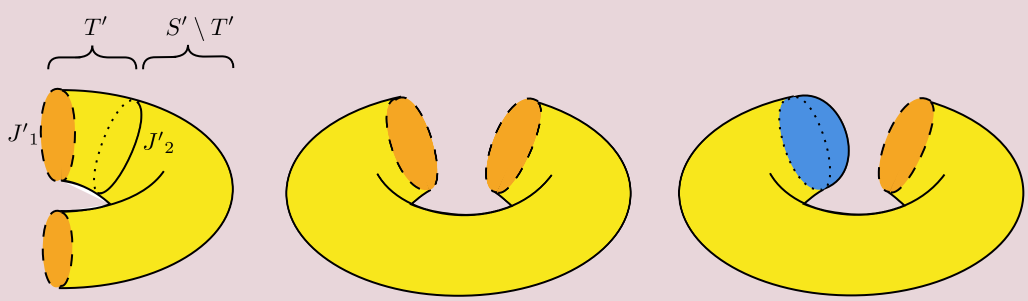
مسئله ۱۰. توجیه کنید که شرط همسان‌ریختی مولفه‌های همبندی $S \setminus T$ با استوانه‌های توخالی چه اثری در روند اثبات دارد.

گام ۴. با کمی دقت متوجه می‌شوید که رویه به دست آمده در شکل آخر گام قبل، در واقع همسان‌ریخت با یک چنبره ساده است. با تبدیل این رویه به چنبره، نشاندنی از گراف داده شده روی چنبره به دست می‌آید که در شکل سمت چپ نمایش داده شده است. در نتیجه عملیات کلاهک‌گذاری موفق بوده و از گونای رویه یکی کاسته شده است. حال مجدداً مشابه گام اول رویه را در امتداد یال‌های نشاندن داده شده برش می‌دهیم و قطعات برش داده شده را از هم جدا می‌کنیم تا شکل سوم به دست بیاید. حال باید یک مولفه همبندی از $M_1 \setminus \rho(G)$ را انتخاب کنیم به نحوی که این ناحیه همسان‌ریخت با یک دیسک نباشد. ناحیه $S'$ را برای ادامه روند انتخاب می‌کنیم.

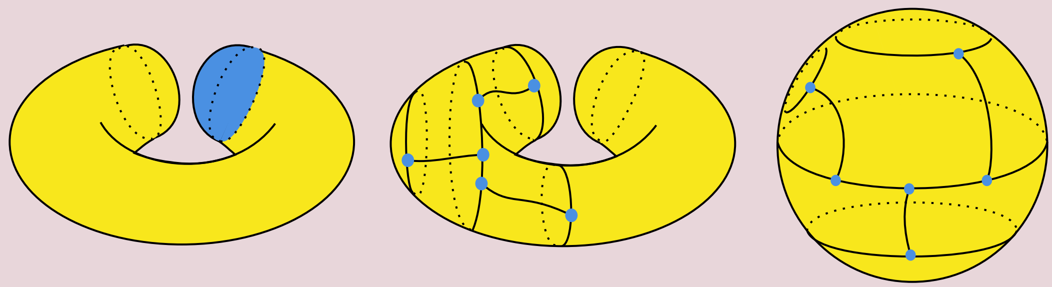



مسئله ۱۱. آیا ناحیه $K$ همسان‌ریخت با یک دیسک است؟ برای پاسخ خود یک استدلال شهودی و هندسی بیاورید.

گام ۵. طبق لم زیررویه $T'$ موجود است به طوری که مولفه‌های همبندی لبه $T'$ همگی خم‌های ساده بسته باشند و مولفه‌های همبندی $M' \setminus T'$ همگی همسان‌ریخت با استوانه‌های توخالی باشند. چنین انتخابی برای $T'$ در شکل سمت چپ آمده است. حال با حذف این زیررویه از $M'$ (کل رویه) شکل وسط به دست خواهد آمد. در نهایت مشابهاً تضمین می‌شود هر مولفه همبندی از لبه رویه به دست آمده، همسان‌ریخت با یک دیسک باشد و در نتیجه می‌توان با دو دیسک آنها را کلاهک‌گذاری کرد. چسباندن کلاهک روی یکی از لبه‌های رویه در شکل سمت راست آمده است.



گام ۶. در شکل سمت چپ کلاهک‌گذاری حفره دیگر رویه جدید را مشاهده می‌کنید. شکل وسط نشاندن گراف داده شده روی رویه جدید را نمایش می‌دهد. (که مجدداً همان نشاندن اولیه است) در نهایت توجه کنید که رویه به دست آمده در شکل وسط، در واقع همان پوسته کره سه‌بعدی است. (چرا؟) در نتیجه نشاندنی از گراف داده شده روی پوسته کره به دست داده شده که عملیات را تمام می‌کند. در شکل سمت راست نشاندن گراف داده شده روی پوسته کره نمایش داده شده است.



مسئله ۱۲. با تکرار مجدد عملیات کلاهک‌گذاری نشان دهید تمام ناحیه‌ها همسان‌ریخت با دیسک هستند و در نتیجه کلاهک‌گذاری دیگر نمی‌تواند رویه را تغییر دهد. در چنین مرحله‌ای کلاهک‌گذاری به پایان می‌رسد و رویه در بیش‌ترین مشخصه اویلر قرار می‌گیرد.

قضیه ۵. تعدادی از خواص عملیات کلاهک‌گذاری را بدون اثبات بیان می‌کنیم: (به عنوان تمرین می‌توانید این خواص را شهوداً اثبات کنید)

۱. $\rho(G) \subset M^*$ و در نتیجه نشاندن $\rho : G \to M$ در واقع یک نشاندن $\rho^* : G \to M^*$ است.

۲. نشاندن $\rho^* : G \to M^*$ یک نشاندن دو سلولی است و همچنین $|F_{\rho^*}| \geq |F_\rho|$ برقرار است.

۳. عملیات به ترتیب انتخاب مولفه‌های همبندی بستگی ندارد و رویه‌های به دست آمده از ترتیب‌های متفاوت همسان‌ریخت هستند.

۴. در صورتی که $M$ جهت‌پذیر باشد، $M^*$ نیز جهت‌پذیر خواهد بود اما عکس این گزاره درست نیست.

۵. $M^* = M$ اگر و فقط اگر $\rho : G \to M$ نشاندن دو سلولی باشد. در غیر این صورت داریم: $\chi(M^*) > \chi(M)$. در صورتی که رویه $M$ جهت‌پذیر باشد، طبق گزاره 4 گونا برای $M^*$ نیز قابل تعریف است و طبق قضیه 3 داریم: $\gamma(M^*) < \gamma(M)$.

تعریف ۱۳. برای رویه همبند و بسته $M$ به نشاندن $\rho : G \to M$ **نشاندن مینیمال** می‌گوییم اگر برای هر رویه همبند و بسته $M'$ و نشاندن $\rho' : G \to M'$ داشته باشیم: $\chi(M) \geq \chi(M')$. اگر رویه‌های $M, M'$ جهت‌پذیر باشند آنگاه طبق قضیه 3 معادلاً داریم: $\gamma(M) \leq \gamma(M')$.

