به نام خدا

مجموعه تمارین نظریه اعداد جلسه ششم دوره تابستانی المپیاد ریاضی ۱۴۰۱

مبحث چندجمله‌ای های نظریه‌اعدادی و لم هنسل

۱. تمام مجموعه‌های $\{a_1, \cdots, a_n\}$ از اعداد صحیح را بیابید به طوری که برای هر $x \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم : $\prod a_i \mid \prod (x+a_i)$.

۲. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. دنباله $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ تحت روابط $a_0 = 0, \forall n > 0 : a_n = P(a_{n-1})$ مفروض است. اگر $m \geq 1$ موجود باشد که $a_m = 0$، آنگاه ثابت کنید $a_1 a_2 = 0$.

۳. تمام چندجمله‌ای های $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ با ضرایب صحیح را بیابید به طوری که برای هر $p \in \mathbb{P}$ فرد داشته باشیم $P(p) \mid 2^p - 2$.

۴. فرض کنید $\mathbb{F}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی با حداقل دو عضو باشد. همچنین فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد به طوری که برای هر $a, b \in \mathbb{F}$ متمایز، $a + b \in \mathbb{F}$ و همچنین $\gcd(P(a), P(b)) = 1$. ثابت کنید $P(x)$ چندجمله‌ای ثابت است.

۵. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $P(n) > n$. دنباله $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ را تحت روابط $x_1 = 1, \forall n > 1 : x_i = P(x_{i-1})$ تعریف می‌کنیم. همچنین می‌دانیم برای هر $m \in \mathbb{N}$، حداقل یک جمله از این دنباله بر m بخش‌پذیر است. ثابت کنید $P(x) \equiv x + 1$.

۶. تمام توابع $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ را بیابید به طوری که برای هر $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ داشته باشیم :

(أ) $f(P(x)+1) = f(P(x)) + 1$

(ب) $f(P(x)) \neq 0 \implies f(P(x)) \mid f(P(x)Q(x))$

۷. فرض کنید چندجمله‌ای $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ با ضرایب صحیح داده شده باشد به طوری که $P(0) = 1$. همچنین فرض کنید $c > 1$ عددی صحیح باشد. دنباله $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ را تحت شروط $x_0 = 0, \forall n > 0 : x_n = P(x_{n-1})$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید نامتناهی $m \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\gcd(x_m, m+c) = 1$.

۸. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[x], p \in \mathbb{P}$ داده شده باشد، به نحوی که مجموعه $\{P(0), \cdots, P(p^2-1)\}$ به پیمانه p^2 تشکیل دستگاه کامل مانده‌ها بدهد. ثابت کنید مجموعه $\{P(0), \cdots, P(p^3-1)\}$ تشکیل دستگاه کامل مانده‌ها به پیمانه p^3 خواهد داد.

۹. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، $P(n)$ برابر با توان kاُم یک عدد گویا باشد. ثابت کنید $R(x) \in \mathbb{Q}[x]$ موجود است به طوری که $P(x) = R(x)^k$.

۱۰. فرض کنید $n > 1$ و اعداد طبیعی $a_1, \cdots, a_{n+1}$ داده شده باشند. آیا چندجمله‌ای $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ موجود است که $\deg(P) \leq n+1$ و همچنین :

(أ) $\forall i, j \leq n+1 : \gcd(P(a_i), P(a_j)) > 1$

(ب) $\forall 1 \leq i < j < k \leq n+1 : \gcd(P(a_i), P(a_j), P(a_k)) = 1$

۱۱. آیا چندجمله‌ای غیرثابت $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ موجود است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، مقدار $P(n)\varphi(n)$ مربع کامل عددی طبیعی باشد؟

۱۲. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب صحیح باشد. آیا تابع $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ موجود است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، تعداد ریشه‌های معادله $f^n(x) = x$ برابر با $P(n)$ باشد؟

۱۳. فرض کنید تابع $\lambda : \mathbb{Z}_p[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ داده شده باشد به طوری که $\lambda\left(\sum a_i x^i\right) = \sum a_i x^{p^i}$. ثابت کنید برای هر $f, g \in \mathbb{Z}_p[x]$ داریم :

$$\lambda\left(\gcd(f,g)\right) = \gcd\left(\lambda(f), \lambda(g)\right)$$

۱۴. فرض کنید $Q \in \mathbb{Z}[x]$ و $n, k \in \mathbb{N}$ داده شده باشند. همچنین فرض کنید $0, Q(0), Q^2(0), \cdots$ به پیمانه n^{2020} تمام باقیمانده‌های ممکن را تولید کند. ثابت کنید برای هر $k \in \mathbb{N}$، این مجموعه به پیمانه n^k تمام باقیمانده‌های ممکن را تولید می‌کند.

