مجموعه آزمون های شبیه ساز مرحله دوم المپیاد ریاضی

به همت :
سید یاسین موسوی
امیرمحمد قوی
آرین همتی

برای هر آزمون دو روزه به ازای هر روز ۲۷۰ دقیقه زمان در نظر گرفته شده است.

راه حل های پیشنهادی سوالات آزمون ها در بخش راه حل ها ذکر شده است. بوکلت بعد هر آزمون بروزرسانی خواهد شد.

فهرست مطالب

۱ آزمون ها

۱.۱ آزمون اول

مسئله ۱) کوچکترین عدد طبیعی n را بیابید که در شرط زیر صادق باشد:
اگر تعدادی نقطه در صفحه داشته باشیم که به ازای هر n تا از این نقاط بتوان دو خط رسم کرد که هر نقطه روی حداقل یکی از خطوط باشند، آنگاه دو خط وجود داشته باشند که هر نقطه از کل نقاط اولیه روی حداقل یکی از این دو خط باشند.

مسئله ۲) در مثلث حاده الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ اگر $\overline{CC_1}$ نیمساز زاویه $\angle BCA$ و O مرکز دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ باشد و خط عمود بر $\overline{AB}$ و گذرنده از C خط $\overline{OC_1}$ را روی دایره محیطی $\overset{\triangle}{AOB}$ قطع کند، اندازه زاویه $\angle BCA$ را بدست آورید.

مسئله ۳) برای هر x, y, z حقیقی و مثبت نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{x^x}{x+y} + \frac{y^y}{y+z} + \frac{z^z}{z+x} \geq \frac{3}{2}$$

مسئله ۴) چهار عدد صحیح دو به دو متمایز x, y, z, k در معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 3k^2$ صدق می کنند. ثابت کنید:

$$\max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\} \geq \sqrt{3k - \frac{1}{2}}$$

مسئله ۵) در گوشه پایین سمت چپ یک جدول $n \times n$ یک مهره قرار داده شده است. دو بازیکن به این صورت بازی می کنند: با شروع از نفر اول، هر فرد در نوبت خود می تواند با حرکت دادن مهره به چپ، راست، بالا یا پایین آن را به یکی از خانه هایی که مهره تا به حال در آن خانه مستقر نبوده است، ببرد. بازیکنی که نتواند مهره را در نوبت خودش حرکت دهد بازنده است. در هر یک از حالت های زیر چه کسی استراتژی برد دارد؟

الف) $n = 8$

ب) $n = 9$

مسئله ۶) دایره ای به شعاع 1 و مرکز O داده شده است. از نقطه A خارج از دایره مماس های $\overline{AB}, \overline{AC}$ را بر دایره رسم می کنیم. نقطه M به گونه ای روی دایره قرار دارد که مساحت چهارضلعی های $ABMC, OBMC$ برابرند. طول $\overline{AM}$ را بیابید.

۲.۱ آزمون دوم

مسئله ۱) حسام و مریم یک بازی را انجام می دهند به این صورت که با شروع از یک گراف تهی 2003 راسی و با شروع از مریم هر بار هر کس در نوبت خود یکی از یال های کشیده نشده را به گراف اضافه می کند. اولین کسی که گراف را همبند کند بازنده است. چه کسی استراتژی برد خواهد داشت؟

مسئله ۲) X, Y نقاط برخورد دو دایره متقاطع C_1, C_2 هستند. دایره C به ترتیب در نقاط P, Q بر دایره های C_1, C_2 مماس داخل است. پاره خط $\overline{XY}$ در نقاط M, N با دایره C برخورد می کند. نیم خط های $\overline{PM}$ و $\overline{PN}$ دایره C_1 را به ترتیب در نقاط D, A و نیم خط های $\overline{QM}$ و $\overline{QN}$ به ترتیب دایره C_2 را در نقاط C, B قطع می کنند. ثابت کنید $AB = CD$.

مسئله ۳) $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد صحیح است به طوری که برای هر $n, k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_n | a_{n+k} - a_k$. همچنین تعریف می کنیم $b_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$. ثابت کنید برای هر $n, k \in \mathbb{N}$ داریم $b_n b_k | b_{n+k}$.

مسئله ۴) در یک جدول $n \times n$ حداقل $2n$ خانه را به رنگ سیاه در آورده ایم. ثابت کنید دنباله $p_1, p_2, \cdots, p_k$ از مرکز های برخی از این مربع های رنگ شده وجود دارد به طوری که اضلاع چندضلعی $p_1 p_2 \cdots p_k$ یکی در میان افقی و عمودی باشند.

مسئله ۵) تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(f(x)f(y) + x^2) = f(xy) + xf(x)$$

مسئله ۶) چهارضلعی $ABCD$ بدون اضلاع موازی و مساوی است و بر دایره ای به مرکز I محیط است. نقاط K, L, M, N نقاط وسط پاره خط های $\overline{AD}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{AB}$ هستند. اگر $AB \cdot CD = 4IK \cdot IM$، آنگاه ثابت کنید $BC \cdot AD = 4IL \cdot IN$.

۳.۱ آزمون سوم

مسئله ۱) دایره های C_1 و C_2 در زوایای برابر $\angle X_1OY$ و $\angle X_2OY$ محاط شده اند و بر خطوط OX_1 و OX_2 به ترتیب در نقاط A_1 و A_2 مماسند و همچنین بر خط OY به ترتیب در نقاط B_1 و B_2 مماس هستند. اگر P_1 نقطه برخورد دوم خط A_1B_2 با C_1 باشد و P_2 محل برخورد دوم خط A_2B_1 با C_2 باشد، ثابت کنید P_1P_2 مماس مشترک دو دایره است.

مسئله ۲) همه اعداد نه رقمی متشکل از ارقام ۱،۲،۳ را با سه رنگ آبی و قرمز و سبز رنگ زده ایم به طوری که رنگ دو عددی که در هر نه رقم متفاوت هستند متفاوت باشد. می دانیم عدد ۱۲۲۲۲۲۲۲۲ قرمز و عدد ۲۲۲۲۲۲۲۲۲ سبز است. رنگ عدد ۱۲۳۱۲۳۱۲۳ را (با اثبات) بیابید.

مسئله ۳) آیا ۳۰ دنباله هندسی نامتناهی از اعداد حقیقی وجود دارد که اجتماع همه آنها بتواند تمام اعضای مجموعه $S = \{1, 2, \cdots, 100\}$ را بپوشاند؟

مسئله ۴) اعداد طبیعی $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n > 3)$ دور یک دایره به صورتی قرار داده شده اند که هر عدد مجموع دو عدد مجاورش را عاد کند. همچنین قرار می دهیم $k_i = \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i}$ که برای هر i، $k_i \in \mathbb{Z}$. همچنین دقت کنید $x_0 = x_n$ و $x_{n+1} = x_1$. ثابت کنید:

$$2n \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_n < 3n$$

مسئله ۵) تابع $f : \mathbb{Z}^{\geq 0} \to \mathbb{Z}^{\geq 0}$ موجود است. می دانیم برای هر $n > 0$، $f(2n) = 2f(n) + 1$ و برای هر n، $f(2n+1) = 2f(n)$. ثابت کنید برای هر n داریم : $f(f(n - f(f(n))) = 0$

مسئله ۶) مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با دایره محاطی داخلی ω به مرکز I موجود است. دایره ω_A بر ω مماس خارج است و بر اضلاع AB, AC به ترتیب در نقاط A_1, A_2 مماس است. خط A_1A_2 را r_A نامیده و r_B, r_C را نیز به طریق مشابهی تعریف می کنیم. سه نقطه برخورد دو به دوی خطوط r_A, r_B, r_C را X, Y, Z می نامیم. ثابت کنید مرکز دایره محیطی $\overset{\triangle}{XYZ}$، مرکز دایره محاطی $\overset{\triangle}{XYZ}$ و I هم خطند.

