مجموعه آزمون های شبیه ساز مرحله سوم المپیاد ریاضی

به همت :
امیرمحمد قوی
آرین همتی

۱۳ اردیبهشت ۱۴۰۴

برای هر یک از آزمون ها ۳۰۰ دقیقه زمان در نظر گرفته شده است.

راه حل های پیشنهادی سوالات آزمون ها در بخش راه حل ها ذکر شده است. بوکلت بعد هر آزمون بروزرسانی خواهد شد.

فهرست مطالب

۱ آزمون ها ۱
۱.۱ آزمون اول جبر ۱
۲.۱ آزمون اول نظریه اعداد ۲
۳.۱ آزمون اول ترکیبیات ۳
۴.۱ آزمون اول هندسه ۴

۲ راه حل های پیشنهادی ۵
۱.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون اول جبر ۵
۲.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون اول نظریه اعداد ۷
۳.۲ راه حل های پیشتهادی آزمون اول ترکیبیات ۱۰
۴.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون اول هندسه ۱۲

۱ آزمون ها

۱.۱ آزمون اول جبر

مسئله ۱) برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a, b, c که $a + b + c = 3$ نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$a^3b + b^3c + c^3a + 9 \geq 4(ab + bc + ac)$$

مسئله ۲) دنباله $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ از توابع $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اینگونه تعریف می شود که $Q_0(x) = 1$، $Q_1(x) = x$ و همچنین $Q_n(x) = \dfrac{(Q_{n-1}(x))^2 - 1}{Q_{n-2}(x)}$. ثابت کنید تمامی جملات این دنباله چندجمله ای هایی با ضرایب صحیح هستند.

مسئله ۳) تمام توابع $f : Q \to Q$ را بیابید به طوری که برای هر $x, y \in Q$ داشته باشیم :

الف) $f(x + f(x)) = f(x)f(x + 1)$

ب) $f(x + y) + f(xy - 1) + 1 = f(xy) + f(x) + f(y)$

مسئله ۴) دنباله بازگشتی $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ به این صورت تعریف می شود که $A_1 = 3$ ، $A_{n+1} = \dfrac{{A_n}^2 + 1}{2}$.

مقدار $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_i + 1}$ را به دست آورید.

۲.۱ آزمون اول نظریه اعداد

مسئله ۱) برای هر عدد اول $p > 5$ ثابت کنید اعداد طبیعی a, b, c وجود دارند به طوری که

$$p|a^2 + b^2 + c^2 \quad , \quad p^2 > a^2 + b^2 + c^2$$

مسئله ۲) فرض کنید p یک عدد اول است. ثابت کنید در بین مقسوم علیه های مثبت عدد $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ لااقل A عدد وجود دارد که بتوان آنها را به صورت حاصلضرب یک توان t ام کامل و یک توان s ام کامل نمایش داد که $t + s = p$ و $t, s > 1$ و $s \neq t$. همچنین :

$$A = \frac{(p-3)\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\left(8\alpha_i - (p-2)^2 + \Big|8\alpha_i - (p-1)(p-3)\Big| + 17\right)}{2^{4m+1}}$$

مسئله ۳) تمام توابع $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ را بیابید که به ازای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم :

$$f(2m + f(m) + f(m)f(n)) = nf(m) + m$$

مسئله ۴) دنباله حسابی نامتناهی $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی داده شده است. ثابت کنید می توان چهار عدد دو به دو متمایز x_a, x_b, x_c, x_d از اعضای این دنباله انتخاب کرد به طوری که $|x_a x_b - x_c x_d| \leq 1$

۳.۱ آزمون اول ترکیبیات

مسئله ۱) ثابت کنید روی هر خم بسته میتوان چهار نقطه A, B, C, D انتخاب کرد به طوری که $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد.

مسئله ۲) آرین و قوی در یک باغ وحش مشغول به کار شده اند و میخواهند میزان شادی شیران را اندازه بگیرند. آنها n شیر را به صورت شانسی انتخاب کرده و هر روز صبح از هر یک از این شیرها میپرسند که شاد هست یا خیر. به ازای هر دو روز متمایز، دقیقا $\frac{n}{2}$ شیر بوده اند که جواب هایشان در این دو روز مشابه بوده است. ثابت کنید که پس از k روز، حداکثر $n - \frac{n}{k}$ شیر وجود دارد که تعداد پاسخ های آری داده شده توسط آنها با تعداد پاسخ های نه داده شده توسط آنها برابر است.

مسئله ۳) ”عدد پارتیشن i“ یا ”$p(i)$“ برابر تعداد راه های نوشتن عدد i به صورت جمع تعدادی عدد طبیعیست. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید $\frac{p(1)+p(2)+\cdots+p(n-1)}{p(n)} \leq \sqrt{2n}$

مسئله ۴) صد نفر از ۲۵ کشور (و از هر کشور دقیقا ۴ نفر) دور یک میز دایره ای شکل نشسته اند. ثابت کنید می توان آنها را به چهار دسته تقسیم کرد به طوری که هیچ دو فردی از یک کشور در یک دسته نباشند و همچنین هیچ دو فردی که کنار هم نشسته اند هم در یک دسته نباشند.