۱۵. تمام $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ هایی را بیابید به طوری که برای هر $s, t \in \mathbb{R}$ که $P(s), P(t) \in \mathbb{Z}$ باشند، داشته باشیم : $P(st) \in \mathbb{Z}$.

۱۶. عدد a را یک مانده‌ی طلایی به پیمانه m می‌نامیم اگر و فقط اگر $x \in \mathbb{Z}$ موجود باشد به طوری که $a \overset{m}{\equiv} x^x$. فرض کنید a به پیمانه n^n مانده‌ی طلایی باشد. ثابت کنید a به پیمانه n^{n^n} نیز مانده‌ی طلایی است.

۱۷. فرض کنید $k \in \mathbb{Z}$ عددی فرد و بزرگتر از ۳ باشد. ثابت کنید چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب غیرصحیح موجود است به طوری که :

(أ) $f(0) = 0, f(1) = 1$

(ب) نامتناهی $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که n به صورت مجموع کمتر از $2^k - 1$ عضو از مجموعه $\{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ قابل نمایش نباشد.

۱۸. تمام زوج‌های $c, d > 1$ از اعداد طبیعی را بیابید به طوری که برای هر $Q \in \mathbb{Z}[x]$ نکین و هر $p > c(2c+1)$ مجموعه $\mathbb{S}$ با حداکثر $\frac{2c-1}{2c+1}p$ عضو موجود باشد به طوری که $\bigcup_{s \in \mathbb{S}} \{s, Q(s), Q(Q(s)), \cdots\}$ دستگاه کامل مانده‌ها به پیمانه p باشد.

تمارین اضافه

۱. تمام چندجمله‌ای های $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ را بیابید به طوری که $P(0) \neq 0$ و همچنین برای هر $m, n \geq 0$، مقدار $P^m(n)P^n(m)$ مربع کامل عددی طبیعی شود.

۲. فرض کنید چندجمله‌ای $P \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ داده شده باشد به نحوی که برای هر $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}$، مقدار $P(x_1, \cdots, x_n)$ مربع کامل باشد. ثابت کنید چندجمله‌ای $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ موجود است به طوری که $P \equiv Q^2$.

۳. فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ داده شده باشد به طوری که برای هر $c \in \mathbb{Q}$ ثابت، توابع $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به طوری که $g(x) = f(x, c)$ و $h(x) = f(c, x)$ هر دو چندجمله‌ای هایی از x باشند. آیا می‌توان نتیجه گرفت f یک چندجمله‌ای از x, y است؟

۴. فرض کنید $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ داده شده‌اند به نحوی که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم : $q(x)^n - 1 \mid p(x)^n - 1$. ثابت کنید $p(x)$ توانی صحیح از $q(x)$ است.

۵. فرض کنید $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ داده شده باشد به طوری که مجموع ارقام $\mid P(n) \mid$ هیچگاه برابر با عضوی از دنباله فیبوناتچی نباشد. آیا لزوماً P چندجمله‌ای ثابت است؟

۶. تمام چندجمله‌ای های $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ را بیابید به طوری که مجموعه $\{P(a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ شامل یک تصاعد هندسی نامتناهی باشد.

۷. ثابت کنید نامتناهی $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $n^3 - 3n + 1 \mid n!$.

۸. (اختیاری) فرض کنید چندجمله‌ای $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ و $a \in \mathbb{N}$ که مربع کامل نیست، داده شده باشد. همچنین فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ مقدار $P(a^n)$ مربع کامل باشد. ثابت کنید $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ موجود است به طوری که $P(x) \equiv Q(x)^2$.