۴.۱ آزمون چهارم

مسئله ۱) مثلث حاده الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ مفروض است و در آن AD, BE, CF ارتفاع های مثلثند. I_1, I_2, I_3 به ترتیب مرکز دایره محاطی مثلث های $\overset{\triangle}{AEF}, \overset{\triangle}{BFD}, \overset{\triangle}{CDE}$ می باشند. خط I_1I_2 ضلع AC را در K و خط I_1I_3 ضلع AB را در L قطع می کند. ثابت کنید $KL \parallel BC$.

مسئله ۲) برای هر سه عدد حقیقی مثبت a, b, c که در شرط $abc = 1$ صدق می کنند ثابت کنید :

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a(1+b)} \geq \frac{3}{2}$$

مسئله ۳) تعداد $3n - 1$ نقطه در صفحه داریم به طوری که هیچ سه تایی از آنها هم خط نیستند. ثابت کنید می توان $2n$ تا از این نقاط را انتخاب کرد به طوری که پوش محدب آنها مثلث نباشد.

مسئله ۴) ثابت کنید هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع متناهی ای از توان های متمایز و صحیح عدد طلایی (برابر با $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) نمایش داد.

مسئله ۵) برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $gcd(m, n) = d$ ثابت کنید :

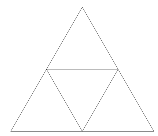
$$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \frac{d}{\varphi(d)}$$

مسئله ۶) در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم $AB = AC$ و D پای عمود وارد از A است. P نقطه ای درون مثلث است به طوری که $\angle APB > 90$ و $\angle PBD + \angle PAD = \angle PCB$. خطوط CP, AD یکدیگر را در Q و خطوط BP, AD یکدیگر را در R قطع می کنند. اگر T, S به ترتیب نقاطی روی AB, AP باشند (و S بین A, P قرار نداشته باشد) به طوری که $\angle TRB = \angle DQC$ و همچنین $\angle PSR = 2\angle PAR$ آنگاه ثابت کنید $RS = RT$.

۲ راه حل های پیشنهادی

۱.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون اول

راه حل ۱) ثابت میکنیم پاسخ مسئله $n = 6$ است. ابتدا برای نقض $n = 5$ شکل زیر را در ارائه می دهیم :



حال حکم را برای $n = 6$ اثبات می‌کنیم. حال روی تعداد نقاط استقرا . فرض استقرا برای وجود 6 نقطه در صفحه بدیهیست. حال اگر $m+1$ نقطه در صفحه داشته باشیم با حذف نقطه ای دلخواه و با استفاده از فرض استقرا میدانیم هر m نقطه ای‌که انتخاب‌کنیم ، دو خط وجود دارند‌که هر یک از این m نقطه بر روی این دو خط قرار داشته باشند. فرضا نقطه A را حذف میکنیم و بقیه m نقطه موجود بر روی خط های X, Y قرار داشته باشند. اگر تعداد نقاط موجود روی خط X یا Y برابر یک باشد ، به وضوح میتوان این خط را طوری جابجا کرد‌که شامل A نیز باشد. حال اگر تعداد نقاط موجود بر روی خطوط X, Y بیشتر از یک باشد ، از آنجا‌که $m > 5$ به وضوح لااقل یکی از خطوط X, Y حداقل سه نقطه دارد. فرضا نقاط B, C, D روی خط X و نقاط E, F بر روی خط Y قرار دارند ، حال میدانیم 6 نقطه A, B, C, D, E, F باید بتوانند بر روی دو خط قرار بگیرند و بنابراین A مجبور است بر روی یکی از این دو خط قرار بگیرد‌که حکم استقرا را ثابت می‌کند.

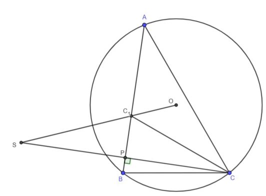
راه حل ۲) از آنجا‌که $AOBS$ چهارضلعی محاطی است، داریم

$\angle ASO = \angle ABO = \angle BAO = \angle BSO$ بنابراین OS نیمساز زاویه $\angle ASB$ است. از قضیه نیمساز در مثلث های $\overset{\triangle}{ASB}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم : $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AS}{SB}$ و $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC}$. بنابراین داریم(**I**) $\frac{AC}{BC} = \frac{AS}{BS} = k$. حال چون $SC \perp AB$، داریم $AS^2 + BC^2 = AC^2 + BS^2$ که از تلفیق این با رابطه (**I**) این معادل است با اینکه

$$k^2 \cdot BS^2 + BC^2 = k^2 \cdot BC^2 + BS^2 \iff (k^2-1)(BS^2 - BC^2) = 0$$

دقت‌کنید k نمی تواند برابر یک باشد. چون در این صورت خط $AC = BC$ و بنابراین C, OP, C_1 هم خط خواهند بود و تقاطع OC_1, CP معنایی نخواهد داشت. بنابراین باید داشته باشیم $BS = BC$. با جاگذاری این نتیجه در رابطه (**I**) نتیجه می شود $AS = AC$ و در نتیجه $\overset{\triangle}{ASB} \cong \overset{\triangle}{ABC}$ که نتیجه می دهد

$$180 - 2\angle ACB = 180 - \angle AOB = \angle ASB = \angle ACB \iff \angle ACB = 60$$



راه حل ۳) ثابت می‌کنیم $\frac{x^x}{x+y} \geq \frac{x-y}{4} + \frac{1}{2}$ و با جمع‌کردن این سه نامساوی مسئله به سادگی حل می شود.

$$\frac{x^x}{x+y} \geq \frac{x-y}{4} + \frac{1}{2} \iff 4x^x \geq x^2 - y^2 + 2x + 2y \iff 4x^x \geq (x+1)^2 - (y-1)^2$$

اما $(x+1)^2 \leq (x+1)^2-(y-1)^2$ پس کافیست ثابت کنیم $4x^x \geq (x+1)^2 \iff f(x) = x\ln x + \ln 4 - 2\ln(x+1) \geq 0$
دقت کنید $f(1)=0$ پس کافیست ثابت کنیم $f'(x)$ برای $x>1$ مثبت و برای $x<1$ منفی است. همچنین $f'(x) = 1+\ln x - \frac{2}{x+1}$.
دقت کنید $f'(1)=0$ و بنابراین کافی است ثابت کنیم $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+1)^2}$ همواره مثبت است که این هم بدیهیست و در نتیجه مسئله حل می شود.

راه حل ۴) ابتدا بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم $x>y>z$ و رابطه اولیه مسئله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2+(x+y+z)^2 = 9k^2$$

حال قرار می دهیم $x-z=a$ و همچنین $x-y=b$. واضح است که $a>b$. بنابراین خواهیم داشت:

$$2a^2 > a^2+b^2+(a-b)^2 = (3k-(x+y+z))(3k+(x+y+z))$$

حال اگر قرار دهیم $3k-(x+y+z)=\alpha$ و $3k+(x+y+z)=\beta$ آنگاه $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ و همچنین $\alpha\beta < 2a^2$ پس داریم $6k = \alpha+\beta < 2a^2+1$ و در نتیجه

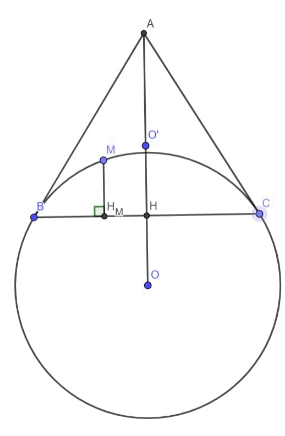
$$\frac{6k-1}{2} < a^2 \iff \sqrt{3k-\frac{1}{2}} < a = x-z = \max\{x,y,z\} - \min\{x,y,z\}$$

راه حل ۵) برای قسمت اول مسئله ابتدا به صورت دلخواه جدول را دومینو بندی می کنیم. هر مرحله بعد از هر حرکت نفر دوم و ورود او به یک دومینوی جدید، نفر اول همواره می تواند به خانه دوم آن دومینو برود. در این صورت نفر اول ممکن نیست در این بازی ببازد چون همواره در یک دومینو حرکت می کند که خانه دوم آن خالی است. پس نفر اول استراتژی برد دارد. برای قسمت دوم مسئله نیز همه جدول به غیر از خانه ای که بازی از آن شروع شده است را دومینو بندی می کنیم و سپس بعد از حرکت اول، نفر دوم در هر حرکت می تواند به خانه دوم دومینویی که نفر اول خانه اول آن را گذرانده برود و به این صورت نفر دوم هیچگاه نمیبازد چون در هر صورت می تواند به یک خانه خالی برود و در نتیجه در این حالت نفر دوم استراتژی برد دارد.

