به نام خدا

راهنمایی مجموعه تمارین نظریه اعداد جلسه اول دوره تابستانی ۱۴۰۱

مباحث مقدماتی

۱. توجه کنید $d_i d_{k+1-i} = n$. سپس مجموع خواسته شده را به صورت زیر بنویسید.

$$d_1 d_2 + \cdots + d_{k-1} d_k = \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} + \cdots + \frac{n}{d_2} \cdot \frac{n}{d_1} = \frac{n^2}{d_k d_{k-1}} + \cdots + \frac{n^2}{d_2 d_1} = n^2 (\frac{1}{d_k d_{k-1}} + \cdots + \frac{1}{d_2 d1})$$

برای قسمت دوم مسئله کران قسمت اول مسئله را قوی‌تر کرده و ثابت کنید $A < \frac{n^2}{d_2}$.

۲. برای ساختن دنباله به روش استقرایی عمل کنید! هر بار اگر دنباله $a_1, a_2, \cdots, a_n$ را در اختیار داشتیم، باید a_{n+1} طوری به این دنباله اضافه شود که اولاً نسبت به a_n اول باشد و ثانیاً با هر یک از اعداد $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ حداقل یک عامل اول مشترک داشته باشد. سعی کنید عوامل اول دو به دو متمایز $p_1 \mid a_1, \cdots, p_{n-1} \mid a_{n-1}$ را انتخاب کنید که هیچکدام مقسوم‌علیه a_n نباشند. جزئیات راه حل را درباره امکان انجام این کار در هر گام تکمیل کنید.

۳. با توجه به در اختیار داشتن مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد مربع کامل، سعی کنید جفت‌هایی از این مجموعه با تفاضل کم پیدا کنید. همچنین دقت کنید اعداد $2^n a + b, 4(2^n a + b)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ مربع کامل هستند.

۴. شرط مسئله را به صورت $f(n) \mid f(m) + n - m \implies n \overset{f(n)}{\equiv} m - f(m)$ بنویسید. سپس دقت کنید این نتیجه می‌دهد :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: \quad f(a) - a \overset{f(n)}{\equiv} f(b) - b$$

حال اگر a, b طبیعی موجود باشند که $f(a) - a \neq f(b) - b$ آنگاه f تابعی کراندار است. (چرا؟) فرض کنید مقادیر مختلف تابع از مجموعه متناهی $c_1, \cdots, c_k$ باشند و ثابت کنید $k \leq 2$.

۵. بدیهیست اگر $5 \mid a_1$ آنگاه داریم $5 \mid a_i$ و این نشان می‌دهد هیچ توانی از دو در این دنباله موجود نیست. برای اثبات طرف دیگر حکم، دقت کنید یکان اعضای دنباله از جایی به بعد زوج است. سپس فرض کنید $a_i = 2^{\alpha_i} + k_i$ که در آن $0 \leq k_i < 2^{\alpha_i}$ و ثابت کنید k_i. حال اعداد 2^{α_i} را به پیمانه ۲۰ در نظر بگیرید و ثابت کنید همواره یک توان دو جدید در دنباله ظاهر می‌شود.

۶. دقت کنید طبق نامساوی حسابی‌هندسی $\frac{a_n+2}{3} = \frac{a_n+1+1}{3} \geq \sqrt[3]{a_n} \geq \lfloor \sqrt[3]{a_n} \rfloor = \frac{3a_n - a_{n+1}}{2} \implies 7a_n \geq 3a_{n+1} + 4$. از این نتیجه بگیرید به جز در حالات معدودی از مقادیر a_n دنباله باید اکیداً صعودی باشد و جزئیات حل را کامل کنید.

۷. فرض کنید $b = {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_m}^{\alpha_m}$ و هر بار قرار دهید $k = {p_i}^{\alpha_i + 1}$ و نتیجه بگیرید توان تمام عوامل اول b بر n بخش‌پذیر است.

۸. برای هر عدد طبیعی k مقدار $1 + 3 + \cdots + (2k-1)$ را با S_k نمایش دهید. بدیهیست که S_k مربع کامل است. از طرفی اعداد اول (به استثنا عدد ۲) همگی اعدادی فرد هستند و بنابراین احتمالاً بتوان ثابت کرد $m \in \mathbb{N}$ موجود است که $u_n < S_m < u_{n+1}$. این همواره اتفاق می‌افتد مگر اینکه برای یک $m \in \mathbb{N}$ رابطه $S_m < u_n < u_{n+1} < S_{m+1}$ برقرار باشد. نشان بدهید این رابطه نمی‌تواند صادق باشد.

