Aide mémoire 2021

Léo Bernard

August 30, 2021

Préface

L'objectif de cet aide mémoire est de regrouper la théorie nécéssaire / utilisée au premier semestre de l'EPFL. Ce receuil est entièrement écrit par mes soins, regroupant les théories que j'ai jugées utiles et/ou nécéssaires pour ce premier semestre.
Ce traité n'est en aucun cas relié ou affilié à l'EPFL. Il est notamment possible d'y croiser des erreurs, ainsi je vous serai reconnaissant de me faire part de ces dernières sur :

le repo de ce projet :`https://github.com/Aryeth/aide_memoire_BA1`,

discord [Aryeth#2839],

ou encore par mail : leo.bernard@epfl.ch

Merci de votre compréhension et bonne lecture.

Contents

Chapitre 1

Analyse

1.1 Notions de bases

1.1.1 Introduction

On désigne par $\varnothing$ **l'ensemble vide.** $\mathbb{N}$ **l'ensemble des entiers naturels,** $\mathbb{Z}$ **l'anneau des entiers relatifs,** $\mathbb{Q}$ **le corps des nombres rationnels, et** $\mathbb{R}$ **le corps des nombres réels.** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étant l'ensemble des **Nombres irrationnels.** On a donc les inclusions suivantes :

$$\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Par définition, on ajoute * pour signifier que le zéro est non compris dans l'ensemble, $_+$ pour signifier que l'ensemble ne contient que des positifs, $_-$ pour signifier que l'ensemble ne contient que des négatifs.

1.1.2 Intervalle

Définition. *Un sous ensemble $I \neq \varnothing$ de $\mathbb{R}$ est appelé un* ***intervalle*** *si pour tout couple $(a, b) \in I \times I$ vérifiant $a \leq b$, la relation $a \leq x \leq b$ implique $x \in I$.*

Il en découle une suite de notations :

Intervalles bornés

Intervalle ouvert : $]a;b[= x \in \mathbb{R} : a < x < b$
Intervalle fermé : $[a;b] = x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$
Intervalle semi-ouvert à gauche : $]a;b] = x \in \mathbb{R} : a < x \leq b$
Intervalle semi-ouvert à droite : $[a;b[= x \in \mathbb{R} : a \leq x < b$

Intervalles non bornés

Intervalle ouvert : $]-\infty;a[= x \in \mathbb{R} : x < a$
Intervalle ouvert : $]a;+\infty[= x \in \mathbb{R} : x > a$

Intervalle fermé : $]-\infty;a] = x \in \mathbb{R} : x \leq a$
Intervalle fermé : $[a;+\infty[= x \in \mathbb{R} : x \geq a$

1.1.3 Valeur absolue

Définition. *A tout nombre réel x, on peut associer le nombre réel positif ou nul défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x > 0 \\ -x \ si \ x \leq 0 \end{cases}$$

$|x|$ est appelé la ***valeur absolue*** *de x.*

1.1.4 Partie entière

Définition. *A tout nombre réel x, on peut associer un unique entier relatif $[x]$ tel que :*

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$[x]$ est appelé la ***partie entière*** *de x, soit le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.*

1.2 Fonction réelle

Soit A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. On appelle fonction réelle une relation qui lie un élément x de A à un élément y ($f(x)$, la valeur de f en x) dans B.

Remarque. *On appelle A l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée.*

Remarque. *x est aussi appelé la préimage de y par f.*

Remarque. *L'ensemble des valeurs de f est noté $Im(f)$.*

Remarque. *Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont dites égales si elles ont les mêmes ensembles d'arrivée et de départ, et si $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$.*
On note alors $f = g$.

1.2.1 Représentation graphique

On représente une fonction en dessinant l'ensemble des points de coordonnées $(a; f(a))$. Ce dessin est appelé **graphe de** f.

Remarque. *On appelle le nombre a* ***zéro*** *de f si $f(a) = 0$. son ensemble correspond à l'ensemble des points ou le graphe de f intersecte O_x*

1.2.2 Parité d'une fonction

Si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définiton de f, on dit que f est une **fonction paire**.
Si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définiton de f, on dit que f est une **fonction impaire**.

