به نام خدا

مجموعه تمارین نظریه اعداد جلسه چهارم دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۴۰۱

مبحث تابع ν_p و لم دوخط

۱. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ عددی خالی از مربع باشد. ثابت کنید اعداد $x, y \in \mathbb{N}$ موجود نیستند که $\gcd(x, y) = 1$ و همچنین $(x+y)^3 \mid x^n + y^n$.

۲. تمام اعداد طبیعی $x, y \in \mathbb{N}$ را بیابید به طوری که $p^x - y^p = 1$ که در آن p عددی اول و فرد است.

۳. با اثبات کامل، تعیین کنید آیا عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ با دقیقاً ۲۰۰۰ عامل اول وجود دارد به طوری که $n \mid 2^n + 1$؟

۴. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ و $m > 1$ عددی طبیعی باشد. همچنین فرض کنید $x, y > 1$ موجودند به طوری که $\frac{x^p+y^p}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^m$. ثابت کنید $m = p$.

۵. فرض کنید $a, b \in \mathbb{Q}^+$ اعدادی متمایز باشند به طوری که برای نامتناهی مقدار طبیعی n، داشته باشیم : $a^n - b^n \in \mathbb{Z}$. ثابت کنید $a, b \in \mathbb{Z}$.

۶. فرض کنید $k > 1$ عددی طبیعی است. ثابت کنید نامتناهی $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که رابطه $n \mid 1^n + \cdots + k^n$ برقرار باشد.

۷. تمام سه‌تایی های (x, y, p) را بیابید به طوری که $x, y \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$ و همچنین $x^{p-1} + y, y^{p-1} + x$ هر دو توانی از p باشند.

۸. تمام زوج های (a, b) از اعداد طبیعی را بیابید به طوری که تنها متناهی $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $n^2 \mid a^n + b^n$.

۹. برای هر $k \in \mathbb{N}, k > 1$، مجموعه S_k را مجموعه تمام سه تایی های (n, a, b) از اعداد طبیعی در نظر بگیرید که n عددی فرد باشد و a, b نیز اعدادی نسبت به هم اول باشند که $a + b = k$ و همچنین $n \mid a^n + b^n$ برقرار باشد. تمام مقادیر طبیعی k را بیابید به طوری که S_k مجموعه ای متناهی باشد.

۱۰. در مجموعه مسائل باقیمانده چینی اثبات کردیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، دنباله صعودی $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ موجود است به طوری که برای هر $i \leq j$ داشته باشیم : $a_i - a_j \mid a_i$. حال ثابت کنید مقدار $c \in \mathbb{R}^+$ موجود است به طوری که برای هر مقدار طبیعی n و هر دنباله $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ که در شرط فوق صادق است داشته باشیم : $a_1 > n^{cn}$.

۱۱. (تعمیم لم دوخط) فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول و فرد باشد و $a, b \in \mathbb{Z}$ اعدادی صحیح باشند به طوری که $p \nmid ab, p \mid a - b$. برای هر $n \in \mathbb{N}$ حکم زیر را ثابت کنید. همچنین ثابت کنید درستی این قضیه، درستی لم دوخط را نیز نتیجه خواهد داد.

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} \overset{p^{\nu_p(n)+1}}{\equiv} nb^{n-1}$$

۱۲. فرض کنید $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$ اعدادی مثبت باشند به طوری که هرگاه k عددی اول یا توانی از یک عدد اول باشد، آنگاه $\{\frac{a_1}{k}\} + \cdots + \{\frac{a_n}{k}\} < 1$. ثابت کنید مقدار طبیعی و یکتای $1 \leq i \leq n$ موجود است به طوری که $a_1 + \cdots + a_n < 1 + \lfloor a_i \rfloor$.

۱۳. فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $(k)! + (2k)! + \cdots + (nk)!$ عامل اولی بزرگتر از $k!$ داشته باشد.

تمارین اضافه

۱. فرض کنید $a_1, \cdots, a_k$ اعدادی طبیعی و کوچکتر یا مساوی با n باشند به طوری که برای هر $1 \leq i \leq k$ داشته باشیم : $a_i \nmid \prod_{j \neq i} a_j$. ثابت کنید $k \leq \pi(n)$ که در آن $\pi(n)$ تعداد اعداد اول کوچکتر یا مساوی با n است.

۲. فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$ اعدادی طبیعی باشند به طوری که برای هر $p \in \mathbb{P}$ داشته باشیم : $a \ (mod p) \leq b \ (mod p)$. ثابت کنید $a = b$.

۳. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ عددی اول است. احکام زیر را ثابت کنید :

(آ) فرض کنید $p \geq 5$ و $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{p-1} = \dfrac{A}{B}$ که در آن $A, B \in \mathbb{N}, \gcd(A, B) = 1$ آنگاه ثابت کنید $p^2 \mid A$.

(ب) فرض کنید $p \geq 5$ و $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{(p-1)^2} = \dfrac{A}{B}$ که در آن $A, B \in \mathbb{N}, \gcd(A, B) = 1$ آنگاه ثابت کنید $p \mid A$.

(ج) فرض کنید $p > 5$ و $\dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{(p-1)^3} = \dfrac{A}{B}$ که در آن $A, B \in \mathbb{N}, \gcd(A, B) = 1$ آنگاه ثابت کنید $p^2 \mid A$.

(د) (اختیاری) فرض کنید $p \geq 5$ و $u \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی و فرد باشد و $p \geq u + 3$ باشد. اگر $\frac{1}{1^u} + \frac{1}{2^u} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^u} = \frac{A}{B}$ که در آن $A, B \in \mathbb{N}, \gcd(A, B) = 1$ آنگاه ثابت کنید $p^2 \mid A$.