۹. با اعمال داده شده در مسئله ثابت کنید :

$$f(1, 2, 4, 8, \cdots) = 2f(0, 1, 2, 4, 8, \cdots) = 4f(0, 0, 1, 2, 4, 8, \cdots) = 8f(0, 0, 0, 1, 2, 4, 8, \cdots) = \cdots$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم : $2^n \mid f(1, 2, 4, 8, \cdots)$ که حکم قسمت الف را نتیجه می‌دهد. برای قسمت دوم ابتدا ثابت کنید : $\forall n, i \in \mathbb{N} : \exists c_1, c_2 \in \mathbb{Z} : n = c_1 2^i + c_2 3^i$. سپس با روندی مشابه قسمت الف حکم قسمت ب را اثبات کنید.

۱۰. ابتدا با برهان خلف ثابت کنید $a_{n+1} > a_n \iff a_n \in \mathbb{P}$. سپس یک مجموعه طولانی از اعداد مرکب متوالی بیابید که بتوان تضمین کرد دنباله از اعداد این مجموعه تجاوز نمی‌کند.

۱۱. دقت کنید اگر $\gcd(a, b) = 1$ آنگاه $\gcd(ab, a+b) = 1$ که حکم را بسیار ساده‌تر می‌کند. بنابراین در تلاش برای از بین بردن عوامل اول مشترک صورت و مخرج عبارت سمت چپ رابطه عاد کردن، تناظری بین جواب‌های معادله داده شده و جواب‌های معادله $ab \mid \frac{N}{d}$ که در آن d مقسوم علیه مثبتی از N و a, b اعدادی طبیعی و نسبت به هم اول هستند ایجاد می‌کنیم. برای بدست آوردن حکم روی تعداد جواب‌های معادله جدید حاصل شده نیز ثابت کنید تابع f با تعریف جدید ضربی ضعیف است و کافی خواهد بود که مقدار آن را روی توان های اعداد اول محاسبه کنید.

۱۲. به عنوان یک لم ثابت کنید برای هر عدد اول $p \overset{4}{\equiv} 1$ عدد طبیعی a موجود است به طوری که $p \mid a^2 + 1$. سپس سعی کنید با در نظر گرفتن عدد اول دلخواه p و تعیین یک کران بالا برای این مقدار طبیعی (a) مسئله را حل کنید.

۱۳. سعی کنید مجموعه‌ها را طوری بسازید که اگر $n = {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_k}^{\alpha_k}$ آنگاه عوامل اول همه اعضای A_n از اعداد اول $p_1, \cdots, p_k$ باشند. تعداد اعضا و توان های اعضای این مجموعه ها را طوری تنظیم کنید که حکم برقرار باشد.

۱۴. با باز کردن شرط مسئله داریم :

$$ac+bd = (b^2+d^2+2bd)-(a^2+c^2-2ac) \iff b^2+d^2+bd = a^2+c^2-ac \iff 4b^2+4d^2+4bd = 4a^2+4c^2-4ac$$

$$\iff (2b+d)^2+3d^2 = (2a-c)^2+3c^2 \iff (2b+d-2a+c)(2b+d+2a-c) = 3(c-d)(c+d)$$

به عنوان لم قضیه "چهار عدد" را ثابت کنید : اگر $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی باشند و $ab = cd$ آنگاه $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ وجود دارند به طوری که $a = xy, b = zt, c = xz, d = yt$. از لم استفاده کرده و مقدار $ab + cd$ را محاسبه کنید.

۱۵. ابتدا برای حالت خاص $b = 0$ مسئله را حل کنید. سپس برای حالت کلی فرض کنید تمام اعدادی که $y_i \overset{a}{\equiv} b$ برقرار است را به رنگ سیاه در آورید. حال دنباله را به بلوک‌هایی تقسیم کنید که انتهای هر بلوک یک عضو سیاه باشد، حال طبق حالت $b = 0$ جمع تعدادی از اعداد بلوک های متوالی بر a بخش پذیر خواهد بود و صرفا کافیست عدد سیاه سمت راست این بلوک ها را به آنها اضافه کنید.

۱۶. ابتدا ثابت کنید اعداد دو به دو متمایز $a_1, a_2, \cdots, a_p$ از این مجموعه موجودند به طوری که $D = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ بر p بخش‌پذیر نباشد و در غیر این صورت حکم بدیهیست. در صورتی که این انتخاب قابل انجام باشد، جایگشت دوری $a_1, a_2, \cdots, a_p$ را در نظر بگیرید و ثابت هر بار جایگاه هر عضو را (با شروع از صفر) در عدد آن جایگاه ضرب کرده و اعداد حاصل را با هم جمع کنید. ثابت کنید اعدادی که با این الگوریتم تولید میشوند هر بار دقیقا به اندازه D به پیمانه p زیاد می‌شوند.

