به نام خدا

راهنمایی مجموعه تمارین نظریه اعداد جلسه دوم دوره تابستانی ۱۴۰۱

قضیه باقیمانده چینی

۱. دقت کنید اگر توان یکی از عوامل اول یک عدد طبیعی دقیقا ۱ باشد، این عدد قطعا توان کامل یک عدد طبیعی نیست. از طرفی اگر داشته باشیم $x \overset{p^2}{\equiv} p$ که در آن $p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{N}$ آنگاه تضمین می‌شود که توان p در تجزیه x به عوامل اول دقیقا ۱ است. جزئیات اثبات را کامل کنید.

۲. دقت کنید $x^2 \overset{n}{\equiv} x \iff n \mid x(x-1)$ اما این معادل با این است که نمایشی از n به صورت $n = ab, \gcd(a,b) = 1$ موجود باشد به طوری که $a \mid x, b \mid x-1$. تعداد چنین x هایی را بیابید. برای قسمت دوم، ابتدا دقت کنید طبق استدلال قسمت اول، دقیقاً $2^{\omega(n)} - 2$ جواب برای معادله مذکور در بازه $(1,n)$ موجود است. حالت فرض خلف کنید که همه این جواب‌ها بزرگتر از $\frac{n}{k}+1$ باشند. دقت کنید اگر a جواب معادله باشد، $n+1-a$ نیز جوابی از معادله است. در نتیجه تمام جواب‌های معادله کمتر یا مساوی با $\frac{k-1}{k}n$ هستند. در نتیجه واضح است که تفاضل هر دو جواب معادله کمتر از $\frac{k-3}{k}n - 1$ خواهد بود. حال ثابت کنید اگر $1 < l < n$ جوابی دلخواه از معادله باشد، آنگاه مقادیر $1 < a, b < n$ موجودند به طوری که $l \overset{n}{\equiv} a - b$ و همچنین a, b جواب‌هایی از معادله باشند. با تکمیل جزئیات نتیجه بگیرید $\frac{2}{k}n + 1 \leq l \leq \frac{k-2}{k}n$. با تکرار این گام‌ها به طور استقرایی، به تناقض برسید.

۳. دنباله را به صورت استقرایی تولید می‌کنیم! هر بار فرض کنید x کوچکترین عدد طبیعی‌ای باشد که تا به حال در دنباله ظاهر نشده است. ثابت کنید می‌توان عضو y را انتخاب کرد که تا به حال در دنباله ظاهر نشده است و بتوان به ترتیب y, x را به انتهای دنباله اضافه کرد. با این الگوریتم تضمین می‌شود که هر عدد طبیعی دقیقا یک بار در این دنباله نامتناهی ظاهر می‌شود و اثبات کامل خواهد بود.

۴. ثابت کنید هر $a \in \mathbb{N}$ در مسئله صادق است اگر و فقط اگر هر عامل اولی از n عامل اولی از a نیز باشد.

۵. دقت کنید کافیست ثابت کنید چندجمله ای $x^2 + x + 1$ اعضایی با حداقل k عامل اول متمایز دارد. همچنین از این لم استفاده کنید که اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد آنگاه $x \overset{n}{\equiv} y \implies P(x) \overset{n}{\equiv} P(y)$.

۶. سعی کنید اعداد را طوری انتخاب کنید که $a^7 = b^{19}, c^{13} = d^{97}$ و مسئله را در این حالت خاص حل کنید.

۷. ابتدا ثابت کنید هر n غیر اول در مسئله صادق است. سپس ثابت کنید برای هر n اول می‌توان k را مشابه سوال اول، با قضیه باقیمانده چینی طوری تنظیم کرد که عبارت مذکور توان کامل نشود.

۸. یک تصاعد حسابی غیرثابت دلخواه مانند $t_1, t_2, \cdots, t_{1400}$ در نظر بگیرید. دقت کنید برای هر $k \in \mathbb{N}$ می‌توان به راحتی دید که $kt_1, kt_2, \cdots kt_{1400}$ نیز یک تصاعد حسابی است. k را طوری انتخاب کنید که دنباله حسابی حاصل شده در مسئله صادق باشد.

۹. به استقرا عمل کنید. دقت کنید اگر $2^k - m$ برای یک انتخاب $k \in \mathbb{N}$ دقیقا t عامل اول متمایز داشته باشد (و این عوامل اول $p_1, \cdots, p_t$ باشند) آنگاه برای هر $k' = d \cdot \prod(p_i - 1) + k$ نیز $2^{k'} - m$ این عوامل اول را خواهد داشت. اما برای اینکه حکم مسئله ثابت شود کافیست نشان دهید دنباله حسابی $k + d \cdot \prod(p_i - 1)$ نمی‌تواند فقط عوامل اول $p_1, \cdots, p_t$ را داشته باشد.

۱۰. دقت کنید اگر هر بار مجموعه $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ در مسئله صادق باشد و تعریف کنیم $B = \{a_j - a_i \mid n \geq j > i \geq 1\}$ آنگاه از طرفی تمام اعضای B صحیح و ناصفرند و از طرف دیگر اگر d را برابر کوچکترین مضرب مشترک اعضای B قرار دهیم، آنگاه مجموعه $A' = \{a_1 + d, \cdots, a_n + d\}$ نیز در مسئله صادق است. سعی کنید به دنباله های تغییر یافته با استفاده از این روش، اعضای جدید اضافه کنید.

