

विकिपीडिया

# गणित का इतिहास

मुक्त ज्ञानकोश विकिपीडिया से

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. At the top, there is a solid purple rectangular band. Below this band, the page contains approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines, providing space for writing or drawing.

अध्ययन का क्षेत्र जो **गणित के इतिहास** के रूप में जाना जाता है, प्रारंभिक रूप से गणित में अविष्कारों की उत्पत्ति में एक जांच है और कुछ हद तक, अतीत के अंकन और गणितीय विधियों की एक जांच है।

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	4	7	5	1

ब्राह्मी अंक, पहली शताब्दी के आसपास

आधुनिक युग और ज्ञान के विश्व स्तरीय प्रसार से पहले, कुछ ही स्थलों में नए गणितीय विकास के लिखित उदाहरण प्रकाश में आये हैं। सबसे प्राचीन उपलब्ध गणितीय ग्रन्थ हैं, *प्लिमपटन ३२२ (Plimpton 322)* (बेबीलोन का गणित (Babylonian mathematics) सी.१९०० ई.पू.) *मास्को गणितीय पेपाइरस (Moscow Mathematical Papyrus)* (इजिप्ट का गणित (Egyptian mathematics) सी.१८५० ई.पू.) *रहिंद गणितीय पेपाइरस (Rhind Mathematical Papyrus)* (इजिप्ट का गणित {/3}सी.१६५० ई.पू.) और *शुल्बा के सूत्र (Shulba Sutras)* (भारतीय गणित सी. ८०० ई.पू.)। ये सभी ग्रन्थ तथाकथित पाईथोगोरस की प्रमेय (Pythagorean theorem) से सम्बंधित हैं, जो मूल अंकगणितीय और ज्यामिति के बाद गणितीय विकास में सबसे प्राचीन और व्यापक प्रतीत होती है।

बाद में ग्रीक और हेल्लेनिस्टिक गणित (Greek and Hellenistic mathematics) में इजिप्ट और बेबीलोन के गणित का विकास हुआ, जिसने विधियों को परिष्कृत किया (विशेष रूप से प्रमाणों (mathematical rigor) में गणितीय निष्ठता (proofs) का परिचय) और गणित को विषय के रूप में विस्तृत किया।<sup>[1]</sup> इसी क्रम में, इस्लामी गणित (Islamic mathematics) ने गणित का विकास और विस्तार किया जो इन प्राचीन सभ्यताओं में ज्ञात थी। फिर गणित पर कई ग्रीक और अरबी ग्रंथों को लैटिन में अनुवाद (translated into Latin) किया गया, जिसके परिणाम स्वरूप मध्यकालीन यूरोप (medieval Europe) में गणित का आगे विकास हुआ।

प्राचीन काल से मध्य युग (Middle Ages) के दौरान, गणितीय रचनात्मकता के अचानक उत्पन्न होने के कारण सदियों में ठहराव आ गया। १६ वीं शताब्दी में, इटली में पुनर्जागरण की शुरुआत में, नए गणितीय विकास हुए, जिससे नए वैज्ञानिक खोजों के साथ अंतर क्रियाएँ हुईं, यह सब अब तक की सबसे तीव्र गति के साथ हुआ (ever increasing pace) और यह आज तक जारी है।

## अनुक्रम

### प्रारंभिक गणित

पूर्व के पास प्राचीन (सी.१८०० - ५०० ई.पू.)

मेसोपोटामिया

मिस्र

प्राचीन भारतीय गणित (सी. ९०० ई.पू.-ई. २००)

ग्रीक और हेल्लेनिस्टिक गणित (सी. ५५० ई.पू.-ई. ३००)

शास्त्रीय चीनी गणित (सी. ५०० ई.पू.-१३०० ई.)

शास्त्रीय भारतीय गणित ४०० - १६००)

इस्लामी गणित (सी. ८०० - १५००)

मध्यकालीन यूरोपीय गणित (सी. ५००-१४००)

प्रारंभिक मध्य युग ५००-११००)

यूरोप में गणित का पुनर्जन्म (११००-१४००)

प्रारंभिक आधुनिक यूरोपीय गणित (सी. १४००-१६००)

१७ वीं सदी

१८ वीं सदी

१९ वीं सदी

२० वीं सदी

इन्हें भी देखें

सन्दर्भ

आगे पठन

बाहरी कड़ियाँ

## प्रारंभिक गणित

सबसे पुराने लिखित रिकॉर्डों से भी बहुत अधिक पहले, ऐसे चित्र मिलते हैं जो मूल गणित के कुछ ज्ञान की और इंगित करते हैं और तारों के आधार पर समय के मापन को भी इंगित करते हैं। उदाहरण के लिए जीवाश्म विज्ञानियों (paleontologists) ने दक्षिणी अफ्रीका की गुफाओं में ओकरे (ochre) चट्टानों की खोज की जो लगभग ७०, ००० वर्ष पुरानी थी और खरोच युक्त ज्यामितिक पैटर्न<sup>[2]</sup> से सुसज्जित थीं। साथ ही प्रागैतिहासिक (prehistoric) विरूपण (artifact) ने अफ्रीका और फ्रांस में ऐसी खोजें की जो ३५, ००० (35,000) और २०,००० (20,000) साल पुरानी हैं,<sup>[3]</sup> व समय के मात्राकरण (quantify) के प्रारंभिक प्रयासों को बताती हैं।<sup>[4]</sup>

इस बात के प्रमाण मिलते हैं कि महिलाएं अपने मासिक धर्म चक्र (menstrual cycle) का हिसाब रखने के लिए गिनती करती थीं: इसके लिए हड्डी या पत्थर पर २८-३० खरोच बना दी जाती थीं, जिस पर एक विशिष्ट मार्कर से निशान बनाये जाते थे। इसके अलावा, शिकारी और चरवाहे जब पशुओं के झुंड पर विचार करते थे तो एक, दो और अनेककी अवधारणाओं को प्रयोग करते थे, साथ ही कोई नहीं या शून्य के विचार से भी अवगत थे।<sup>[5][6]</sup>

नील नदी (पूर्वोत्तर कांगो (Congo)) के मुख्य जल के पास मिली इशांगो अस्थि (Ishango bone), अधिक से अधिक २०,००० (20,000) साल पुरानी हो सकती है। एक आम धारणा यह है कि यह अस्थि<sup>[7]</sup> अभाज्य संख्या (sequence) और इजिप्ट के प्राचीन गुणन (prime number) के अनुक्रम (Ancient Egyptian multiplication) का सबसे पुराना ज्ञात प्रदर्शन है। ५ वीं सहस्राब्दी ईसा पूर्व के पूर्व राजवंश के इजिप्ट (Predynastic Egypt) के लोगों ने ज्यामितिकस्थानिक (spatial) डिजाइन का चित्रों के द्वारा प्रदर्शन किया। ऐसा दावा किया गया है कि तीसरी सहस्राब्दी ई.पू. में इंगलैंड (megalith) और स्कॉटलैंड में, मेगालिथिक स्मारकों ने अपने डिजाइनों में व्रत (circle), दीर्घ व्रत और पाईथगोरियन त्रिक (Pythagorean triple) के ज्यामितीय आकारों को शामिल किया।<sup>[8]</sup>

प्राचीन भारत की सबसे प्राचीन ज्ञात गणित, जो ३००० -२६०० ई.पू. में मानी जाती है, उत्तर भारत (North India) और पाकिस्तानसिंधु घाटी सभ्यता (हड़प्पा सभ्यता) में पाई गयी है। इस सभ्यता ने समान वजन और मापन की प्रणाली का विकास किया जिसमें दशमलव (decimal) प्रणाली का प्रयोग किया गया, एक आश्चर्यजनक रूप से उन्नत ईंट (brick) तकनीक जिसमें अनुपात (ratio) का प्रयोग किया गया, पूर्ण समकोण (right angle) पर गलियाँ बनायीं गयीं, साथ ही कई ज्यामितीय आकारों और डिजाइनों का प्रयोग किया गया, जिसमें घनाभ (cuboid), बैरल (barrel), शंकु (cones), बेलन (cylinders) शामिल हैं, तथा इसमें समकेंद्री और एक दूसरे को काटने वाले व्रत (circle) व त्रिभुजों (triangle) के चित्र भी मिलते हैं। गणितीय उपकरणों में शामिल था एक सटीक दशमलव पैमाना, जो छोटे और सटीक उपविभाजनों से युक्त था, एक खोल उपकरण जो समतल सतह पर या क्षितिज में ४०-३६० डिग्री के गुणज में कोण का मापन करने के लिए एक कम्पास का काम करता था, एक खोल उपकरण का उपयोग आकाश और क्षितिज के ८-१२ पूर्ण विभागों को मापने के लिए किया जाता था और एक उपकरण का उपयोग जहाज संचालन के लिए तारों की स्थिति के मापन के लिए किया जाता था। सिन्धु लिपि को अभी तक पढ़ा नहीं जा सका है; अतः हड़प्पा की गणित (Harappan mathematics) के लिखित रूपों के बारे में बहुत कम ज्ञात है।

पुरातात्विक प्रमाण यह संदेह पैदा करते हैं कि इस सभ्यता में एक आधार 8 (base 8) की अंक प्रणाली (numeral system) का उपयोग किया गया, उन्हें  $\pi$  ( $\pi$ ) का मान भी ज्ञात था, जो व्रत की परिधि (circumference) की लम्बाई और इसके व्यास (diameter) का अनुपात है।<sup>[9]</sup>

चीनी गणित का सबसे पुराना उदाहरण शांग राजवंश (Shang Dynasty) (१६०० - १०४६ ई.पू.) से मिलता है, जिसमें एक कछुए के कवच पर खरोच कर बनाये गए अंक शामिल हैं।<sup>[1]</sup> ([https://web.archive.org/web/20070704053539/http://www.saxakali.com/COLOR\\_ASP/chinamh1.htm](https://web.archive.org/web/20070704053539/http://www.saxakali.com/COLOR_ASP/chinamh1.htm)) <sup>[2]</sup> ([https://web.archive.org/web/20081203181420/http://www.chinaculture.org/gb/en\\_madeinchina/2005-08/18/content\\_71974.htm](https://web.archive.org/web/20081203181420/http://www.chinaculture.org/gb/en_madeinchina/2005-08/18/content_71974.htm)). इन अंकों को दशमलव संकेतन के माध्यम से बताया जाता था। उदाहरण के लिए संख्या १२३ को (ऊपर से नीचे तक) लिखने के लिए १ के प्रतीक के बाद १०० का प्रतीक लिखा जाता था, उसके बाद २ के प्रतीक एक बाद १० का प्रतीक लिखा जाता था और अंत में ३ का प्रतीक लिखा जाता था। यह उस समय दुनिया की सबसे उन्नत अंक प्रणाली थी, जिसमें *सुअन पेन* (suan pan) या (चीनी एबेकस) पर गणनाएं भी की जा सकती थीं। *सुअन पेन* के आविष्कार की तारीख ज्ञात सुनिश्चित नहीं है, किन्तु सबसे पुराना लिखित उदाहरण ई. १९० में जू यू की *सप्लीमेंट्री नोट्स ओन दी आर्ट ऑफ़ फिगर्स* में मिलता है।

## पूर्व के पास प्राचीन (सी. १८०० - ५०० ई.पू.)

### मेसोपोटामिया

मुख्य लेख: *Babylonian mathematics*

बेबीलोन का गणित मेसोपोटामिया (आधुनिक इराक) के लोगों के किसी भी गणित से सम्बन्ध रखता है, यह प्रारम्भिक सुमेरियन से लेकर हेल्लेनिस्टिक अवधि (Hellenistic period) की शुरुआत से सम्बंधित है। इसे बेबीलोन के गणित का नाम दिया गया क्योंकि अध्ययन के स्थान के रूप में बेबीलोन ने केन्द्रीय भूमिका निभाई, जिसका अस्तित्व हेल्लेनिस्टिक अवधि में मन जाता है। इस बिंदु से, बेबीलोन का गणित ग्रीक और मिस्र के गणित के साथ विलय हो गया और इसने हेल्लेनिस्टिक गणित (Hellenistic mathematics) को जन्म दिया। बाद में अरब साम्राज्य (Arab Empire), मेसोपोटामिया, विशेषकर बगदाद के अंतर्गत, एक बार फिर से इस्लामी गणित (Islamic mathematics) के लिए अध्ययन का एक महत्वपूर्ण केंद्र बन गया।

मिस्र के गणित (Egyptian mathematics) में स्रोतों की अतिरिक्तता के विपरीत बेबीलोन की गणित के बारे में हमारा ज्ञान १८५० के बाद से खुदाई में मिली ४०० से अधिक मिट्टी की गोलियों से व्युत्पन्न हुआ है। *क्युनीरूप लिपि* (Cuneiform script) में गोलियों पर किया गया अंकन तब किया गया जब मिट्टी गीली थी और इसे सख्त बनाने के लिए एक भट्टी में या सूरज की गरमी में पकाया गया। इनमें से कुछ गृह कार्य की श्रेणी में वर्गीकृत होते हुए प्रतीत होते हैं।

लिखित गणित का सबसे पुराना प्रमाण प्राचीन सुमेरियन से मिलता है, जिन्होंने मेसोपोटामिया में सबसे पुरानी सभ्यता का निर्माण किया। उन्होंने २५०० ई.पू. के बाद से ३००० ई.पू. से. मापन विज्ञान (metrology) की एक जटिल प्रणाली का विकास किया, सुमेरियन लोगों ने मिट्टी की गोलियों पर गुणा के पहाड़े लिखे और ज्यामितीय अभ्यासों तथा भाग (division) की समस्याओं को हल किया। बेबीलोन के अंकों के सबसे पुराने चिन्ह भी इसी अवधि से मिलते हैं।<sup>[10]</sup>

मिट्टी की गोलियां मुख्य रूप से १८०० से १६०० ई.पू. के बीच मिली हैं, ये ऐसे विषयों को कवर करती हैं जिनमें भिन्न, बीज गणित, द्विघात और घन समीकरण शामिल हैं, साथ ही नियमित (regular) व्युत्क्रम (reciprocal) जोड़ों (pairs) पर गणनाएं भी मिलती हैं। (देखें प्लिमपटन ३२२ (Plimpton 322))।<sup>[11]</sup> इन गोलियों पर गुणा के पहाड़े और रेखीय और द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियां भी शामिल हैं। बेबीलोन की गोली वे बी सी ७२८९,  $\sqrt{2}$  का मान दशमलव के पांच स्थानों तक बिलकुल ठीक बताती है।