مسئله ۱) در مثلث $\triangle ABC$ داریم $AC \neq BC$. نقطه D را درون مثلث در نظر می‌گیریم به طوری که $\angle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB$. مماس های وارد از C بر دوایر محیطی مثلث های $\triangle ABC$ و $\triangle ADC$ به ترتیب AB و AD را در نقاط P و S قطع می‌کنند. ثابت کنید PQ زاویه $\angle BPC$ را نصف می‌کند.

مسئله ۲) در چهارضلعی محیطی $ABCD$ نقطه M به دلخواه روی BC انتخاب شده است. محل تقاطع AM, CD را N می نامیم. اگر I_1, I_2, I_3 به ترتیب مراکز دوایر محاطی مثلث های $\triangle ABM, \triangle MNC, \triangle AND$ باشند آنگاه ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث $I_1I_2I_3$ روی خط AN است.

مسئله ۳) در مثلث ABC، مرکز ارتفاعی را H می نامیم. همچنین می دانیم $AB \neq AC$. نقطه F را روی دایره محیطی $\triangle ABC$ طوری انتخاب می‌کنیم که $\angle AFH = 90$. نقطه K قرینه نقطه H نسبت به B است. فرضا P نقطه ای باشد به طوری که $\angle PHB = \angle PBC = 90$. همچنین Q را پای عمود دارد از B بر خط CP در نظر بگیرید. ثابت کنید HQ بر دایره محیطی FHK مماس است.

مسئله ۴) در مثلث $\triangle ABC$ با مرکز دایره محیطی I، نقطه D را طوری روی ضلع BC انتخاب می‌کنیم که $\angle AID = 90$. فرض کنید دایره محاطی خارجی $\triangle ABC$ روبرو به راس A بر BC در A_1 مماس باشد. نقاط B_1, C_1 را به ترتیب روی AC, AB به طریق مشابه تعیین می‌کنیم. ثابت کنید اگر چهارضلعی $AB_1A_1C_1$ محاطی باشد، آنگاه AD بر دایره محیطی $\triangle DB_1C_1$ مماس است.

۲ راه حل های پیشنهادی

۱.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون اول جبر

راه حل ۱)

$$a^3b+b+b\geq 3ab$$
$$b^3c+c+c\geq 3bc$$
$$c^3a+a+a\geq 3ca$$
$$\xRightarrow{\text{جمع طرفین}} a^3b+b^3c+c^3a+9\geq 3(ab+bc+ca)+3$$

همچنین داریم :

$$9=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca) \iff 3\geq ab+bc+ca$$

بنابراین :

$$a^3b+b^3c+c^3a+9\geq 3(ab+bc+ca)+3\geq 4(ab+bc+ca)$$

راه حل ۲) از شرط مسئله داریم $Q_nQ_{n-2}-Q_{n-1}^2=-1$ بنابراین :

$$Q_nQ_{n-2}-Q_{n-1}^2=Q_{n+1}Q_{n-1}-Q_n^2 \iff \frac{Q_{n-2}+Q_n}{Q_{n-1}}=\frac{Q_{n-1}+Q_{n+1}}{Q_n}=\frac{Q_0+Q_2}{Q_1}=x$$
$$\Longrightarrow Q_{n+1}=xQ_n-Q_{n-1}$$

برای هر $n>1$ برقرار است و بنابر استقرای ریاضی حکم بدیهیست.

راه حل ۳) قرار می دهیم $P(x,y)=f(xy-1)+f(x+y)+1=f(xy)+f(x)+f(y)$ از $P(1,x)$ داریم :

$$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+(f(1)-1)$$

حال به وضوح برای هر عدد گویا x کمتر از ۱ ، یک چند جمله ای P_x با ضرایب گویا و درجه کمتر مساوی ۲ وجود دارد که برای هر عدد صحیح n، $P_x(n+x)=f(n+x)$. قرار می دهیم : $P_x(m)=a_xm^2+b_xm+c_x$ حال از $P(\frac{p}{q},kq)$ داریم : (برای سادگی کار قرار قرار می دهیم $xq=p$)

$$f(kp-1)+f(x+kq)+1=f(kp)+f(x)+f(kq)$$

بعد از باز کردن و چک کردن ضریب پیشرو در چند جمله ای

$$T(k)=f(kp-1)+f(x+kq)+1-f(kp)-f(x)-f(kq)=0$$

داریم

$$a_x=a_1\ \ ,\ \ b_x=b_1$$

حال طبق شرط اول مسئله داریم $f(x+f(x))=f(x)f(x+1)$. فرض کنید $x\in\mathbb{N}$ باشد. آنگاه اگر $a_1=\frac{m}{n}\ \ ,\ \ b_1=\frac{u}{v}$، قرار می دهیم $x=nvt$ که در آن t متغیر است. بنابراین داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+f(x))}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{f(x+1)}{x^2}\right)=a_1^2$$

اما داریم :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+f(x))}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+f(x))}{(x+f(x))^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(x+f(x))^2}{x^4}=a_1^3$$