تعریف ۱۴. فرض کنید گراف همبند و متناهی $G$ و رویه همبند و بسته $M \subset \mathbb{R}^3$ داده شده باشند. به نشاندن $\rho : G \to M$ **نشاندن ماکسیمال** می‌گوییم اگر برای هر رویه همبند و بسته $M'$ و نشاندن $\rho' : G \to M'$ از گراف $G$ روی رویه $M'$ داشته باشیم $|F_\rho| > |F_{\rho'}|$.

حال یکی از مهم‌ترین قضیه‌های این نوشتار را بیان و اثبات می‌کنیم:

قضیه ۶. هر نشاندن مینیمال از گراف همبند و متناهی $G$ روی رویه همبند و بسته $M$، نشاندن دو سلولی‌ست.

اثبات ۴. فرض کنید نشاندن $\rho : G \to M$ مینیمال باشد و (به فرض خلف) دو سلولی نباشد. در این صورت با کلاهک‌گذاری رویه $M$ از گزاره‌های قضیه 6 می‌دانیم نشاندن دو سلولی $\rho^* : G \to M^*$ موجود است. اما $\chi(M^*) > \chi(M)$ که با فرض مینیمال بودن در تناقض است.

**نتیجه ۵.** طبق قضیه 5، برای یک نشاندن مینیمال $\rho : G \to M$ از یک گراف همبند و متناهی روی یک رویه همبند و بسته، رابطه اویلر تعمیم‌یافته $|V| - |E| + |F_\rho| = \chi(M)$ برقرار است.

**قضیه ۷.** هر نشاندن مینیمال از گراف همبند و متناهی $G$ روی رویه همبند و بسته $M$، ماکسیمال است.

**اثبات ۵.** فرض کنید $\rho : G \to M$ یک نشاندن ماکسیمال و $\rho' : G \to M'$ یک نشاندن مینیمال (و در نتیجه دو سلولی) باشد. در این صورت طبق گزاره 2 قضیه 5 نشاندن کلاهک‌گذاری شده $\rho^* : G \to M^*$ ماکسیمال و دو سلولی‌ست. در نتیجه داریم:

$$|V| - |E| + |F_{\rho'}| \overset{\text{identity Euler}}{=} \chi(M') \overset{\text{Minimality}}{\geq} \chi(M^*) \overset{\text{identity Euler}}{=} |V| - |E| + |F_{\rho^*}| \overset{\text{Maximality}}{\geq} |V| - |E| + |F_{\rho'}|$$

$$\implies |V| - |E| + |F_{\rho^*}| = |V| - |E| + |F_{\rho'}| \implies |F_\rho| = |F_{\rho^*}| = |F_{\rho'}| \implies \rho' \text{ یک نشاندن ماکسیمال است}$$

**مسئله ۱۳.** ثابت کنید هر نشاندن ماکسیمال و دو سلولی نیز یک نشاندن مینیمال است. همچنین نشان دهید این دو شرط ضروری هستند.

**تعریف ۱۵.** برای رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر $M$ به نشاندن $\rho : G \to M$ **نشاندن مینیمال جهت‌پذیر** می‌گوییم اگر برای هر رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر $M'$ و نشاندن $\rho' : G \to M'$ داشته باشیم: $\chi(M) \geq \chi(M')$. طبق قضیه 3 معادلاً داریم: $\gamma(M) \leq \gamma(M')$.

**تعریف ۱۶.** فرض کنید گراف همبند و متناهی $G$ و رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر $M \subset \mathbb{R}^3$ داده شده باشند. به نشاندن $\rho : G \to M$ **نشاندن ماکسیمال جهت‌پذیر** می‌گوییم اگر برای هر رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر $M'$ و نشاندن $\rho' : G \to M'$ داشته باشیم: $|F_\rho| > |F_{\rho'}|$.

مشابه قضیه $6, 7$ و نتیجه مسئله 13 می‌توان قضیه زیر را نیز به وسیله قضیه 5 ثابت کرد:

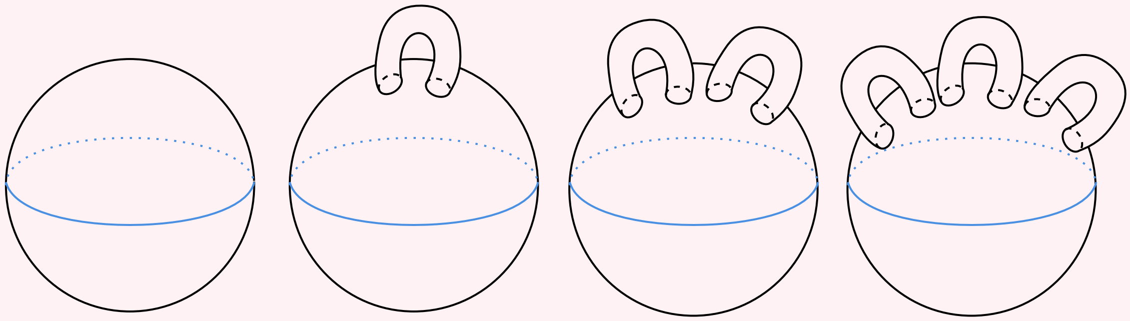
**قضیه ۸.** هر نشاندن $\rho : G \to M$ از گراف متناهی و همبند $G$ روی رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر $M$ مینیمال جهت‌پذیر است اگر و فقط اگر ماکسیمال جهت‌پذیر و دو سلولی باشد. در نتیجه رابطه اویلر تعمیم‌یافته (قضیه 4) برای نشاندن مینیمال جهت‌پذیر برقرار است.

**قضیه ۹.** تعداد ناحیه‌های تولید شده توسط یک گراف متناهی و همبند روی یک رویه همبند و بسته $M$ توسط یک نشاندن مینیمال یا مینیمال جهت‌پذیر مثل $\rho : G \to M$ مستقل از نگاشت نشاندن است. در نتیجه مقدار $|F_\rho|$ یک ناوردای گراف و یک ناوردای توپولوژیک است.

**تعریف ۱۷.** برای هر گراف همبند و متناهی $G$، به کوچکترین مقدار $g \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ به طوری که نشاندن $G$ روی $M_g$ موجود باشد **گونای گراف** $G$ گفته و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. دقت کنید ابتدا باید ثابت کرد مقدار $g \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ وجود دارد که نشاندن $G$ در $M_g$ وجود داشته باشد.