बेबीलोन के गणित को एक सेक्सजिसेमल (sexagesimal) (आधार-60) अंक प्रणाली (numeral system) का उपयोग करते हुए लिखा गया। इसी से हम ने आधुनिक उपयोग को व्युत्पन्न किया है जैसे एक मिनट में ६० सेकंड, एक घंटे में ६० मिनट और एक व्रत में ३६० (६० X ६०) डिग्री, साथ ही एक डिग्री के अंश को निरूपित करने के लिए एक चाप के सेकंड और मिनट का उपयोग। गणित में बेबीलोन के उन्नत अनुप्रयोग इस तथ्य से प्रभावित हैं कि ६० से बहुत अधिक भाजक हैं। साथ ही, मिस्र, ग्रीक और रोमन के लोगों के विपरीत, बेबीलोन के लोगों के पास एक सही स्थानीय मान प्रणाली थी, जिसमें बाएं स्तम्भ में लिखी गयी संख्या बड़े मान को बताती थी जैसा कि दशमलव (decimal) प्रणाली में होता है। तथापि उनकी प्रणाली में दशमलव बिंदु के तुल्य मान का अभाव था। और इसीलिए किसी प्रतीक का स्थानीय मान अक्सर सन्दर्भ से निष्कर्षित किया जाता था।

## मिस्र

मुख्य लेख: Egyptian mathematics

इजिप्ट का गणित वह गणित है जिसे इजिप्ट की भाषा (Egyptian language) में लिखा गया है। हेलेनिस्टिक अवधि (Hellenistic period), से इजिप्ट (Greek) के विद्वानों की लिखित भाषा की दृष्टि से ग्रीक (Egyptian) ने इजिप्ट का स्थान ले लिया और इस समय से इजिप्ट का गणित ग्रीक और बेबीलोन के गणित के साथ विलेय हो गया, जिसने हेलेनिस्टिक गणित (Hellenistic mathematics) को जन्म दिया। इजिप्ट में गणित का अध्ययन बाद में इस्लामी गणित (Arab Empire) के एक भाग के रूप में अरब साम्राज्य (Islamic mathematics) के अंतर्गत जारी रहा, जब जब अरबी मिस्र के विद्वानों के लिखित भाषा बन गई।

सबसे पुराना अभी तक खोजा गया गणितीय ग्रन्थ मास्को पेपाइरस (Moscow papyrus) है, जो एक इजिप्ट का मध्य साम्राज्य (Middle Kingdom) का दिनांकित सी. पेपाइरस है। २०००-१८०० ई.पू. [कृपया उद्धरण जोड़ें] कई प्राचीन गणितीय ग्रंथों की तरह, इसमें वह शामिल है जिसे आज हम शब्द समस्याएँ अथवा कहानी समस्याएँ कहते हैं, जो जाहिर तौर पर मनोरंजन के लिए की जाती थीं। एक समस्या को विशेष महत्त्व का माना जाता है क्योंकि यह एक फ्रास्टम (frustum) के आयतन को पता लगाने की एक विधि बताती है: "यदि आपको कहा जाये: ६ का एक ऊर्ध्वाधर पिरामिड जिसकी उर्ध्व ऊंचाई आधार पर ४ और शीर्ष पर २ है। आप को इस ४ का वर्ग करना है, परिणाम १६. आप को इस ४ को दो गुणा करना है, परिणाम ८. आपको २ का वर्ग करना है, परिणाम ४. आपको १६, ८ और ४ का योग करना है, परिणाम २८. आपको ६ का एक तिहाई करना है, परिणाम २. आपको २८ को दो बार लेना है, परिणाम ५६. देखिये यह ५६ है। आप इसे सही पाएंगे."

रहिंद पेपाइरस (Rhind papyrus) (सी. १६५० ई.पू. [3] (<https://web.archive.org/web/20090825164656/http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/RhindPapyrus.shtml>)) एक अन्य मुख्य इजिप्ट का गणितीय ग्रन्थ है, जो अंकगणित और ज्यामिति में एक निर्देश मैनुअल है। क्षेत्रफल के सूत्र, गुणा भाग की विधियां देने, और इकाई भिन्नों के साथ क्रिया करने के अलावा, इसमें अन्य गणितीय ज्ञान के प्रमाण भी हैं, [12] जिसमें सम्मिश्र (composite) और अभाज्य (prime number) संख्याएँ; अंकगणितीय (arithmetic), ज्यामितीय (geometric) और हारमोनिक (harmonic mean) माध्य; इरेतोस्थेनस की चलनी (Sieve of Eratosthenes) और पूर्ण संख्या सिद्धांत (perfect number theory) (नामतः, संख्या ६ का) [4] (<https://web.archive.org/web/20061016120307/http://www.mathpages.com/home/rhind.htm>) शामिल हैं। साथ ही यह दर्शाता है कि पहले क्रम के रेखीय समीकरण को और [5] ([https://web.archive.org/web/20120112023049/http://www.w-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Egyptian\\_papyri.html](https://web.archive.org/web/20120112023049/http://www.w-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Egyptian_papyri.html)) साथ ही अंकगणितीय (arithmetic) और ज्यामितीय श्रृंखला (geometric series) को कैसे हल किया जाये. [6] ([https://web.archive.org/web/20090416033656/http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad\\_ancient\\_egypt\\_algebra.html#areithmetic%20series](https://web.archive.org/web/20090416033656/http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt_algebra.html#areithmetic%20series))

साथ ही रहिंद पेपाइरस में उपस्थित तीन ज्यामितीय तत्व विश्लेषणात्मक ज्यामिति (analytical geometry) पर आधारित सरलतम: तथ्य का सुझाव देते हैं: (१) पहला और सबसे पुराना, एक प्रतिशत से कम के अन्दर सटीक का सन्निकटन  $\pi$  कैसे प्राप्त किया जाये; (२) दूसरा, व्रत का वर्ग करने (squaring the circle) का एक प्राचीन प्रयास और (३) तीसरा, एक प्रकार की सहस्पर्शज्या (cotangent) का सबसे पुराना ज्ञात उपयोग.

अंत में, बर्लिन पेपाइरस (Berlin papyrus) (सी. १३०० ई.पू. [7] (<https://web.archive.org/web/20080316222324/http://www.hum.ku.dk/cni/papcoll/high008.html>) [8] ([https://web.archive.org/web/20190305173434/http://www.aams.org.au/contents.php?subdir=library%2Fhistory%2F&filename=pharonic\\_egypt](https://web.archive.org/web/20190305173434/http://www.aams.org.au/contents.php?subdir=library%2Fhistory%2F&filename=pharonic_egypt))) दर्शाता है कि प्राचीन इजिप्ट के लोग द्वितीय क्रम के बीजीय समीकरण (algebraic equation) [9] ([https://web.archive.org/web/20150407231917/http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad\\_ancient\\_egyptpapyrus.html#berlin](https://web.archive.org/web/20150407231917/http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egyptpapyrus.html#berlin)) को हल कर सकते थे।

## प्राचीन भारतीय गणित (सी. ९०० ई.पू.-ई. २००)

मुख्य लेख: भारतीय गणित

शुक्लयजुर्वेद संहिता के कतिपय मन्त्रों में संख्याओं का उल्लेख और गुणनसारणी पाई जाती है।

वैदिक गणित की शुरुआत *शतपथ ब्राह्मण* के साथ प्रारंभिक लौह युग में हुई, (सी. ३० वीं शताब्दी ई.पू.), जो  $\pi$  ( $\pi$ ) के मान को दशमलव के दो स्थानों तक बताती है। वेदांग ज्योतिष में (सी. १३५० ई.पू.) गणित के कतिपय प्रकार पाए जाते हैं। [10] ([https://web.archive.org/web/20090426035326/http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Projects/Pearce/Chapters/Ch4\\_1.html](https://web.archive.org/web/20090426035326/http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Projects/Pearce/Chapters/Ch4_1.html)) और *शुल्बा* के

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	५	7	५	7

ब्राह्मी अंक (Brahmi numeral) पहली सदी में सी ईई

सूत्र (Sulba Sutras)। (सी. ८००-५०० ई.पू.) ज्यामिति के पाठ हैं जो अन अनुपातिक संख्याओं (irrational number), अभाज्य संख्याओं (prime number), तीन के नियम (rule of three) और घन मूल (cube root) का उपयोग करते थे; इन्होंने २ के वर्ग मूल (square root) की गणना दशमलव के पांच स्थानों तक की; वृत्त का वर्ग (squaring the circle) करने की विधि दी; रैखिक समीकरणों और द्विघात समीकरणों को हल किया; बीज गणितीय रूप से पाइथगोरियन त्रिक (Pythagorean triple) का विकास किया और पाइथगोरस की प्रमेय (proof) का एक आंकिक प्रमाण (Pythagorean theorem) तथा तथ्य दिया।

Pāṇini (सी. ५. शताब्दी ई.पू.) संस्कृत (grammar) के व्याकरण नियमों को तैयार किया। उनका अंकन आधुनिक गणितीय अंकन के समान था और इसने ऐसी कृत्रिमता के साथ मध्यम नियमों, रूपांतरण (transformation) और पुनरावृत्ति (recursion) का उपयोग किया की उनकी व्याकरण में एक ट्यूरिंग मशीन (computing) के तुल्य घात अभिकलन (Turing machine) की क्षमता थी। पिंगला (मोटे तौर पर तीसरी पहली शताब्दी ई.पू.) ने अपने छंदशास्त्र (prosody) की शोधात्मक पुस्तक में एक उपकरण का उपयोग किया जो द्विआधारी अंक प्रणाली (binary numeral system) से मेल खाती है। मीटर (combinatorics) की संचयिका (meters) पर उनकी चर्चा द्विपद प्रमेय (binomial theorem) से मेल खाती है। पिंगला के कार्य में फिबोनैकी संख्याओं के बुनियादी विचार भी शामिल हैं। (जो *मात्रामेरु*)। ब्रह्मी (Brāhmī) लिपि कम से कम चौथी शताब्दी ई.पू. में मौर्य राजवंश से विकसित हुई। प्रकट होते हुए हाल ही के पुरातात्विक साक्ष्य इसके विकास को ६०० ई.पू. में दिनांकित करते हैं। ब्राह्मी अंक (Brahmi numerals) तीसरी शताब्दी ई.पू. की तिथि पर दिनांकित हैं।

४०० ई.पू. और ई. २०० ई. के बीच, जयना गणितज्ञों ने मात्र गणित के उद्देश्यों के लिए गणित का अध्ययन शुरू किया। वे पहले लोग थे जिन्होंने पारपरिमित संख्याओं (transfinite numbers), समुच्चय सिद्धांत, लघुगणक, सूचकांकों के मूल नियम (indices), घन समीकरण (cubic equation), द्विघात समीकरण (quartic equation), अनुक्रम (sequences) और उन्नयन, क्रमचय और संचय (permutations and combinations), वर्ग करना और वर्ग मूल (square root) निकालना और परिमित और अपरिमित (infinite) घातों (powers) का विकास किया। *बखशाली पाण्डुलिपि* (Bakhshali Manuscript) जो २०० ई.पू. और २०० ई. के बीच लिखी गयी, में पांच अज्ञात तक रैखिक समीकरणों के हल, द्विघात समीकरणों के हल, अंक गणितीय और ज्यामितीय उन्नयन, संयुक्त श्रृंखला, द्विघात अनिश्रित समीकरण, युगपत समीकरण शामिल हैं और साथ ही शून्य और नकारात्मक संख्याओं (negative numbers) के प्रयोग भी शामिल हैं। अन अनुपातिक संख्या के लिए सटीक अभिकलन पाए जा सकते हैं, जिसमें अधिक से अधिक एक मिलियन तक की संख्याओं के वर्ग मूलों का कम से कम ११ दशमलव स्थानों तक अभिकलन शामिल है।

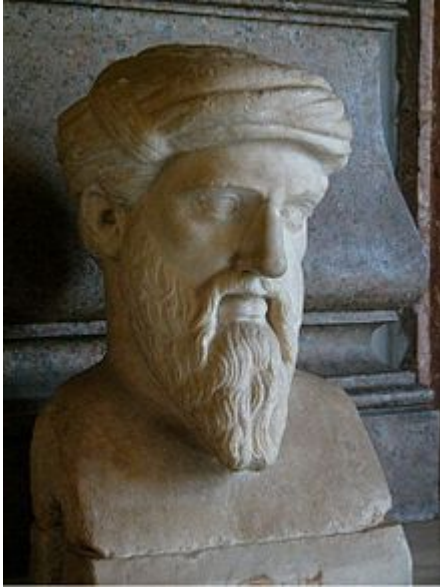
## ग्रीक और हेल्लेनिस्टिक गणित (सी. ५५० ई.पू.-ई. ३००)

मुख्य लेख: *Greek mathematics*

ग्रीक गणित वह गणित है जो ६०० ई.पू. और ३०० ई. के बीच ग्रीक भाषा (Greek language) में लिखी गयी।<sup>[13]</sup> ग्रीक गणितज्ञ इटली से उत्तरी अफ्रीका तक पूरे पूर्वी भूमध्य में फैले थे, लेकिन संस्कृति और भाषा से एकजुट थे। एलेगजेंडर दी ग्रेट के बाद की अवधि की ग्रीक गणित कभी कभी हेल्लेनिस्टिक गणित कहलाती है।

ग्रीक गणित उस गणित की तुलना में अधिक परिष्कृत थी जो प्रारंभिक संस्कृतियों के द्वारा विकसित की गयी थी। ग्रीक पूर्व गणित के सभी उपस्थित रिकॉर्ड आगमनात्मक तर्क के उपयोग को दर्शाते हैं, अर्थात, अंगूठे के नियमों को स्थापित करने के लिए बार बार प्रेक्षणों को दोहराना। इसके विपरीत ग्रीक गणितज्ञ निगमनात्मक तर्क का उपयोग करते थे। ग्रीक लोग परिभाषा और स्वतः सिद्ध कथनों से निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए तर्क का उपयोग करते थे।<sup>[14]</sup>