۱۷. با استفاده از ایده "شمارش پلکانی" مقدار خواسته شده را محاسبه می‌کنیم : توجه کنید اگر تعریف کنیم $S_n = \{i \mid n \leq \lfloor \sqrt{ip} \rfloor, i \leq k\}$ آنگاه داریم : $\mid S_n \mid = k + 1 - \lceil \frac{n^2}{p} \rceil$. بنابراین داریم :

$$\sum_{i=1}^{k} \lfloor \sqrt{ip} \rfloor = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{kp} \rfloor = 2k} (k+1-\lceil \frac{i^2}{p} \rceil) \quad , i < p \implies \frac{i^2}{p} \notin \mathbb{N} \implies \sum_{i=1}^{k} \lfloor \sqrt{ip} \rfloor = \sum_{i=1}^{2k} (k - \lfloor \frac{i^2}{p} \rfloor) = 2k^2 - \sum_{i=1}^{2k} \lfloor \frac{i^2}{p} \rfloor$$

حال کافیست که مجموع اخیر را محاسبه کنیم. ثابت کنید $\lfloor \frac{(p-i)^2}{p} \rfloor = (p-2i) + \lfloor \frac{i^2}{p} \rfloor$ و با استفاده مکرر از این تساوی، کافیست ثابت کنیم :

$$\sum_{i=1}^{4k} \lfloor \frac{i^2}{p} \rfloor = \frac{16k^2 - 4k}{3}$$

برای اثبات این حکم از یک لم پرکاربرد استفاده می‌کنیم : برای هر $\alpha \notin \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ که $\alpha < n$ داریم : $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor n - \alpha \rfloor = n - 1$.
حال برای استفاده از این لم و حل مسئله باید هر یک از مقادیر i را با مقداری مثل j جفت قرار دهیم که $p \mid i^2 + j^2$. برای این منظور طبق لمی که در راه حل سوال ۱۲ بیان کردیم مقداری مانند $g \in \mathbb{Z}_p$ موجود است که $p \mid g^2 + 1$. همینطور بدیهیست که $\gcd(g, p) = 1$. حال کافیست هر $i \in \mathbb{Z}_p$ را با $ig (\text{mod p}) \in \mathbb{Z}_p$ جفت قرار دهیم و حکم مسئله طی محاسبات اثبات می‌شود.

تمرینات اضافه

۱. حالتی که مقدار $q + r$ زوج است را رد کنید. در حالت دیگر، q و یا r باید زوج باشند. با تکمیل جزئیات اثبات را کامل کنید.

۲. اثبات کنید اگر a_1 فرد باشد آنگاه a_2 زوج است. حال فرض کنید $a_1 = 2^x 3^y z$ که در آن $\gcd(6, z) = 1$ و همچنین $x \geq 1$. ثابت کنید i موجود است که $a_i = 3^w z$ که در آن $\gcd(6, z) = 1$. حال ثابت کنید برای هر $n \geq i$ داریم $a_{n+3} = 3a_n$ و اثبات مسئله کامل خواهد شد.

۳. ابتدا دقت کنید اگر a_{n+1} کوچکترین عددی باشد که به صورت مجموع اعداد $a_1, \cdots, a_n$ قابل نمایش نیست، آنگاه $2a_{n+1}$ به صورت مجموع تعدادی از اعداد $a_1, \cdots, a_{n+1}$ قابل نمایش نیست. بنابراین $a_{n+2} \leq 2a_{n+1}$ همواره برقرار است. از طرف دیگر ثابت کنید از جایی به بعد $a_{n+2} \geq 2a_{n+1}$ نیز برقرار است که اثبات حکم را کامل می‌کند.

۴. ابتدا ثابت کنید $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{n+1} = 1$ برای هر $n > 2$ برقرارند. طبق فرض مسئله داریم :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{f(i(i+1))} + \frac{1}{f(n)} \in \mathbb{N} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f(i(i+1))} + \frac{1}{f(n+1)} \in \mathbb{N}$$

بنابراین تفاضل این دو نیز عددی طبیعی است :

$$\implies \forall n \in \mathbb{N}, n > 2 \quad , \quad \frac{1}{f(n(n+1))} + \frac{1}{f(n+1)} = \frac{1}{f(n)}$$

به کمک این تساوی حل مسئله را کامل کنید.