**نکته ۴.** همانطور که دیدید، تعریف 13 محدود به نشاندن‌های روی یک گراف جهت‌دار است. در نتیجه طبیعیست که این مفهوم را برای هر رویه دلخواه (با استفاده از مشخصه اویلر به جای گونا) تعریف کنیم. تعریف می‌کنیم **عدد رویه** گراف $G$ بیش‌ترین مقدار $n \in \mathbb{Z}$ باشد به نحوی که نشاندن $\rho : G \to M$ وجود داشته باشد که $\chi(M) = n$. عدد رویه گراف $G$ را با $\mu(G)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید طبق تعریف، برای هر گراف $G$ مقدار $2 - 2\gamma(G)$ بیش‌ترین مشخصه ممکن یک رویه جهت‌پذیر است به طوری که نشاندن $G$ روی $M$ وجود داشته باشد اما $\mu(G)$ بیش‌ترین مشخصه ممکن یک رویه دلخواه $M$ است به طوری که نشاندن $G$ روی $M$ وجود داشته باشد. در این صورت سوالی طبیعی این است که آیا برای هر گراف $G$، عدد رویه و گونا با هم برابرند؟ این سوال معادل این است که آیا برای نشاندن مینیمال $\rho : G \to M$، لزوماً نشاندن $\rho' : G \to M'$ موجود است که $\chi(M') = \chi(M)$ و $M$ رویه‌ای جهت‌پذیر باشد؟ پاسخ این سوال را به پایان نوشتار موکول می‌کنیم.

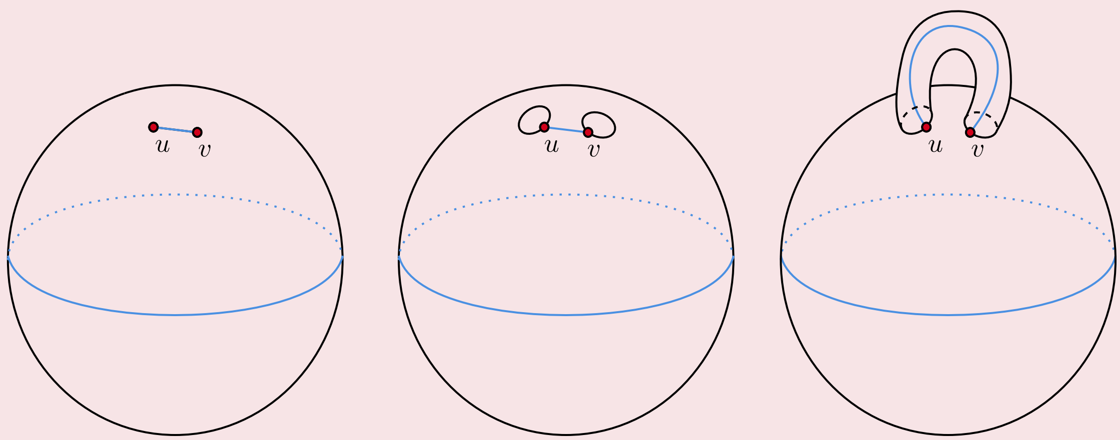
**تعریف ۱۸.** به حاصل چسباندن $n$ استوانه توخالی روی سطح پوسته یک کره (مشابه شکل زیر) **کره با $n$ دسته** (n-handle sphere) می‌گویند.



**مسئله ۱۴.** ثابت کنید کره با $n$ دسته همسان‌ریخت با چنبره با $n$ حفره ($M_g$) است.

**قضیه ۱۰.** هر گراف همبند متناهی دارای گونا است. به عبارت دیگر مقدار $g \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ وجود دارد که نشاندن $G$ در $M_g$ وجود داشته باشد.

**اثبات ۶.** رئوس $G$ را روی سطح کره در نظر بگیرید و برای هر یال $\overline{uv} = e \in E(G)$ دو دیسک به اندازه کافی کوچک گذرنده از $u, v$ در نظر گرفته و مقطع‌های یک استوانه توخالی را به این دو دیسک می‌چسبانیم و این دسته را $H_{\overline{uv}}$ می‌نامیم. در رویه به دست آمده ($M_{|E(G)|}$) هر یال $\overline{uv} = e \in E(G)$ را از روی دسته $H_{\overline{uv}}$ عبور دهید. واضح است که این روند یک نشاندن $G$ روی $M_{|E(G)|}$ را به دست خواهد داد.




**نتیجه ۶.** گونای هر گراف همبند و متناهی تعریف می‌شود. اگر نشاندن $\rho : G \to M$ مینیمال جهت‌پذیر باشد. در نتیجه قضیه 8 این نشاندن دو سلولی نیز خواهد بود. در نتیجه طبق قضیه $4, 3$ و تعریف 15 داریم: $|V| - |E| + |F_\rho| = \chi(M) = 2 - 2\gamma(M) = 2 - 2\gamma(G)$.

**قضیه ۱۱.** فرض کنید گراف متناهی و همبند $G$ و رویه همبند و بسته $M$ و همچنین یک نشاندن $\rho : G \to M$ داریم: $|V| - |E| + |F_\rho| \geq \chi(M)$.

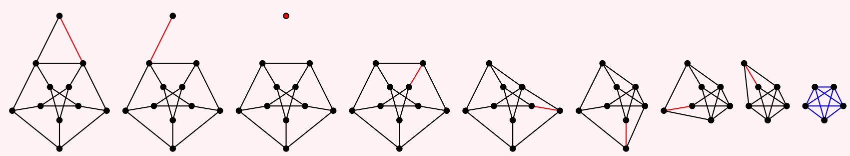
**اثبات ۷.** ابتدا دقت کنید با توجه به تعریف رویه، می‌توان نشاندن $\rho$ را به یک نشاندن دو سلولی $\tilde{\rho} : \tilde{G} \to M$ توسیع داد. (چرا؟) این بدین معناست که گراف متناهی و همبند $\tilde{G}$ موجود است به نحوی که $G$ زیرگرافی از $\tilde{G}$ باشد و همچنین $\tilde{\rho}|_G \equiv \rho(G)$. در این صورت طبق رابطه اویلر تعمیم‌یافته خواهیم داشت: $|V(\tilde{G})| - |E(\tilde{G})| + |F_{\tilde{\rho}}| = \chi(M)$. حال به ترتیب تمام یال‌های $e \in E(\tilde{G}) \setminus E(G)$ را در نظر بگیرید. اگر $e$ روی لبه دو ناحیه متفاوت باشد، با حذف $e$ از یال‌های نشاندن $\tilde{G}$، دقیقاً یکی از تعداد نواحی ($|F_{\tilde{\rho}}|$) کاسته می‌شود. در نتیجه مقدار $|V(\tilde{G})| - |E(\tilde{G})| + |F_{\tilde{\rho}}|$ ثابت می‌ماند. در صورتی که $e$ فقط روی لبه یک ناحیه قرار داشته باشد، راس $v$ از گراف موجود است به طوری که $\deg(v) = 1$. (چرا؟) با حذف $v$ و یال متصل به آن، مقدار $|V(\tilde{G})| - |E(\tilde{G})| + |F_{\tilde{\rho}}|$ مجدداً تغییری نمی‌کند. در نتیجه می‌توان بدون تغییر این مقدار، یال‌های $E(\tilde{G}) \setminus E(G)$ را حذف کرد. حال تمام راس‌های $V(\tilde{G}) \setminus V(G)$ از درجه صفر هستند. (چرا؟) با حذف این راس‌ها مقدار $|F_{\tilde{\rho}}|$ تغییر نمی‌کند. (چرا؟) در نتیجه مقدار $|V(\tilde{G})| - |E(\tilde{G})| + |F_{\tilde{\rho}}|$ کاسته خواهد شد. تکمیل این روند اثبات را کامل می‌کند.