Remarque. *Le graphe d'une fontion paire est symétrique à l'axe O_y, et Le graphe d'une fontion impaire est symétrique à l'origine.*

1.2.3 Périodicité d'une fonction

Une fonction est dite de **période p** si il existe un nombre $p > 0$ tel que $f(x+kp) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Remarque. *Le graphe d'une fonction périodique est un motif qui se répète indéfiniment par translation horizontale (d'amplitude p).*

1.2.4 Croissance et décroissance d'une fonction

Pour tout $x_1, x_2 \quad \in I$ on dit que :

- Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- Une fonction f est **strictement croissante** sur un intervalle I si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- Une fonction f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

1.2.5 Maximum et minimum d'une fonction

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle

- $f(a)$ est un **maximum local** de f si il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que :

  $$\forall x \in I \cap A : \ f(x) \leq f(a)$$

  On dit aussi que f admet un maximum en a.

- $f(a)$ est un **minimum local** de f si il existe un intervalle ouvert I contenant b tel que :

  $$\forall x \in I \cap A : \ f(x) \geq f(b)$$

  On dit aussi que f admet un minimum en b.

- $f(a)$ est un **maximum absolu** de f si :

  $$\forall x \in A : \ f(x) \leq f(a)$$

- $f(a)$ est un **minimum absolu** de f si :

  $$\forall x \in A : \ f(x) \geq f(a)$$

Remarque. *Le nom* ***extremum*** *peut être aussi utilisé à la place de maximum ou minimum.*

1.2.6 Opérations sur les fonctions

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $f : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles

- La **somme** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- La **différence** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f - g : A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

- Le **produit** de la fonction f par un nombre réel c est une nouvelle fonction notée $c * f : A \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(c * f)(x) = fc * (x)$$

- Le **produit** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f * g : A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

- Le **quotient** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $\frac{f}{g} : A \cap B \cap x|g(x) \neq 0 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- La **composée** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $g \circ f : x|x \in A\ et\ f(x) \in B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

1.2.7 Injection, surjection, bijection

Soit une fonction $f\ A \to B$.

- f est dite **surjective** si tout élément y de B est l'image par f d'au minimum un élément x de A (au minimum une précédence pour chaque objet de B).
- f est dite **injective** si tout élément y de B est l'image par f d'au maximum un élément x de A (au maximum une précédence pour chaque objet de B).
- f est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, chaque élément y de B est l'image par f d'un unique élément x de A.

1.2.8 Fonction réciproque

Soit une fonction $f\ A \to B$ bijective.
On appelle **réciproque** de f notée ${}^{r}f$ ou f^{-1} la fonction $f^{-1} : B \to A$ définie par :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Chaque fonction f bijective peut donc avoir une fonction réciproque f^{-1} tel que :

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x\ \forall x \in A$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = y\ \forall y \in B$$

1.3 Limites

1.3.1 Limite : définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a sauf eventuellement en a.
Le nombre L est **limite de f en a si** $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x tend vers a, avec $x \neq a$. On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a.

Remarque. *On peut aussi utiliser les limites sur des suites plutôt que sur des fonctions.*

1.3.2 Limite à droite, limite à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;d[$. Le nombre L est **limite à droite de f en a** si $\lim_{x\to a_+} f(x) = L$
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]g;a[$. Le nombre L est **limite à gauche de f en a** si $\lim_{x\to a_-} f(x) = L$

1.3.3 Propriétés des limites

Soit f et g deux fonctions admettant une limitent en a et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{c}
\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \\[2ex]
\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \\[2ex]
\lim_{x\to a}[\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x\to a} f(x) \\[2ex]
\lim_{x\to a}[f(x)*g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x) \\[2ex]
\lim_{x\to a}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \text{ si } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0
\end{array}}$$

1.3.4 Théorème des deux gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a,

sauf éventuellement en a.

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \in I \ /\{\text{a}\}$ et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$

alors $\lim_{x\to a} h(x) = L$

1.3.5 Critère de d'Alembert

1.3.6 Critère de Cauchy

1.3.7 Continuité

Une fonction f est **continue** en a si elle est définie sur une intervalle ouvert contenant a et si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
Une fonction f est **continue** en a si elle est continue en tout point de l'intervalle I.
Une fonction f est **continue sur un intervalle fermé** $[a;b]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle et si
$\lim_{x\to a_+} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x\to b_-} f(x) = f(b)$.