راه حل ۶) می دانیم $S_{ABC}-S_{BMC} = S_{ABMC} = S_{OBMC} = S_{BMC}+S_{OBC}$ در نتیجه $S_{ABC}-S_{OBC} = 2S_{BMC} \quad (I)$
از طرفی می دانیم

$$S_{ABC}-S_{OBC} = \frac{1}{2}AH\cdot BC - \frac{1}{2}OH\cdot BC = \frac{1}{2}BC\cdot(AH-OH)$$

از طرف دیگر $S_{BMC} = \frac{1}{2}BC\cdot MH_M$ و بنابراین طبق رابطه **(I)** باید داشته باشیم $AH-OH = 2MH_M$. قرینه O نسبت به



BC را O' می نامیم. داریم $AO' = AH-OH = 2MH_M$. همچنین دقت کنید O' مرکز ارتفاعی $\overset{\triangle}{ABC}$ است. می دانیم در هر مثلث فاصله هر راس تا مرکز ارتفاعی، دو برابر فاصله مرکز دایره محیطی تا ضلع روبرو به آن راس در مثلث است. بنابراین طول MH_M

برابر با فاصله مرکز دایره محیطی $\overset{\triangle}{ABC}$ از ضلع BC است. از طرفی مرکز دایره محیطی $\overset{\triangle}{ABC}$ روی AO قرار دارد و همچنین از قائم الزاویه بودن مثلث $\overset{\triangle}{ACO}$ و با استفاده از اینکه میانه وارد بر وتر نصف وتر است، نتیجه می شود که مرکز دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ وسط AO است. بنابراین چون M و مرکز دایره محیطی $\overset{\triangle}{ABC}$ از BC فاصله یکسان دارند نتیجه می شود که M روی عمودمنصف AO قرار دارد و $AM = MO = 1$

۲.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون دوم

راه حل ۱) ثابت می‌کنیم در هر حرکت، مریم می تواند یالی اضافه کند که موجب باخت او نشود. دقت کنید قبل از انجام حرکت آخر بازی گراف شامل دو مولفه همبندی است که هر یک از آنها گراف کاملند! در غیر این صورت حرکت فردی که حرکت آخر بازی را انجام داده و می بازد، با کشیدن یکی از یال های کشیده نشده درون یکی از مولفه های همبندی از باخت حتمی خود جلوگیری کند. پس قبل از انجام حرکت آخر بازی گراف به شکل دو مولفه همبندی خواهد بود که هر یک از آنها گراف کامل است. این دو را K_m, K_n در نظر می گیریم. همچنین می دانیم تعداد یال های K_i زوج است اگر و فقط اگر $i \overset{4}{\equiv} 0, 1$. از طرفی دقت کنید با توجه به اینکه $m + n = 2003$ ، دقیقا یکی از اعداد m, n به پیمانه چهار همنهشت با صفر یا یک و دیگری به پیمانه چهار همنهشت با دو یا سه است. بنابراین یکی از مولفه های K_m, K_n فرد یال و دیگری زوج یال دارد. در نتیجه بعد از حرکت آخر که موجب باخت می شود، زوج یال کشیده می شود و در نتیجه حرکت آخر توسط حسام انجام می شود (که باعث باخت او می شود) و مریم در هر صورت برنده بازی است.

راه حل ۲) راه حل اول : از آنجا که N روی خط XY که محور اصلی C_1, C_2 است قرار دارد واضح است $NQ \cdot NC = NP \cdot ND$ و بنابراین چهارضلعی $PQDC$ محاطی است.به همین ترتیب چون M روی محور اصلی C_1, C_2 قرار دارد $PQAB$ نیز محاطیست. از آنجا که دوایر C, C_2 در Q مماس داخلند، اندازه دو کمان $\widehat{NQ}, \widehat{CQ}$ باید برابر باشد. پس داریم :

$$\frac{\widehat{CQ}}{2} = \frac{\widehat{NQ}}{2} = \angle NPQ = \angle QCD$$

بنابراین CD بر دایره C_2 مماس است. بنا بر تقارن شکل، CD بر C_1 هم مماس بوده و بنابراین مماس مشترک خارجی C_1, C_2 است. بار دیگر بنا بر تقارن شکل، AB نیز مماس مشترک خارجی C_1, C_2 است و بنابراین حکم $AB = CD$ بدیهیست.

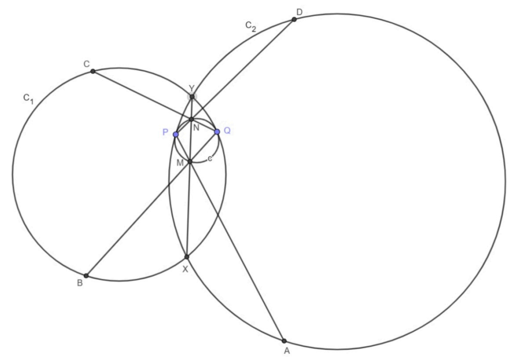
راه حل دوم (ارسالی شایان طایفه) : ابتدا مانند راه حل قبل دقت کنید $PQDC, PQAB$ چهارضلعی های محاطی هستند. بعد از نتیجه گرفتن $P\overset{\triangle}{N}Q \sim C\overset{\triangle}{N}D$ و $M\overset{\triangle}{A}B \sim P\overset{\triangle}{Q}M$ می توان نوشت :

$$\frac{PN}{CN} = \frac{QN}{DN} \ , \ \frac{PM}{BM} = \frac{QM}{AM} \ \ (I)$$

حال از آنجایی که نقطه P مرکز تجانس دایره های C, C_1 و نقطه Q مرکز تجانس دایره های C_1, C_2 می باشند، داریم :

$$\frac{PN}{ND} = \frac{PM}{MA}, \frac{QN}{NC} = \frac{QM}{MB} \implies \frac{PN}{CN} \cdot \frac{QN}{DN} = \frac{PM}{BM} \cdot \frac{QM}{AM} \overset{(I)}{\implies} \frac{PN}{CN} = \frac{PM}{BM}$$

بنابراین نسبت تشابه های دو جفت مثلث مذکور برابر می باشند و داریم $\frac{PQ}{AB} = \frac{PQ}{CD} \implies AB = CD$ که اثبات را کامل می کند.



راه حل ۳) ابتدا به استقرا روی n حکم زیر را ثابت می‌کنیم :

$$a_1a_2\cdots a_n \,|\, a_{l+1}a_{l+2}\cdots a_{l+n}, \quad \forall\, l \geq 0$$

پایه استقرا برای $n=1$ واضح است زیرا $a_1 \,|\, a_{l+1}-a_1,$ و در نتیجه $a_1 \,|\, a_{l+1}$. برای گام استقرایی فرض کنید حکم برای n درست است. باید نشان دهیم :

$$a_1a_2\cdots a_na_{n+1} \,|\, a_{l+1}a_{l+2}\cdots a_{l+n}a_{l+n+1} = f(l)$$

همچنین برای هر $j \geq 0$ داریم :

$$f(j+1)-f(j) = (a_{j+n+2}-a_{j+1})a_{j+2}\cdots a_{j+n+1}.$$

همچنین بنا بر فرض استقرا، $a_1\cdots a_n \,|\, a_{j+2}\cdots a_{j+n+1},$ و همچنین می دانیم $a_{n+1} \,|\, a_{j+n+2}-a_{j+1}$. بنابراین داریم :

$$a_1\cdots a_{n+1} \,|\, f(j+1)-f(j), \quad \forall j \geq 0$$

و چون

$$a_1\cdots a_{n+1}|f(0) = a_1\cdots a_{n+1},$$

نتیجه می گیریم که :

$$a_1\cdots a_{n+1} \,|\, f(0) + \big(f(1)-f(0)\big) + \cdots + \big(f(l)-f(l-1)\big) = f(l), \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