برای بررسی امکان نشاندن یک گراف روی یک رویه، به دلیل نداشتن اطلاعات درباره تعداد ناحیه‌های احتمالی تشکیل شده، استفاده از رابطه اویلر کارا نیست و (مشابه نتیجه $2,3$) نیازمند محکی هستیم که صرفاً درباره اجزای گراف و رویه باشند. قضیه زیر چنین محکی را به دست می‌دهد:

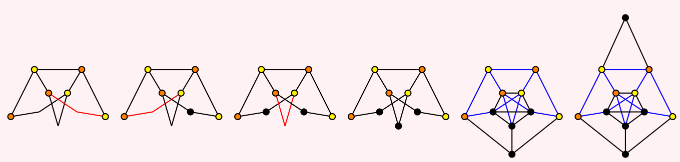
مسئله ۱۵. فرض کنید $G$ یک گراف متناهی و همبند باشد که هیچ دوری به طول کم‌تر از $k$ نداشته باشد. آنگاه برای هر رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر $M$ و هر نشاندن $\rho : G \to M$ داریم: $k|V| + 2k\gamma(M) \geq 2k + (k-2)|E|$. ثابت کنید $K_{5,5}$ روی چنبره قابل نشاندن نیست. همچنین حالت تساوی این نامساوی را برای هر مقدار طبیعی $k$ به دقت صورت‌بندی کنید.

تعریف ۱۹. **انقباض** یک یال از گراف، حذف آن یال و یکی کردن راس‌های دو سر آن است و **انبساط** یک یال از گراف، اضافه کردن یک راس جدید روی این یال است. به گرافی که طی تعدادی انقباض یال، حذف راس و حذف یال روی گراف $G$ به دست می‌آید، یک **کهاد** از $G$ می‌گوییم. یک کهاد از $G$ که یک‌ریخت با گراف $F$ باشد را یک **$F$ـکهاد** از $G$ می‌نامیم. به گرافی که طی تعدادی انبساط یال از گراف $G$ به دست می‌آید یک **زیرتقسیم** از $G$ می‌گوییم. گراف $G$ را یک **$F$ـزیرتقسیم** می‌نامیم اگر زیرگرافی یک‌ریخت با زیرتقسیمی از $F$ داشته باشد.

مثال ۸. مراحل ساختن یک $K_5$ـکهاد از گراف پترسن شاخ‌دار! در شکل آمده است. قرمز کردن یک راس به معنای حذف آن راس و قرمز کردن یک یال به معنای انقباض آن است. یک زیرگراف از یک گراف با رنگ آبی نمایش داده شده است.



مثال ۹. مراحل ساختن گراف پترسن شاخ‌دار به عنوان یک $K_{3,3}$ـزیرتقسیم در شکل آمده است. گراف اول $K_{3,3}$ را نمایش می‌دهد که راس‌های آن با دو رنگ مشخص شده‌اند. قرمز کردن یک یال به معنای زیرتقسیم کردن آن و رنگ آبی مشابه مثال اخیر است.



مسئله ۱۶. ثابت کنید گراف پترسن شاخ‌دار یک $K_5$ـزیرتقسیم نیست.

مسئله ۱۷. اگر گراف $G$ یک $F$ـزیرتقسیم باشد، دارای یک $F$ـکهاد است. عکس این گزاره لزوماً درست نیست.

حال دو قضیه مشهور در رده‌بندی گراف‌های مسطح بر حسب کهاد و زیرتقسیم‌ها را بیان می‌کنیم:

قضیه ۱۲. (Kuratowski):[۲] گراف همبند $G$ مسطح است اگر و فقط اگر $K_5$ـزیرتقسیم یا $K_{3,3}$ـزیرتقسیم نباشد.

قضیه ۱۳. (Wagner):[۳] گراف همبند $G$ مسطح است اگر و فقط اگر هیچ $K_5$ـکهاد یا $K_{3,3}$ کهادی نداشته باشد.

نتیجه ۷. هر گراف همبند یک $K_{3,3}$ـزیرتقسیم یا یک $K_5$ـزیرتقسیم است اگر و فقط اگر یک $K_5$ـکهاد و یا یک $K_{3,3}$ـکهاد داشته باشد. آیا می‌توانید بدون استفاده از دو قضیه مذکور این حقیقت را اثبات کنید؟

اما آیا قضیه مشابهی برای رویه‌های غیر از صفحه موجود است؟ پاسخ جامعی از این سوال در قضیه زیر آمده است:

**تعریف ۲۰.** یک خانواده از گراف‌ها تحت کهاد بسته است اگر کهاد هر گرافی از آن، عضوی از خانواده باشد.

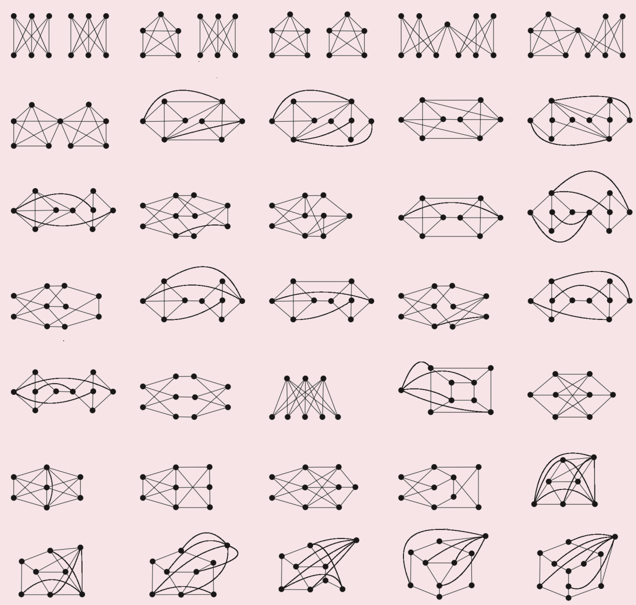
**نکته ۵.** برای هر رویه همبند و بسته $M$ خانواده گراف‌های قابل نشاندن روی $M$ تحت کهاد بسته است.

نتیجه قضیه‌ای بسیار بنیادی در نظریه کهادها قضیه ذیل است:

**قضیه ۱۴.** قضیه Robertson–Seymour:[۴] اگر خانواده $\mathcal{F}$ از گراف‌ها تحت کهاد بسته باشند، آنگاه مجموعه متناهی $S$ از گراف‌ها موجود است به طوری که برای هر گراف $G$ داریم: $G \in \mathcal{F}$ اگر و فقط اگر برای هر گراف $H \in S$، گراف $G$ هیچ $H$ـ کهادی نداشته باشد. به مجموعه $S$، مجموعه کهادهای ممنوعه خانواده $\mathcal{F}$ گفته می‌شود. طبق نکته اخیر، این قضیه برای خانواده گراف‌های قابل نشاندن روی یک رویه برقرار است.