1.3.8 Limites de fonctions composées

Soit f et g deux fonctions.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ et si de plus g est continue en L, alors

$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(L)$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ et si de plus $f(x) \neq L$ sur un intervalle ouvert

contenant a, sauf éventuellement a, alors :

$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{t\to L} g(t)$

1.3.9 Propriétés des fonctions continues

Continuité de la réciproque

> Soit I un intervalle et $f : I \to J$ une fonction bbijective et continue.
>
> Alors la réciproque ${}^r f$ est continue sur l'intervalle J.

Théorème de Bolzanno

> Si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont
>
> de signes différents, alors la fonction f admet au moins un zéro dans
>
> $[a;b]$

Théorème de la valeur intermédiaire

> Si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour tout
>
> nombre γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe
>
> $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \gamma$

Théorème de Bolzanno-Weierstrass

> L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est
>
> un intervalle fermé borné

Corollaire

> Une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ admet un
>
> maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.

1.3.10 Limites infinies

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a.

on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand quand x tend vers a, avec $x \neq a$.
on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x\to a}(-f(x)) = +\infty$

1.3.11 Propriétés des limites infinies

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L < 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Remarque. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 * \infty$ *et* $\infty - \infty$ *sont des formes dites indéterminées.*

1.3.12 Limites à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.
On écrit $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ est arbitrairement proche de L quand x est suffisamment grand ou de manière équivalente, si $\lim_{t\to 0_+} f(\frac{1}{t}) = L$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a]$. On écrit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si $\lim_{x\to+\infty} f(-x) = L$

1.3.13 Asymptotes

Définition. *La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la fonction f si*
$\lim_{x\to a_+} |f(x)| = +\infty$ *ou si* $\lim_{x\to a_-} |f(x)| = +\infty$

Définition. *La droite d'équation $y = h_1$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f vers $+\infty$ si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = h_1$

Définition. *La droite d'équation $y = h_2$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f vers $-\infty$ si* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = h_2$

Définition. *La droite d'équation $y = h_1$ est une **asymptote horizontale** de la fonction f vers $+\infty$ si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = h_1$

Définition. *La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la fonction f vers $+\infty$ si*
$f(x) = mx + h + \delta(x)$ *avec* $\lim_{x\to+\infty} \delta(x) = 0$

Définition. *La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique** de la fonction f vers $-\infty$ si*
$f(x) = mx + h + \delta(x)$ *avec* $\lim_{x\to-\infty} \delta(x) = 0$

1.3.14 Astuces de calcul

Division euclidienne

Soit $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions rationnelles et $L = \lim_{x\to+b} \frac{f(x)}{g(x)} = "\frac{0}{0}"$,
avec b $\in \mathbb{R}$
On remarque dans cette situation que $f(x)$ et $g(x)$ sont divisibles par $(x - b)$ (car quand $x = b$, $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux nuls.)
Ainsi, nous pouvons mettre en évidence $(x-b)$ dans $f(x)$ et $g(x)$ grâce a une divison euclidienne (un schéma de Horner peut s'avérer pratique).

Remarque. *Si le reste de la division euclidienne est de zéro, il peut être intéressant de remettre $(x - b)$ en évidence dans la nouvelle limite obtenue.*

Règle de Bernouilli-L'Hospital

Se réferer à la définition de la règle de Bernouilli L'Hospital.
Rappel rapide :

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Avec g et g' non nuls, et f, g dérivables.

Limites remarquables

Fonctions Trigonométriques :	Fonctions Logarithmiques :
$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0}(1+\frac{a}{x})^x = e^a$
$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+ax)}{x} = a$
$\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

1.4 Dérivées

1.4.1 Tangeante (dérivée) en x_0

Soit deux points M et M_0, définis par : $M_0(x_0; f(x_0))$ et $M(x; f(x))$.
Quand x tend vers x_0, alors M s'approche de M_0 et la droite (M_0M) tend vers une droite limite que l'on appelle **tangeante** à f(x) en M_0. Cette tangeante en x_0 est nommée dérivée de f au point x_0, et sa pente est donnée par la limite :

$$\boxed{f'(x_0) := m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

1.4.2 Nombre dérivé à gauche, à droite

La notion de limite a gauche (resp. à droite) permet de définir le nombre dérivé à gauche (resp. droite) d'une fonction en un point. Ceci nous permet de déterminer si la fonction est **dérivable en ce point** si les limites à gauche et à droite sont les mêmes.
Ainsi :

$$\boxed{f'(x_0) \text{ existe si : } = \lim_{x \to x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

(notons ici que x_{0-} et x_{0+} représentent un nombre légèrement plus petit que x, et resp. un nombre légèrement plus grand que x.)