پس داریم $a_1^2 = a_1^3$ پس یا $a_1 = 0$ یا $a_1 = 1$.
اگر $a_1 = 0$ باشد، c وجود دارد که :

$$f(uvt + f(uvt)) = f(uvt)f(uvt + 1) < c(uvt)$$

که به وضوح تناقض است مگر اینکه $b_1 = 0$ و $f(x) = f(\{x\})$ پس شرط سوال تبدیل می شود به اینکه $f(x+y)+1 = f(x)+f(y)$.
بنابراین :

$$f(nx) = f((n-1)x) + f(x) - 1 = \cdots = nf(x) - n$$

پس اگر $x = \frac{p}{q}$ و $n = qk$ آنگاه خواهیم داشت : $f(0) = n(f(x) - 1) \implies f(x) = 1$ و اگر $a_1 = 1$ باشد قرار می دهیم :

$$f(x) = x^2 + bx + 2 - b + g(\{x\})$$

با توجه به اینکه

$$f(n) + f(n+2) = 2f(n+1) + (f(1) - 1)$$

برقرار است خواهیم داشت $f(1) - 1 = 2a = 2 \implies g(0) = 0$
حال خواهیم داشت:

$$g(\{x\}) + g(\{y\}) = g(\{x+y\}) + 1$$

و طبق همان حالت قبل داریم :

$$g(\{nx\}) = g(\{(n-1)x\}) + g(\{x\}) - 1 = \cdots = n(g(\{x\}) - 1)$$

حال اگر $x = \frac{a}{b}$ و $n = b$ خواهیم داشت $g(0) = b(g(\{x\}) - 1) = 0$
بنابراین تمامی توابعی که در شروط مسئله صادقند عبارتند از

$$f(x) = x^2 + bx + (2-b) \quad , \quad f(x) = 1$$

که در آن b عددی گویا و دلخواه است.

راه حل ۴) قرار می دهیم $t_i = \frac{1}{\alpha_i+1}$ و همچنین $S_i = \sum_{j=1}^{i} t_j$.
با این تغییر متغیر، از شرط $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2+1}{2}$ واضح است که $t_{i+1} = \frac{2t_i^2}{(2t_i-1)^2+2t_i}$.
حال می توان ثابت کرد $S_{n+1} = S_n + \frac{1-2S_n}{4(1-S_n)}$. برای اثبات دقت کنید این معادل است با اینکه $t_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{1-2S_n}{4(1-S_n)}$.
برای اثبات این نیز از استقرای ریاضی استفاده می کنیم. (محاسبات بر عهده خواننده)
ثابت می کنیم اگر $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد صحیح باشد به طوری که $t_1 = 1$ و همچنین $t_{n+1} = t_n^2 + 3t_n + 1$ آنگاه $S_n = \frac{t_n}{2t_n+2}$.
برای اثبات از استقرای ریاضی کمک میگیریم. با فرض اینکه $S_m = \frac{t_m}{2t_m+2}$ داریم :

$$S_{m+1} = S_m + \frac{1-2S_m}{4(1-S_m)} = \frac{t_m}{2t_m+2} + \frac{1 - \frac{t_m}{t_m+1}}{\frac{4(t_m+2)}{2t_m+2}} = \frac{(t_m^2 + 3t_m + 1)}{2(t_m^2 + 3t_m + 1) + 2} = \frac{t_{m+1}}{2t_{m+1} + 2}$$

بنابراین پاسخ مسئله در واقع برابر با مقدار $A = \lim_{i \to \infty} \frac{t_i}{2t_i + 2}$ است و به دلیل اینکه $\lim_{x \to \infty} t_i = \infty$ به وضوح $A = \frac{1}{2}$ و بنابراین پاسخ نهایی مسئله برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون اول نظریه اعداد

راه حل ۱) داریم $p|a^2+b^2+c^2$. دقت کنید به وضوح میتوان فرض کرد $2a, 2b, 2c < p$ زیرا اگر ۳ تایی (a,b,c) در شرایط مسئله صادق باشند آنگاه $(min(a,p-a), min(b,p-b), min(c,p-c))$ نیز در شرایط مسئله صدق می کنند . پس فقط کافی است ثابت کنیم ۳ تایی (a,b,c) وجود دارد که $p|a^2+b^2+c^2$. قرار می دهیم $c=1$ و ثابت میکنیم a وجود دارد که $\left(\frac{-(a^2+1)}{p}\right)=1$. ($-(a^2+1)$ به پیمانه p مانده درجه دوم باشد.) فرض خلف کنید برای هر a داشته باشیم $\left(\frac{-(a^2+1)}{p}\right)=-1$. آنگاه مجموعه $\{i^2+1\}_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}$ باید مجموعه مانده های درجه دوم باشد و در نتیجه باید داشته باشیم :

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^2+1 \overset{p}{\equiv} \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^2 \iff \frac{p-1}{2} \overset{p}{\equiv} 0$$

که تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل بوده و حکم مسئله اثبات می شود.