माना जाता है कि ग्रीक गणित की शुरुआत थेल्स (Thales) (सी. ६२४-सी. ५४६ ई.पू.) और पाइथगोरस का साथ हुई। (सी. ५८२-सी. ५०७ ई.पू.)। हालाँकि इसके प्रभाव की सीमा पर विवाद है, संभवतया वे मिस्र (Egypt), मेसोपोटामिया (Mesopotamia) और भारत की गणित से प्रेरित थे। पौराणिक कथा के अनुसार, पाइथगोरस, इजिप्ट के पुजारियों से गणित, ज्यामिति और खगोल विज्ञान सीखने के लिए इजिप्ट गए।



सामोस के पाइथोगोरस

थेल्स ने समस्याओं को हल करने के लिए ज्यामिति का प्रयोग किया जैसे पिरेमिड की ऊंचाई की गणना और जहाज से किनारे की दूरी की गणना। पाइथोगोरस की प्रमेय (Pythagorean theorem) के पहले प्रमाण का श्रेय पाइथोगोरस को दिया जाता है, हालाँकि प्रमेय के तथ्यों का एक लम्बा इतिहास है।<sup>[15]</sup> यूक्लिड (Euclid) पर उनकी टिप्पणी में प्रोक्लस (Proclus) कहते हैं कि पाइथोगोरस ने प्रमेय की अभिव्यक्ति की जिसमें उनका नाम है और ज्यामितीय के बजाय बीजगणितीय रूप से पाइथोगोरियन त्रिक (Pythagorean triples) बनाये।



थेल्स ऑफ मिलेटस

प्लेटो की अकादमी (Academy of Plato) के

दो उद्देश्य थे,"

पाइथोगोरियन्स (Pythagoreans) ने अन अनुपातिक संख्याओं के अस्तित्व को साबित किया। यूडोक्सस (Eudoxus) (४०८-सी. ३५५ ई.पू.) ने समाप्ति की विधि (method of exhaustion) को विकसित किया, जो आधुनिक एकीकरण (integration) का एक अग्रदूत है। अरस्तू (Aristotle) (३८४-सी. ३२२ ई.पू.) ने अहले तर्क के नियमों को लिखा। यूक्लिड (Euclid) (सी. ३०० ई.पू.) उस प्रारूप का सबसे पुराना उदाहरण है जिसका उपयोग अभी भी आज की गणित, परिभाषाओं, स्वतः सिद्ध तथ्यों, प्रमेयों और प्रमाणों में होता है। उन्होंने कोनिक्स का भी अध्ययन किया। उनकी पुस्तक "एलिमेंट्स (Elements)", २० शताब्दी के मध्य तक पश्चिम में सभी लोगों को शिक्षित करने के लिए जानी जाती थी।<sup>[16]</sup> ज्यामिति की परिचित प्रमेयों जैसे पाइथोगोरस की प्रमेय (Pythagorean theorem) के अलावा, एलिमेंट्स इस बात का सबूत है कि २ का वर्गमूल अन अनुपातिक संख्या है और अनंत रूप से कई अभाज्य संख्याएँ पाई जाती हैं। इरेतोस्थेनस की चलनी (Sieve of Eratosthenes) (सी. २३० ई.पू.) का उपयोग अभाज्य संख्याओं की खोज के लिए किया गया।

सिरैक्यूज़ के आर्किमिडीज (Syracuse) (सी. २८७-२१२ ई.पू.) ने एक अपरिमित श्रृंखला के समेशन (method of exhaustion) के साथ एक परवलय के चाप के अंतर्गत क्षेत्रफल की गणना करने के लिए समाप्ति की विधि का उपयोग किया और पाई (Pi) का एक उल्लेखनीय सटीक सन्निकटन दिया।<sup>[17]</sup> उन्होंने एक सर्पिल (spiral) का भी अध्ययन किया जिसमें उनका नाम था और परिक्रमण करने वाली सतह के आयतन (surfaces of revolution) के लिए सूत्र दिए, तथा बहुत बड़ी संख्याओं को व्यक्त करने के लिए एक बहुत ही सरल प्रणाली दी।

## शास्त्रीय चीनी गणित (सी. ५०० ई.पू.-१३०० ई.)

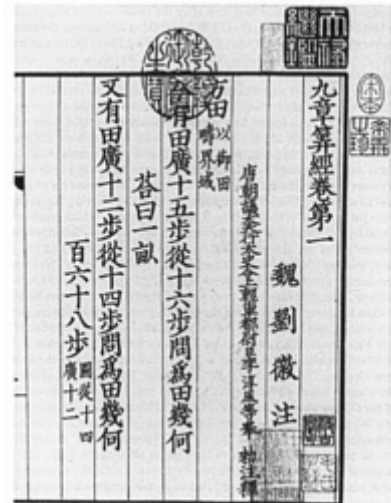
मुख्य लेख: *Chinese mathematics*

चीन में महाराज किन शि हुआंग (Qin Shi Huang) (शि हुआंग-टी) ने २१२ ई.पू. निर्देश दिया कि किन के राज्य के बहार सभी किताबों को जला दिया जाये। इसकी सार्वभौमिक रूप से पालना नहीं की गयी, लेकिन इस आदेश के परिणाम के रूप में प्राचीन चीनी गणित के बारे में बहुत कम ज्ञात है।

पश्चिमी झोउ वंश (Western Zhou Dynasty) (१०४६ ई.पू. से), से सबसे पुराना गणितीय कार्य जिसने पुस्तकों को जलाना (book burning) जारी रखा, वह है, आई चिंग (I Ching), जो ८ द्विआधारी ३-टपल (tuple) (त्रिग्राम) और ६४ द्विआधारी ६-टपल (tuple) (षटग्राम) का उपयोग गणितीय, दार्शनिक और रहस्यमय प्रयोजनों के लिए करता है। द्विआधारी टपल टूटी हुई और ठोस रेखाओं के बने होते हैं, जो क्रमशः यिन (मादा) और येंग (नर) कहलाते हैं, (देखें राजा वेन अनुक्रम (King Wen sequence))।



चीन में ज्यामिति में सबसे पुराना विद्यमान कार्य दार्शनिक मोहिस्त (Mohist) केनन सी. से आया है। ३३० ई.पू., मोजी (Mozi) (४७०-३९० ई.पू.) के अनुयायियों के द्वारा संकलित। *मो जिंग* ने भौतिक विज्ञान से सम्बंधित कई क्षेत्रों के भिन्न पहलुओं का वर्णन किया और साथ ही गणित पर थोड़ी बहुत जानकारी भी दी।



गणितीय कला पर नौ अध्याय.

पुस्तकों को जलने के बाद, हान राजवंश (Han dynasty) (२०२ ई.पू.-२२० ई.) ने गणित के कार्यों का उत्पादन किया जो संभवतया उन कार्यों पर विस्तृत हुए जो आज खो चुके हैं। इनमें से सबसे महत्वपूर्ण है *गणितीय कला पर नौ अध्याय* (The Nine Chapters on the Mathematical Art), जिसका पूरा शीर्षक १७९ ईस्वी तक सामने आया, लेकिन इसके अलावा अन्य शीर्षकों में भागों में उपस्थित था। इसमें २४६ शाब्दिक समस्याएँ थीं, जिनमें कृषि, व्यापार, चीनी शिवालय (Chinese pagoda) के स्तंभों के लिए विमाओं के अनुपात और ऊंचाई के आयाम की ज्यामिति का अंकन, अभियांत्रिकी, सर्वेक्षण की समस्याएँ शामिल थीं और इसमें समकोण त्रिभुज (right triangle) और  $\pi$  ( $\pi$ ) से सम्बंधित सामग्री भी शामिल है। इसने आयतन पर केवेलियरी के सिद्धांत (Cavalieri's principle) का प्रयोग किया, जबकि इसके हजार से भी अधिक सालों के बाद केवेलियरी ने इसे पश्चिम में प्रस्तावित किया। इसने पाइथोगोरस की प्रमेय (Pythagorean theorem) के लिए गणितीय प्रमाण दिया और गाऊसीयन उन्मूलन (Gaussian elimination) के लिए एक गणितीय सूत्र भी दिया। लियू हुई (Liu Hui) ने तीसरी शताब्दी ई. तक कार्य पर टिप्पणी की।

इसके अलावा, हान के खगोल विज्ञानी और आविष्कारक ज़ांग हेंग (Zhang Heng) (ई. ७८ - १३९) के गणितीय कार्यों ने पाई ( $\pi$ ) के मान की गणना की जो लियू हुई की गणना से अलग है। ज़ांग हेंग ने अपने पाई के सूत्र का उपयोग गोले के आयतन को ज्ञात करने के लिए किया। गणितज्ञ और संगीत सिद्धांतवादी (music theorist) जिंग फेंग (Jing Fang) (७८-३७ ई.पू.) का लिखित कार्य भी था; पाइथोगोरियन अल्प विराम (Pythagorean comma) के उपयोग के द्वारा, जिंग ने देखा की ५३ केवल पाँचवे (just fifth) लगभग ३१ अष्टक (octave) थे। इससे बाद में ५३ बराबर आचरणों (53 equal temperament) की खोज हुई और इसकी गणना कहीं पर भी निश्चित रूप से नहीं की गयी थी जब तक निकोलस मर्केटर (Nicholas Mercator) ने १७ वीं शताब्दी में ऐसा किया।

चीनी लोगों ने जटिल संचयी चित्र का उपयोग किया जो जादुई वर्ग (magic square) और जादुई व्रत (magic circles) कहलाता है, प्राचीन समय में यांग हुई (Yang Hui) (१२३८-१३९८ ई.) के द्वारा इसका वर्णन किया गया और इसे सिद्ध किया गया।



ज़ांग हेंग (Zhang Heng) (७८ - १३९)

दक्षिणी और उत्तरी राजवंशों (Southern and Northern Dynasties) के जू चोंगजी (Zu Chongzhi) (५ वीं शताब्दी) ने दशमलव के पांच स्थानों तक पाई के मान की गणना की, जो लगभग १००० सालों तक पाई का सबसे सही मान बना रहा।

पुनर् जागरण के दौरान जब यूरोपीय गणित पनपना शुरू हो गयी, उसके बाद यूरोपीय और चीनी गणित अलग अलग परम्पराएँ थीं, चीनी गणित के निर्गम में बहुत अधिक गिरावट आई, जब जेसुइट (Jesuit) मिशनरियों जैसे मातेओ रिकी (Matteo Ricci) ने १६ वीं से १८ वीं शताब्दी तक दोनों संस्कृतियों के बीच गणितीय विचारों को आगे पीछे रखा।

## शास्त्रीय भारतीय गणित ४०० - १६००)

मुख्य लेख: *Indian mathematics*

इन्हें भी देखें: *History of the Hindu-Arabic numeral system*

सूर्य सिद्धांत (सी. ४००) ने ज्या (trigonometric functions), कोज्या (sine) और व्युत्क्रम ज्या के त्रिकोणमितीय फलन (cosine) दिए और प्रदीप्त वस्तुओं की वास्तविक गति को निर्धारित करने के लिए नियम दिए, जो आकाश में उनकी वास्तविक स्थिति

को सुनिश्चित करते हैं। ब्रह्माण्ड विज्ञान संबंधी समय चक्र की व्याख्या इस पाठ्य में की गयी, जो एक प्रारंभिक कार्य से नक़ल



की गयी थी, यह ३६५.२५६३६३०५ दिनों के एक औसत नाक्षत्र वर्ष (sidereal year) से मेल खाती है, जो ३६५.२५६३६२७ दिनों के आधुनिक मान से केवल १.४ सेकंड बड़ा है। इस कार्य को मध्य युग में अरबी और लैटिन में अनुवादित किया गया।

४९९ में आर्यभट्ट ने, वरसाइन (versine) फलन की शुरुआत की, ज्या की पहली त्रिकोणमितीय सारणी बनायीं, तकनीकों, बीज गणित के लघुगणक, अत्याणु (infinitesimal), अवकलज समीकरण (differential equation) का विकास किया और एक ऐसी विधि से रैखिक समीकरणों के पूर्ण संख्या हल प्राप्त किया, जो आधुनिक विधि के तुल्य थी, साथ ही गुरुत्वाकर्षण की अभिकेन्द्रिक (heliocentric) प्रणाली पर आधारित खगोलीय (gravitation) गणनाये की। उनकी आर्यभट्टिया का अरबी अनुवाद ८ वीं शताब्दी से उपलब्ध था, इसके बाद १३ वीं शताब्दी में इसका लेटीन अनुवाद किया गया। उन्होंने  $\pi$  के मान की गणना भी दशमलव के चौथे स्थान तक ३.१४१६ के रूप में की। १४ वीं शताब्दी में, संगमग्राम के माधव (Madhava of Sangamagrama) ने  $\pi$  के मान की गणना दशमलव के ग्यारहवें स्थान तक ३.१४१५९२६५३५९ के रूप में की।



आर्यभट्ट

७ वीं सदी में ब्रह्मगुप्तने ब्रह्मगुप्त की प्रमेय (Brahmagupta theorem), ब्रह्मगुप्त का मूल समीकरण (Brahmagupta's identity), और ब्रह्मगुप्त का सूत्र (Brahmagupta's formula) दिया और पहली बार ब्रह्म-स्फूत-सिद्धांत में, उन्होंने शून्य के उपयोग को एक स्थानीय धारक (placeholder) के रूप में और एक दशमलव अंक (decimal digit) के रूप में विस्तार से समझाया, तथा हिंदु-अरबी अंक प्रणाली (Hindu-Arabic numeral system) को स्पष्ट किया। गणित पर इस भारतीय पाठ्य के अनुवाद से (सी. ७७०) इस्लामी गणितज्ञों ने इस अंक प्रणाली को शुरू किया और इसे अरबी अंकों (Arabic numerals) के रूप में अनुकूलित किया। इस्लामी विद्वान् अंक प्रणाली के इस ज्ञान को १२ वीं शताब्दी तक यूरोप में ले गए और अब इसने पूरी दुनिया में सभी पुरानी अंक प्रणालियों को प्रतिस्थापित कर दिया है। १० वीं शताब्दी में, पिंगला (Halayudha) के कार्य पर हलयुद्ध की कमेंट्री में फिबोनाकी अनुक्रम और पास्कल के त्रिभुज (Pascal's triangle) का एक अध्ययन शामिल है और यह एक मैट्रिक्स (matrix) के निर्माण का वर्णन करता है।

