

# Aide mémoire 2021

Léo Bernard

September 9, 2021



# Préface

L'objectif de cet aide mémoire est de regrouper la théorie nécessaire / utilisée au premier semestre de l'EPFL. Ce recueil est entièrement écrit par mes soins, regroupant les théories que j'ai jugées utiles et/ou nécessaires pour ce premier semestre.

Ce traité n'est en aucun cas relié ou affilié à l'EPFL. Il est notamment possible d'y croiser des erreurs, ainsi je vous serai reconnaissant de me faire part de ces dernières sur :

le repo de ce projet :[https://github.com/Aryeth/aide\\_memoire\\_BA1](https://github.com/Aryeth/aide_memoire_BA1),

discord [Aryeth#2839],

ou encore par mail : [leo.bernard@epfl.ch](mailto:leo.bernard@epfl.ch)

Merci de votre compréhension et bonne lecture.



# Contents

<b>1</b>	<b>Analyse</b>	<b>7</b>
1.1	Notions de bases . . . . .	7
1.1.1	Introduction . . . . .	7
1.1.2	Intervalles . . . . .	7
1.1.3	Valeur absolue . . . . .	8
1.1.4	Partie entière . . . . .	8
1.1.5	fonction $\ln(x)$ et $e$ . . . . .	9
1.2	Fonction réelle . . . . .	10
1.2.1	Représentation graphique . . . . .	10
1.2.2	Parité d'une fonction . . . . .	11
1.2.3	Périodicité d'une fonction . . . . .	11
1.2.4	Croissance et décroissance d'une fonction . . . . .	11
1.2.5	Maximum et minimum d'une fonction . . . . .	12
1.2.6	Opérations sur les fonctions . . . . .	13
1.2.7	Injection, surjection, bijection . . . . .	14
1.2.8	Fonction réciproque . . . . .	14
1.3	Limites . . . . .	15
1.3.1	Limite : définition . . . . .	15
1.3.2	Limite à droite, limite à gauche . . . . .	15
1.3.3	Propriétés des limites . . . . .	15
1.3.4	Théorème des deux gendarmes . . . . .	16
1.3.5	Critère de d'Alembert . . . . .	16
1.3.6	Critère de Cauchy . . . . .	16
1.3.7	Continuité . . . . .	16
1.3.8	Limites de fonctions composées . . . . .	16
1.3.9	Propriétés des fonctions continues . . . . .	17
1.3.10	Limites infinies . . . . .	18
1.3.11	Propriétés des limites infinies . . . . .	18
1.3.12	Limites à l'infini . . . . .	18
1.3.13	Asymptotes . . . . .	19

	1.3.14 Astuces de calcul . . . . .	19
1.4	Dérivées . . . . .	21
	1.4.1 Tangente (dérivée) en $x_0$ . . . . .	21
	1.4.2 Nombre dérivé à gauche, à droite . . . . .	21
	1.4.3 Point anguleux, à tangente verticale, de rebroussement . . . . .	22
	1.4.4 fonction dérivée . . . . .	22
	1.4.5 Dérivée d'ordre supérieur . . . . .	24
	1.4.6 Règle de Bernoulli-L'Hospital . . . . .	24
	1.4.7 Théorème de Rolle . . . . .	25
	1.4.8 Théorème des accroissements finis (TAF) . . . . .	25
	1.4.9 Polynôme de Taylor . . . . .	25
	1.4.10 Développement limité . . . . .	25
	1.4.11 Règles de dérivation . . . . .	26
	1.4.12 Remarques . . . . .	26
1.5	Intégrales . . . . .	28
	1.5.1 Introduction . . . . .	28
	1.5.2 Primitives d'une fonction . . . . .	29
	1.5.3 Intégration par parties . . . . .	29
	1.5.4 Changement de variable . . . . .	30
	1.5.5 Primitives de fonctions élémentaires . . . . .	31
	1.5.6 Primitives de fonctions particulières . . . . .	31
	1.5.7 Règles d'intégration . . . . .	32
1.6	Applications des dérivées . . . . .	33