راه حل ۲) ابتدا لم معروفی مربوط به قضیه مشهور **Chicken McNugget Theorem** را بیان می کنیم :

لم) اگر a,b اعدادی طبیعی و نسبت به هم اول باشند، تعداد اعداد طبیعی ای که نمی توان به صورت ترکیب خطی ای از a,b آنها را نمایش داد برابر $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$ است. (اثبات لم بر عهده خواننده)

حال دقت کنید اگر $n=a^tb^s$ که در آن $t+s=p$، آنگاه برای هر p_i از عوامل n باید داشته باشیم $tV_{p_i}(a)+sV_{p_i}(b)=\alpha_i$. پس فی الواقع هر نمایش n به صورت حاصلضرب یک توان t ام و یک توان s ام متناظر است با m ترکیب خطی (از t,s) از اعداد $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. حال کرانی برای تعداد مقسوم علیه های n که به صورت حاصلضرب یک توان t ام و یک توان s ام قابل نوشتن هستند ارائه می دهیم. طبق لم بیان شده، اگر $\alpha_i > \frac{(t-1)(s-1)}{2}+1$ باشد آنگاه حداقل $\alpha_i - \frac{(t-1)(s-1)}{2}$ عدد طبیعی کمتر از α_i وجود دارد که می توان آنها را به صورت یک ترکیب خطی از t,s نوشت. دقت کنید تابع $f_{\{t,s\}}(x)=\frac{1}{2}\left(\left(x-\frac{(t-1)(s-1)}{2}\right)+\left|x-\frac{(t-1)(s-1)}{2}\right|\right)$ دقیقا این خاصیت را دارد که برای مقادیر $x \le \frac{(t-1)(s-1)}{2}$ مقدار صفر و برای مقادیر $x > \frac{(t-1)(s-1)}{2}$ مقدار $x-\frac{(t-1)(s-1)}{2}$ را خارج می کند. همچنین در نظر بگیرید برای هر p_i می توان مقسوم علیهی از n را در نظر گرفت که بر p بخش پذیر نباشد پس برای هر p_i حداقل $f(\alpha_i)+1$ ترکیب خطی از n انتخاب مختلف برای V_p مقسوم علیه های مطلوب مسئله وجود دارد. بنابراین حداقل $\prod\left(f_{\{t,s\}}(\alpha_i)+1\right)$ راه مختلف برای نمایش مقسوم علیهی از n به صورت یک توان t ام و یک توان s ام وجود دارد. همچنین دقت کنید $f_{\{t,s\}}(x) \ge f_{\{\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}\}}(x)$. بنابراین تعداد راه های مختلف نمایش مقسوم علیهی از n به صورت حاصلضرب یک توان t و یک توان s ام حداقل $\prod\left(f_{\{\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}\}}(\alpha_i)+1\right)$ است. از طرفی بدیهتا $\frac{p-3}{2}$ حالت مختلف انتخاب t,s وجود دارد و در نتیجه مقدار مینیمم A برابر است با :

$$\frac{p-3}{2}\cdot\prod_{i=1}^{m}\left(f_{\{\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}\}}(\alpha_i)+1\right)=\frac{p-3}{2}\cdot\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{2}\left(\left(\alpha_i-\frac{(\frac{p-1}{2})(\frac{p-3}{2})}{2}\right)+\left|\alpha_i-\frac{(\frac{p-1}{2})(\frac{p-3}{2})}{2}\right|\right)$$

$$=\frac{(p-3)\prod_{i=1}^{m}\left(8\alpha_i-(p-2)^2+\left|8\alpha_i-(p-1)(p-3)\right|+17\right)}{2^{4m+1}}$$

که اثبات را کامل می کند.

راه حل ۳) قرار می دهیم $p(m,n):\ f(2m+f(m)(f(n)+1))=nf(m)+m$. از $p(m,0)$ واضح است که تابع یک به یک و پوشاست. حال از $p(0,1)$ واضح است که یا $f(0)=0$ و یا $f(1)=-1$. در حالت اول اگر $f(0)=0$ آنگاه از $p(m,0)$ داریم $f(2m+f(m))=m$.

حال دو مسیر را برای ادامه راه حل ارائه می دهیم :

راه حل اول :

قرار دهید $f^{-1}(1) = c$ و همچنین $f^{-1}(c) = d$. (چون f یک به یک و پوشاست اعداد c,d به طور یکتا وجود دارند) حال از $p(c,n)$ داریم :

$$f(2c+1+f(n)) = n+c = f(2n+2c+f(n+c))$$

در نتیجه $f(n)+1-2n = f(n+c)$. پس داریم : (صورت سوال)

$$f(2m+f(m)(1+f(n))) = nf(m)+m$$

همچنین از رابطه $f(2m+f(m)) = m$ داریم : $nf(m)+m = f(2nf(m)+2m+f(nf(m)+m))$ در نتیجه با استفاده از یک به یکی تابع خواهیم داشت :

$$f(m)(1+f(n)) = 2nf(m)+f(nf(m)+m)$$

از قرار دادن $m=d$ داریم $c+cf(n) = 2nc+f(cn+d)$ و بنابراین $c+cf(n+1) = 2c(n+1)+f(cn+d+c)$. اما از طرف دیگر می دانیم :