१२ वीं शताब्दी में, भास्कर (Bhaskara) ने सबसे पहले अवकल कलन (differential calculus) की अवधारणा दी और साथ ही व्युत्पन्न (derivative), अवकलज (differential) गुणांक और अवकलन (differentiation) की अवधारणायें भी दीं। उन्होंने रोले की प्रमेय (Rolle's theorem) दी (माध्य मान प्रमेय (mean value theorem) का एक विशेष मामला), पेल के समीकरण (Pell's equation) का अध्ययन किया और ज्या फलनों के व्युत्पन्न की खोज की। १४ वीं शताब्दी से, माधव और केरल स्कूल के (Kerala School) गणितज्ञों ने उनके विचारों को आगे विकसित किया। उन्होंने गणितीय विश्लेषण (mathematical analysis) और उतप्लावी बिंदु (floating point) संख्याओं की अवधारणा का विकास किया और कलन के पूर्ण विकास के लिए मूल अवधारणायें दीं, इसमें शामिल हैं पदानुसारसमाकलन (integration), एक वक्र के अंतर्गत एक क्षेत्रफल और इसके प्रतिव्युत्पन्न या समाकलों का सम्बन्ध, अभिकेंद्रण के लिए समाकल परीक्षण (integral test for convergence), अरैखिक समीकरणों (iterative method) के हल के लिए पुनरावृत्ति विधि (non-linear) और अपरिमित श्रृंखला, घात श्रृंखला (power series), टेलर श्रृंखला (Taylor series) और त्रिकोणमितीय श्रृंखला की एक संख्या। १६ वीं शताब्दी में, ज्येष्ठदेव (Jyeshthadeva) ने केरल स्कूल की गतिविधियों और प्रमेयों को युक्तिभाषा में समेकित किया, जो दुनिया की पहली अवकल कलन पाठ्य है, इसने समाकल कलन (integral calculus) की अवधारणा को भी शुरू किया।

राजनीतिक उथलपुथल की वजह से भारत में गणित की प्रगति १६ वीं शताब्दी के बाद रुक गयी।

## इस्लामी गणित (सी. ८०० - १५००)

मुख्य लेख: [Mathematics in medieval Islam](#)

इन्हें भी देखें: [History of the Hindu-Arabic numeral system](#)

इस्लामी अरब साम्राज्य (Arab Empire) की स्थापना ८ वीं शताब्दी में मध्य पूर्व, केन्द्रीय एशिया (Central Asia), उत्तरी अफ्रीका (North Africa), आइबेरिया (Iberia) और भारत के कई भागों में हुई जिसने गणित में महत्वपूर्ण योगदान दिया। हालाँकि गणित पर अधिकांश इस्लामिक पाठ्य अरबी में लिखे गए, वे सभी अरब (Arab) में नहीं लिखे गए, चूँकि हेल्लेनिस्टिक दुनिया में ग्रीक स्थिति से यह बहुत समानता रखते थे, उस समय पर पूरी इस्लामी दुनिया में अरबी भाषा का उपयोग गैर-अरब विद्वानों के द्वारा लिखित भाषा के रूप में किया गया। साथ ही, अधिकांश महत्वपूर्ण इस्लामी गणितज्ञ पारसी (Persians) भी थे।



मोहम्मद इब्न मूसा अल ख्वारिज्मी  
(Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī)

९ वीं शताब्दी में, Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī हिन्दू-अरबी अंकों पर और समीकरणों को हल करने की विधियों पर कई मुख्य पुस्तकें लिखीं। हिन्दू अंकों के साथ गणनाओं पर, ८२५ के बारे में लिखी गयी उनकी पुस्तक, साथ ही अल-किंदी (Al-Kindi) का कार्य, पश्चिम में भारतीय गणित और भारतीय अंकों (Indian numerals) के प्रसार में सहायक रहे। शब्द एल्गोरिथम उनके नाम एल्गोरिथ्मी, के लेटिनीकरण से व्युत्पन्न हुआ है। और शब्द एलजेबरा उनके कार्यों में से एक (अल-किताब अल-मुख्तसर फी हिसाब अल-गबर वाल-मुकाबाला) (Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī hisāb al-ğabr wa'l-muqābala) (समापन और संतुलन के द्वारा गणना पर संक्षिप्त पुस्तक) शीर्षक से आया है, अल ख्वारिज्मी को अक्सर "बीज गणित का जनक" कहा जाता है, क्योंकि उन्होंने इस क्षेत्र में बुनियादी योगदान दिया।<sup>[18]</sup> उन्होंने धनात्मक मूलों से युक्त द्विघात समीकरणों के बीजगणितीय हल के लिए एक पूर्ण स्पष्टीकरण दिया,<sup>[19]</sup> और वे पहले व्यक्ति थे जिन्होंने खुद के लिए बीजगणित को मूल रूप (elementary form) में पढ़ाया।<sup>[20]</sup> उन्होंने "काटने (reduction)" और "संतुलन" की मूल विधियां भी शुरू की, जो एक समीकरण के दूसरी ओर से घटाए गए पदों के स्थानान्तरण का उल्लेख करती हैं; अर्थात्, समीकरण के विपरीत पक्ष में समान पदों को काटना। इसी गतिविधि को अल-ख्वारिज्मी ने मूल रूप से अल-जब्र, के रूप में वर्णित किया।<sup>[21]</sup> उनकी बीजगणित भी लम्बे समय तक "हल किये जाने वाली समस्याओं (problem) की एक श्रृंखला से सम्बंधित नहीं थी, लेकिन एक प्रदर्शनी (exposition) जो उन प्रारंभिक शब्दों के साथ शुरू होती है, जिनमें संयोजनों को समीकरणों के लिए सभी संभव प्रोटोटाइप देने चाहिए, जो अध्ययन के वास्तविक उद्देश्य को स्पष्ट रूप से रखती है। उन्होंने खुद ही एक समीकरण का अध्ययन किया और "एक सामान्य तरीके से, क्योंकि यह एक समस्या को हल करने के दौरान साधारण रूप से उत्पन्न नहीं होती है, लेकिन विशेष रूप से यह समस्याओं के एक अनंत वर्ग को परिभाषित करती है।"<sup>[22]</sup>

बीजगणित में आगे के विकास अल-कराजी (Al-Karaji) के द्वारा उनके निबंध अल-फाखरी में किये गए, जहां वे अज्ञात मात्राओं के पूर्णांक मूलों और पूर्णांक घातों को शामिल करने की विधि का विस्तार करते हैं। गणितीय प्रेरण (proof) का पहला ज्ञात प्रमाण (mathematical induction) अल-कराजी के द्वारा १००० ई. में लिखी गयी एक पुस्तक में मिलता है, जिन्होंने, इसका उपयोग द्विपद प्रमेय (binomial theorem), पास्कल के त्रिभुज (Pascal's triangle) और समाकल (integral) घनों (cubes) के योग को साबित करने के लिए किया।<sup>[23]</sup> गणित के इतिहासकार (historian), एफ वूपके<sup>[24]</sup>, ने अल-करजी की प्रशंसा की क्योंकि "वे पहले व्यक्ति थे जिन्होंने बीजगणितीय (theory) कलन का सिद्धांत दिया। "१० वीं सदी में भी, अबुल वफ़ा (Abul Wafa) ने डायोफेन्तस (Diophantus) के कार्यों का अरबी में अनुवाद किया और स्पर्शज्या (tangent) फलन का विकास किया। इब्न अल हैथम (Ibn al-Haytham) पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने चौथी घात (fourth powers) के योग के लिए सूत्र व्युत्पन्न किया, इसके लिए उन्होंने एक ऐसी विधि का प्रयोग किया जो किसी भी समाकल घात के योग के लिए सामान्य सूत्र के निर्धारण हेतु तत्काल प्रयुक्त की जा सकती है। उन्होंने एक पेराबोलोइड या परवलय (paraboloid) के आयतन को ज्ञात करने के लिए एक समाकलन किया, वे चौथे अंश (polynomial) तक एक बहुपद (fourth degree) के समाकलों के लिए परिणाम को स्पष्ट करने में सक्षम थे। इस प्रकार से वे बहुपदों के समाकलों (integral) के लिए एक सामान्य सूत्र ज्ञात करने के नजदीक पहुँच गए, लेकिन वे चौथे अंश से अधिक किसी भी बहुपद से सम्बंधित नहीं थे।<sup>[25]</sup>

११ वीं शताब्दी में उमर खय्याम (Omar Khayyam) ने डिसकशन्स ऑफ़ दी डिफीकल्टीज इन युक्लिड लिखी जो युक्लीड के "तत्वों" (Euclid's Elements) विशेष रूप से समानान्तर अभिधारणा (parallel postulate) में दोष के बारे में एक पुस्तक थी और उन्होंने विश्लेषणात्मक ज्यामिति (analytic geometry) और गैर युक्लिड ज्यामिति (non-Euclidean geometry) के लिए नींव रखी। साथ ही वे पहले व्यक्ति थे जिन्होंने घन समीकरण (cubic equation) के सामान्य ज्यामितीय हल को खोजा। वे कैलेंडर सुधार (calendar reform) में बहुत प्रभावी थे।

१२ वीं शताब्दी में, शराफ-अल-दिन अल-तुसी (Sharaf al-Dīn al-Tūsī) ने फलन की अवधारणा दी,<sup>[26]</sup> और वे पहले व्यक्ति थे जिन्होंने घन बहुपदों (derivative) के व्युत्पन्न (cubic polynomials) की खोज की।<sup>[27]</sup> उनके समीकरणों पर निबंधने अवकल कलन से सम्बंधित अवधारणाओं का विकास किया, जैसे व्युत्क्रम फलन और वक्र के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ (maxima and minima) ताकि उन घन समीकरणों को हल किया जा सके, जिनके धनात्मक हल नहीं हो सकते हैं।<sup>[28]</sup>

१३ वीं शताब्दी में, नासिर अल दीन तुसी (Nasir al-Din Tusi)(नासिरेद्दीन) ने गोलीय त्रिकोणमिति (spherical trigonometry) में प्रगति की। साथ ही उन्होंने यूक्लिड (Euclid) की समानान्तर अभिधारणा (parallel postulate) पर प्रभावी कार्य भी लिखा। १५ वीं शताब्दी में, घियाथ अल-काशी (Ghiyath al-Kāshī) ने दशमलव के १६ स्थानों तक  $\pi$  ( $\pi$ ) के मान की गणना की। काशी ने  $n$ वें मूल की गणना के लिये एक एल्गोरिथ्म दिया, जो रुफिनी (Ruffini) और होर्नर (Horner) के द्वारा कई सदियों बाद दी गयी विधि का एक विशेष मामला था।

अन्य उल्लेखनीय मुस्लिम गणितज्ञों में शामिल हैं, अल समावल (al-Samawal), अबुल-हसन अल-युक्लिदिसी (Abu'l-Hasan al-Uqlidisi), जमशीद अल-काशी (Jamshīd al-Kāshī), थाबित इब्न कूरा (Thabit ibn Qurra), अबू कामिल (Abu Kamil) और अबू सहल अल-कुही (Abu Sahl al-Kuhi)।

इस अवधि के दौरान मुस्लिम गणितज्ञों की अन्य उपलब्धियां हैं, बीज गणित और एल्गोरिथम (देखें मोहम्मद इब्न मूसा अल ख्वारिज्मी (Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī)), गोलीय त्रिकोणमिति (spherical trigonometry) का विकास,<sup>[29]</sup> अरबी अंकों (decimal point) के दशमलव बिंदु (Arabic numerals) संकेतन के अलावा, ज्या के अतिरिक्त सभी आधुनिक त्रिकोणमितीय फलनों (trigonometric function) की खोज, क्रिप्ट विश्लेषण (al-Kindi) और आवृत्ति विश्लेषण (cryptanalysis) का अल किंदी (frequency analysis) का परिचय, विश्लेषणात्मक ज्यामिति (analytic geometry) का इब्न अल हैथम (Ibn al-Haytham) के द्वारा विकास, उमर खय्याम (algebraic geometry) के द्वारा बीजीय ज्यामिति (Omar Khayyam) की शुरुआत, यूक्लिड ज्यामिति (Euclidean geometry) का पहला खंडन और नासिर अल दीन अल तूसी (parallel postulate) के द्वारा समानांतर अभिधारणा (Nasir al-Dīn al-Tūsī), सदर अल-दीन के द्वारा गैर यूक्लिड ज्यामिति (non-Euclidean geometry) का एक प्रयास, अल कलासादी (algebraic notation) के द्वारा एक बीज गणितीय संकेतन (al-Qalasādī) का विकास,<sup>[30]</sup> और बीज गणित में कई अन्य प्रगतियां, अंक गणित, कलन, क्रिप्टोग्राफी, ज्यामिति, अंक सिद्धांत (number theory) और त्रिकोणमिति ।

15 वीं सदी से, तुर्क साम्राज्य के दौरान, इस्लामी गणित का विकास रुक गया।

## मध्यकालीन यूरोपीय गणित (सी. ५००-१४००)

गणित में मध्यकालीन यूरोपीय रूचि जिन मुद्दों से उत्पन्न हुई वह वर्तमान गणित से बिलकुल अलग थे। एक उत्तरदायी तत्व वह विश्वास था कि गणित ने प्रकृति के सृजन के आदेश को समझने के लिए कुंजी प्रदान की है, इसे प्लेटो की *तिमास* (Timaeus) के द्वारा समर्थन दिया गया और बाइबिल का पथ कि भगवान ने " सभी चीजों को मापन, संख्या और भार, में आदेश दिया है" (विजडम ११ : २१)।