# Chapitre 1

## Analyse

### 1.1 Notions de bases

#### 1.1.1 Introduction

On désigne par  $\emptyset$  l'ensemble vide.  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'anneau des entiers relatifs,  $\mathbb{Q}$  le corps des nombres rationnels, et  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels.  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  étant l'ensemble des Nombres irrationnels. On a donc les inclusions suivantes :

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Par définition, on ajoute \* pour signifier que le zéro est non compris dans l'ensemble, + pour signifier que l'ensemble ne contient que des positifs, – pour signifier que l'ensemble ne contient que des négatifs.

#### 1.1.2 Intervalles

**Définition.** Un sous ensemble  $I \neq \emptyset$  de  $\mathbb{R}$  est appelé un ***intervalle*** si pour tout couple  $(a, b) \in I \times I$  vérifiant  $a \leq b$ , la relation  $a \leq x \leq b$  implique  $x \in I$ .

Il en découle une suite de notations :

### Intervalles bornés

Intervalle ouvert :  $]a; b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Intervalle fermé :  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Intervalle semi-ouvert à gauche :  $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Intervalle semi-ouvert à droite :  $[a; b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

### Intervalles non bornés

Intervalle ouvert :  $] - \infty; a[ = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Intervalle ouvert :  $]a; +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

Intervalle fermé :  $] - \infty; a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

Intervalle fermé :  $[a; +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

## 1.1.3 Valeur absolue

**Définition.** *A tout nombre réel  $x$ , on peut associer le nombre réel positif ou nul défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$|x|$  est appelé la **valeur absolue** de  $x$ .

## 1.1.4 Partie entière

**Définition.** *A tout nombre réel  $x$ , on peut associer un unique entier relatif  $[x]$  tel que :*

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$[x]$  est appelé la **partie entière** de  $x$ , soit le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ .



**1.1.5 fonction  $\ln(x)$  et  $e$**  **$e$ , le nombre d'Euler**

On pose par définition :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

On nomme **fonction exponentielle** la fonction  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  définie par  $\exp(x) = e^x$ . Elle est continue, strictement croissante et bijective.

**Propriétés** $\forall x, y \in \mathbb{R} :$ 

- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

 **$\ln$  : logarithme naturel, aussi appelé logarithme népérien**

le logarithme népérien est un logarithme dit "de base  $e$ ", car  $\ln(e) = 1$ . Cette fonction est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est donc une fonction continue strictement croissante  $\ln : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ . Ainsi, par définition

$$y = \ln(x) \iff x = e^y$$

**Propriétés** $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^* :$ 

- $\ln(e^x) = x$
- $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  et  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $a^x = e^{x \ln(a)}$

## 1.2 Fonction réelle

Soit  $A$  et  $B$  deux sous ensembles de  $\mathbb{R}$ . On appelle fonction réelle une relation qui lie un élément  $x$  de  $A$  à un élément  $y$  ( $f(x)$ , la valeur de  $f$  en  $x$ ) dans  $B$ .

**Remarque.** On appelle  $A$  l'ensemble de départ et  $B$  l'ensemble d'arrivée.

**Remarque.**  $x$  est aussi appelé la préimage de  $y$  par  $f$ .

**Remarque.** L'ensemble des valeurs de  $f$  est noté  $\text{Im}(f)$ .

**Remarque.** Deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  sont dites égales si elles ont les mêmes ensembles d'arrivée et de départ, et si  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$ .  
On note alors  $f = g$ .

### 1.2.1 Représentation graphique

On représente une fonction en dessinant l'ensemble des points de coordonnées  $(a; f(a))$ . Ce dessin est appelé **graphe de  $f$** .

**Remarque.** On appelle le nombre  $a$  **zéro** de  $f$  si  $f(a) = 0$ . son ensemble correspond à l'ensemble des points ou le graphe de  $f$  intersecte  $O_x$

### 1.2.2 Parité d'une fonction

Si  $f(-x) = f(x)$  pour tout  $x$  de l'ensemble de définition de  $f$ , on dit que  $f$  est une **fonction paire**.