$$2c(n+1)+f(cn+d+c) = 2c(n+1)+f(cn+d)+1-2cn-2d$$

$$\implies 2c(n+1)+f(cn+d)+1-2cn-2d = c+cf(n)+2c-2cn-2d$$

پس $f(n) = an^2+bn+c$. بنابراین از رابطه $f(2m+f(m)) = m$ نتیجه می گیریم $a=b=0$ که با پوشا بودن تابع در تناقض است! بنابراین داریم $f(1) = -1$. از $p(m,1)$ نتیجه می گیریم $f(2m) = f(m)+m$. با قرار دادن $m=1$ مشهود است که $f(2)=0$. قرار می دهیم $f^{-1}(0)=a$. از $p(0,0)$ داریم $a^2+a=2$ پس مقدار a برابر ۱ یا -۲ است. از $p(m,2)$ نتیجه می شود که $f(2m+f(m)) = 2f(m)+m$. پس اگر $a=1$ انگاه با قرار دادن $m=0$ خواهیم داشت $f(1)=2$ که با $f(1)=-1$ در تناقض است. بنابراین باید داشته باشیم $f(0)=-2$. از $f(1,n)$ به دست می آید که $f(1-f(n)) = 1-n$. با قرار دادن $n=0$ نتیجه می شود $f(3)=1$. دوباره از قرار دادن $p(0,n)$ نتیجه می گیریم $f(-2-2f(n)) = -2n$. از $p(1,2n+1)$ نیز داریم :

$$f(1-f(2n+1)) = 1-(2n+1) = -2n = f(-2-2f(n))$$

پس $f(2n+1) = 3+2f(n)$ و همچنین $f(2n) = f(n)+n$. از قرار دادن $p(n,1)$ به سادگی نتیجه می شود که برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $f(n)=n-2$.

راه حل دوم :

قرار می دهیم $f^{-1}(1) = c$. از $p(c,n)$ خواهیم داشت $f(2c+1+f(n)) = n+c$. با قرار دادن $n \to f(m)+2c+1$ خواهیم داشت $f(m+3c+1) = f(m)+3c+1$. بنابراین عدد $d\neq 0$ موجود است به طوری که برای هر عدد $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم $f(n+d) = f(n)+d$. با مقایسه $p(m+d,n)$ با $p(m,n)$ نتیجه می گیریم $(f(n)+3)d = (n+1)d$ و بنابراین $f(n)=n-2$ برای همه n های طبیعی برقرار است.

بعد از رسیدن به تابع $f(n)=n-2$ طی یکی از راه حل های مذکور، به روش زیر به حل سوال پایان می دهیم :
حال اگر در رابطه $f(1-f(n)) = 1-n$ مقدار n را برابر عددی طبیعی قرار دهیم برای هر $n\in\mathbb{N}$ خواهیم داشت $f(3-n) = 1-n$ که با ترکیب این نتیجه با نتیجه قبل، کل اعداد صحیح پوشانده می شوند و در نتیجه برای هر $n\in\mathbb{Z}$ خواهیم داشت $f(n)=n-2$ که اثبات را کامل می کند.

راه حل ۴) حالت کلی تری از مسئله را حل می کنیم که در سمت راست نامساوی به جای ۱ هر عدد حقیقی $c>0$ می تواند جایگزین شود. کافیست حکم را برای دنباله های حسابی به فرم $a_i = i+u$ ثابت کنیم. (اگر دنباله حسابی داده شده به فرم $ni+c'$ باشد، می توان به راحتی همه جملات آن را بر n تقسیم کرد و چون $n>0$ ، این عمل تداخلی با حکم مسئله ندارد.) پس مطلوب است چهارتایی (i,j,k,t) به طوری که :

$$|(i+u)(j+u)-(k+u)(t+u)| \leq c$$

یا معادلا :

$$|u(i+j-k-t)+(ij-kt)| \leq c$$

حال به اثبات یک لم می پردازیم :

لم) نشان می دهیم $\{i+j-k-t, ij-kt \mid i,j,k,t \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$.
برای اثبات این حکم ثابت می کنیم دستگاه معادلات $i+j-k-t=a\ ,\ ij-kt=b$ در اعداد طبیعی جواب دارد :

$$i+j-k-t=a \implies t=i+j-k-a \implies ij-ki-kj+k^2+ka=ij-kt=b \iff (i-k)(j-k)=b-ka$$

پس کافیست k را طوری انتخاب کنیم که بتوان $b-ka$ را به صورت حاصل ضرب دو عدد صحیح بیشتر از $-k$ نوشت. (چون در غیر این صورت i یا j باید منفی باشند) برای این نیز کافیست قرار دهید $i=b, j=ab+a+1, k=ab$ و لم اثبات می شود.
حال برای هر انتخاب $i+j-t-k$ طوری اعداد را قرار دهید که $ij-tk=\lfloor i+j-t-k \rfloor$. در این صورت فقط کافیست داشته باشیم

$|\{u(i+j-t-k)\}| \leq c$. همچنین دقت کنید $i+j-t-k$ هر مقدار طبیعی ای را می تواند اتخاذ کند پس بجای آن از n استفاده می کنیم که یک عدد طبیعی دلخواه است. حال اگر u یک عدد گویا باشد، کافیست n را طوری انتخاب کنیم که nu عددی طبیعی شود و اثبات کامل خواهد بود. در غیر این صورت و اگر u عددی گنگ باشد، می دانیم جز اعشاری مضارب طبیعی اعداد گنگ در بازه $(0,1)$ چگال است و بنابراین مقدار $|\{un\}| \leq c$ از هر مقدار حقیقی دلخواهی (و به طور خاص از c) می تواند کمتر باشد و اثبات به پایان می رسد.