و حکم استقرا ثابت می شود. در نتیجه این حکم :

$$b_kb_n = (a_1\cdots a_k)(a_1\cdots a_n) \,|\, (a_1\cdots a_k)(a_{k+1}\cdot a_{k+n}) = b_{k+n}.$$

راه حل ۴) ابتدا گرافی را به این صورت به مسئله متناظر می کنیم : دو خانه سیاه را به هم وصل می کنیم اگر و فقط اگر در یک سطر یا ستون قرار داشته باشند و همچنین بین آنها در سطر یا ستون مشترکشان هیچ خانه سیاه دیگری وجود نداشته باشد. حال دقت کنید اگر در سطر i ام k_i خانه سیاه شده باشد (برای $k_i \neq 0$)، در این سطر $k_i - 1$ یال افقی از این گراف وجود دارد. بنابراین نتیجه می گیریم اگر تعداد یال های افقی گراف برابر E_H باشد داریم :

$$E_H = \sum_{k_i\neq 0}(k_i-1) \geq \sum (k_i-1) = \Big(\sum k_i\Big) - n = 2n-n = n$$

پس حداقل n یال افقی در این گراف وجود دارد. به طریق مشابه می توان نتیجه گرفت که گراف حداقل n یال عمودی دارد. بنابراین نتیجه می گیریم که گراف حداقل $2n$ یال دارد. پس گراف مذکور $2n$ راس و حداقل $2n$ یال دارد و بنابراین نمی تواند درخت باشد (در صورت درخت بودن تعداد یال ها باید حداکثر $2n-1$ باشد) و در نتیجه دارای حداقل یک دور است و به سادگی می توان نتیجه گرفت که کافیست این دور را در نظر بگیریم و اگر در یک سطر یا ستون حداقل سه راس متوالی طی شده باشد، راس های میانی را در نظر نگیریم و به این صورت دنباله ای از راس های بین مربع های سیاه خواهیم داشت که خطوط واصل هر دو مربع متوالی در این دنباله یکی در میان افقی و عمودی است.

راه حل ۵) قرار دهید $p(x,y) : f(f(x)f(y)+x^2) = f(xy)+xf(x)$. از $p(-1,1)$ می توان نتیجه گرفت u وجود دارد که $f(u)=0$. از $p(u,y)$ داریم : $f(u^2)=f(uy)$. پس یا تابع ثابت است و یا $u=0$. به وضوح تنها جواب های ثابت تابع $f(x)=0$ است. حال فرض میکنیم $u=0$. از $p(x,0)$ داریم $f(x)=f(-x) \implies f(x^2)=xf(x)$. حال داشتیم $f(1)^2=1 \implies f(1)f(-1)=-1$. حال دقت کنید اگر تابع $f(x)$ جواب مسئله باشد $-f(x)$ نیز در مسئله صادق است پس بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم $f(1)=1$. از $p(1,y)$ داریم $f(f(y)+1)=f(y)+1$. از طرفی $f(f(-y)+1)=f(-y)+1$ پس $f(f(y)-1)=f(y)-1$ و در نتیجه

$$f(f(y)) = f(f(f(y)-1)+1) = f(f(y)-1)+1 = f(y)$$

حال ثابت میکنیم تابع یک به یک است :

فرض کنید $f(ab)=f(a)$ که a ناصفر است و $|b|$ یک نیست. حال از مقایسه $p(\frac{x}{a},a), p(\frac{x}{a},ab)$ داریم $f(x)=f(xb)$. دقت کنید می دانستیم $f(x^2)=xf(x) \implies f((bx)^2)=bxf(bx) \implies f(x^2)=bxf(x)=xf(x)$ و بنابراین $(b-1)f(x)=0$. که تناقض است. پس تابع یک به یک است و از آخرین نتیجه به دست آمده $\Big(f(f(x))=f(x)\Big)$ داریم $f(x)=x$ که حل را کامل می کند و تنها جواب های مسئله $f(x)=0$ و $f(x)=-x$ و $f(x)=x$ هستند.

راه حل ۶) اگر نقطه J را طوری انتخاب کنیم که $\overset{\triangle}{AJB} \sim \overset{\triangle}{DIC}$. آنگاه $AJBI$ محاطی است. اگر k دایره محیطی این مثلث باشد و خط IK دایره k را برای بار دوم در J' قطع کند آنگاه:

$$KJ : AB = IM : CD \ , \ IK \cdot KJ = KA \cdot KB = \frac{AB^2}{4} \ , \ 4IK \cdot IM = AB \cdot CD$$

بنابراین $KJ = KJ'$. حال اگر AB قطری از k باشد انگاه $\angle AIB = 90$ و $AD \parallel BC$ که تناقض است بنابراین قطر k نیست. اگر $J' = J$ انگاه:

$$\angle ICB = \angle AIK, \angle IDA = \angle BIK, BC = r(\cot(IBK) + \cot(AIK) = r(\cot(IAK) + \cot(BIK) = AD$$

که تناقض است. حال از این مورد و $KJ' = KJ$ نتیجه میشود که J, J' نسبت به عمود منصف قرینه اند پس داریم :

$$\overset{\triangle}{AIK} \sim \overset{\triangle}{J'BK} \cong \overset{\triangle}{JAK} \sim \overset{\triangle}{IDM}$$

و همچنین $\angle IAK = \angle IAD$ و $\angle IDM = \angle IDA$ پس نتیجه میشود که

$$\overset{\triangle}{AIK} \sim \overset{\triangle}{ADI} \sim \overset{\triangle}{IDM}$$

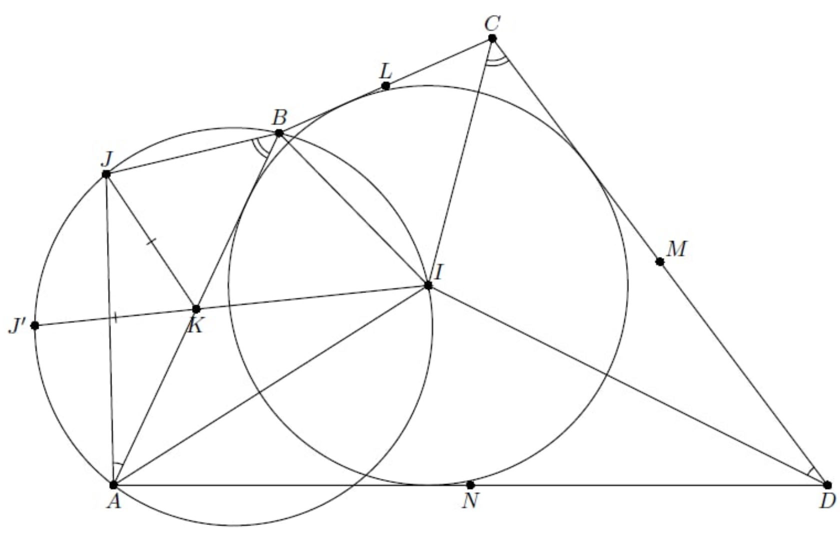
و به طور مشابه: $\overset{\triangle}{BIK} \sim \overset{\triangle}{BCI} \sim \overset{\triangle}{ICM}$.
فرض کنید P, Q اوساط IA, IB باشند. آنگاه داریم :

$$\overset{\triangle}{IND} \sim \overset{\triangle}{KPI} \cong \overset{\triangle}{IQK} \sim \overset{\triangle}{CLI}$$

بنابراین:

$$IN : ND = CL : LI \implies 4IL \cdot IN = AD \cdot BC$$

و اثبات تمام است.



