به نام خدا

مجموعه تمارین نظریه اعداد جلسه سوم دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۴۰۱

قضایای فرما و اویلر

۱. برای هر عدد اول $p \in \mathbb{P}$ ثابت کنید $p^{p+1} + (p+1)^p$ مربع کامل نیست.

۲. فرض کنید $\mathbb{S}$ مجموعه همه اعدادی باشد که از سمت راست، جایگاه‌های فرد ارقام ناصفر و جایگاه‌های زوج تنها رقم صفر داشته باشند. ثابت کنید هر عدد طبیعی به فرم $2^x 3^y$ که در آن $x, y \in \mathbb{N}$ برقرار است یکی از اعضای S را عاد می‌کند.

۳. تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(1) = 1, \forall n \in \mathbb{N} : f(n+1) = f(n) + 2^{f(n)}$ تعریف شده است. ثابت کنید مجموعه $\{f(1), \cdots, f(3^{2020})\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به پیمانه 3^{2020} تشکیل می‌دهد.

۴. ثابت کنید نامتناهی عدد طبیعی موجود است که به شکل $a^{d(b)} + b^{d(a)}$ قابل نمایش نیستند. (در اینجا $d(n)$ برابر تعداد مقسوم‌علیه های مثبت n است)

۵. فرض کنید $n, k \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی‌اند. ثابت کنید مضربی از n موجود است که تعداد ارقام ناصفر آن، دقیقا k تا از تعداد ارقام ناصفر n بیشتر است.

۶. فرض کنید $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ همگی با هم برابر نباشند. ثابت کنید مجموعه $\{{a_1}^t + \cdots + {a_n}^t \mid t \in \mathbb{N}\}$ نامتناهی عامل اول[†] دارد.

۷. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ چندجمله‌ای ناصفری با ضرایب صحیح باشد. ثابت کنید مجموعه $\{P(n) + 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ دارای نامتناهی عامل اول است.

۸. فرض کنید $k \in \mathbb{Z}$ عددی صحیح و ناصفر باشد. ثابت کنید مجموعه $\{2^{2^n} + k \mid n \in \mathbb{N}\}$ دارای نامتناهی عامل اول و نامتناهی عدد مرکب است.

۹. ثابت کنید در هر تصاعد حسابی با جمله اولیه و قدرنسبت طبیعی، نامتناهی جمله موجود است که مجموعه عوامل اول آنها دقیقا یکسان باشند.

۱۰. فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی باشند و $a > 1$. ثابت کنید مجموعه $\{a^n + b \mid n \in \mathbb{N}\}$ دارای نامتناهی عامل اول است. همچنین ثابت کنید نامتناهی عامل اول موجود است که هیچ یک از اعضای این مجموعه را عاد نکند.

۱۱. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول و فرد به فرم $3k + 2$ باشد. مجموعه $S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid 0 \leq x, y \leq p - 1\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه حداکثر p عضو بخش‌پذیر بر p دارد.

۱۲. فرض کنید $a, c \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی و $b \in \mathbb{Z}$ عددی صحیح باشد. ثابت کنید نامتناهی $x \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که داشته باشیم : $a^x + x \overset{c}{\equiv} b$.

۱۳. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ موجود باشد به طوری که عدد طبیعی $a \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که دنباله $\{a, P(a), P(P(a)), \cdots\}$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ شامل یک توان kام کامل است. ثابت کنید P چندجمله‌ای خطی است.

۱۴. فرض کنید $a \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید برای هر $m \in \mathbb{N}$ دنباله $\{\lfloor \frac{a^n}{n} \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ دارای عضویست که بر m بخش‌پذیر است.

۱۵. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{P}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد اول باشد به طوری که برای هر تعداد متناهی عضو مثل $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{A}$، تمام عوامل اول $a_1 a_2 \cdots a_n - 1$ نیز در A وجود داشته باشند. ثابت کنید $A = \mathbb{P}$.

۱۶. ثابت کنید nامین عدد طبیعی‌ای که نسبت به n اول است بزرگتر یا مساوی با $\sigma(n)$ است که در آن $\sigma(n)$ مجموع مقسوم‌علیه های n است. حالت تساوی را بیابید.

۱۷. دنباله $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ طوری داده شده است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم : $\sum_{i=1}^{n} a_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} = n^{10}$. ثابت کنید برای هر $c, n \in \mathbb{N}$ داریم: $\frac{c^{a_n} - c^{a_{n-1}}}{n} \in \mathbb{Z}$.

۱۸. احکام زیر را ثابت کنید :

(آ) نامتناهی جفت $a, b \in \mathbb{N}$ از اعداد طبیعی موجود است به طوری که $a > b$ و همچنین $\varphi(a) < \varphi(b)$.

(ب) نامتناهی دنباله صعودی به طول n از اعداد طبیعی مثل $a_1 > \cdots > a_n$ موجود است به طوری که $\varphi(a_1) < \cdots < \varphi(a_n)$.

(ج) (اختیاری) برای هر جایگشت از اعداد $1, 2, \cdots, n$ مثل $\pi_1, \cdots, \pi_n$ ثابت کنید نامتناهی دنباله صعودی به طول n مثل $a_1 > \cdots > a_n$ موجود است به طوری که $\varphi(a_{\pi_1}) < \cdots < \varphi(a_{\pi_n})$.

[†] می‌گوییم دنباله $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ دارای نامتناهی عامل اول است اگر و فقط اگر نامتناهی $p \in \mathbb{P}$ موجود باشد که به ازای آنها $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $p \mid S_n$ برقرار باشد.

تمارین اضافه

۱. فرض کنید $a, b, c, d, k, l \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی باشند به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه عوامل اول $n^k + a^n + c, n^l + b^n + d$ یکسان باشند. ثابت کنید $a = b, c = d, k = l$.

۲. ثابت کنید $m \in \mathbb{N}$ طبیعی موجود است به طوری که معادله $\varphi(n) = m$ حداقل ۲۰۱۵ جواب برای n در مجموعه اعداد طبیعی داشته باشد.

۳. فرض کنید $p \geq 5$ عددی اول باشد. ثابت کنید $q, r \in \mathbb{P}$ موجودند به طوری که $2 \leq q, r \leq p-2$ و همچنین $q^{p-1} \overset{p^2}{\not\equiv} 1, r^{p-1} \overset{p^2}{\not\equiv} 1$.