۳.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون اول ترکیبیات

راه حل ۱) ابتدا خط در راستای دلخواه در نظر می گیریم و صفحه مختصات (حاوی خم مذکور) را طوری می چرخانیم که محور y موازی این راستا باشد. تابع $f(x)$ را تعریف می کنیم به طوری که این تابع به هر مقدار حقیقی c، طول بلندترین پاره خطی که خط $x=c$ روی خم بسته مذکور ایجاد می کند را نسبت دهد. دامنه این تابع را از اولین نقطه ای که خم را قطع می کند تا دومین نقطه ای که در آن مقدار تابع صفر است در نظر بگیرید. کافیست ثابت کنیم x, y حقیقی در دامنه تابع وجود دارند که $f(x) = f(y) \neq 0$. دقت کنید مقدار تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه برابر صفر و در تمام طول این بازه مثبت است. همچنین دقت کنید که تابع مذکور پیوسته است. (چرا؟) بنابراین بنابراین هر خط موازی محور x که عرض از مبدا آن مثبت و کمتر از مقدار ثابتی (ماکسیمم مطلق تابع) باشد، نمودار تابع f را در حداقل دو نقطه قطع می کند. (فرضا در $x=a_1, x=a_2$) در این صورت با رسم خطوط $x=a_1$ و $x=a_2$ در صفحه مختصات خم، و تعیین دورترین جفت نقاط برخورد هر یک از این خط ها، این چهار نقطه تشکیل یک متوازی الاضلاع می دهند و اثبات تمام است.

راه حل ۲) به ازای هر جفت از روز ها، تعداد شیرهایی که جواب های متفاوتی در این دو روز داده اند را در نظر گرفته و همه این اعداد را (به ازای هر جفت از روز ها) با هم جمع کرده و این مجموع را m بنامید. آنگاه به وضوح $m = \frac{nk(k-1)}{4}$. برای هر شیری که تعداد برابری پاسخ مثبت و منفی داده است، تعداد جفت روز هایی که این شیر در آنها پاسخ های متفاوت داده است برابر $\frac{k^2}{4}$ است و بنابراین ماکسیمم تعداد چنین شیرهایی برابر است با $\lfloor \frac{\frac{nk(k-1)}{4}}{\frac{k^2}{4}} \rfloor = \lfloor n - \frac{n}{k} \rfloor$ که اثبات را کامل می کند

راه حل ۳) ابتدا تعریف $p(n)$ را به همه اعداد صحیح بسط می دهیم به این صورت که برای $n < 0$ قرار می دهیم $p(n) = 0$ و همچنین $p(0) = 1$. از طرفی می دانیم برای هر n ، مقدار $p(n)$ برابر تعداد جواب های معادله زیر در اعداد صحیح نامنفی است.

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \cdots$$

حال به بیان تعدادی لم می پردازیم :

لم اول : $p(n) - p(n-1)$ برابر است با تعداد پارتیشن بندی های $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ از n که در آنها $a_1 = 0$.

لم دوم : برای هر $i \geq 1$ تعریف می کنیم :

$$s_i(n) = \sum_{m=1}^{\infty} p(n - im)$$

آنگاه مقدار $s_i(n)$ برابر است با مجموع مقادیر a_i در همه پارتیشن بندی های ممکن عدد n.

اثبات لم : دقت داشته باشید که $p(n-mi)$ برابر تعداد پارتیشن بندی هایی از n است که در آنها $a_i \geq m$.

لم سوم : $\sum_{i \geq 1} i s_i(n) = n p(n)$

اثبات لم : با توجه به لم قبل داریم :

$$\sum_{i \geq 1} i s_i(n) = \sum_{\text{هر پارتیشن ممکن}} \left(\sum_{i \geq 1} i a_i \right) = \sum_{\text{هر پارتیشن ممکن}} n = n p(n)$$

لم چهارم : برای هر $i \geq 1$ داریم :

$$s_1(n) + p(n) \leq i(s_i(n) + p(n))$$

اثبات لم : دقت کنید $s_i(n) + p(n) = \sum_{i \geq 0} p(n - im)$ بنابراین داریم :

$$i(s_i(n)+p(n)) = \sum_{i \geq 0} i p(n-im) \geq \sum_{i \geq 0} \Big(p(n-im)+p(n-im-1)+p(n-im-2)+\cdots+p(n-im-(i-1)) \Big) = s_1(n)+p(n)$$

در نتیجه لم های سوم و چهارم داریم :

$$np(n) = \sum_{i \geq 1} is_i(n) \geq \sum_{i=1}^{k} is_i(n) \geq \sum_{i=1}^{k}(s_1(n) - (i-1)p(n)) = ks_1(n) - \binom{k}{2}p(n)$$

و در نتیجه داریم :

$$s_1(n) \leq \left(\frac{k-1}{2} + \frac{n}{k}\right) p(n)$$

با بررسی مشتق تابع $\frac{k-1}{2} + \frac{n}{k}$ به راحتی نتیجه می شود مقدار مینیمم این تابع با تغییر دادن k در اعداد طبیعی (که در نامساوی آخر مقداری دلخواه است) اکیدا کمتر $\sqrt{2n}$ است و بنابراین داریم :

$$s_1(n) \leq \left(\frac{k-1}{2} + \frac{n}{k}\right) p(n) \leq \sqrt{2n} \cdot p(n) \iff \frac{s_1(n)}{p(n)} \leq \sqrt{2n}$$

که اثبات را کامل می کند.