Si  $f(-x) = -f(x)$  pour tout  $x$  de l'ensemble de définition de  $f$ , on dit que  $f$  est une **fonction impaire**.

**Remarque.** *Le graphe d'une fonction paire est symétrique à l'axe  $O_y$ , et Le graphe d'une fonction impaire est symétrique à l'origine.*

### 1.2.3 Périodicité d'une fonction

Une fonction est dite de **période  $p$**  si il existe un nombre  $p > 0$  tel que  $f(x + kp) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

**Remarque.** *Le graphe d'une fonction périodique est un motif qui se répète indéfiniment par translation horizontale (d'amplitude  $p$ ).*

### 1.2.4 Croissance et décroissance d'une fonction

Pour tout  $x_1, x_2 \in I$  on dit que :

- Une fonction  $f$  est **croissante** sur un intervalle  $I$  si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- Une fonction  $f$  est **strictement croissante** sur un intervalle  $I$  si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Une fonction  $f$  est **décroissante** sur un intervalle  $I$  si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- Une fonction  $f$  est **strictement décroissante** sur un intervalle  $I$  si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

### 1.2.5 Maximum et minimum d'une fonction

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle

- $f(a)$  est un **maximum local** de  $f$  si il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $a$  tel que :

$$\forall x \in I \cap A : f(x) \leq f(a)$$

On dit aussi que  $f$  admet un maximum en  $a$ .

- $f(a)$  est un **minimum local** de  $f$  si il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $a$  tel que :

$$\forall x \in I \cap A : f(x) \geq f(a)$$

On dit aussi que  $f$  admet un minimum en  $a$ .

- $f(a)$  est un **maximum absolu** de  $f$  si :

$$\forall x \in A : f(x) \leq f(a)$$

- $f(a)$  est un **minimum absolu** de  $f$  si :

$$\forall x \in A : f(x) \geq f(a)$$

**Remarque.** Le nom ***extremum*** peut être aussi utilisé à la place de *maximum* ou *minimum*.

### 1.2.6 Opérations sur les fonctions

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions réelles

- La **somme** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $f + g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- La **différence** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $f - g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

- Le **produit** de la fonction  $f$  par un nombre réel  $c$  est une nouvelle fonction notée  $c * f : A \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(c * f)(x) = fc * (x)$$

- Le **produit** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $f * g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

- Le **quotient** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $\frac{f}{g} : A \cap B \cap \{x | g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- La **composée** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $g \circ f : x | x \in A \text{ et } f(x) \in B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### 1.2.7 Injection, surjection, bijection

Soit une fonction  $f : A \rightarrow B$ .

- $f$  est dite **surjective** si tout élément  $y$  de  $B$  est l'image par  $f$  d'au minimum un élément  $x$  de  $A$  (au minimum une précedence pour chaque objet de  $B$ ).
- $f$  est dite **injective** si tout élément  $y$  de  $B$  est l'image par  $f$  d'au maximum un élément  $x$  de  $A$  (au maximum une précedence pour chaque objet de  $B$ ).
- $f$  est dite **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, chaque élément  $y$  de  $B$  est l'image par  $f$  d'un unique élément  $x$  de  $A$ .

### 1.2.8 Fonction réciproque

Soit une fonction  $f : A \rightarrow B$  bijective.

On appelle **réciproque** de  $f$  notée  ${}^r f$  ou  $f^{-1}$  la fonction  $f^{-1} : B \rightarrow A$  définie par :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Chaque fonction  $f$  bijective peut donc avoir une fonction réciproque  $f^{-1}$  telle que :

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= x \quad \forall x \in A \\ (f \circ f^{-1})(y) &= y \quad \forall y \in B \end{aligned}$$

## 1.3 Limites

### 1.3.1 Limite : définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$  sauf éventuellement en  $a$ .

Le nombre  $L$  est **limite de  $f$  en  $a$**  si  $f(x)$  est arbitrairement proche de  $L$  dès que  $x$  tend vers  $a$ , avec  $x \neq a$ . On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