### प्रारंभिक मध्य युग ५००-११००

बोएथियास (Boethius) ने पाठ्यक्रम में गणित के लिए एक जगह उपलब्ध कराई जब उसने अंकगणित, ज्यामिति, खगोल विज्ञान और संगीत के अध्ययन का वर्णन करने के लिए *क्वाड्रीवियम* (quadrivium) शब्द दिया। उन्होंने दी *इंस्टीट्यूशने एरिथमेटिकलिखी* जो निकोमेकास (Nicomachus) के *अंकगणित के परिचय* का ग्रीक से एक मुक्त अनुवाद था; दी *इंस्टीट्यूशने म्यूजिका* भी ग्रीक स्रोतों से व्युत्पन्न हुई; और यूक्लिड (Euclid) के "तत्वों" (Elements) संश की एक श्रृंखला. उनका कार्य प्रायोगिक से ज्यादा सैद्धांतिक था और ग्रीक और अरबी गणितीय कार्य में सुधार तक गणितीय अध्ययन का आधार बना रहा।<sup>[31][32]</sup>

### यूरोप में गणित का पुनर्जन्म (११००-१४००)

12 वीं सदी में, यूरोपीय विद्वानों ने वैज्ञानिक अरबी पाठ्य के अध्ययन के लिए (seeking scientific Arabic texts) स्पेन और सिसली की यात्रा की, इसमें अल ख्वारिज्मी की *समापन और संतुलन के द्वारा गणना पर संक्षिप्त पुस्तक* (The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing) शामिल है, जो चेस्टर के रॉबर्ट (Robert of

Chester) के द्वारा लेटिन में अनुवादित की गयी और युक्लीड के "तत्वों" (Euclid's *Elements*) का पूर्ण पाठ्य, जो एडेलार्ड ऑफ बाथ (Adelard of Bath), हर्मन ऑफ केरिन्थिया (Herman of Carinthia) और जेरार्ड ऑफ क्रेमोना (Gerard of Cremona) के द्वारा भिन्न संस्करणों में अनुवादित किया गया।<sup>[33][34]</sup>

इन नए स्रोतों ने गणित को नवीनीकृत किया। फिबोनाकी, १२०२ में *लिबर एबेकी* (*Liber Abaci*) में लिखी गयी और १२५४ में इसका अद्यतन किया गया, इसने इरेटोस्थेनेस के समय से यूरोप में महत्वपूर्ण गणित का उत्पादन किया, यह एक हजार साल से अधिक अंतर था। इस कार्य से यूरोप में हिंदु-अरबी अंकों (Hindu-Arabic numerals) की शुरुआत हुई और इसने कई अन्य गणितीय समस्याओं की चर्चा की।

चौदहवीं शताब्दी में नयी गणितीय अवधारणाओं का विकास हुआ जिसने समस्याओं की एक विस्तृत श्रृंखला की खोज की।<sup>[35]</sup> एक महत्वपूर्ण योगदान था, स्थानीय गति के गणित का विकास

थॉमस ब्राडवारदाइन (Thomas Bradwardine) ने प्रस्तावित किया की गति (V) अंकगणितीय अनुपात में बढ़ती है क्योंकि बल (F) और प्रतिरोध (R) का अनुपात ज्यामितीय अनुपात में बढ़ता है। ब्राडवारदाइन इसे विशेष उदाहरणों की एक श्रृंखला के द्वारा अभिव्यक्त किया, लेकिन हालाँकि लघुगणक अभी आया नहीं था, हम उनके निष्कर्षों को पुरातनपंथी लेखन के द्वारा अभिव्यक्त करते हैं:  $V \text{ लॉग} = (F/R)$ ।<sup>[36]</sup> ब्राडवारदाइन का विश्लेषण अल किंदी (al-Kindi) और विलानोवा के अर्नाल्ड (Arnald of Villanova) के द्वारा प्रयुक्त गणितीय तकनीक के स्थानान्तरण का एक उदाहरण है जो मिश्रित औषधियों की प्रकृति को भिन्न भौतिक समस्याओं के लिए बताता है।<sup>[37]</sup>

१४ वीं सदी के ऑक्सफ़ोर्ड गणकों (Oxford Calculators) में से एक विलियम हेतेसबरी (William Heytesbury) के पास अवकल कलन (differential calculus) और सीमाओं की अवधारणाओं का अभाव था, उन्होंने उस पथ के द्वारा तात्कालिक गति का मापन प्रस्तावित किया जो "यदि के द्वारा (एक काय) वर्णित किया जायेगा ..... यह सामान अंश की गति से समान रूप से गति करेगी जिससे यह दिए गए तात्कालिक पल में गति करेगी।"<sup>[38]</sup>

हेतेसबरी और अन्य लोगों ने गणितीय रूप से सामान त्वरित गति करती हुई एक वस्तु के द्वारा तय की गयी दूरी को निर्धारित किया (आज इसे समाकलन (integration) के द्वारा हल किया जाता है), उन्होंने स्थापित किया की "एक गतिमान वस्तु समान रूप से वृद्धि (गति की) को प्राप्त कर रही है या खो रही है, वह दिए गए समय में उतनी ही दूरी तय करेगी जितनी कि वह तब करती जब यह समान समय के दौरान लगातार समान अंश के साथ गति करते हुए कर पाती।"<sup>[39]</sup>

निकोल ओरेस्म (Nicole Oresme) ने पेरिस विश्वविद्यालय (University of Paris) और इतालवी गिओवानी दी कासाली (Giovanni di Casali) में स्वतंत्र रूप से इस सम्बन्ध का लेखाचित्र के द्वारा प्रदर्शन किया, इस में उन्होंने यह माना कि स्थिर त्वरण को बताने वाली रेखा के अंतर्गत क्षेत्र, तय की गयी कुल दूरी को अभिव्यक्त करता है।<sup>[40]</sup> युक्लिड के *तत्वों* पर बाद में की गयी एक कमेंट्री में, ओरेस्म ने एक अधिक विस्तृत सामान्य विश्लेषण किया, जिसमें उन्होंने दर्शाया कि एक वस्तु समय की प्रत्येक क्रमागत वृद्धि के दौरान, किसी गुण में वृद्धि प्राप्त करेगी, जो विषम संख्याओं के रूप में बढ़ती है। चूँकि युक्लीड ने प्रदर्शित किया था कि विषम संख्याओं का योग वर्ग संख्याएं होती हैं, वस्तु के द्वारा प्राप्त किये गए कुल गुण समय के वर्ग के रूप में बढ़ते हैं।<sup>[41]</sup>

## प्रारंभिक आधुनिक यूरोपीय गणित (सी. १४००–१६००)

यूरोप में पुनर्जागरण की शुरुआत में, गणित कुछ बोज़िल संकेतनों के द्वारा सीमित थी, जिसमें रोमन अंकों (Roman numeral) का उपयोग किया जाता था और इसमें प्रतीकों के बजाय शब्दों के उपयोग के द्वारा सम्बन्ध की अभिव्यक्ति की जाती थी: इसमें एक अज्ञात के रूप में किसी भी प्लस के निशान का, किसी भी बराबर के निशान का, या किसी भी गुणा के निशान का उपयोग नहीं किया जाता था।

जहां तक आज जाना जाता है, १६ वीं शताब्दी में यूरोपीय गणितज्ञों ने दुनिया में कहीं भी अग्रिम हुए बिना प्रगति की। इनमें से सबसे पहला था, घन समीकरणों (cubic equation) का सामान्य हल, जिसका सामान्य रूप से श्रेय स्किपिओन डेल फेरो (Scipione del Ferro) सी. को जाता है, १५१०, लेकिन इसका पहला प्रकाशन गेरोलामो करडानो (Johannes Petreius) के आर्स मेगना (Nuremberg) में नुरेमबर्ग (Gerolamo Cardano) में *जोहानिस पेट्रियस* के द्वारा किया गया, जिसमें कोर्दानो के विद्यार्थी लोडोविको फेरारी (quartic equation) के द्वारा किया गया द्विघात समीकरण (Lodovico Ferrari) का सामान्य हल भी शामिल था।

इस बिंदु से गणितीय विकास में तेजी आई, जिससे भौतिक विज्ञान (physical sciences) की समकालीन उन्नति को योगदान मिला और लाभ मिला। इस प्रगति में मुद्रण (printing) में हुई उन्नति से बहिन अधिक योगदान मिला। सबसे प्राचीन गणित की प्रकाशित पुस्तकें (mathematical books) थीं, प्युरबाच (Peurbach) की *थ्योरिका नोवा प्लेने टेरेम* (Theoricae nova planetarum) (१४७२), जिसके बाद वाणिज्यिक अंकगणित पर पुस्तक आई ट्रेविसो अंकगणित (Treviso Arithmetic) (१४७८) और उसके बाद गणित पर पहली वर्तमान पुस्तक युक्लिड के तत्व १४८२ में रेटडोल्ट (Ratdolt) के द्वारा मुद्रित और प्रकाशित की गयी।

नेविगेशन की मांगों और बड़े क्षेत्रफलों की सही नक्शों की बढ़ती हुई आवश्यकताओं के लिए, त्रिकोणमिति गणित की मुख्य शाखा बन गयी। बर्थोलोमियस पिटिसकस (Bartholomaeus Pitiscus) पहले व्यक्ति थे जिन्होंने इस शब्द का उपयोग किया और १५९५ में अपनी *ट्रिगोनोमेट्रिया* प्रकाशित की। ज्या और कोज्या की रेजियोमोंटानस की सारणी १५३३ में प्रकाशित हुई।  
[42]

सदी के अंत तक, रेजियोमोंटानस (Regiomontanus) (१४३६-७६) और फ्रंकोइस वीटा (François Vieta) (१५४०-१६०३), के लिए धन्यवाद हेतु पुस्तकें लिखी गयीं, हिन्दू अरबी अंकों का उपयोग करते हुए गणित की पुस्तकें लिखी गयीं, ये ऐसे रूप में थीं जो आज काम में लिए जाने वाले संकेतनों से बहुत अलग नहीं था।

## १७ वीं सदी

१७ वीं शताब्दी में, पूरे यूरोप में गणितीय और वैज्ञानिक विचारों का एक अभूतपूर्व विस्फोट हुआ। एक इतालवी गैलीलियो, ने बृहस्पति के चन्द्रमाओं को उनके कक्ष में प्रेक्षित किया, इसके लिए उन्होंने होलेन्ड से मंगाये गए खिलौने पर आधारित दूरबीन का उपयोग किया। एक डेन टीचो ब्राहे, ने गणित के आंकड़ों की काफी जानकारी एकत्रित की, जो आकाश में ग्रहों की स्थिति का वर्णन करते हैं। उनके एक जर्मन विद्यार्थी, जोहानीस केपलर ने इन आंकड़ों के साथ काम करना शुरू कर दिया। एक अंश में क्योंकि वे गणनाओं में केपलर की सहायता करना चाहते थे, जॉन नेपियर (John Napier) ने स्कॉटलैण्ड में, सबसे पहले प्राकृतिक लघुगणक (natural logarithm) की खोज की। केपलर ने ग्रहों की गति के गणितीय नियमों को बनाने में सफलता हासिल की। विश्लेषणात्मक ज्यामिति (analytic geometry) जो एक फ्रांसीसी गणितज्ञ और दार्शनिक रेन देस्कार्टेस (René Descartes) (१५९६-१६५०) के द्वारा विकसित की गयी, ने उन कक्षों को कार्तीय निर्देशांक में एक लेखाचित्र पर निर्देशित किया।

पूर्व के कई वैज्ञानिकों के द्वारा किये गए कार्यों के आधार पर एक अंग्रेज आइजैक न्यूटन ने केपलर के नियमों (Kepler's Laws) को स्पष्ट करने के लिए भौतिकी के नियम दिए और वह अवधारणा लाये जिसे आज कलन के नाम से जाना जाता है। स्वतंत्र रूप से, गोर्टफ्रीड विलहेल्म लीबनिज ने जर्मनी में, कलन का विकास किया और इसमें से आज भी अधिकांश कलन संकेतनों का उपयोग किया जाता है। विज्ञान और गणित एक अंतरराष्ट्रीय प्रयास बन गए हैं, जो जल्दी ही पूरी दुनिया में फैल जायेंगे।  
[43]

आकाश के अध्ययन के लिए गणित के अनुप्रयोगों के अलावा, पियरे डी फर्मेट (Pierre de Fermat) और ब्लेज पास्कल के पत्राचार के साथ अनुप्रयोग गणित नए क्षेत्रों में विस्तृत होने लगी, पास्कल और फर्मेट ने संभाव्यता सिद्धांत (probability theory) और जुए (combinatorics) के एक खेल पर अपनी चर्चा में, संचयिका (gambling) से सम्बंधित नियमों की खोज के लिए मूल कार्य किया। पास्कल ने अपने दांव (wager) के साथ, नए विकसित हो रहे संभाव्यता सिद्धांत को प्रयुक्त करने का प्रयास किया और धर्म के लिए समर्पित जीवन का तर्क दिया, इसका आधार यह था कि चाहे सफलता की संभावना काम हो, उसके परिणाम असीमित होते हैं। कुछ अर्थों में, १८ वीं और १९ वीं शताब्दी में, उपयोगिता सिद्धांत (utility theory) के विकास को इसने पूर्वाभास दिया।

## १८ वीं सदी

१७०० का सबसे प्रभावी गणितज्ञ था, लियोनहार्ड यूलर। उनके योगदान की श्रृंखला है ग्राफ सिद्धांत (graph theory) के अध्ययन से लेकर [[सेवन ब्रिजेस ऑफ़ K%६%६ निग्सबर्ग]] (Seven Bridges of Königsberg) तक, समस्याएं जो कई आधुनिक गणितीय नियम और संकेतनों का मानकीकरण करती हैं। उदाहरण के लिए, उन्होंने ऋणात्मक १ के वर्ग मूल को प्रतीक  $i$  के द्वारा बताया और उन्होंने एक व्रत की परिधि और व्यास के अनुपात को बताने के लिए ग्रीक शब्द  $\pi$  के उपयोग को लोकप्रिय बनाया। उन्होंने टोपोलोजी, लेखाचित्र सिद्धांत, कलन, संचयिका और जटिल विश्लेषण के अध्ययन में असंख्य योगदान दिए, जैसा कि असंख्य प्रमेय और संकेतनों का श्रेय उन्हें जाता है।