راه حل ۴) افراد را به طور دلخواه به ۴ دسته افراز می کنیم به طوری که در هر دسته هیچ دو فردی از یک کشور حضور نداشته باشند. اگر دو فرد در چینش دور دایره مجاور هم قرار گرفته باشند آنها را همسایه می نامیم. چهار گروه مذکور را A, B, C, D نامیده و الگوریتمی ارائه می دهیم که تعداد کل جفت نفر هایی که در یک دسته قرار دارند و همسایه هم نیز هستند را اکیدا کاهش دهد. بدیهیست که اگر این مجموع صفر شود اثبات تام خواهد شد. در غیر این صورت دسته ای وجود دارد که در آن دو فرد همسایه هم حضور دارند. این دو فرد را X, Y در نظر بگیرید. دقت کنید که X حداکثر یک همسایه دیگر خارج از دسته فعلی خود (فرضا دسته A) دارد. بنابراین دو دسته هستند (فرضا C, D) که کاملا خالی از افرادی هستند که همسایه X اند. اجتماع مجموعه های همسایه های همه افراد حاضر در دسته A را در نظر گرفته و آن را W بنامید. بدیهیست که W حداکثر ۵۰ عضو دارد. افرادی که در W حضور ندارند را در نظر بگیرید، تعداد این افراد حداقل ۵۰ نفر است. همچنین حداکثر ۲۳ نفر از اعضای دسته A می توانند در بین این افراد باشند، چون X, Y همسایه یکدیگرند. به طور مشابه حداکثر ۲۵ نفر از اعضای دسته B می توانند در بین این افراد باشند. پس حداقل ۲ نفر در بین این افراد هستند که در دسته C, D قرار دارند. حال کافیست تنها یکی از این افراد را با X جابجا کنیم، در این صورت یک واحد از مقدار S کم می شود در صورتی که به آن هیچ چیزی اضافه نمی شود و بنابراین این الگوریتم تا رسیدن به حالتی که $S = 0$ ادامه دارد و حالت نهایی، حالت مطلوب مسئله خواهد بود.

۴.۲ راه حل های پیشنهادی آزمون اول هندسه

راه حل ۱) بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید $AC < BC$. فرض کنید R پای نیمساز داخلی A روی BC باشد. به سادگی نتیجه می شود که $\angle PCR = \angle PRC = \angle B + \frac{\angle C}{2}$. بنابراین P روی عمود منصف CR قرار دارد. کافیست ثابت کنیم Q نیز روی عمود منصف CR است زیرا این نتیجه می دهد که $\angle CPQ = \angle QPB$. نقطه I را مرکز دایره محاطی در نظر بگیرید. به وضوح چهارضلعی $AIBD$ محاطیست چون $\angle AIB = \angle ADB = 90 + \frac{\angle ACB}{2}$. حال به بیان یک لم می پردازیم :

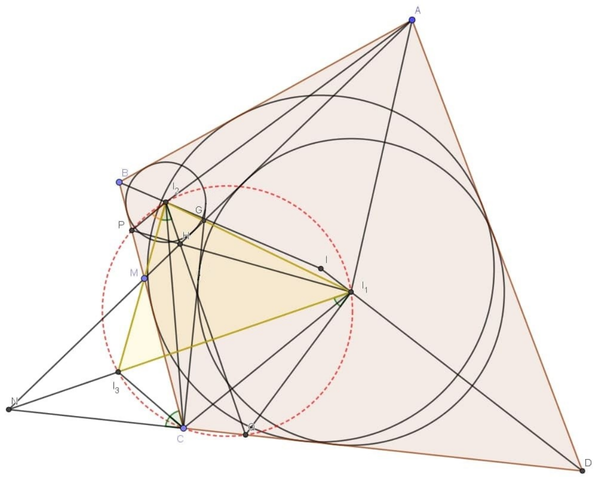
لم) عمود منصف CR محور اصلی دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{AIB}$ و دایره تباهیده C است. برای اثبات این موضوع فرض کنید S نقطه وسط کمان کوچک BC در دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و نقطه I_C مرکز دایره محاطی خارجی مقابل به راس C باشد. آنگاه می توان گفت S مرکز دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{AIB}$ است زیرا

$$CR \cdot CS = CI \cdot CI_C = \text{قوت نقطه C نسبت به دایره محیطی مثلث AIB}$$

بنابراین می توان گفت R روی قطب C نسبت به دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{AIB}$ است و بنابراین محور اصلی دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{AIB}$ و دایره تباهیده C میان خط مماس های وارده از نقطه C بر دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{AIB}$ است که عمودمنصف CR نیز هست و اثبات لم را کامل می کند.

چون QC بر دایره محیطی $\overset{\triangle}{ADC}$ مماس است، از رابطه قوت داریم $QC^2 = QA \cdot QD$ و بنابراین Q روی محور اصلی دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{AIB}$ و دایره تباهیده C قرار دارد و بنابر لم مذکور، روی عمودمنصف CR نیز قرار می گیرد.