۳.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون سوم

راه حل ۱) ابتدا چون $A_2\overset{\triangle}{O}B_1 \cong A_1\overset{\triangle}{O}B_2$ نتیجه می گیریم $\angle A_1OB_2 = \angle A_2OB_1$، و در نتیجه $A_1B_2 = A_2B_1$. از رابطه قوت نقطه B_2 نسبت به دایره C_1 و قوت نقطه B_2 نسبت به دایره C_2 داریم :

$$P_{C_1}^{B_2} = P_{C_2}^{B_1} = B_1B_2^2 \implies A_1B_2 \cdot P_1B_2 = A_2B_1 \cdot P_2B_1 \implies P_1B_2 = P_2B_1$$

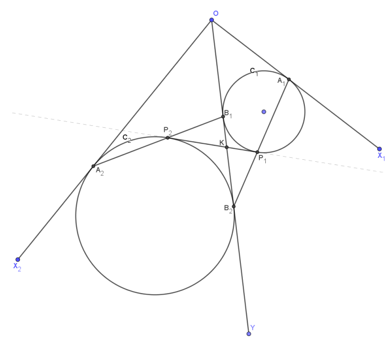
پس اگر خطوط P_1P_2 و B_1B_2 یکدیگر را در K قطع کنند، آنگاه طبق قضیه سینوس ها شعاع دوایر محیطی مثلث های $K\overset{\triangle}{B_1}P_2, K\overset{\triangle}{B_2}P_1$ برابر است و از قضیه سینوس ها در مثلث $O\overset{\triangle}{A_2}B_1$ داریم :

$$\frac{P_1K}{P_2K} = \frac{\sin\angle A_1B_2K}{\sin\angle A_2B_1K} = \frac{\sin\angle OA_1B_2}{\sin\angle OA_2B_1} = \frac{OB_1}{OA_2} \quad (I)$$

حال اگر O_1 مرکز C_1 و O_2 مرکز C_2 باشد، با توجه به اینکه $\angle A_1OB_2 = \angle A_2OB_1$، داریم :

$$O\overset{\triangle}{A_1}O_1 \sim O\overset{\triangle}{A_2}O_2 \implies \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OA_2} = \frac{P_1K}{P_2K} = \frac{R_{C_1}}{R_{C_2}}$$

پس نقطه K روی مماس مشترک B_1B_2 است و نسبت $\frac{P_1K}{P_2K}$ برای این دو نقطه برابر با هم، و برابر با نسبت تجانس دو دایره است پس K مرکز تجانس معکوس دو دایره بوده و از تساوی $P_1B_2 = P_2B_1$ نتیجه می شود که P_1P_2 مماس مشترک دوم دو دایره است.



راه حل ۲) در طول این راه حل همواره از هر دو عدد نه رقمی عدد سومی می سازیم که هیچ یک از ارقامش با رقم متناظر در هر یک از این دو عدد یکسان نباشد و در نتیجه باید رنگ این عدد باید با هر دو عدد مذکور متفاوت باشد. از آنجا که ۱۲۲۲۲۲۲۲۲ قرمز و ۲۲۲۲۲۲۲۲۲ سبز است، نتیجه می شود همه اعداد متشکل از ارقام ۱،۳ و با شروع از ۳ باید به رنگ آبی باشند. (I) از تلفیق این نتیجه با سبز بودن ۲۲۲۲۲۲۲۲۲ نتیجه می گیریم که همه اعداد متشکل از ۱،۳ با شروع از ۱ باید به رنگ قرمز در بیایند. (II) (چرا؟) از ترکیب $(I), (II)$ نتیجه می شود که هر عددی که با ۲ شروع می شود سبز است. (دوباره چرا؟) بنابراین عدد ۲۱۱۲۱۱۲۱۱ به رنگ سبز خواهد بود و از آنجا که ۱۲۳۱۲۳۱۲۳ در همه ارقام با این عدد تفاوت دارد، این عدد سبز رنگ نخواهد بود. از طرفی طبق (I) عدد ۳۱۱۳۱۱۳۱۱ به رنگ آبی است و چون هیچ رقمی از آن با رقم متناظر در ۱۲۳۱۲۳۱۲۳ برابر نیست نتیجه میگیریم ۱۲۳۱۲۳۱۲۳ به رنگ آبی هم نمی تواند باشد و در نتیجه ۱۲۳۱۲۳۱۲۳ فقط می تواند قرمز باشد و اثبات تمام است.

راه حل ۳) خیر. ابتدا لم زیبای زیر را بیان و اثبات می کنیم :

لم) در هر دنباله هندسی نامتناهی از اعداد حقیقی با قدر نسبت $q \neq 1$ حداکثر دو عدد صحیح خالی از مربع وجود دارد. فرض خلف می کنیم که a, aq^m, aq^n سه جمله صحیح و خالی از مربع از دنباله هندسی نامتناهی $\{aq^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ باشند که در آن m, n اعداد طبیعی متمایز هستند. در این صورت واضح است که q^m, q^n باید اعدادی گویا باشند. از ترکیب این و استفاده از الگوریتم اقلیدس نتیجه میگیریم

که $q^{\gcd(m,n)}$ نیز باید عددی گویا باشد. (چرا؟) در نتیجه قرار می دهیم $\gcd(m,n)=d$ و $m=dx$ و $n=dy$. قرار می دهیم $q^d=p$ و می دانیم $p\in\mathbb{Q}$. در نتیجه a, ap^x, ap^y اعدادی صحیح هستند و همچنین p عددی گویاست. قرار می دهیم $p=\frac{t}{s}$ که در آن $gcd(t,s)=1$. نهایتا داریم :

$$ap^x \text{ خالی از مربع } \iff \frac{at^x}{s^x} \text{ خالی از مربع } \iff 0\le V_p(a)+x\Big(V_p(s)-V_p(t)\Big)\le 1 \ (I)$$

$$ap^y \text{ خالی از مربع } \iff \frac{at^y}{s^y} \text{ خالی از مربع } \iff 0\le V_p(a)+y\Big(V_p(s)-V_p(t)\Big)\le 1 \ (II)$$

$$a \text{ خالی از مربع } \iff 0\le V_p(a)\le 1 \ (III)$$

$$\overset{(I),(III)}{\Longrightarrow} \quad -1\le x\Big(V_p(t)-V_p(s)\Big)\le -1$$

$$\overset{(II),(III)}{\Longrightarrow} \quad -1\le y\Big(V_p(t)-V_p(s)\Big)\le -1$$

پس یا همواره $V_p(s)=V_p(t) \iff s=\pm t \iff p=\pm 1$ که در این حالت دنباله هندسی ماکسیمم دو جمله متفاوت دارد و حکم بدیهیست. در غیر این صورت داریم $|x|=|y|=1$ و چون $x,y\in\mathbb{N}$ ، نتیجه می شود $m=n \implies x=y$ که تناقض است. و بنابراین فرض خلف باطل است.

با استفاده از لم مذکور و توجه به اینکه در میان اعداد ۱ تا ۱۰۰ دقیقا ۶۱ عدد خالی از مربع وجود دارد نتیجه می شود برای پوشاندن اعداد ۱ تا ۱۰۰ با دنباله های هندسی نامتناهی از اعداد حقیقی حداقل ۳۱ دنباله هندسی نیاز است و این کار با ۳۰ دنباله هندسی امکان پذیر نیست.

راه حل ۴) ابتدا یک لم را ثابت می کنیم :

لم) فرض کنید که اعداد x_i طوری دور دایره قرار گرفته باشند که $\max\{x_i\}=x_j$. در این صورت اگر عدد x_n از دور دایره حذف شود آنگاه در اعداد باقی مانده هم هر عدد مقسوم علیهی از دو همسایه خود است.
از آنجایی که x_j بزرگترین عدد مجموعه است، $x_{j-1}+x_{j+1}\le 2x_j$. دقت کنید برای اثبات لم کافیست نشان دهیم :

$$x_{j+1} \overset{x_{j-1}}{\equiv} -x_{j+2} \ \ , \ \ x_{j-1} \overset{x_{j+1}}{\equiv} -x_{j+2}$$

حالت اول) اگر $x_{j-1}+x_{j+1}=2x_j$ باشد، آنگاه $x_{j-1}=x_j=x_{j+1}$ و داریم :

$$x_j \overset{x_{j-1}}{\equiv} -x_{j-2} \Longrightarrow x_{j+1} \overset{x_{j-1}}{\equiv} -x_{j-2}$$

به طریق مشابه رابطه دوم هم اثبات می شود و بنابراین حکم لم در حالت اول اثبات می شود. حالت دوم) اگر $x_{j-1}+x_{j+1}=x_j$ باشد، آنگاه داریم :

$$x_j \overset{x_{j-1}}{\equiv} -x_{j-2} \Longrightarrow x_{j+1}+x_{j+1} \overset{x_{j-1}}{\equiv} -x_{j-2} \Longrightarrow x_{j+1} \overset{x_{j-1}}{\equiv} -x_{j-2}$$

و به این ترتیب اثبات لم کامل می شود.