۱۱. ثابت کنید دنباله $a_n = (p_n - 1)!$ که در آن p_n برابر با nامین عدد اول است در شرایط قسمت الف صادق است. برای قسمت ب، جدولی در نظر بگیرید و در خانه‌های هر یک از ستون‌های آن، اعضای یکی از دنباله‌های $\{a_i + k\}_{i \in \mathbb{N}}$ را قرار دهید. (در این صورت سطر iام جدول برابر $\cdots, a_i - 2, a_i - 1, a_i, a_i + 1, a_i + 2, \cdots$ خواهد بود) حال سعی کنید دنباله را طوری بسازید که اعداد زیر همگی مرکب باشند :

$$a_1 \quad , \quad a_2 - 1, a_2, a_2 + 1 \quad , \quad a_3 - 3, a_3 - 2, a_3 - 1, a_3, a_3 + 1, a_3 + 2, a_3 + 3 \quad , \quad \cdots$$

۱۲. فرض خلف کنید. فرضا $n = {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_m}^{\alpha_m}$. ثابت کنید تمام a_i ها به پیمانه هر ${p_i}^{\alpha_i}$ همنهشتند و با استفاده از قضیه باقیمانده چینی به تناقض برسید.

۱۳. ابتدا به عنوان یک لم، ثابت کنید اگر $d \mid n$ آنگاه هر دستگاه مخفف مانده ها به پیمانه n قابل افراز به $\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$ دستگاه مخفف مانده ها به پیمانه d است.سپس از تعمیم قضیه باقیمانده چینی استفاده کنید تا مجموعه‌ای k عضوی بسازید که هر دو عضو آن به پیمانه m, n ناهمنهشت بوده و همه اعضای آن نسبت به m, n اول باشند.

۱۴. فرض کنید $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$. اعداد اول دو به دو متمایز $p_1, \cdots, p_n$ را در نظر بگیرید و سعی کنید $b \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب کنید که برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم: $p_i \mid d(ba_i)$ اما برای هر $1 \leq i \neq j \leq n$ داشته باشیم : $\gcd(p_i, d(ba_i)) = 1$.

۱۵. جدولی $(n+1) \times (n+1)$ در نظر بگیرید و در خانه واقع در سطر iام و ستون jام آن عامل اول دلخواهی از $\gcd(a+i-1, b+j-1)$ را قرار دهید. کرانی برای تعداد اعداد اول $p < 0.001n^2$ که در این جدول ظاهر می‌شوند ارائه دهید و ثابت کنید تعداد چنین اعداد اولی از نصف تعداد اعداد جدول کمتر است. بنابراین تمام اعداد موجود در یکی از سطر ها از $0.001n^2$ بیشترند. جزئیات اثبات را کامل کنید.

۱۶. از انتقال به کار رفته در راه حل سوال ۱۰ استفاده کنید. برای اضافه کردن عضو جدید به مجموعه، از قضیه باقیمانده چینی تعمیم یافته استفاده کنید.

۱۷. برای هر $1 \leq i \leq 2013$ مجموعه $\mathbb{B}_i$ را برابر با بزرگترین مجموعه از اعضای $\mathbb{Z}_{m_i}$ تعریف کنید به طوری که تفاضل هیچ دو عضوی از B_i متعلق به A_i نباشد. ثابت کنید $|\mathbb{B}_i| \geq \frac{m_i}{2|A_i|+1}$. سپس برای هر انتخاب $b_1 \in \mathbb{B}_1, b_2 \in \mathbb{B}_2, \cdots, b_{2013} \in \mathbb{B}_{2013}$ عددی مثل x به طوری که برای هر $1 \leq i \leq 2013$ رابطه $x \overset{m_i}{\equiv} b_i$ برقرار باشد را نسبت دهید و ثابت کنید یکی از این اعداد در خواسته مسئله صادقند.

تمرینات اضافه

۱. کافیست 2^n عدد اول دو به دو متمایز انتخاب کرده و اعداد مجموعه را طوری انتخاب کنید که به ازای هر زیرمجموعه از مجموعه ارائه شده، توان یکی از عوامل اول انتخاب شده در مجموع اعضای این زیرمجموعه دقیقا برابر با یک باشد. برای قسمت دوم مشابه ایده به کار رفته در راه حل سوال ۸ عمل کنید.

۲. فرض کنید S برابر با حاصل‌ضرب تمام اعداد اول کوچکتر از ۲۰۱۴ باشد. طبق قضیه دیریشله ضعیف می‌دانیم نامتناهی $p \in \mathbb{P}$ وجود دارد که $p \overset{S}{\equiv} 1$. با استفاده از قضیه باقیمانده چینی و با انتخاب‌های مناسب n به پیمانه این اعداد اول، ثابت کنید $a + b = c$. سپس با انتخاب دیگری برای مقدار n این نتیجه را بهبود بخشیده و ثابت کنید $a^k + b^k = c$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ برقرار است.

۳. ثابت کنید مقدار این تفاضل بر $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$ بخش‌پذیر است.

۴. از استدلال مشابه راه حل سوال اول تمرینات استفاده کنید. کافیست برای $a_{n+2}, a_n \in \mathbb{N}$ که اعدادی ثابتند، $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ موجود باشد که داشته باشیم :

$$n \mid \tau\left(n{a_{n+1}}^n + (n+1){a_n}^{n+1}\right) \quad , \quad n+1 \mid \tau\left((n+1){a_{n+2}}^{n+1} + (n+2){a_{n+1}}^{n+2}\right)$$

با توجه به قضیه باقیمانده چینی توان عوامل مشترک a_{n+1} با a_n, a_{n+2} را طوری تنظیم کنید که شرایط بالا برقرار شوند.