On dit que  $f(x)$  tend vers  $L$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

**Remarque.** On peut aussi utiliser les limites sur des suites plutôt que sur des fonctions.

### 1.3.2 Limite à droite, limite à gauche

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a; d[$ . Le nombre  $L$  est **limite à droite de  $f$  en  $a$**  si  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]g; a[$ . Le nombre  $L$  est **limite à gauche de  $f$  en  $a$**  si  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$

### 1.3.3 Propriétés des limites

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant une limite en  $a$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

### 1.3.4 Théorème des deux gendarmes

Soit  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle ouvert  $I$  contenant  $a$ ,

sauf éventuellement en  $a$ .

Si  $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \in I \setminus \{a\}$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

alors  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

### 1.3.5 Critère de d'Alembert

### 1.3.6 Critère de Cauchy

### 1.3.7 Continuité

Une fonction  $f$  est **continue** en  $a$  si elle est définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Une fonction  $f$  est **continue** en  $a$  si elle est continue en tout point de l'intervalle  $I$ .

Une fonction  $f$  est **continue sur un intervalle fermé**  $[a; b]$  si elle est continue en tout point de l'intervalle et si  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$ .

### 1.3.8 Limites de fonctions composées

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  et si de plus  $g$  est continue en  $L$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(L)$$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  et si de plus  $f(x) \neq L$  sur un intervalle ouvert

contenant  $a$ , sauf éventuellement  $a$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow L} g(t)$$



### 1.3.9 Propriétés des fonctions continues

#### Continuité de la réciproque

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow J$  une fonction bijective et continue.

Alors la réciproque  ${}^r f$  est continue sur l'intervalle  $J$ .

#### Théorème de Bolzano

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$  et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes différents, alors la fonction  $f$  admet au moins un zéro dans  $[a; b]$

#### Théorème de la valeur intermédiaire

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , alors pour tout nombre  $\gamma$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = \gamma$

#### Théorème de Bolzano-Weierstrass

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné

#### Corollaire

Une fonction continue sur un intervalle fermé  $[a; b]$  admet un maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.

### 1.3.10 Limites infinies

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$ , sauf éventuellement en  $a$ .

on écrit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  si  $f(x)$  est arbitrairement grand quand  $x$  tend vers  $a$ , avec  $x \neq a$ .

on écrit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = +\infty$

### 1.3.11 Propriétés des limites infinies

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

**Remarque.**  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 * \infty$  et  $\infty - \infty$  sont des formes dites indéterminées.

### 1.3.12 Limites à l'infini

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a; +\infty[$ .

On écrit  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  si  $f(x)$  est arbitrairement proche de  $L$  quand  $x$  est suffisamment grand ou de manière équivalente, si  $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\frac{1}{t}) = L$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $] -\infty; a]$ . On écrit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = L$

### 1.3.13 Asymptotes

**Définition.** La droite d'équation  $x = a$  est une **asymptote verticale** de la fonction  $f$  si

$$\lim_{x \rightarrow a+} |f(x)| = +\infty \text{ ou si } \lim_{x \rightarrow a-} |f(x)| = +\infty$$

**Définition.** La droite d'équation  $y = h_1$  est une **asymptote horizontale** de la fonction  $f$  vers  $+\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h_1$

**Définition.** La droite d'équation  $y = h_2$  est une **asymptote horizontale** de la fonction  $f$  vers  $-\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = h_2$

**Définition.** La droite d'équation  $y = h_1$  est une **asymptote horizontale** de la fonction  $f$  vers  $+\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h_1$

**Définition.** La droite d'équation  $y = mx + h$  est une **asymptote oblique** de la fonction  $f$  vers  $+\infty$  si

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$$

**Définition.** La droite d'équation  $y = mx + h$  est une **asymptote oblique** de la fonction  $f$  vers  $-\infty$  si

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow -\infty} \delta(x) = 0$$

### 1.3.14 Astuces de calcul

#### Division euclidienne

Soit  $f(x)$ ,  $g(x)$  deux fonctions rationnelles et  $L = \lim_{x \rightarrow +b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ , avec  $b \in \mathbb{R}$

On remarque dans cette situation que  $f(x)$  et  $g(x)$  sont divisibles par  $(x - b)$  (car quand  $x = b$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  sont tous deux nuls.)