**مثال ۱۰.** Glover, Huneke, Wang لیست احتمالی کهادهای ممنوعه نوار موبیوس را ارائه دادند.[۵] گرچه این قضیه توسط این سه ریاضیدان به اثبات نرسید، Archdeacon[۶] و آرش اسدی شهمیرزادی [۷] مستقلاً این قضیه را ثابت کردند:

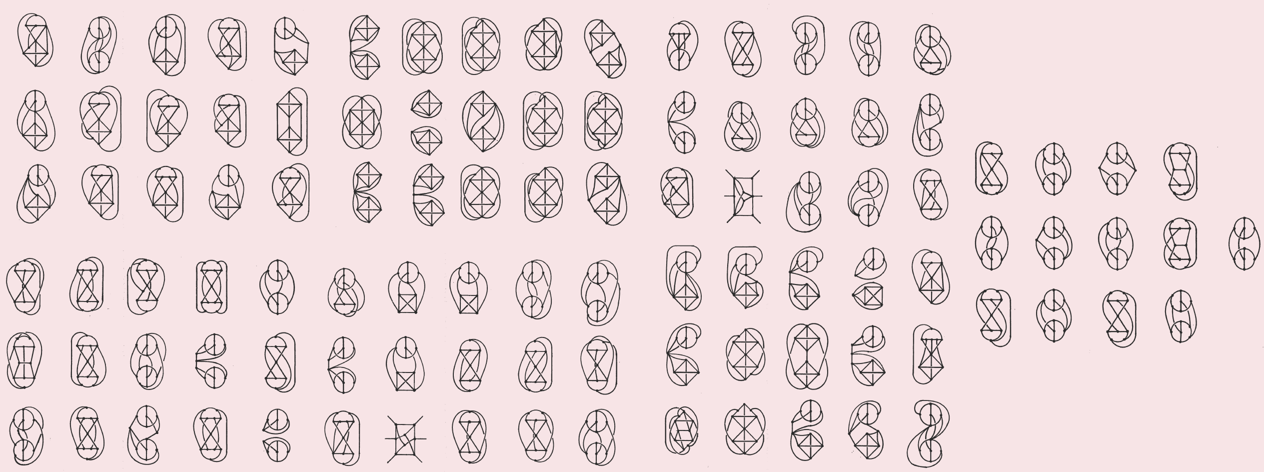
**قضیه ۱۵.** لیست $J$ از 35 گراف ممنوعه تحویل‌ناپذیر روی نوارموبیوس موجود است به طوری که هر گراف $G$ روی نوار موبیوس قابل نشاندن باشد اگر و فقط اگر به ازای هر گراف $H \in J$، گراف $G$ هیچ $H$ـ کهادی نداشته باشد.



قضیه‌ای از این جنس برای زیرتقسیم‌ها برقرار نیست. بیان علت این امر نیازمند توضیح کامل صورت اصلی قضیه فوق و مفاهیم مربوط به ترتیب و پادزنجیرهای کتگوریکال است که از حوصله بحث خارج است. (برای مطالعه بیش‌تر به این مقاله مراجعه کنید) همچنین بیش از این، می‌توان گفت قضیه‌ای به فرم نتیجه 7 نیز برقرار نیست. نتیجه‌ای مشهور از Glover, Huneke, Wang، خانواده گراف‌های قابل نشاندن روی نوار موبیوس (شکل مسئله 9) را با زیرتقسیم‌ها بدین شکل طبقه‌بندی می‌کند:

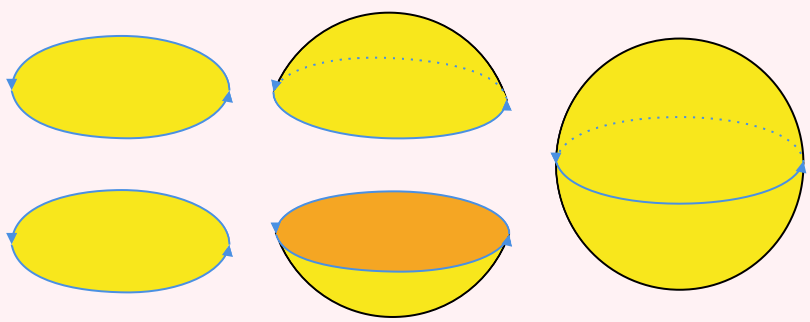
**تعریف ۲۱.** گراف متناهی و همبند $G$ را روی رویه همبند و بسته $M$ ممنوعه تحویل‌ناپذیر می‌نامیم اگر قابل نشاندن روی $M$ نباشد اما هر زیرگراف دیگری از $G$ قابل نشاندن روی $M$ باشد. به عنوان مثال $K_{3,3}, K_5$ هر دو گراف‌هایی ممنوعه تحویل‌ناپذیر روی صفحه هستند.

**قضیه ۱۶.** Glover-Huneke-Wang:[۵] لیستی از 103 گراف ممنوعه تحویل‌ناپذیر روی نوار موبیوس (مثل $I$) موجود است به طوری که هر گراف $G$ روی نوار موبیوس قابل نشاندن باشد اگر و فقط اگر به ازای هر گراف $H \in I$، گراف $G$ یک $H$ـ زیرتقسیم نباشد.



حال به نکته 4 بر می‌گردیم. ابتدا لازم است صفحه تصویری را تعریف کنیم. ابتدا لازم است دقت کنید لبه نوار موبیوس یک خم بسته و در نتیجه همسان‌ریخت با کره است. (چرا؟) بنابراین می‌توان یک جهت برای لبه نوار موبیوس معرفی کرد. همچنین لبه یک دایره توپر، به وضوح یک دایره است و در نتیجه می‌توان آن را به یک جهت مجهز کرد. ابتدا خوب است مثال زیر را برای گرم کردن ذهن امتحان کنید:

**مثال ۱۱.** پوسته کره رویه‌ای است که از چسباندن دو دیسک (دایره توپر) از روی لبه و در راستای جهت تعیین شده روی آنها به دست می‌آید.



صفحه تصویری رویه‌ای است که از چسباندن یک نوار موبیوس و یک دایره توپر از روی لبه و در راستای جهت تعیین شده روی آنها به دست می‌آید! اگر تصور این امر برای شما سخت است، احتمالاً به این دلیل است که برای این کار در $\mathbb{R}^3$، لازم است ناحیه داخلی نوار موبیوس و ناحیه داخلی دیسک با هم تقاطع داشته باشند و در نتیجه صفحه تصویری در سه بعد قابل نشاندن نیست! اما می‌توان ثابت کرد که این موجود در چهار بعد قابل نشاندن است.