برای طرف اول نامساوی طبق نامساوی حسابی هندسی داریم :

$$\sum \frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i} = \sum\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}+\frac{x_i}{x_{i-1}}\right)\ge 2n$$

برای طرف دوم نامساوی روی n استقرا می زنیم. پایه استقرا بدیهیست. برای گام استقرایی، بنابر لم مذکور، می توان بزرگترین عدد مجموعه (x_j) را حذف کرد به طوری که مجموعه اعداد باقی مانده همچنان در شروط مسئله صادق باشند. برای اثبات گام استقرایی باید نشان دهیم :

$$3\ge \frac{x_j+x_{j-2}}{x_{j-1}}+\frac{x_{j-1}+x_{j+1}}{x_j}+\frac{x_j+x_{j+2}}{x_{j+1}}-\frac{x_{j-2}+x_{j+1}}{x_{j-1}}-\frac{x_{j-1}+x_{j+2}}{x_{j+1}}$$

$$= \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1}} + \frac{x_j + x_{j+1}}{x_{j-1}} + \frac{x_{j-1} + x_{j+1}}{x_j}$$

مشابه حالت بندی به کار رفته در اثبات لم، یا $x_{j-1} + x_{j+1} = x_j$ و یا $x_{j-1} = x_j = x_{j+1}$ و در هر دو حالت حکم گام استقرایی بدیهیست و اثبات کامل است.

راه حل ۵) اگر $f(n) = n$ حکم واضح است ، اگر نه ثابت میکنیم که عدد نا منفی a وجود دارد که $n - f(f(n)) = 2^a$. حکم را به استقرا ثابت میکنیم :

$$f(f(1)) = f(0) = 0 \ \ , \ \ f(f(2)) = f(1) = 0$$

حال اگر حکم برای $1, 2, ..., n-1$ درست باشد حکم را برای n ثابت میکنیم. دقت کنید که

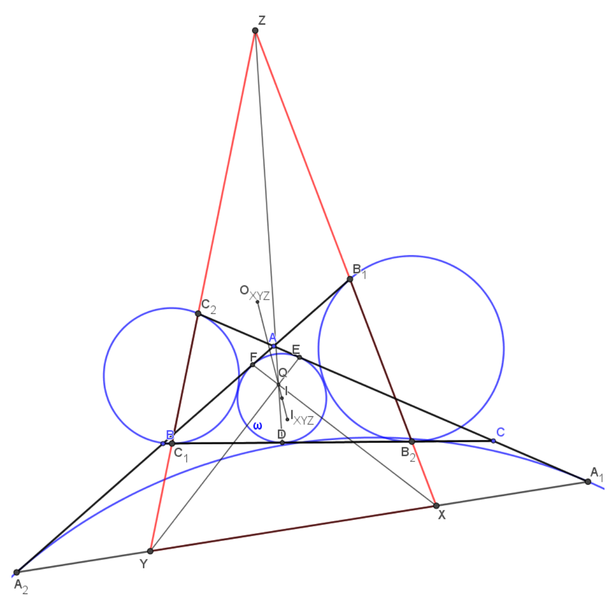
$$f(f(2n)) = f(2f(n)+1) = 2f(f(n)) \ \ , \ \ f(f(2n+1)) = f(2f(n)) = 2f(f(n)) + 1$$

پس

$$2n - f(f(2n)) = 2(n - f(f(n))) \ \ , \ \ 2n + 1 - f(f(2n+1)) = 2(n - f(f(n)))$$

پس با توجه به روابط بالا مستقل از زوجیت n حکم اثبات می شود. حال کافیست ثابت کنیم $f(f(2^a)) = 0$ و از طرفی داریم $f(f(2^a)) = 2^a f(f(1)) = 0$ که اثبات را کامل می کند.

راه حل ۶) مطابق شکل، نقاط D, E, F را تقاطع دایره محاطی داخلی با اضلاع در نظر بگیرید. به وضوح $A_1A_2 \parallel EF$. به طور مشابه دو مثلث $\overset{\triangle}{DEF}, \overset{\triangle}{XYZ}$ اضلاع دو به دو موازی دارند. حال میدانیم که دو مثلث با اضلاع دو به دو موازی، متجانس هستند. بنابراین خطوط XF, DZ, EY در نقطه ای به نام Q همرسند و Q مرکز این تجانس است. از سمت دیگر اگر اوساط XF, DZ, EY را مطابق شکل R, T, S نامگذاری کنیم، مشاهده می شود که $RT \parallel XY \parallel EF$ خواهد بود چرا که R, T اوساط اضلاع یک ذوزنقه هستند. همچنین RT همان مماس مشترک دو دایره موجود در شکل است. بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{RTS}$ هم با دو مثلث قبلی اضلاع دو به دو موازی خواهد داشت و با همدیگر متجانس هستند و بنابراین واضح است که Q مرکز تجانس $\overset{\triangle}{RTS}, \overset{\triangle}{XYZ}$ هم هست. بنابراین مراکز دوایر محاطی داخلی این دو مثلث با Q هم خط هستند، از سمت دیگر Q مرکز تجانس $\overset{\triangle}{EFD}, \overset{\triangle}{XYZ}$ هم هست پس مرکز دایره محیطی این دو مثلث هم با Q هم خط هستند. همچنین نقطه I هم مرکز دایره محاطی داخلی $\overset{\triangle}{RST}$ و هم مرکز دایره محیطی $\overset{\triangle}{EFD}$ می باشد و بنابراین همه ی نقاط نامبرده شده روی خط QI قرار خواهند داشت و اثبات کامل است.



۴.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون چهارم

راه حل ۱) ابتدا توجه کنید حکم مسئله معادل است با محاطی بودن چهارضلعی $LKEF$. (چرا؟) ابتدا ثابت می کنیم $\overset{\triangle}{I_1I_2F} \sim \overset{\triangle}{AFD}$.
که معادل است با اینکه داشته باشیم $\overset{\triangle}{I_2FD} \sim \overset{\triangle}{AFI_1}$ که این نیز از تشابه مثلث های $\overset{\triangle}{AFE}, \overset{\triangle}{BFD}$ بدیهیست. از این تشابه نتیجه می گیریم اگر FI_1 خط AC را در R قطع کند، داریم :

$$\angle I_1KE = 180 - \angle FI_1I_2 - \angle FRA = 180 - (90 - B) - (180 - A - \frac{C}{2}) = \frac{A+B}{2}$$

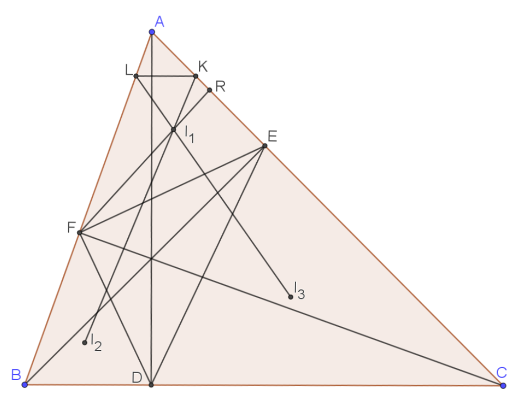
به همین ترتیب و بنا بر تقارن شکل، داریم $\angle I_1LF = \frac{A+C}{2}$. حال مسئله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم :
در مثلث $\overset{\triangle}{AFE}$ مرکز دایره محاطی داخلی را I_1 نامیده ایم. نقاط K, L به ترتیب روی اضلاع AE, AF طوری انتخاب شده اند که $\angle I_1KA = 90 + \frac{F}{2}$ و $\angle I_1LA = 90 + \frac{E}{2}$. ثابت کنید $LKEF$ چهارضلعی محاطیست.
برای حل این مسئله نیز دقت کنید طبق قضیه سینوس ها در مثلث های $\overset{\triangle}{ALI}, \overset{\triangle}{AKI}$ داریم :

$$\frac{AL}{\sin\frac{F}{2}} = \frac{AI_1}{\cos\frac{E}{2}} \;,\; \frac{AK}{\sin\frac{E}{2}} = \frac{AI_1}{\cos\frac{F}{2}}$$

$$\Longrightarrow AL = \frac{AI_1 \cdot \sin\frac{F}{2}}{\cos\frac{E}{2}} \;,\; AK = \frac{AI_1 \cdot \sin\frac{E}{2}}{\cos\frac{F}{2}}$$