Ainsi, nous pouvons mettre en évidence  $(x - b)$  dans  $f(x)$  et  $g(x)$  grâce à une division euclidienne (un schéma de Horner peut s'avérer pratique).

**Remarque.** Si le reste de la division euclidienne est de zéro, il peut être intéressant de remettre  $(x - b)$  en évidence dans la nouvelle limite obtenue.

#### Règle de Bernoulli-L'Hospital

Se référer à la définition de la règle de Bernoulli L'Hospital.

Rappel rapide :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Avec  $g$  et  $g'$  non nuls, et  $f$ ,  $g$  dérivables.

**Limites remarquables**

Fonctions Trigonométriques :	Fonctions Logarithmiques :
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

## 1.4 Dérivées

### 1.4.1 Tangente (dérivée) en $x_0$

Soit deux points  $M$  et  $M_0$ , définis par :  $M_0(x_0; f(x_0))$  et  $M(x; f(x))$ .

Quand  $x$  tend vers  $x_0$ , alors  $M$  s'approche de  $M_0$  et la droite  $(M_0M)$  tend vers une droite limite que l'on appelle **tangente** à  $f(x)$  en  $M_0$ . Cette tangente en  $x_0$  est nommée dérivée de  $f$  au point  $x_0$ , et sa pente est donnée par la limite :

$$f'(x_0) := m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### 1.4.2 Nombre dérivé à gauche, à droite

La notion de limite à gauche (resp. à droite) permet de définir le nombre dérivé à gauche (resp. droite) d'une fonction en un point. Ceci nous permet de déterminer si la fonction est **dérivable en ce point** si les limites à gauche et à droite sont les mêmes.

Ainsi :

$$f'(x_0) \text{ existe si : } = \lim_{x \rightarrow x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(notons ici que  $x_{0-}$  et  $x_{0+}$  représentent un nombre légèrement plus petit que  $x$ , et resp. un nombre légèrement plus grand que  $x$ .)

### 1.4.3 Point anguleux, à tangente verticale, de rebroussement

- Le graphe d'une fonction  $f$  admet un **point anguleux en  $a$**  si  $f$  est continue en  $a$  et si :

$$\lim_{x \rightarrow a-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$$

(si la fonction  $f$  est continue en  $a$  mais non dérivable en  $a$  alors  $f$  admet un point anguleux en  $a$ .)

- Le graphe d'une fonction  $f$  admet une **tangente verticale en  $a$**  si  $f$  est continue en  $a$  et si :

$$\lim_{x \rightarrow a-} |f'(x)| = +\infty$$

ce point est un **point de rebroussement** si de plus la limite  $\lim_{x \rightarrow a-} f'(x)$  n'existe pas.

### 1.4.4 fonction dérivée

**Définition.** Une fonction  $f$  est **dérivable** sur une partie de  $A$  sur  $\mathbb{R}$  si elle est dérivable en tout points de  $A$ . On définit la fonction dérivée par :

$$\begin{aligned} f' : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x) \end{aligned}$$

## Dérivées de fonction élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$
$x$	$1$
$x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$n * x^{n-1}$
$e^u$	$u' e^u$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$ x $	$\operatorname{sgn}(x) \quad x \neq 0$

## Dérivées de fonction particulières

$f(x)$	$f'(x)$
$x^q \quad q \in \mathbb{Q}$	$qx^{q-1}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

### 1.4.5 Dérivée d'ordre supérieur

**Définition.** La **dérivée d'ordre  $n$**  de  $f$  est la fonction  $n$  fois dérivée  $f^{(n)}$  définie par  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