**مسئله ۱۸.** هر گراف متناهی روی صفحه تصویری قابل نشاندن است اگر و فقط اگر روی نوار موبیوس قابل نشاندن باشد.

**مسئله ۱۹.** یک CW-complex برای نوار موبیوس و در نتیجه یک CW-complex برای صفحه تصویری تعریف کنید و بدین وسیله ثابت کنید مشخصه اویلر صفحه تصویری برابر با 1 است اما مشخصه اویلر نوار موبیوس برابر با 0 است.

**مسئله ۲۰.** ثابت کنید گراف $K_5$ روی نوار موبیوس و در نتیجه روی صفحه تصویری قابل نشاندن است. بنابراین: $\gamma(K_5) = 2, \mu(K_5) = 0$.

در نهایت به قضیه Kuratowski رجوع می‌کنیم و سوالی مشابه ابتدای نوشتار را مطرح می‌کنیم. چرا $K_5, K_{3,3}$ گراف‌های ممنوعه صفحه هستند؟ پاسخ در قضایای زیر نهفته است که گونای چند خانواده از گراف‌های مشهور را به دست می‌دهند. این قضایا را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

**قضیه ۱۷.** قضیه Ringel: $\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil, \forall m,n \geq 2$

**اثبات ۸.** برای اثبات این قضیه ابتدا یک حالت ضعیف‌تر را ثابت می‌کنیم:

**لم ۲.** $\gamma(K_{m,n}) \geq \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil, \forall m,n \geq 2$

**اثبات ۹.** از آنجا که $K_{m,n}$ دوبخشی است، حداقل طول یک دور آن 4 خواهد بود. چون هر یال دقیقاً دو بار در طی پرمایش مرز نواحی هر نشاندن دو سلولی حضور دارد، داریم $2|E| \geq 4|F_\rho|$ که $\rho : K_{m,n} \to M$ یک نشاندن دلخواه است. از طرفی $|E(K_{m,n})| = mn, |V(K_{m,n})| = m+n$. در نتیجه داریم $\frac{mn}{2} \geq |F_\rho|$. از طرفی طبق رابطه اویلر تعمیم‌یافته داریم: $|V| - |E| + |F_\rho| = 2 - 2\gamma$ برای یک نشاندن $\rho$ مینیمال برقرار است. در این صورت داریم $(m+n) - mn + \frac{mn}{2} \geq |V| - |E| + |F_\rho| = 2 - 2\gamma \iff 2\gamma \geq \frac{mn}{2} - m - n + 2$. در نتیجه خواهیم داشت: $\gamma \geq \frac{mn-2m-2n+4}{4} = \frac{(m-2)(n-2)}{4}$.

حال فرض کنید $m,n$ هر دو زوج باشند. در این صورت مجموعه رئوس را با $\{0,2,\cdots,m-2\}, \{1,3,5,\cdots,n-1\}$ شماره‌گذاری کنید. در این صورت نشاندنی با حفظ ترتیب زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 0(\mod 4) & 1 & 3 & 5 & \cdots & n-3 & n-1 \\ 2(\mod 4) & n-1 & n-3 & n-5 & \cdots & 3 & 1 \\ 1(\mod 4) & 0 & 2 & 4 & \cdots & m-4 & m-2 \\ 3(\mod 4) & m-2 & m-4 & m-6 & \cdots & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت تمام نواحی این نشاندن چهارضلعی هستند و در نتیجه در اثبات لم حالت تساوی رخ خواهد داد که همان خواسته مسئله است. حکم برای حالت‌های دیگر زوجیت به طور استقرایی ثابت می‌شود.

**قضیه ۱۸.** قضیه Ringel-Youngs: $\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil, \forall n \geq 3$

$\rho : K_n \to M$ یک نشاندن مینیمال باشد. در این صورت داریم $|V| - |E| + |F_\rho| = 2 - 2\gamma$. از طرفی چون هر دور حداقل سه یال دارد و هر یال حداقل دو بار در مرز ناحیه‌های تشکیل شده پرمایش می‌شود، $2|E| \geq 3|F_\rho|$ و مشابه قضیه قبل $|V| - |E| + \frac{2}{3}|F_\rho| \geq 2 - 2\gamma$ و:

$$2\gamma \geq 2 - n + \frac{n(n-1)}{6} = \frac{n^2 - 7n + 12}{6} \implies \gamma \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

**قضیه ۱۹.** قضیه White: $\gamma(K_{m,n,mn}) = \frac{(mn-2)(n-1)}{2}, \forall m,n$ که $K_{m,n,p}$ گراف سه‌بخشی کامل با بخش‌هایی $m,n,p$ راسی است.

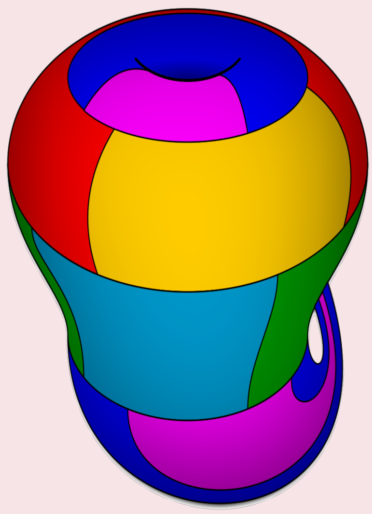
اما گونای گراف ناهمبند چگونه محاسبه می‌شود؟ قضیه‌ای شگفت‌انگیز از Battle, Harary, Kodama, Youngs چنین است:

**قضیه ۲۰.** اگر گراف $G$ از مولفه‌های همبندی $G_1, \cdots, G_k$ تشکیل شده باشد، داریم: $\gamma(G) = \sum_{i=1}^{k} \gamma(G_i)$

**مسئله ۲۱.** ثابت کنید اگر گراف متناهی $G$ قابل نشاندن روی چنبره باشد، راس‌های آن را می‌توان با حداکثر 7 رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هر دو راس مجاور غیرهم‌رنگ باشند. (نتیجه دشوار و هم‌جنس این است که هر گراف مسطح با حداکثر 4 رنگ قابل رنگ‌آمیزی است)

در واقع در حالت کلی رابطه بسیار عمیقی بین عدد رنگی یک گراف و گونای آن وجود دارد:

**گزاره ۱.** قضیه Ringel-Youngs:[۸] برای هر گراف متناهی $G$، دقیقاً $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48\gamma(G)}}{2} \right\rfloor$ رنگ برای رنگ‌آمیزی راس‌ها مورد نیاز است. این قضیه نشان می‌دهد تعداد رنگ‌های موردنیاز برای رنگ کردن یک گراف همبند و متناهی $G$ دلخواه قابل نشاندن دوسلولی روی رویه $M$ همواره مقداری ثابت است! در نتیجه می‌توان مفهومی مشابه عدد رنگی برای یک رویه تعریف کرد. (این عدد را با $\chi_C(M)$ نمایش می‌دهیم.) قضیه بیان می‌کند که برای هر رویه جهت‌پذیر و دلخواه $M$ داریم $\chi_C(M) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48\gamma(M)}}{2} \right\rfloor$. در تعمیمی از این گزاره، Ringel, Youngs همچنین ثابت کردند که با توسیع این گزاره به رویه‌های جهت‌ناپذیر (و طبیعتاً جانشینی گونا با مشخصه اویلر) رابطه $\chi_C(M) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi(M)}}{2} \right\rfloor$ برای هر رویه همبند و بسته به جز دقیقاً یک رویه جهت‌ناپذیر! (به نام بطری کلاین) برقرار است. مشخصه اویلر بطری کلاین $0$ است و در نتیجه طبق این قضیه، عدد رنگی آن باید $7$ باشد. در شکل زیر تنها مثال رنگ‌آمیزی سطح بطری کلاین با $6$ رنگ آمده است!