लिओनहार्ड यूलरइमेन्युल हेंडमेन (Emanuel Handmann) के द्वारा

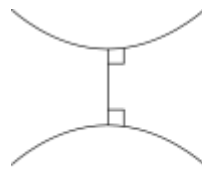
१८ वीं शताब्दी के अन्य महत्वपूर्ण यूरोपीय गणितज्ञों में शामिल हैं जोसफ लुइस लेग्रेंज (Joseph Louis Lagrange), जिन्होंने अंक सिद्धांत, बीज गणित, अवकल कलन और चरों के कलन, पर अग्रणी कार्य किया है और लाप्लेस (Laplace) जिन्होंने, नेपोलियन के युग में खगोल यांत्रिकी (celestial mechanics) की नींव पर और सांख्यिकी पर कार्य किया।

## १९ वीं सदी

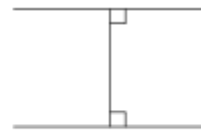
१९ वीं सदी के दौरान, गणित तेजी से बढ़ता हुआ सार बन गयी। १९ वीं सदी में कार्ल फ्रेडरिक गॉस (Carl Friedrich Gauss) (१७७७ - १८५५) रहते थे। विज्ञान में अपना योगदान देने के अलावा, उन्होंने, शुद्ध गणित में भी ज्यामिति में जटिल चरों (complex variable) के फलनपर और श्रृंखला के अभिकेंद्रण पर क्रांतिकारी कार्य किया। उन्होंने बीज गणित की मूल प्रमेय (fundamental theorem of algebra) के तथा द्विघाती पारस्परिकता नियम (quadratic reciprocity law) के पहले संतोषजनक प्रमाण दिए।

इस सदी में गैर युक्लिड ज्यामिति (non-Euclidean geometry) के दो रूपों का विकास हुआ, जहां युक्लिड ज्यामिति (parallel postulate) की समानान्तर

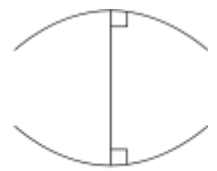
अभिधारणा (Euclidean geometry) अब नहीं रही। रूसी गणितज्ञ निकोलाइ इवानोविच लोबाचेवस्की (Nikolai Ivanovich Lobachevsky) और उसके प्रतिद्वंद्वी, हंगरी गणितज्ञ जनोस बोलयार्ड (Janos Bolyai) ने स्वतंत्र रूप से हाइपरबोलिक ज्यामिति (hyperbolic geometry) को परिभाषित किया और उसका अध्ययन किया, अब सामानांतर की अद्वितीयता नहीं रही। इस ज्यामिति में एक त्रिभुज में कोणों का योग जुड़ कर  $180^\circ$  डिग्री से कम रहता है। दीर्घवृत्तीय ज्यामिति (Elliptic geometry) का विकास बाद में १९ वीं सदी में जर्मन गणितज्ञ बर्नहार्ड रिमैन (Bernhard Riemann) के द्वारा किया गया; यहाँ कोई भी समानान्तर नहीं मिलते हैं और एक त्रिभुज में कोण जुड़ कर  $180^\circ$  डिग्री से अधिक बनाते हैं। रिमैन ने रिमैन ज्यामिति (Riemannian geometry) का भी विकास किया, जो बड़े पैमाने पर तीन प्रकार की ज्यामिति को एकीकृत और सामान्यीकृत करता है और उन्होंने मैनिफोल्ड (manifold) अवधारणा को भी परिभाषित किया, जो वक्र (curve) और सतह (surface) के विचार को सामान्य रूप से प्रस्तुत करती है।



Hyperbolic



Euclidean



Elliptic

ज्यामिति के तीनों प्रकारों में से प्रत्येक में एक सामान्य लंब से युक्त रेखाओं का व्यवहार.

१९ वीं शताब्दी में सार बीजगणित (abstract algebra) की शुरुआत हुई। विलियम रोवाण हैमिल्टन (William Rowan Hamilton) ने आयरलैण्ड में गैर क्रम-विनिमय बीजगणित (noncommutative algebra) को विकसित किया। ब्रिटिश गणितज्ञ जॉर्ज बूले ने एक ऐसी बीजगणित तैयार की जो जल्दी ही ऐसे रूप में सामने आई जिसे आज बूलीय बीजगणित के रूप में जाना जाता है, जिसमें ० और १ केवल संख्याएं थीं और जिनमें प्रसिद्ध रूप से  $1 + 1 = 1$ । बूलीय बीजगणित गणितीय तर्क (mathematical logic) का प्रारंभिक बिंदु है और इसके कंप्यूटर विज्ञान (computer science) में महत्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं।

अगस्टिन लुईस कॉची (Augustin-Louis Cauchy), बर्नहार्ड रिमैन (Bernhard Riemann) और कार्ल विस्ट्रास (Karl Weierstrass) ने कलन को अधिक कठोर तरीके से फिर से तैयार किया।

साथ ही पहली बार, गणित की सीमाएं स्पष्ट की गयीं। एक नार्वेजीयन नील्स हेनरिक अबेल (Niels Henrik Abel) और एक फ्रांसीसी इवारिस्ते गैल्वा (Évariste Galois) ने साबित किया कि चार से अधिक डिग्री की बहुपदीय समीकरणों को हल करने के लिए कोई सामान्य बीजगणितीय विधि नहीं है। १९ वीं शताब्दी के अन्य गणितज्ञों ने इसे अपने प्रमाणों में प्रयुक्त किया कि केवल सीधा किनारा और कम्पास एक स्वैच्छिक कोण को त्रिभाजित करने (trisect an arbitrary angle) के लिए पर्याप्त नहीं

है, न ही इससे एक दिए गए घन के आयतन के दो गुने घन की भुजा को बनाया जा सकता है, न ही यह एक दिए गए व्रत के सामान क्षेत्रफल के वर्ग के निर्माण के लिए पर्याप्त है। प्राचीन यूनानियों के समय से इन सभी समस्याओं को हल करने के लिए गणित ने व्यर्थ प्रयास किये हैं।

अबेल और गलोईस ने भिन्न बहु पदीय समीकरणों के हल में जो खोजे कीं, उन्होंने समूह सिद्धांत (group theory) और सार बीजगणित (abstract algebra) के सम्बंधित क्षेत्रों के आगे विकास के लिए आधार उपलब्ध कराया। २० वीं शताब्दी में, भौतिकीविदों और अन्य वैज्ञानिकों ने समूह सिद्धांत को सममिति (symmetry) के अध्ययन के लिए एक आदर्श तरीके के रूप में देखा।

बाद में १९ वीं शताब्दी में, जॉर्ज कैंटर (Georg Cantor) ने समुच्चय सिद्धांत की पहली नींव रखी, जिसने अनंत के संकेतन के कठोर उपचार के सक्षम बनाया और यह लगभग सभी गणित की एक सामान्य भाषा बन गयी है। कैंटर का समुच्चय सिद्धांत और पियानो (mathematical logic), एल ई जे ब्रोवर (Peano), डेविड हिल्बर्ट (L. E. J. Brouwer), बर्ट्रैंड रसेल और ऐ एन व्हाइटहेड के गणितीय तर्क (A.N. Whitehead) ने गणित की नींव (foundations of mathematics) पर एक लम्बी दौड़ की बहस शुरू की।

१९ वीं शताब्दी में, कई राष्ट्रीय गणितीय सोसाइटियों की स्थापना हुई: १८६५ में लंदन गणितीय सोसायटी (London Mathematical Society), १८७२ में सोसाइटी मेथमेटिके डी फ्रांस (Société Mathématique de France), १८८४ में सर्कलो मेथमेटिको डी पालेर्मो (Circolo Matematico di Palermo), १८८३ में एडिनबर्ग गणितीय सोसायटी (Edinburgh Mathematical Society) और १८८८ में अमेरिकी गणित सोसाइटी (American Mathematical Society)।

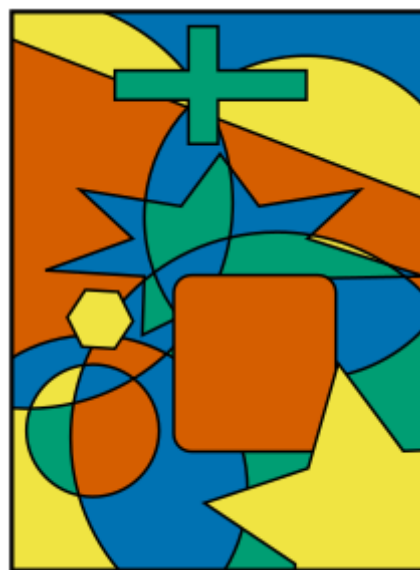
## २० वीं सदी

२० वीं शताब्दी में गणित एक मुख्य पेशा बन गया। हर साल हजारों लोगों को गणित में नयी पी एच डी की उपाधि से सम्मानित किया जाता है और अध्यापन और उद्योग दोनों में नौकरियां उपलब्ध हैं। प्रारंभिक शताब्दियों में, किसी भी एक समय पर दुनिया में कुछ ही रचनात्मक गणितज्ञ होते थे। अधिकांश भाग के लिए, गणितज्ञ या तो संपत्ति के साथ पैदा हुए जैसे नेपियर (Napier), या उन्हें किसी अमीर संरक्षक का समर्थन मिला जैसे गाऊस (Gauss)। कुछ ही लोग ऐसे थे जिन्होंने अपनी आजीविका को विश्वविद्यालयों में शिक्षण के द्वारा चलाया जैसे फूरियर, नील्स हेनरिक अबेल (Niels Henrik Abel) कोई स्थिति प्राप्त नहीं कर पाए और २६ साल की उम्र में गरीबी और कुपोषण तथा क्षय रोग के कारण मर गए।

१९०० में गणितज्ञों की अंतर्राष्ट्रीय कांग्रेस (International Congress of Mathematicians) के लिए एक भाषण में, डेविड हिल्बर्ट ने गणित में २३ नसुलझी समस्याओं (23 unsolved problems in mathematics) की एक सूची दी। ये समस्याएँ गणित के कई क्षेत्रों में फैली थीं, इन्होंने २० वीं शताब्दी के अधिकांश गणितज्ञों का ध्यान आकर्षित किया। आज, १० सुलझ गयी हैं, ७ आंशिक रूप से सुलझ गयी हैं और २ अभी भी खुली हैं। बची हुई ४ ऐसी हैं कि जिनके बारे में यह नहीं कहा जा सकता की वे सुलझ पाएंगी या नहीं।

प्रसिद्ध ऐतिहासिक अनुमानों को अंततः साबित किया गया। १९७६ में, वोल्फगैंग हाकेन (Wolfgang Haken) और केनेथ अप्पेल (Kenneth Appel) ने चार रंग की प्रमेय (four color theorem) को प्रमाणित करने के लिए एक कंप्यूटर का उपयोग किया। एंड्रू विल्स (Andrew Wiles) ने दूसरों के कार्य पर काम करते हुए, १९९५ में फर्मेट की अन्तिम प्रमेय (Fermat's Last Theorem) को प्रमाणित किया। पॉल कोहेन (Paul Cohen) और कुर्ट गोडेल (Kurt Gödel) ने साबित किया कि सतत परिकल्पना (continuum hypothesis) समुच्चय सिद्धांत के मानक स्वतः सिद्ध प्रमाणों (independent) से स्वतंत्र (standard axioms of set theory) है (जिसे इससे प्रमाणित या अप्रमाणित नहीं किया जा सकता है)।

अप्रत्याशित आकार और गुंजाइश के गणितीय सहयोग ने स्थान ले लिया। एक प्रसिद्ध उदाहरण है परिमित सरल समूहों का वर्गीकरण (classification of finite simple groups) (जो "भरी प्रमेय" भी कहलाती है), १९५५ और १९८३ के बीच जिसके प्रमाण को १०० लेखकों के ५०० विषम जर्नल लेखों की जरूरत थी और दसियों हजारों पृष्ठ भरे गए। फ्रांसीसी गणितज्ञों का



एक नक्शा जो चार रंग की प्रमेय (Four Color Theorem) को बताता है।



एक समूह जिसमें जीन डीयूडोने (Jean Dieudonné) और आंद्रे वेल (André Weil) शामिल थे, सुडोनीम (pseudonym) के अंतर्गत प्रकाशित करते हुए, "निकोलस बोरबाकी" ने सभी ज्ञात गणितज्ञों को एक संसक्त कड़ी के रूप में जोड़ने का प्रयास किया। जिसके परिणाम स्वरूप कई दर्जन संस्करणों ने गणित की शिक्षा पर विवादास्पद प्रभाव डाला। [44]

गणित के पूर्ण नए क्षेत्र जैसे गणितीय तर्क (mathematical logic), टोपोलॉजी (topology), जटिलता सिद्धांत (complexity theory) और खेल सिद्धांत (game theory) ने उन प्रश्नों के प्रकार को बदल डाला जिनके उत्तर गणितीय विधियों के द्वारा दिए जा सकते थे।

उसी समय पर, गणित की सीमाओं के बारे में गहरे दृष्टिकोण स्थापित हुए। १९२९ और १९३० में, प्राकृत संख्याओं (natural number) के बारे में बने सभी कथन सही या गलत प्रमाणित हो गए, साथ ही कोई योग या गुणन निर्धारित किये जाने योग्य (decidable) था अर्थात् एल्गोरिथम के द्वारा इसका निर्धारण किया जा सकता था। १९३१ में कूर्त गोडेल (Kurt Gödel) ने पाया कि यह प्राकृत संख्याओं प्लस योग और गुणन दोनों का मामला नहीं था; यह तंत्र पियानो अंकगणितीय (Peano arithmetic) के रूप में जाना जाता था और वास्तव में पूर्ण होने के योग्य नहीं था। (incompletable)(पियानो अंकगणित संख्या सिद्धांत (number theory) के लिए उपयुक्त है, जिसमें अभाज्य संख्या (prime number) का संकेतन शामिल है।) गोडेल की दो अपूर्णता प्रमेय (incompleteness theorem) का एक परिणाम यह है कि कोई भी गणितीय तंत्र जिसमें पियानो की अंकगणित शामिल है (सभी विश्लेषण (analysis) और ज्यामिति सहित), सच्चाई आवश्यक रूप से प्रमाण देती है; ऐसे सच्चे कथन हैं जिन्हें तंत्र के साथ साबित नहीं किया जा सकता है। (cannot be proved) इसलिए गणित को गणितीय तर्क के लिए घटाया नहीं जा सकता है और गणित को पूर्ण और स्थायी बनाने का डेविड हिल्बर्ट का सपना समाप्त हो गया।