### 1.4.6 Règle de Bernoulli-L'Hospital

**Définition.** Soient des fonctions  $f, g$  telles que  $f, g : ]a, b[ \rightarrow F$ , dérivables telles que  $g, g'$  ne s'annulent pas sur  $]a, b[$ . De plus, on suppose que :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$  avec  $\alpha = 0, -\infty$  ou  $+\infty$ ;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , avec  $L \in \mathbb{R} \cup -\infty, +\infty$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

**Remarque.** cette règle reste valable quand  $x$  tend vers  $b-, a+, -\infty$  ou  $+\infty$



### 1.4.7 Théorème de Rolle

Si  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , et dérivable sur l'intervalle  $]a; b[$  et si  $f(a) = f(b)$  alors il existe au moins un nombre  $c$  dans  $]a; b[$  t.q.  $f'(c) = 0$

(Il existe entre les points  $A$  et  $B$  de "même hauteur" un point ayant une tangente horizontale.)

### 1.4.8 Théorème des accroissements finis (TAF)

Si  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , et dérivable sur l'intervalle  $]a; b[$  alors il existe au moins un nombre  $c$  dans  $]a; b[$  t.q.  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(Il existe entre les points  $A$  et  $B$  un point ayant une tangente parallèle à la droite  $AB$ .)

### 1.4.9 Polynôme de Taylor

Soient  $I$  un intervalle ouvert,  $a \in I$  et  $f : I \rightarrow F$  une fonction de classe  $C^n$ . Alors la fonction polynomiale  $\mathcal{P}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\mathcal{P}_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} * (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} * (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} * (x - a)^n$$

est appelée **polynôme de Taylor d'ordre  $n$**  de la fonction  $f$  autour de  $a$ .

### 1.4.10 Développement limité

Soient  $I$  un intervalle ouvert,

### 1.4.11 Règles de dérivation

Soit  $f$  et  $g$  deux fonction dérivables en  $a$ . Soit  $c \in \mathbb{R}$

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

$$(c * f)'(a) = c * f'(a)$$

$$(f * g)'(a) = f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) * g(a) - f(a) * g'(a)}{g^2(a)}$$

Si  $f$  est une fonction dérivable en  $a$  et  $g$  une fonction dérivable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) * f'(a)$$

**Exemple.** On "dérive en boîtes" :

$$\rightarrow \sin^2(2x)' =$$

- ① Dériver le carré :  $2\sin(2x)$
- ② Dériver le sinus :  $\cos(2x)$
- ③ Dériver  $2x$  :  $2$
- ④ Multiplier chaque partie entre elles :  $2\sin(2x) * \cos(2x) * 2 = 4\sin(2x)\cos(2x)$

### 1.4.12 Remarques

- Toute fonction dérivable en  $a$  est continue en  $a$
- Si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  et admet un extremum en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$



## 1.5 Intégrales

### 1.5.1 Introduction

Soient  $a < b$  deux éléments de  $\mathbb{R}$ . Le sous-ensemble fini et ordonné

$$\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \text{ avec } a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b$$

est appelé une **subdivision** de l'intégrale  $[a; b]$ .

#### Somme de Riemann supérieure

Soit  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  une subdivision de  $[a, b]$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

On nomme **somme de Riemann Supérieure** le nombre :

$$\bar{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

avec  $f(t_k) = \sup\{f(t), t_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$

#### Somme de Riemann inférieure

Soit  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  une subdivision de  $[a, b]$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

On nomme **somme de Riemann Inférieure** le nombre :

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

avec  $f(t_k) = \inf\{f(t), t_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$

#### Intégrale Bornée

Soit  $\underline{S}(f)$ ,  $\bar{S}(f)$ , deux nombres réels tels que :

$$\begin{aligned} \underline{S}(f) &= \inf\{\underline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\} \\ &\text{et} \\ \bar{S}(f) &= \inf\{\bar{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\} \end{aligned}$$

Soient  $a < b$  deux éléments de  $\mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Par définition, le nombre réel  $\underline{S}(f) = \bar{S}(f)$  est appelé l'**intégrale** de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  et on écrit :

$$\underline{S}_\sigma(f) = \bar{S}_\sigma(f) = \int_a^b f(x)dx$$

### 1.5.2 Primitives d'une fonction

**Définition.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  (une partie de  $\mathbb{R}$ ). Une fonction dérivable  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$  si  $F'(x) = f(x) \forall x \in I$ .