---

**اثبات ۱۰.** توجه کنید کافیست حکم را برای گراف‌های بحرانی ثابت کنیم. یک گراف بحرانی‌ست اگر هر زیر گراف نابدیهی آن عدد رنگی اکیداً کوچکتری از آن گراف داشته باشد. طبق قضیه‌ای مشهور، $\chi_C(G) - 1 \leq \frac{2|E|}{|V|}$. فرض کنید $\rho : G \to M$ یک نشاندن مینیمال باشد. در این صورت داریم $|V| - |E| + |F_\rho| = 2 - 2\gamma$ یا معادلاً $|E| \leq |V| + |F_\rho| - (2 - 2\gamma)$. کمترین طول یک دور در یک گراف $3$ است و همچنین هر یال دقیقاً دو بار در طی پرمایش مرز ناحیه‌های ایجاد شده ظاهر می‌شود. در نتیجه $2|E| \geq 3|F_\rho|$ و بنابراین:

$$3|E| \leq 3|F_\rho| + 3|V| - 3(2 - 2\gamma) \leq 2|E| + 3|V| - 3(2 - 2\gamma) \iff |E| \leq 3|V| - 6 + 6\gamma$$

در نتیجه داریم $2|E| \leq 6|V| - 12 + 12\gamma$. در ترکیب این نتیجه با قضیه مذکور در ابتدای اثبات داریم: $(\chi_C(G) - 1)|V| \leq 6|V| - 12 + 12\gamma$. در صورتی که $\gamma \geq 1$ باشد، از آنجا که $|V| \geq \chi_C(G)$ داریم: $\chi_C(G) - 1 \leq 6 + \frac{12\gamma - 12}{\chi_C(G)} \iff \chi_C(G)^2 - 7\chi_C(G) - (12\gamma - 12) \leq 0$. با حل این نامساوی درجه دو داریم:

$$\left(\chi_C(G) - \frac{7 + \sqrt{1 + 48\gamma}}{2}\right)\left(\chi_C(G) - \frac{7 - \sqrt{1 + 48\gamma}}{2}\right) \leq 0$$

از آنجا که $\gamma \geq 1$، داریم $\sqrt{1 + 48\gamma} \geq 7 \implies \frac{7-\sqrt{1+48\gamma}}{2} \leq 0$. از آنجا که $\chi_C(G) \geq 1$، پرانتز دوم مثبت است و در نتیجه پرانتز اول باید منفی باشد که یک طرف قضیه را ثابت می‌کند.

**مسئله ۲۲.** (IMO 1986) روی هر راس یک پنج‌ضلعی منتظم یک عدد صحیح قرار گرفته است به نحوی که مجموع اعداد روی رئوس مثبت باشد. اگر سه راس متوالی با اعداد (به ترتیب) $x, y, z$ روی آنها وجود داشته باشند به نحوی که $y < 0$ باشد، آنگاه می‌توان این سه عدد را با (به ترتیب) $x + y, -y, z + y$ جایگزین کرد. آیا این روند برای هر وضعیت ابتدایی از اعداد روی رئوس پایان می‌پذیرد؟

حال صورتی قوی‌تر از این مسئله را بیان می‌داریم که تعمیم مسئله IMO به گراف دلخواه محسوب می‌شود:

تعریف ۲۲. یک گراف متناهی و همبند $G$ که روی هر راس آن یک عدد صحیح قرار گرفته باشد را یک گراف مدرج می‌نامیم. دو نوع عملیات روی یک گراف مدرج تعریف می‌کنیم. عملیات قرض گرفتن راس $v$ به این صورت است که از عدد هر یک از همسایه‌های راس $v$ یکی کاسته شده و به عدد راس $v$ اضافه می‌شود. همچنین قرض دادن راس $v$ به طور مشابه تعریف می‌شود: به عدد هر همسایه از $v$ یکی اضافه شده و در ازای آن از عدد روی راس $v$ یکی کاسته می‌شود. یک راس مقروض است اگر عدد روی آن منفی باشد. یک گراف مدرج را کمونیستی! می‌نامیم اگر با عملیات‌های قرض دادن و قرض گرفتن بتوان کاری کرد که هیچ راسی مقروض نباشد.

مثال ۱۲. مسئله اخیر بیان می‌دارد که گراف مدرج $C_5$ به شرطی که مجموع اعداد روی راس‌های آن مثبت باشند، کمونیستی است. آیا می‌توانید یک گراف مدرج $C_5$ با مجموع اعداد صفر مثال بزنید که کمونیستی نباشد؟

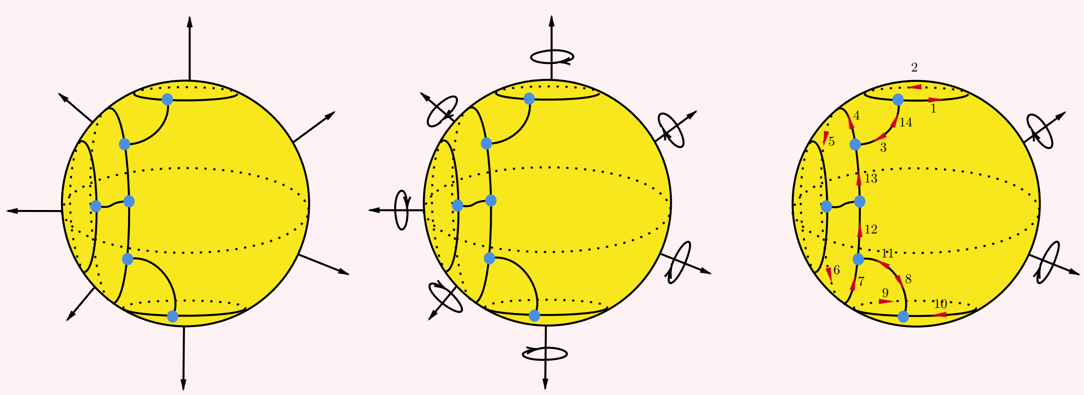
مسئله ۲۳. ثابت کنید اگر $G$ یک گراف مدرج کمونیستی باشد، تنها با عملیات‌های قرض گرفتن می‌توان راس‌های آن را از قرض خارج کرد. این نشان می‌دهد مسئله بعد دقیقاً تعمیمی از مسئله IMO است.