२० वीं शताब्दी की गणित में एक अधिक रंगीन चित्र था श्रीनिवास आयरंगर रामानुजन (१८८७-१९२०) जिसने खुद ही बहुत अधिक शिक्षित होने के बावजूद, ३००० से ज्यादा प्रमेयों को साबित किया, जिसमें उच्च सम्मिश्र संख्याओं (highly composite number) के गुण, विभाजन फलन (partition function) और इसके अलाक्षणिक (asymptotics) और मोक थीटा फलन (mock theta functions) शामिल हैं। उन्होंने गामा फलन (gamma function), अनुखंडीय रूप (modular form), पृथक्कारी श्रृंखला (divergent series), हाइपर ज्यामिति श्रृंखला (hypergeometric series) और अभाज्य संख्या सिद्धांत (prime number theory) के क्षेत्रों में मुख्य खोजें कीं।

## इन्हें भी देखें

- गणित का कालक्रम (गणित की समयरेखा)
- भारतीय गणित
- गणित में मुख्य प्रकाशनों की सूची. (List of important publications in mathematics)
- बीजगणित का इतिहास (History of algebra)
- कलन का इतिहास (History of calculus)
- संचायिका का इतिहास (History of combinatorics)
- ज्यामिति का इतिहास (History of geometry)
- तर्क का इतिहास (History of logic)
- गणितीय संकेतन का इतिहास (History of mathematical notation)
- सांख्यिकी का इतिहास (History of statistics)
- त्रिकोणमिति का इतिहास (History of trigonometry)
- लेखन अंकों का इतिहास (History of writing numbers)

## सन्दर्भ

1. सर थॉमस एल हेथ, *ग्रीक गणित की एक मैनुअल*, डोवर, १९६३, पी.१: "गणित के मामले में, ग्रीक योगदान के बारे में जानना सबसे अधिक आवश्यक है, क्योंकि ग्रीक लोगों ने सबसे पहले गणित को एक विज्ञान बनाया।

2. Henahan, Sean (2002). "Art Prehistory" (<http://www.accessexcellence.org/WN/SU/caveart.html>). *Science Updates*. The National Health Museum. मूल से 3 फ़रवरी 2006 को पुरालेखित (<https://web.archive.org/web/20060>

- 203153442/http://www.accessexcellence.org/WN/SU/caveart.html). अभिगमन तिथि 2006-05-06.
3. "एक पुरानी गणितीय वस्तु" (<http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html>). मूल से 24 जुलाई 2017 को पुरालेखित (<https://web.archive.org/web/20170724164944/http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html>). अभिगमन तिथि 26 जून 2009.
  4. "उपनिवेशन से पहले (केन्द्रीय) अफ्रीका में गणित" ([http://web.archive.org/web/20120207040200/http://etopia.sintlucas.be/3.14/Ishango\\_meeting/Mathematics\\_Africa.pdf](http://web.archive.org/web/20120207040200/http://etopia.sintlucas.be/3.14/Ishango_meeting/Mathematics_Africa.pdf)) (PDF). मूल ([http://etopia.sintlucas.be/3.14/Ishango\\_meeting/Mathematics\\_Africa.pdf](http://etopia.sintlucas.be/3.14/Ishango_meeting/Mathematics_Africa.pdf)) (PDF) से 7 फ़रवरी 2012 को पुरालेखित. अभिगमन तिथि 26 जून 2009.
  5. Kellermeier, John (2003). "How Menstruation Created Mathematics" (<http://www.tacomacc.edu/home/jkellerm/Papers/Menses/Menses.htm>). *Ethnomathematics*. Tacoma Community College. मूल से 23 दिसंबर 2005 को पुरालेखित (<https://web.archive.org/web/20051223112514/http://www.tacomacc.edu/home/jkellerm/Papers/Menses/Menses.htm>). अभिगमन तिथि 2006-05-06.
  6. Williams, Scott W. (2005). "The Oledet Mathematical Object is in Swaziland" (<http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/lebombo.html>). *MATHEMATICIANS OF THE AFRICAN DIASPORA*. SUNY Buffalo mathematics department. मूल से 25 मार्च 2015 को पुरालेखित (<https://web.archive.org/web/20150325185021/http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/lebombo.html>). अभिगमन तिथि 2006-05-06.
  7. Williams, Scott W. (2005). "An Old Mathematical Object" (<http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html>). *MATHEMATICIANS OF THE AFRICAN DIASPORA*. SUNY Buffalo mathematics department. मूल से 24 जुलाई 2017 को पुरालेखित (<https://web.archive.org/web/20170724164944/http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html>). अभिगमन तिथि 2006-05-06.
  8. थोम, एलेगजेंडर और आर्ची थोम, १९८८, "मेगालिथिक काल के आदमी की ज्यामिति और मापन विज्ञान", पी पी १३२-१५१ सी एल एन रगल्स में, संस्करण, पत्थरों में रिकोर्ड: एलेगजेंडर थोम की याद में पेपर कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय प्रेस.आई एस बी एन ० -५२१ -३३३८१ -४ .
  9. Pearce, Ian G. (2002). "Early Indian culture - Indus civilisation" (<https://web.archive.org/web/20081228060907/http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Miscellaneous/Pearce/Lectures/Ch3.html>). *Indian Mathematics: Redressing the balance*. School of Mathematical and Computational Sciences University of St Andrews. मूल (<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Miscellaneous/Pearce/Lectures/Ch3.html>) से 28 दिसंबर 2008 को पुरालेखित. अभिगमन तिथि 2006-05-06.
  10. डंकन जे मेलविल्ले (२००३). तीसरी सहस्राब्दी का कालक्रम (<http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/3Mill/chronology.html>) Archived (<http://web.archive.org/web/20180707213616/http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/3Mill/chronology.html>) 2018-07-07 at the Wayback Machine, तीसरी सहस्राब्दी का गणित.सेंट लॉरेंस विश्वविद्यालय (St. Lawrence University).
  11. Aaboe, Asger (1998). *Episodes from the Early History of Mathematics*. New York: Random House. पृष्ठ 30–31.
  12. इजिप्ट के ईकाई भिन्न (<http://www.mathpages.com/home/kmath340/kmath340.htm>) Archived (<https://web.archive.org/web/20100206111136/http://mathpages.com/home/kmath340/kmath340.htm>) 2010-02-06 at the Wayback Machine मेथ पेज पर
  13. होवार्ड इव्स, *गणित के इतिहास का एक परिचय*, सौन्दर्स, १९००, आई एस बी एन ००३०२९५५८०
  14. मार्टिन बर्नल, "एनीमाडवर्जन ओन दी ओरिजिंस ऑफ़ वेस्टर्न साइंस," पी पी ७२-८३ माइकल एच शेंक में, संस्करण, *पुरातनता और मध्य युग में वैज्ञानिक प्रयास*, (शिकागो:शिकागो प्रेस विश्वविद्यालय) २०००, पी.७५.
  15. एविज. होवार्ड, *गणित के इतिहास का एक परिचय*, सौन्दर्स, १९००, आई एस बी एन ०-०३-०२९५५८-०.
  16. होवार्ड एविज, *गणित के इतिहास का एक परिचय* सौन्दर्स, १९९०, आई एस बी एन ००३०२९५५८० पी.१४१:"बाइबिल के अलावा कोई भी कार्य व्यापक रूप से प्रयुक्त नहीं किया गया है।"
  17. O'Connor, J.J. and Robertson, E.F. (February 1996). "A history of calculus" ([http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The\\_rise\\_of\\_calculus.html](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html)). University of St Andrews. मूल से 15 जुलाई

- 2007 को पुरालेखित ([https://web.archive.org/web/20070715191704/http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The\\_rise\\_of\\_calculus.html](https://web.archive.org/web/20070715191704/http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html)). अभिगमन तिथि 2007-08-07.
18. बीजगणित का इतिहास (<http://www.ucs.louisiana.edu/~sxw8045/history.htm>) Archived (<http://web.archive.org/web/20141009100628/http://www.ucs.louisiana.edu/~sxw8045/history.htm>) 2014-10-09 at the Wayback Machine. लुइसियाना राज्य विश्वविद्यालय (Louisiana State University).
  19. (Boyer 1991, "The Arabic Hegemony" p. 230) "ऊपर दिए गए समीकरणों के छह मामले धनात्मक मूल से युक्त रैखिक और द्विघात समीकरणों के लिए सभी संभावनाओं को खत्म करते हैं। अतः अल ख्वारिज्मी की प्रदर्शनी इतनी व्यवस्थित और सम्पूर्ण थी उनके पाठकों को हल सीखने में बहुत कम मुश्किल का सामना करना पड़ता है।
  20. गांज और सालोमन (१९३६), *अल-ख्वारिज्मी की बीज गणित के स्रोत*, ओसिरिस आई, पी पी. २६-७७: "एक अर्थ में, ख्वारिज्मी को मुख्यतः "बीज गणित का जनक" कहा जाता है, डायोफेन्टस को यह उपाधि नहीं दी जाती है क्योंकि ख्वारिज्मी पहले ऐसे व्यक्ति थे जिन्होंने सबसे पहले एक मूल रूप में बीजगणित सिखाई, जबकि डायोफेन्टस संख्याओं के सिद्धांत से सम्बंधित हैं।"
  21. (Boyer 1991, "The Arabic Hegemony" p. 229) "यह सुनिश्चित नहीं है कि *अल-जब्र* और *मुकाबालाह* शब्दों का क्या अर्थ है, लेकिन सामान्य व्याख्या ऊपर दिए गए अनुवाद में निहित व्याख्या से समानता रखती है। शब्द *अल-जब्र* का संभावी अर्थ "पुनः संचय" और "पूर्णता" से है और यह समीकरण के दूसरी ओर से घटाए गए पदों के स्थानान्तरण का उल्लेख करता हुआ प्रतीत होता है; शब्द *मुकाबालाह* "काटने" या "संतुलन" के लिए प्रयुक्त होता है-अर्थात्, समीकरण के विपरीत पक्ष में समान पदों को काटना।
  22. Rashed, R.; Armstrong, Angela (1994), *The Development of Arabic Mathematics*, स्प्रिंगर, पृ० 11-12, OCLC 29181926 (<https://www.worldcat.org/oclc/29181926>), आई०एस०बी०एन० 0792325656
  23. विक्टर जे कटज़ (१९९८). *गणित का इतिहास: एक परिचय*, पीपी. २५५ -५९. एडिसन-वेस्ले (Addison-Wesley) आईएसबीएन ०३२१०१६१८१.
  24. एफ वोपके (१८५३). *एक्स्ट्रेट ड्यू फाखरी, ट्रेट डी एल्जेब्रे पार अबू बेकर मोहम्मद बेन एल्हकन एल्काखी पेरिस*.
  25. विक्टर जे काटज़ (१९९५), "इस्लाम और भारत में कलन के विचार", *गणित पत्रिका* ६८ (३): १६३ -७४ .
  26. Victor J. Katz, Bill Barton (October 2007), "Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching", *Educational Studies in Mathematics*, स्प्रिंगर Netherlands, 66 (2): 185-201 [192], डीओआई:10.1007/s10649-006-9023-7 (<http://s://doi.org/10.1007/s10649-006-9023-7>)
  27. जे एल बगरिन "शराफ-अल-दिन अल-तुसी के मुआदलत में नवीनीकरण और परम्परायें", *अमेरिकन ओरिएंटल सोसायटी की जर्नल* ११० (२), पी पी .३०४-०९.
  28. ओ'कॉनर, जॉन; रॉबर्टसन, एडमण्ड, "Sharaf al-Din al-Muzaffar al-Tusi" ([http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Tusi\\_Sharaf.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Tusi_Sharaf.html)), *मैक्ल्यूटर हिस्ट्री ऑफ मैथेमैटिक्स*, युनिवर्सिटी ऑफ सैट एण्ड्रूज़.
  29. Syed, M. H. (2005). *Islam and Science*. Anmol Publications PVT. LTD. पृ० 71. आई०एस०बी०एन० 8-1261-1345-6.
  30. ओ'कॉनर, जॉन; रॉबर्टसन, एडमण्ड, "Abu'l Hasan ibn Ali al Qalasadi" (<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Qalasadi.html>), *मैक्ल्यूटर हिस्ट्री ऑफ मैथेमैटिक्स*, युनिवर्सिटी ऑफ सैट एण्ड्रूज़.
  31. केल्वेल, जोन (१९८१) "दी इंस्टीट्यूशने एरिथमेटिका और दी इंस्टीट्यूशने म्यूजिका", पी पी. १३५-५४ मागरिट गिब्सन में, संस्करण., *बोएथियास: उनका जीवन, विचार और प्रभाव*, (ऑक्सफोर्ड: बेसिल ब्लैकवेल).
  32. फोल्करटो, मेनसो, "बोएथियास "ज्योमेट्री II, (वीस्बदेन: फ्रेज स्टेनर वर्लेग, १९७०).
  33. मारी-थेरेसे दी अल्वार्नी, "अनुवाद और अनुवादक", पी पी .४२१-६२ रॉबर्ट एल बेन्सन और गिल्स कोन्स्टेबल में, *बारहवीं सदी में पुनर् जागरण और नवीनीकरण*, (कैम्ब्रिज: हार्वर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस, १९८२).
  34. गे बेयुजोउन, "क्वाड्रीवियम का रूपांतरण "पी पी .४६३-८७ रॉबर्ट एल बेन्सन और गिल्स कोन्स्टेबल में, *बारहवीं सदी में पुनर् जागरण और नवीनीकरण*, (कैम्ब्रिज: हार्वर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस, १९८२).
  35. ग्रांट, एडवर्ड और जॉन ई. मर्डोक (१९८७), संस्करण, *गणित और मध्य युग में प्राकृतिक दर्शन व विज्ञान में इसके अनुप्रयोग*, कैम्ब्रिज: कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस) आईएसबीएन ० -५२१ -३२२६० -एक्स.
  36. क्लेगेट, मार्शल (१९६१) *मध्य युग में यांत्रिकी का विज्ञान*, (मैडिसन: विस्कॉसिन प्रेस का विश्व विद्यालय), पी पी. ४२१-४०