راه حل ۲) ابتدا ثابت می کنیم $\angle I_1CI_2 = \frac{\angle BCD}{2}$. برای اثبات این موضوع نشان می دهیم که مماس وارده از C بر دایره به مرکز I_2 بر دایره به مرکز I_2 نیز مماس است : محل تماس مماس وارده از C بر دایره به مرکز I_2 ، با خط AN را G می نامیم. آنگاه از محیطی بودن چهارضلعی $ABCG$ نتیجه می شود که $AG - CG = AB - CD$ و از محیطی بودن $ABCD$ نیز داریم $AB - CD = AD - CD$ و بنابراین داریم $AG - CG = AD - CD$ که معادل محیطی بودن چهارضلعی $ADCG$ است.(چرا؟) بنابراین CG مماس مشترک دو دایره مذکور است و این نیز به راحتی نتیجه می دهد که $\angle I_1CI_2 = \frac{\angle BCD}{2}$. از طرفی می توان گفت $CI_1I_2I_3$ محاطیست زیرا $\angle I_1I_3I_2 = 180 - \angle MI_3N = 90 - \frac{\angle MCN}{2} = \frac{\angle BCD}{2} = \angle I_2CI_1$. دایره محیطی $CI_1I_2I_3$ را ω می نامیم. محل تقاطع ω با خطوط BC, CD را به ترتیب P, Q می نامیم. از قضیه پاسکال می توان ثابت کرد که محل تقاطع خطوط I_1P, I_2Q روی خط AMN قرار دارد. این نقطه را H می نامیم. از محاسبات زاویه ای بدیهیست که (بر عهده خواننده) نقطه H قرینه نقطه P نسبت به خط I_2I_3 و همچنین قرینه نقطه Q نسبت به خط I_1I_3 است که ثابت می کند H مرکز ارتفاعی مثلث $I_1\overset{\triangle}{I_2}I_3$ است .



راه حل ۳) توجه کنید BC بر دایره محیطی $BHPQ$ مماس است و $\angle HFB = 90 - \angle C$ اما داریم $\angle HBC = 90 - \angle C$ بنابراین F روی دایره محیطی $\overset{\triangle}{BHP}$ قرار دارد و HF محور اصلی دایره های محیطی مثلث های $\overset{\triangle}{AFH}, \overset{\triangle}{BHP}$ خواهد بود. همچنین اگر D وسط پاره خط BC و E پای ارتفاع وارده از B بر ضلع AC باشد، آنگاه DE بر دایره محیطی $\overset{\triangle}{AHF}$ مماس خواهد بود اما $DB = DE$ و DB بر دایره محیطی $\overset{\triangle}{HPB}$ مماس است پس می توان گفت D روی HF قرار دارد. همچنین DQ بر دایره محیطی $\overset{\triangle}{HPB}$ مماس است (چون $DB = DQ$) پس $BHQF$ چهارضلعی همساز است و بنابراین $\angle HBI = \angle QBF = \angle QHF$ که در آن I وسط HF است. در این صورت چون B نیز وسط پاره خط HK است، خواهیم داشت $\angle HKF = \angle HBI \implies FK \parallel BI$ که اثبات را کامل می کند.

راه حل ۴) فرض کنید X نقطه مقابل قطری A روی دایره محیطی $\overset{\triangle}{AB_1C_1}$ باشد. محل تقاطع دایره محاطی داخلی $\overset{\triangle}{ABC}$ با اضلاع AC, AB را E, F می نامیم. فرض کنید J نقطه میشل چهارضلعی $BCEF$ باشد. حال فرض کنید M نقطه وسط پاره خط AD باشد.

ثابت می کنیم AA_1 قطر دایره محیطی چهارضلعی $AB_1A_1C_1$ است. توجه کنید X نقطه بوان مثث $\overset{\triangle}{ABC}$ است و بنابراین $XA_1 \perp BC$. همچنین اگر X, A_1 بر هم منطبق نباشند خواهیم داشت $XA_1 \perp AA_1$ که معادل هم خطی A, B, C است که به وضوح تناقض است و بنابراین A_1 همان نقطه بوان مثلث است. از قضیه پاپوس در خطوط BA_1C, I_CAI_B نتیجه می شود که I روی B_1C_1 قرار دارد. از قضیه محور اصلی روی دایره به قطر AI و دایره های محیطی مثلث های $\overset{\triangle}{ABC}, \overset{\triangle}{BIC}$ نتیجه می شود که J روی خط AD قرار می گیرد.

چون $\overset{\triangle}{JBF} \sim \overset{\triangle}{JCE}$، خواهیم داشت :

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{JF}{JE} = \frac{JB}{JC},$$

همچنین داریم $\angle C_1AB_1 = \angle BAC = \angle BJC$ پس $\overset{\triangle}{AC_1B_1} \sim \overset{\triangle}{JBC}$ و در نتیجه

$$\angle DAB = \angle JAF = \angle JEF = \angle JCB = \angle AB_1C_1$$

و بنابراین AD بر دایره محیطی $\overset{\triangle}{AB_1C_1}$ مماس است. همچنین نتیجه می شود

$$\angle MIA = \angle IAM = \angle IAC_1 + \angle C_1AM = \angle B_1AI + \angle C_1B_1A = \angle B_1IA$$

که نتیجه می دهد نقطه M روی خط B_1IC_1 است. پس $MD^2 = MA^2 = MB_1 \cdot MC_1$ که اثبات حکم خواسته شده را تکمیل می کند.