از طرفی محاطی بودن $LKEF$ معادل است با تساوی $AK \cdot AE = AL \cdot AF$ و این نیز معادل است با :

$$\frac{AF \cdot AI_1 \cdot \sin\frac{F}{2}}{\cos\frac{E}{2}} = \frac{AE \cdot AI_1 \cdot \sin\frac{E}{2}}{\cos\frac{F}{2}} \iff \frac{\sin E \cdot \sin\frac{F}{2}}{\cos\frac{E}{2}} = 2\sin\frac{E}{2}\sin\frac{F}{2} = \frac{\sin F \cdot \sin\frac{E}{2}}{\cos\frac{F}{2}}$$



راه حل ۲) از تغییر متغیر معروف $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ استفاده می کنیم. حکم معادل خواهد بود با :

$$\sum \frac{yz}{x(y+z)} \geq \frac{3}{2} \iff \sum \frac{(yz)^2}{xyz(y+z)} \geq \frac{3}{2}$$

و از لم T_2 داریم :

$$\sum \frac{(yz)^2}{xyz(y+z)} \geq \frac{\left(\sum yz\right)^2}{2xyz\sum x)} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2} \iff 2\left(\sum yz\right)^2 \geq 6\sum x^2yz$$

$$\iff 2\sum x^2y^2 + 4\sum x^2yz \geq 6\sum x^2yz \iff \sum x^2y^2 \geq \sum x^2yz$$

از طرفی از نامساوی حسابی هندسی داریم :

$$x^2y^2 + x^2z^2 \geq 2x^2yzx^2y^2 + y^2z^2 \geq 2xy^2zy^2z^2 + x^2z^2 \geq 2xyz^2 \implies \sum x^2y^2 \geq \sum x^2yz$$

و اثبات کامل می شود.

راه حل ۳) حکم برای $n = 1$ بدیهیست پس فرض می کنیم $n \geq 2$. فرض خلف می کنیم که حکم مسئله درست نباشد و بنابراین برای هر$2n$ نقطه، پوش محدب این نقاط یک مثلث است. اگر مجموعه ای از بیش از $2n$ نقطه وجود داشته باشد که پوش محدب آنها مثلث نباشد، به تعداد مورد نیاز از این مجموعه نقاط، نقطه حذف می کنیم (ابتدا از نقاطی که رئوس پوش محدب نیستند. اگر این نقطه ها به پایان رسیدند از رئوس پوش محدب نقطه حذف می کنیم) فرض کنیم مجموعه مذکور یک پوش محدب c ضلعی با i نقطه ''درون'' این پوش محدب دارد. آنگاه از طرفی باید دقیقا $c + i - 2n$ نقطه از شکل حذف کنیم. از طرف دیگر طبق الگوریتم ارائه شده برای حذف نقاط، حداکثر $i + c - 4$ نقطه می توان از مجموعه نقاط حذف کرد به طوری که پوش محدب شکل غیرمثلث بماند. (همه نقاط درون پوش محدب با حداکثر $c - 4$ نقطه از رئوس پوش محدب) و از طرفی داریم $c + i - 4 \geq c + i - 2n$ (در ابتدای مسئله فرض کردیم $n \geq 2$) بنابراین همواره می توان تعدادی از نقاط مجموعه را حذف کرد به طوری که به یک مجموعه از $2n$ نقطه برسیم که پوش محدب آن مثلث نباشد و این با فرض خلف در تناقض است! بنابراین همه مجموعه هایی از نقاط با بیشتر یا مساوی $2n$ نقطه هم پوش محدب مثلث دارند. مجموعه همه $3n - 1$ نقطه را با X نمایش می دهیم. فرض کنید A_1, B_1, C_1 رئوس مثلث پوش محدب X باشند. نقاط A_i را به این شکل به طور بازگشتی برای هر $1 \leq i \leq n - 1$ تعریف می کنیم : برای هر $1 \leq i \leq n - 1$ مجموعه $P_i = X - \{A_1, \cdots, A_i\}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $|P_i| \geq 2n$ ، پوش محدب مجموعه نقاط P_i یک مثلث است و B_1, C_1 دو تا از رئوس این مثلثند. راس سوم این مثلث را A_{i+1} می نامیم. به طور مشابه، مجموعه نقاط $B_1, B_2, \cdots, B_n$ و $C_1, C_2, \cdots, C_n$ را به طور بازگشتی نیز تعریف می کنیم. چون تعداد نقاط برابر $3n - 1$ است، حداقل دو نقطه از این سه مجموعه n تایی از نقاط مشترکند. (دقت کنید دو نقطه از یک مجموعه نمی توانند یکی باشند) بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می کنیم $A_p \equiv B_q$. بنابراین همه نقاط به جز نقاط $A_1, \cdots, A_{p-1}$ و $B_1, \cdots, B_{q-1}$ باید هم درون مثلث $B_1C_1A_p$ و هم درون مثلث $A_1C_1B_q$ واقع شوند و بنابراین روی پاره خط $\overline{A_pC_1}$ قرار دارند. به وضوح تعداد این نقاط حداقل n است (هر یک از مجموعه های A_i ها و B_i ها دقیقا n نقطه دارند و یکی از این نقاط نیز مشترکند پس حداکثر $2n - 1$ نقطه در این دو مجموعه وجود دارد و حداقل n نقطه باید روی پاره خط مذکور قرار بگیرد) و در نتیجه برای $n \geq 2$ حداقل سه نقطه موجود است که روی یک خط قرار دارند که با فرض اولیه مسئله در تناقض است. حالت $n = 2$ نیز بدیهیست.

راه حل ۴) ابتدا بدیهیست که می توان عدد طبیعی n را به صورت مجموع n تا ϕ^0 نوشت. پس این نمایش عدد طبیعی n را در نظر می گیریم و طی مراحلی، کاری می کنیم که در این نمایش عدد تکراری وجود نداشته باشد. توجه کنید که عدد طلایی در معادله $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ صادق است و بنابراین برای هر عدد طبیعی k داریم $\phi^{k+2} = \phi^{k+1} + \phi^k$. از این لحظه به بعد به جای مجموعه ای از توان های عدد طلایی، برای راحتی کار صرفا مجموعه توان های آن را نمایش می دهیم. حال ابتدا تعدادی تعریف ارائه می کنیم :

مورد اول) به وضعیتی که در آن اعداد $2k$ ، $-2k$ ، تعدادی صفر باقی مانده باشد، وضعیت اولیه رده k می گوییم. این تعریف برای همه k های نامنفی صادق است.

مورد دوم) عمل تجزیه : به پاک کردن یک عدد i از اعداد موجود و جایگزین کردن آن با یک $i - 1$ و یک $i - 2$ عمل تجزیه عدد i می گوییم.

مورد سوم) عمل ترکیب : به پاک کردن یک عدد i و یک عدد $i + 1$ (در صورت وجود) و جایگزین کردن آنها با یک عدد $i + 2$ عمل ترکیب عدد i می گوییم.

مورد چهارم) دنباله $f'(n)$: دنباله $f'(n)$ یا تعمیم یافته دنباله فیبوناتچی به اعداد صحیح را اینگونه تعریف می کنیم که$f'(0) = f'(1) = 1$ و $f'(n) + f'(n+1) = f'(n+2)$ برای هر عدد صحیح $n \in \mathbb{Z}$ برقرار است.