37. मडॉक, जॉन ई. (१९६९) "मेथेसिस इन फिलोसोफियम स्कोलेस्तिकम इंट्रोडकटा : चौदहवीं शताब्दी के दर्शन और धर्मशास्त्र में गणित के अनुप्रयोग का उत्थान और विकास." *आर्ट्स लिबेराक्स इत फिलोसोफी अउ मोयन एज* (मॉन्टेरिअल : इंस्टीटयुट: दी एटयूड्स मेडीएवल्स) पीपी पर. २२४ - २७.
38. क्लेगेट, मार्शल (१९६१) *मध्य युग में यांत्रिकी का विज्ञान*, (मैडिसन: विस्कॉसिन प्रेस का विश्व विद्यालय), पी पी. २१०, २१४ - १५, २३६.
39. क्लेगेट, मार्शल (१९६१) *मध्य युग में यांत्रिकी का विज्ञान*, (मैडिसन: विस्कॉसिन प्रेस का विश्व विद्यालय), पी. २८४.
40. क्लेगेट, मार्शल (१९६१) *मध्य युग में यांत्रिकी का विज्ञान*, (मैडिसन: विस्कॉसिन प्रेस का विश्व विद्यालय), पी.पी. ३३२ - ४५, ३८२ - ९१ .
41. निकोल ओरेस्म, "युक्तीद की ज्यामिति पर प्रश्न" प्रश्न १४, पी पी ५६०-६५, मार्शल क्लेगेट में, संस्करण, *निकोल ओरेस्म और गुण और गति की मध्यकालीन ज्यामिति*, (मैडिसन: विस्कॉसिन प्रेस का विश्व विद्यालय, १९६८)
42. Grattan-Guinness, Ivor (1997). *The Rainbow of Mathematics: A History of the Mathematical Sciences*. W.W. Norton. आई॰ऍस॰बी॰ऍन॰ 0-393-32030-8.
43. एवीज, हावर्ड, गणित के इतिहास का एक परिचय, सौन्दर्स, १९९०, आई एस बी एन ० -०३ -०२९५५८ -०, पी.३७९, ".....कलन की अवधारणा.....(हैं) इसने आधुनिक दुनिया पर बहुत अधिक प्रभाव डाला है, यह कहना शायद सही होगा कि उनके ज्ञान के बिना आज का एक व्यक्ति अच्छी तरह से शिक्षित होने का दावा निश्चित रूप से नहीं कर सकता है।
44. मौरिस मशाल, २००६. *बोरबाकी: गणितज्ञों की एक गुप्त सोसाइटी* अमेरिकी गणित सोसाइटी (American Mathematical Society) आई एस बी एन ०८२१८३९६७५, आई एस बी एन १३ ९७८ -०८२१८३९६७६ .

## आगे पठन

- Aaboe, Asger (1964). *Episodes from the Early History of Mathematics*. New York: Random House.
- बोयर, सी बी, *ए हिस्ट्री ऑफ मेथमेटिक्स* दूसरा संस्करण, उता सी मर्ज बेच के द्वारा संशोधित. न्यूयार्क: विले, १९८९ आई एस बी एन ० -४७१ -०९७६३ -२ (१९९१ पी बी के संस्करण आई एस बी एन ० -४७१ -५४३९७ -७)।
- एवीज, हावर्ड, *गणित के इतिहास का एक परिचय* सौन्दर्स, १९९० आई एस बी एन ० -०३ -०२९५५८ -०,
- हाफमेन, पॉल (Hoffman, Paul), *दी मेन हू लव्ड ओनली नंबर्स: पॉल अर्डोस (Paul Erdős) की कहानी और गणितीय सच्चाई के लिए खोज*. न्यूयार्क: हाई परियो, १९९८ आई एस बी एन ० -७८६८ -६३६२ -५
- Grattan-Guinness, Ivor (2003). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. The Johns Hopkins University Press. आई॰ऍस॰बी॰ऍन॰ 0801873975.
- वंडर वार्डन, बी एल, *प्राचीन सभ्यताओं में ज्यामिति और बीजगणित* स्पिंगर, १९८३, आई एस बी एन ०३८७१२१५९५.
- ओ'कोनार, जोन जे और राबर्टसन, एडमंड एफ. *गणित संग्रह का मेक ट्यूटर इतिहास* (<https://web.archive.org/web/20070927231020/http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/>). (गणित संग्रह का मेक ट्यूटर इतिहास (MacTutor History of Mathematics archive) भी dekhien .) इस वेबसाइट में शामिल हैं आत्मकथाएँ, समय रेखा और गणितीय अवधारणाओं के बारे में ऐतिहासिक लेख; गणित और सांख्यिकी के स्कूल में, सेंट एंड्रयूज विश्वविद्यालय (University of St. Andrews) स्कॉटलैंड. (या देखें इतिहास के विषयों की वर्णमाला क्रम के अनुसार सूची ([https://web.archive.org/web/20110809094906/http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Hist\\_Topics\\_alph.html](https://web.archive.org/web/20110809094906/http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Hist_Topics_alph.html))).
- Stigler, Stephen M. (1990). *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*. Belknap Press. आई॰ऍस॰बी॰ऍन॰ 0-674-40341-X.
- Bell, E.T. (1937). *Men of Mathematics* (<https://archive.org/details/menofmathematics0041bel>). Simon and Schuster.
- Gillings, Richard J. (1972). *Mathematics in the time of the pharaohs* ([https://archive.org/detail/s/mathematicsintim0000gill\\_o9t9](https://archive.org/detail/s/mathematicsintim0000gill_o9t9)). Cambridge, MA: M.I.T. Press.

- Heath, Sir Thomas (1981). *A History of Greek Mathematics* (<https://archive.org/details/historyofgreekma0001heat>). Dover. आई॰एस॰बी॰ऍन॰ 0-486-24073-8.
- Menninger, Karl W. (1969). *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers* (<https://archive.org/details/numberwordsnumbe00menn>). MIT Press. आई॰एस॰बी॰ऍन॰ 0-262-13040-8.
- बर्टन, डेविड एम. *गणित का इतिहास: एक परिचय*. मेकग्रा हिल: १९९७
- काट्ज, विक्टर जे *गणित का इतिहास: एक परिचय*, दूसरा संस्करण. एडिसन-वेस्ले (Addison-Wesley): १९९८.
- कलीने, मॉरिस. *प्राचीन से आधुनिक समय तक गणितीय विचार*.

## बाहरी कड़ियाँ

---

- गणितशास्त्र के विकास की भारतीय परम्परा (<https://web.archive.org/web/20110520224235/http://books.google.co.in/books?id=-ZH6y-qTh-wC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>) (गूगल पुस्तक ; लेखक - सुद्युम्न आचार्य)
- गणित का इतिहास (<https://web.archive.org/web/20110520224225/http://books.google.co.in/books?id=VolV8AtZR1wC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>) (गूगल पुस्तक ; लेखक - डॉ ब्रज मोहन)
- भारत में गणित का इतिहास ([https://web.archive.org/web/20110708043446/http://itihaasam.blogspot.com/2009/01/blog-post\\_8758.html](https://web.archive.org/web/20110708043446/http://itihaasam.blogspot.com/2009/01/blog-post_8758.html))
- History of Ganit (<https://web.archive.org/web/20110413081120/http://veda.wikidot.com/history-of-ganit>)
- Creators of Mathematical and Computational Sciences (<https://web.archive.org/web/20150402133124/https://books.google.co.in/books?id=bENTBQAAQBAJ&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>) (गूगल पुस्तक ; लेखकद्वय : Ravi Agarwal, Syamal Sen)
- CHRONOLOGY OF RECREATIONAL MATHEMATICS (<https://web.archive.org/web/20130628153805/http://utenti.quipo.it/base5/introduz/singchro.htm>)
- गणित संग्रह का मेक ट्यूटर इतिहास (<https://web.archive.org/web/20130921055809/http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>)(जोन जे ओ' कोनोर और एडमंड एफ. राबर्टसन ; सेंट एंड्रयूज विश्वविद्यालय, स्कॉटलैण्ड)। एक अवार्ड जीतने वाली वेबसाइट जिसमें कई ऐतिहासिक और समकालीन गणितज्ञों की विस्तृत जीवनियाँ हैं, साथ ही गणित के इतिहास में कई विषयों पर और वक्रों पर प्रसिद्ध जानकारियाँ हैं।
- गणित का इतिहास होमपेज (<https://web.archive.org/web/20070425185233/http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/>)(डेविड ई. जॉइस; क्लार्क विश्वविद्यालय)। गणित के इतिहास में भिन्न विषयों पर लेख साथ ही एक व्यापक बिबिलोग्रफी।
- गणित का इतिहास (<https://web.archive.org/web/20070428055242/http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/>)(डेविड आर विल्किंस; ट्रिनिटी कॉलेज, डबलिन)। १७ वीं और १९ वीं शताब्दियों के बीच गणित पर सामग्री का संग्रह।
- गणित का इतिहास (<https://web.archive.org/web/20080116223614/http://www.math.sfu.ca/histmath/>) (साइमन फ्रेजर विश्वविद्यालय)।
- गणित के कुछ शब्दों के प्राचीनतम ज्ञात उपयोग (<https://web.archive.org/web/20090304032905/http://jeff560.tripod.com/mathword.html>)(जेफ मिलर)। इसमें गणित में प्रयुक्त पदों के प्राचीनतम ज्ञात उपयोग पर जानकारी शामिल है।
- गणित के प्रतीकों के प्राचीनतम ज्ञात उपयोग (<https://web.archive.org/web/20160220073955/http://jeff560.tripod.com/mathsym.html>)(जेफ मिलर)। गणितीय संकेतों के इतिहास पर जानकारी शामिल है।
- महिला गणितज्ञों की जीवनियाँ (<https://web.archive.org/web/20181216190614/https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/women.htm>) लेरी रिडल; एग्नेस स्कॉट कॉलेज)।

- अफ्रीकी प्रवासी के गणितज्ञ (<https://web.archive.org/web/20051028191554/http://www.math.buffalo.edu/mad/>)(स्कॉट डब्ल्यू विलियम्स; बुफेलो विश्वविद्यालय)।
- गणित पेज का फ्रेड रिकी इतिहास (<https://web.archive.org/web/20120912162648/http://www.dean.usma.edu/math/people/rickey/hm/>)
- गणितज्ञों के पत्राचार और संग्रहित कार्य की एक बिब्लोग्राफी (<https://web.archive.org/web/20070317034718/http://astech.library.cornell.edu/ast/math/find/Collected-Works-of-Mathematicians.cfm>) (स्टीवन डब्ल्यू रोककी ; कार्नेल विश्वविद्यालय पुस्तकालय)।
- माथोरिस्म- गणितीय ऐतिहासिक रुचि के स्थान (<https://web.archive.org/web/20181107125905/http://mathourism.com/>)

## पत्रिकाएँ

- कोन्वर्जेन्स (<https://web.archive.org/web/20060212072618/http://mathdl.maa.org/convergence/1/>)अमेरिका के गणितीय संगठन (Mathematical Association of America) की ऑनलाइन गणित इतिहास पत्रिका.

## निर्देशिकाएँ

- गणित के इतिहास पर वेबसाइट्स के साथ लिंक (<https://web.archive.org/web/20060420160202/http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/resources.html>)(गणित के इतिहास के लिए ब्रिटिश सोसाइटी)
- गणित का इतिहास (<https://web.archive.org/web/20061004065105/http://archives.math.utk.edu/to pics/history.html>) गणित अभिलेखागार (टेनिसी विश्वविद्यालय, नोक्सविले)
- इतिहास / बायोग्राफी (<https://web.archive.org/web/20070507110751/http://mathforum.org/library/topics/history/>) दी मेथ फोरम (ड्रेक्सेल विश्वविद्यालय)
- गणित का इतिहास (<https://web.archive.org/web/20020716102307/http://www.otterbein.edu/resources/library/libpages/subject/mathhis.htm>) (कोर्टराइट मेमोरियल लाइब्रेरी)।
- गणित की वेब साइट का इतिहास (<https://web.archive.org/web/20090525100502/http://homepages.bw.edu/~dcalvis/history.html>) (डेविड काल्विस; बाल्डविन-वोलेस कॉलेज)
- मुक्त निर्देशिका परियोजना पर History of mathematics (<http://www.dmoz.org/Science/Math/History/>)
- हिस्टोरिका डी लास मेटेमेटिकास (<https://web.archive.org/web/20030219004407/http://webpages.ull.es/users/jbarrios/hm/>)(यूनीवरसीदाद ला ला गुना)
- हिस्तोरिया डा मेटेमेटिका (<https://web.archive.org/web/20090715090904/http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexhm.html>)(यूनीवरसीदादे दे कोइम्ब्रा)
- गणित की कक्षा में इतिहास का उपयोग करना (<https://web.archive.org/web/20080620032344/http://www.math.ilstu.edu/marshall/>)
- गणितीय संसाधन: गणित का इतिहास (<https://web.archive.org/web/20081005023027/http://www.abcs.se/~m9847/matre/history.html>) (ब्रुनो केविउस)
- गणित का इतिहास (<https://web.archive.org/web/20080615051823/http://www.dm.unipi.it/~tucci/index.html>) (रोबर्टा टुक्कि)

---

"[https://hi.wikipedia.org/w/index.php?title=गणित\\_का\\_इतिहास&oldid=5598417](https://hi.wikipedia.org/w/index.php?title=गणित_का_इतिहास&oldid=5598417)" से प्राप्त

---

अन्तिम परिवर्तन 00:45, 1 अगस्त 2022।

यह सामग्री क्रियेटिव कॉमन्स एट्रिब्यूशन/शेयर-अलाइक लाइसेंस के तहत उपलब्ध है; अन्य शर्तें लागू हो सकती हैं। विस्तार से जानकारी हेतु देखें उपयोग की शर्तें