مسئله ۲۴. ثابت کنید یک گراف مدرج کمونیستی است اگر مجموع اعداد روی راس‌های آن حداقل $|E|-|V|+1$ باشد. به این مقدار برای هر گراف عدد بتی (Betti number) گراف گفته می‌شود که با $\beta(G)$ نمایش داده می‌شود و مشابه گونا، یک ناوردای توپولوژیک از گراف است.

در نهایت نوشتار را با یک مسئله به غایت بامزه! پایان می‌دهیم:

نکته ۶. فرض کنید $\rho : G \to M$ یک نشاندن دو سلولی از گرافی همبند و متناهی روی یک رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر باشد. در این صورت هر مولفه همبندی $M \setminus \rho(G)$ همسان‌ریخت با دیسک است. از طرفی چون رویه $M$ جهت‌پذیر است، یک ”جهت“ روی هر یک از این مولفه‌های همبندی القا می‌کند. از آنجا که هر یک از این مولفه‌ها یکسان‌ریخت با دیسک دو بعدی هستند، جهت تعیین شده روی $M$ جهتی روی هر یک از این دیسک‌ها القا می‌کند. دقت کنید تحت همسان‌ریختی هر ناحیه ایجاد شده توسط گراف روی رویه، لبه این ناحیه همسان‌ریخت با لبه دیسک است. حال توجه کنید انتخاب یک ”جهت“ از یک دیسک، یک جهت پادساعت‌گرد برای پیمایش لبه آن تعیین می‌کند و این معادل با یک جهت پادساعت‌گرد برای پیمایش لبه هر یک از ناحیه‌های ایجاد شده توسط گراف روی رویه است.

مثال ۱۳. مثالی از جهت القا شده روی نشاندن نهایی مثال کلاهک‌گذاری (شکل آخر گام 6) توسط جهت طبیعی پوسته کره (رو به بیرون) در شکل زیر آمده است. شکل اول بردارهای عمود جهت انتخاب شده در نقاط مختلف کره را نشان می‌دهد. شکل دوم جهت پادساعت‌گرد القا شده حول هر بردار عمود را نشان می‌دهد. در شکل سوم جهت القا شده روی لبه یکی از ناحیه‌های پوسته کره با فلش‌های قرمز مشخص شده است. شماره فلش‌ها ترتیب پیمایش لبه این ناحیه را مشخص می‌کنند.




مسئله ۲۵. ثابت کنید هر یال دقیقاً دو بار توسط ناحیه‌های مختلف یا یکسان جهت‌دهی می‌شود و این دو جهت مخالف هم هستند.

حال آماده‌اید که روی این مسائل بامزه فکر کنید.

**مسئله ۲۶.** فرض کنید $\rho : G \to M$ نشاندن دو سلولی یک گراف متناهی و همبند روی یک رویه همبند و بسته و جهت‌پذیر باشد. به ازای یک مولفه همبندی $M \setminus \rho(G)$، یک خودرو روی لبه این ناحیه (که همسان‌ریخت با دیسک دو بعدی است) قرار می‌دهیم. خودروی مربوط به هر ناحیه در جهت پادساعت‌گرد و به صورت پیوسته روی لبه آن ناحیه حرکت می‌کند.

۱. (St. Petersburg 1993) فرض کنید $M$ پوسته کره واحد در $\mathbb{R}^3$ باشد و هر خودرو با سرعت حداقل 1 mm/h در جهت پادساعت‌گرد روی لبه ناحیه مربوطه حرکت کند. دقت کنید حرکت خودروها کاملاً دلخواه است، لزوماً متناوب نیست و لزوماً با سرعت ثابت اتفاق نمی‌افتد و می‌تواند شامل شتاب مثبت و منفی باشد. ثابت کنید در زمان متناهی یک تصادف رخ خواهد داد!

۲. به جای شرط حداقل سرعت فرض کنید هر خودرو هر دور پیمایش لبه ناحیه مربوط به خودش را در زمان متناهی به پایان می‌رساند. توجه کنید این شرط از شرط قبل قوی‌تر است چون اجازه توقف در طی حرکت را به خودروها می‌دهد. ثابت کنید در حداقل دو نقطه متفاوت از رویه، در زمان متناهی یک تصادف رخ خواهد داد![9] آیا این یک خاصیت هندسی از نشاندن گراف است؟

۳. مثالی از حرکت تعدادی خودرو روی چنبره بیابید که در آن هیچ تصادفی رخ ندهد!

۴. حال فرض کنید روی لبه هر مولفه همبندی $F \subseteq M \setminus \rho(G)$، تعداد $d_F$ خودرو در حال حرکت باشند که $d_F \in \mathbb{N}$. همچنین افرازی از لبه هر ناحیه $F$ به $d_F$ کمان همبند داده شده است به نحوی که در هر لحظه حداکثر یک خودرو روی هر یک از این کمان‌ها قرار داشته باشد. دقت کنید در این شرایط توقف برای خودروها همچنان مجاز است. ثابت کنید اگر $M$ پوسته کره باشد، آنگاه حداقل $2 + \sum(d_F - 1)$ تصادف رخ خواهد داد که مجموع روی همه مولفه‌های همبندی $M \setminus \rho(G)$ در نظر گرفته می‌شود.

۵. اگر $M$ چنبره باشد و روی حداقل یکی از ناحیه‌ها بیش از یک خودرو قرار داشته باشد، تصادفی رخ خواهد داد!

۶. قضیه Klyachko: برای رویه دلخواه $M$ حداقل در $\chi(G) + \sum(d_F - 1)$ نقطه متفاوت تصادف رخ خواهد داد!

## مراجع


[1] J. H. Roberts and N. E. Steenrod, “Monotone transformations of two-dimensional manifolds,” *Annals of Mathematics*, 1938.

[2] K. Kuratowski, “On the problem of skew curves in topology [1],” in *Graph Theory*, Springer Berlin Heidelberg, 1983.

[3] K. Wagner, “Über eine eigenschaft der ebenen komplexe,” *Annals of Mathematics*, vol. 114, pp. 570–590, 1937.

[4] N. Robertson and P. Seymour, “Graph minors. xx. wagner’s conjecture,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 2004.

[5] H. H. Glover, J. P. Huneke, and C. S. Wang, “103 graphs that are irreducible for the projective plane,” *Journal of Combinatorics*, 1979.

[6] D. Archdeacon, “A kuratowski theorem for the projective plane,” *Journal of Graph Theory*, vol. 5, pp. 243 – 246, 10 2006.

[7] A. Asadi, L. Postle, and R. Thomas, “Minor-minimal non-projective planar graphs with an internal 3-separation,” 2011.

[8] G. Ringel and J. W. T. Youngs, “Solution of the heawood map-coloring problem,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1968.

[9] A. A. Klyachko, “A funny property of sphere and equations over groups,” *Communications in Algebra*, vol. 21, no. 7, pp. 2555–2575, 1993.