حال الگوریتمی از اعمال تجزیه و ترکیب ارائه می دهیم که در آن هیچگاه و در هیچ یک از گام ها عددی غیر از صفر بیش از یک بار ظاهر نخواهد شد. اکیدا دقت کنید هر لحظه ای که تعداد صفر های مجموعه به یک رسید، الگوریتم متوقف شده و پایان می پذیرد.

گام اول) اگر مجموعه اعداد در گام فعلی، یک وضعیت اولیه رده k باشد، آنگاه عدد $-2k$ را تجزیه کنید. تا زمان پایان یافتن الگوریتم یا رسیدن به وضعیت اولیه رده $k + 1$ (هر کدام که زودتر اتفاق افتاد) هرگونه عملی که منجر به ایجاد عددی با قدرمطلق بیشتر از $2k + 2$ شود مطلقا ممنوع است. در غیر این صورت به گام دوم بروید.

گام دوم) اگر در بین اعداد نامنفی مجموعه امکان انجام عمل ترکیب وجود داشت، بزرگترین عدد نامنفی ممکن را ترکیب کنید و به گام دوم

برگردید. در غیر این صورت به گام بعد بروید.
گام سوم) بزرگترین عدد منفی موجود را در نظر بگیرید. اگر این عدد -1 بود، در صورت وجود حداقل یک صفر در میان اعداد مجموعه، بلافاصله آن را ترکیب کنید و به گام چهارم بروید. اگر این عدد برابر -1 نبود، باز هم به گام چهارم بروید.
گام چهارم) اگر بزرگترین عدد منفی موجود در مجموعه فرد بود، (برابر $-(2t+1)$) آنگاه ابتدا یک صفر تجزیه کرده، سپس -2 ایجاد شده در اثر تجزیه صفر را تجزیه کرده، سپس -4 ایجاد شده در اثر تجزیه -2 را تجزیه کرده و همینطور ادامه دهید تا به عدد $-2t$ برسید. در این لحظه اعداد منفی $-2t, -(2t-1), \cdots, -3, -1$ بزرگترین اعداد منفی موجود در مجموعه هستند. در صورت انجام موفق این گام، به گام سوم برگردید. در غیر این صورت به گام بعدی بروید.
گام پنجم) اگر بزرگترین عدد منفی موجود در مجموعه زوج بود، (برابر با $-2t$ که در آن $t \neq -(k+1)$) آنگاه عدد $-(2t+1)$ را ترکیب می‌کنیم. (چرا اگر عدد $-2t$ در مجموعه موجود باشد، عدد $-(2t+1)$ نیز لزوما در مجموعه وجود دارد؟) در صورت انجام موفق این گام به گام سوم برگردید. در غیر این صورت به گام بعدی بروید.
گام ششم) اگر بزرگترین عدد منفی موجود، $-(2k+2)$ بود به گام اول برگردید.
حال ثابت می‌کنیم الگوریتم پایان پذیر است : به ازای هر عدد i موجود در مجموعه، وزن $f'(i)$ را به آن عدد نسبت می دهیم. در این صورت مجموع وزن اعداد مجموعه در هر حرکت ثابت است. حال اگر الگوریتم پایان پذیر نباشد، برای هر k طبیعی، حرکتی وجود دارد که در آن به وضعیت اولیه رده k می رسیم. (چرا؟) اما از طرف دیگر دنباله $f'(n)$ در اعداد منفی فقط $-1, 0, 1$ تولید می‌کند. از طرفی اگر عدد طبیعی داده شده در مسئله برابر m باشد، وزن اولیه برابر m است در صورتی که در وضعیت های اولیه رده k وزن کل اعضای مجموعه حداقل برابر $f'(2k) - 1$ است و چون دنباله $f'(2k)$ در اعداد مثبت اکیدا صعودیست به تناقض می رسیم و بنابراین الگوریتم پایان پذیر است.
به راحتی قابل بررسی است که در این الگوریتم هیچوقت عددی جز صفر بیش از یک بار ظاهر نخواهد شد و بنابراین وقتی الگوریتم به پایان برسد، علاوه بر این که حداکثر یک بار صفر در مجموعه آمده است همه اعداد دیگر نیز حداکثر یک بار ظاهر شده اند و در نتیجه مجموعه اعدادی متمایز و صحیح یافته ایم که اگر عدد طلایی را به توان هر یک از این اعداد رسانده و با هم جمع کنیم، به عدد داده شده در ابتدای مسئله می رسیم و در نتیجه اثبات کامل است.

راه حل ۵) می دانیم اگر $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ آنگاه $\varphi(n) = \prod p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)$. **حال فرض کنیم** $m = \left(\prod q_i^{t_i}\right) \cdot \left(\prod p_i^{\alpha_i}\right)$ و همچنین $n = \left(\prod r_i^{s_i}\right) \cdot \left(p_i^{\beta_i}\right)$ که در آن مجموعه های $\{p_i\}, \{q_i\}, \{s_i\}$ مجموعه هایی دو به دو مجزا از عوامل اول m, n هستند. حال داریم :

$$\varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \frac{d}{\varphi(d)} = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \frac{\prod p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}}{\varphi\left(\prod p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}\right)}$$

$$= \frac{\left(\prod q_i^{t_i-1}(q_i-1) \cdot \left(\prod p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\right) \cdot \left(\prod r_i^{s_i-1}(r_i-1)\right) \cdot \left(\prod p_i^{\beta_i-1}(p_i-1)\right)\left(\prod p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}\right)\right.}{\prod p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}-1}(p_i-1)}$$

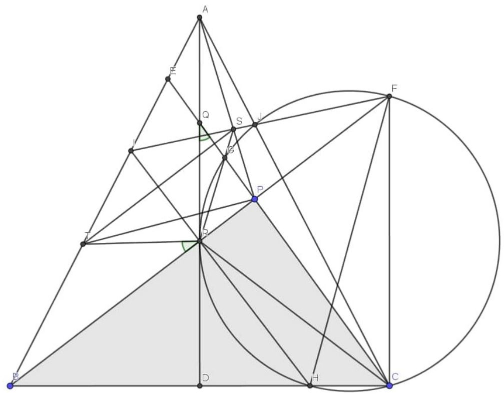
$$= \left(\prod q_i^{t_i-1}(q_i-1)\right) \cdot \left(\prod r_i^{s_i-1}(r_i-1)\right) \cdot \left(\prod p_i^{\alpha_i-1+\beta_i-1+\min\{\alpha_i,\beta_i\}-(\min\{\alpha_i,\beta_i\}-1)}(p_i-1)\right)$$

$$= \left(\prod q_i^{t_i-1}(q_i-1)\right) \cdot \left(\prod r_i^{s_i-1}(r_i-1)\right) \cdot \left(\prod p_i^{\alpha_i+\beta_i-1}(p_i-1)\right) = \varphi(mn)$$

و مسئله حل می شود.

راه حل ۶) از شرط مسئله می دانیم $\angle BAR + \angle RBC = \angle PCB$ و همچنین واضح است که $\angle RBC = \angle RCB$. بنابراین $\angle RCP = \angle RAP$. همچنین می دانیم $AS = RS$ بنابراین داریم $\angle RCP = \angle ARS$. از C بر BC عمودی رسم می کنیم تا خط BC را در نقطه F قطع کند. محل تقاطع خط CP با خط RS را نیز G می نامیم. حال ثابت می کنیم $FGRC$ چهارضلعی محاطیست :

$$\angle RFC = 90 - \angle FBC = 90 - \angle RCD = \angle RCP + \angle PQR = \angle ARS + \angle PQS = \angle CRS$$



بنابراین چهارضلعی مذکور محاطیست. از طرفی داریم $\angle IBF = \angle ABC - \angle RBC = \angle JCH - \angle RSH = \angle JCR = \angle IFB$ بنابراین $IB = IF$. از طرفی $\angle FRH = 180 - \angle FCH = 90$ پس $\angle FRI = \angle BRI = 90$. بنابراین RI عمودمنصف RF بوده و نیسماز $\angle SRT$ نیز هست که با برابری SF, IR اثبات را کامل می کند.