On désigne généralement par  $\int f(x)dx$  l'ensemble des primitives de  $f$  sur  $I$ . On l'appelle **intégrale indéfinie** de  $f$ .

**Intégrer** une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  c'est chercher toutes les primitives de  $f$  sur  $I$ .

Si  $F$  est primitive de  $f$  sur  $I$ , alors toute primitive de  $f$  est de la forme  $F(x) + c$ , avec  $c \in \mathbb{R}$ . On convient d'écrire :

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### Théorème fondamental du calcul intégral

Soient  $a < b$  deux éléments de  $\mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors, si  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive on écrit :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

on utilise aussi la notation :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$$

### 1.5.3 Intégration par parties

Soient  $I$  un intervalle ouvert,  $a, b \in I$  et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions telles que  $f, g$  soient dérivables sur  $I$ , et  $f', g'$  sont continues sur  $I$ . Alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ou plus généralement :

$$u * v = \int u * v' + \int u' * v$$

on peut le montrer en intégrant :

$$(u * v)' = u' * v + u * v'$$

### 1.5.4 Changement de variable

Soit  $I$  un intervalle réel,  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  une fonction dérivable avec la dérivée intégrable, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Par définition, la transformation

$$x = \varphi(t) \text{ avec } t \in I$$

est appelé un **changement de variable**.<sup>1</sup>

#### Règles de Bioche

Les règles de Bioches sont des règles utiles pour les changement de variables dans des intégrales contenant des fonctions trigonométriques. Soit l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ telle que } f(x) = \frac{P(\sin(x), \cos(x))}{Q(\sin(x), \cos(x))}$$

avec  $P$  et  $Q$  des polynômes à deux variables, à coefficients réels. On pose de plus

$$\omega(t) = f(x)dx$$

Ainsi :

- si  $\omega(-t) = \omega(t)$ , un bon changement de variable est :  $\varphi(t) = \cos(t)$
- si  $\omega(\pi - t) = \omega(t)$  un bon changement de variable est :  $\varphi(t) = \sin(t)$
- si  $\omega(\pi + t) = \omega(t)$  un bon changement de variable est :  $\varphi(t) = \tan(t)$
- si deux de ces trois précédents points sont vraies, un bon changement de variable est :  $\varphi(t) = \cos(2t)$
- dans les autres cas, un bon changement de variable est :  $\varphi(t) = \tan(t/2)$

**Remarque.** Il est important de se rappeler de changer  $dx$  par  $dt$ , que l'on détermine avec :

$$\frac{dt}{dx} = \varphi'(t)$$

---

<sup>1</sup>Il est nécessaire de regarder des exemples afin de mieux comprendre le fonctionnement de cette méthode.

## 1.5.5 Primitives de fonctions élémentaires

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$a$	$ax + c \quad c \in \mathbb{R}$
$x^q \quad q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{q+1}}{q+1} + c \quad c \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln  x  + c \quad c \in \mathbb{R}$
$e^x$	$e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$
$\ln x \quad a \neq 1, a > 0, x > 0$	$x(\ln x - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$

## 1.5.6 Primitives de fonctions particulières

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{a^2+x^2} \quad a \neq 0$	$\frac{1}{a} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad c \in \mathbb{R}$
$a^x \quad a \neq 1, a > 0$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad c \in \mathbb{R}$
$\log_a x \quad a \neq 1, a > 0, x > 0$	$x(\log_a x - \log_a e) + c \quad c \in \mathbb{R}$

### 1.5.7 Règles d'intégration

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle  $I$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$\int g(f(x)) * f'(x) dx = G(f(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Où  $G$  est une primitive de  $g$ .



## 1.6 Applications des dérivées