1.4.3 Point anguleux, à tangeante verticale, de rebroussement

- Le graphe d'une fonction f admet un **point anguleux en a** si f est continue en a et si :

  $$\boxed{\lim_{x \to a_-} f'(x) \neq \lim_{x \to a_+} f'(x)}$$

  (si la fonction f est continue en a mais non dérivable en a alors f admet un point anguleux en a.)

- Le graphe d'une fonction f admet une **tangeante verticale en a** si f est continue en a et si :

$$\boxed{\lim_{x \to a_-} |f'(x)| = +\infty}$$

ce point est un ***point de rebroussement*** *si de plus la limite* $\lim_{x \to a_-} f'(x)$ *n'existe pas.*

1.4.4 fonction dérivée

Définition. *Une fonction f est* ***dérivable*** *sur une partie de A sur $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout points de A. On définit la fonction dérivée par :*

$$\begin{array}{c} f' : A \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{array}$$

Dérivées de fonction élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
$x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$n * x^{n-1}$
e^u	$u'e^u$
$\frac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2} \quad x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$\lvert x \rvert$	$sgn(x) \quad x \neq 0$

Dérivées de fonction particulières

$f(x)$	$f'(x)$
$x^q \quad q \in \mathbb{Q}$	qx^{q-1}
$tan(x)$	$\dfrac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$
$cot(x)$	$\dfrac{-1}{sin^2(x)} = -1 - cot^2(x)$
$arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

1.4.5 Dérivée d'ordre supérieur

Définition. *La **dérivée d'ordre n** de f est la fonction n fois dérivée $f^{(n)}$ définie par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$*

1.4.6 Règle de Bernouilli-L'Hospital

Définition. *Soient des fonctions f, g telles que $f, g :]a, b[\to F$, dérivables telles que g, g' ne s'annulent pas sur $]a, b[$. De plus, on suppose que :*

- $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ *avec* $\alpha = 0, -\infty$ *ou* $+\infty$*;*
- $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, avec* $L \in \mathbb{R} \cup -\infty, +\infty$

Alors,

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$$

Remarque. *cette règle reste valable quand x tend vers b-, a+, -∞ ou +∞*

1.4.7 Propriétés utiles

Toute fonction dérivable en a est continue en a

Si la fonction f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors $f'(a) = 0$

Théorème de Rolle

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$, et dérivable sur

l'intervalle $]a; b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins

un nombre c dans $]a; b[$ t.q. $f'(c) = 0$

(Il existe entre les points A et B de "même hauteur" un point ayant une tangeante horizontale.)

Théorème des accroisements finis (TAF)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, et dérivable sur l'intervalle $]a;b[$ alors il existe au moins un nombre c dans $]a;b[$ t.q. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(Il existe entre les points A et B un point ayant une tangeante parrallèle à la droite AB.)

1.4.8 Règles de dérivation

Soit f et g deux fonction dérivables en a. Soit $c \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{gathered}(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \\ (f-g)'(a) = f'(a) - g'(a) \\ (c * f)'(a) = c * f'(a) \\ (f * g)'(a) = f'(a) * g(x) + f(a) * g'(a) \\ (\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)*g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\end{gathered}}$$

Si f est une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) * f'(a)}$$

Exemple. *On "dérive en boîtes" :*

$\rightarrow sin^2(2x)' =$

① *Dériver le carré :* $2sin(2x)$
② *Dériver le sinus :* $cos(2x)$
③ *Dériver 2x :* 2
④ *Multiplier chaque partie entre elles :*$2sin(2x) * cos(2x) * 2 = 4sin(2x)cos(2x)$

1.5 Intégrales

1.5.1 Introduction

Soient a < b deux éléments de $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble fini et ordonné

$$\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \text{ avec } a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b$$

est appelé une **subdivision** de l'intégrale [a;b].

Somme de Riemann supérieure

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On nomme **somme de Riemann Supérieure** le nombre :

$$\bar{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

avec $f(t_k)$ =sup$\{f(t), t_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Somme de Riemann inférieure

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On nomme **somme de Riemann Inférieure** le nombre :

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

avec $f(t_k)$ =inf$\{f(t), t_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Intégrale Bornée

Soit $\underline{S}(f)$, $\bar{S}(f)$, deux nombres réels tels que :

$$\underline{S}(f) = \inf\{\underline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$$
et
$$\bar{S}(f) = \inf\{\bar{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$$

Soient a < b deux éléments de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Par définition, le nombre réel $\underline{S}(f) = \bar{S}(f)$ est appelé l'**intégrale** de la fonction f sur $[a, b]$ et on écrit :

$$\underline{S}_\sigma(f) = \bar{S}_\sigma(f) = \int_a^b f(x)dx$$

1.5.2 Primitives d'une fonction

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I (une partie de $\mathbb{R}$). Une fonction dérivable F est une* ***primitive*** *de f sur I si*
$F'(x) = f(x) \forall x \in I$.

On désigne généralement par $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de f sur I. On l'appelle **intégrale indéfinie** de f.
Intégrer une fonction f sur un intervalle I c'est chercher toutes les primiteives de f sur I.
Si F est primitive de f sur I, alors toute primitive de f est de la forme $\mathbf{F(x)} + \mathbf{c}$, avec $c \in \mathbb{R}$. On convient d'écrire :

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

Théorème fondamental du calcul intégral

Soient a $<$ b deux éléments de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une primitive on écrit :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

on utilise aussi la notation :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$$

1.5.3 Intégration par parties

Soient I un intervalle ouvert, $a, b \in I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f, g soient dérivables sur I, et f', g' sont continues sur I. Alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ou plus généralement :

$$u * v = \int u * v' + \int u' * v$$

on peut le montrer en intégrant :

$$(u * v)' = u' * v + u * v'$$

1.5.4 Changement de variable

Soit I un intervalle réel, $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction dérivable avec la dérivée intégrable, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Par définition, la transformation

$$x = \varphi(t) \text{ avec } t \in I$$

est appelé un **changement de variable.**

Règles de Bioche

Les règles de Bioches sont des règles utiles pour les changement de variables dans des intégrales contenant des fonctions trigonométriques. Soit l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx \text{ , telle que } f(x) = \frac{P(sin(x),cos(x))}{Q(sin(x),cos(x))}$$

avec P et Q des polynômes a deux variables, à coefficients réels. On pose de plus

$$\omega(t) = f(x)dx$$

Ainsi :

- si $\omega(-t) = \omega(t)$, un bon changement de variable est : $\varphi(t) = cos(t)$
- si $\omega(\pi - t) = \omega(t)$ un bon changement de variable est : $\varphi(t) = sin(t)$
- si $\omega(\pi + t) = \omega(t)$ un bon changement de variable est : $\varphi(t) = tan(t)$
- si deux de ces trois précédents points sont vraies, un bon changement de variable est : $\varphi(t) = cos(2t)$
- dans les autres cas, un bon changement de variable est : $\varphi(t) = tan(t/2)$

1.5.5 Primitives de fonctions élémentaires

$f(x)$	$\int f(x)dx$
a	$ax + c \quad c \in \mathbb{R}$
$x^q \quad q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{q+1}}{q+1} + c \quad c \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \vert x\vert + c \quad c \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$
$\ln\, x \quad a \neq 1, a > 0, x > 0$	$x(\ln\, x - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}$
$cos(x)$	$sin(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
$sin(x)$	$-cos(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$

1.5.6 Primitives de fonctions particulières

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{a^2+x^2} \quad a \neq 0$	$\frac{1}{a}Arctg(\frac{x}{a}) + c \quad c \in \mathbb{R}$
$a^x \quad a \neq 1, a > 0$	$\frac{a^x}{ln(a)} + c \quad c \in \mathbb{R}$
$log_a x \quad a \neq 1, a > 0, x > 0$	$x(log_a x - log_a e) + c \quad c \in \mathbb{R}$

1.5.7 Règles d'intégration

Soit f et g deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle I

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int g(f(x)) * f'(x)dx = G(f(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Où G est une primitive de g.

1.6 Applications des dérivées