# Aide mémoire 2021

Léo Bernard

August 20, 2021

# Contents

# Chapitre 1

# Analyse

## 1.1 Notions de bases

### 1.1.1 Introduction

On désigne par $\varnothing$ **l'ensemble vide.** $\mathbb{N}$ **l'ensemble des entiers naturels,** $\mathbb{Z}$ **l'anneau des entiers relatifs,** $\mathbb{Q}$ **le corps des nombres rationnels, et** $\mathbb{R}$ **le corps des nombres réels.** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étant l'ensemble des **Nombres irrationnels.** On a donc les inclusions suivantes :

$$\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Par définition, on ajoute $^*$ pour signifier que le zéro est non compris dans l'ensemble, $_+$ pour signifier que l'ensemble ne contient que des positifs, $_-$ pour signifier que l'ensemble ne contient que des négatifs.

### 1.1.2 Intervalle

**Définition.** *Un sous ensemble $I \neq \varnothing$ de $\mathbb{R}$ est appelé un* ***intervalle*** *si pour tout couple $(a, b) \in I \times I$ vérifiant $a \leq b$, la relation $a \leq x \leq b$ implique $x \in I$.*

Il en découle une suite de notations :

#### Intervalles bornés

Intervalle ouvert : $]a;b[\ = x \in \mathbb{R} : a < x < b$
Intervalle fermé : $[a;b]\ = x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$
Intervalle semi-ouvert à gauche : $]a;b]\ = x \in \mathbb{R} : a < x \leq b$
Intervalle semi-ouvert à droite : $[a;b[\ = x \in \mathbb{R} : a \leq x < b$

#### Intervalles non bornés

Intervalle ouvert : $]-\infty;a[\ = x \in \mathbb{R} : x < a$
Intervalle ouvert : $]a;+\infty[\ = x \in \mathbb{R} : x > a$

Intervalle fermé : $]-\infty;a]\ = x \in \mathbb{R} : x \leq a$
Intervalle fermé : $[a;+\infty[\ = x \in \mathbb{R} : x \geq a$

### 1.1.3 Valeur absolue

**Définition.** *A tout nombre réel $x$, on peut associer le nombre réel positif ou nul défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x > 0 \\ -x \ si \ x \leq 0 \end{cases}$$

*$|x|$ est appelé la **valeur absolue** de $x$.*

### 1.1.4 Partie entière

**Définition.** *A tout nombre réel $x$, on peut associer un unique entier relatif $[x]$ tel que :*

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

*$[x]$ est appelé la **partie entière** de $x$, soit le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$.*

## 1.2 Fonction réelle

Soit $A$ et $B$ deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. On appelle fonction réelle une relation qui lie un élément $x$ de $A$ à un élément y ($f(x)$, la valeur de $f$ en $x$) dans $B$.

**Remarque.** *On appelle $A$ l'ensemble de départ et $B$ l'ensemble d'arrivée.*

**Remarque.** *$x$ est aussi appelé la préimage de $y$ par $f$.*

**Remarque.** *L'ensemble des valeurs de $f$ est noté $Im(f)$.*

**Remarque.** *Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont dites égales si elles ont les mêmes ensembles d'arrivée et de départ, et si $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$.*
*On note alors $f = g$.*

### 1.2.1 Représentation graphique

On représente une fonction en dessinant l'ensemble des points de coordonnées $(a; f(a))$. Ce dessin est appelé **graphe de** $f$.

**Remarque.** *On appelle le nombre $a$* ***zéro*** *de $f$ si $f(a) = 0$. son ensemble correspond à l'ensemble des points ou le graphe de $f$ intersecte $O_x$*

### 1.2.2 Parité d'une fonction

Si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définiton de $f$, on dit que $f$ est une **fonction paire**.
Si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définiton de $f$, on dit que $f$ est une **fonction impaire**.

**Remarque.** *Le graphe d'une fontion paire est symétrique à l'axe $O_y$, et Le graphe d'une fontion impaire est symétrique à l'origine.*

### 1.2.3 Périodicité d'une fonction

Une fonction est dite de **période p** si il existe un nombre $p > 0$ tel que $f(x + kp) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

**Remarque.** *Le graphe d'une fonction périodique est un motif qui se répète indéfiniment par translation horizontale (d'amplitude p).*

### 1.2.4 Croissance et décroissance d'une fonction

Pour tout $x_1, x_2 \quad \in I$ on dit que :

- Une fonction $f$ est **croissante** sur un intervalle $I$ si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- Une fonction $f$ est **strictement croissante** sur un intervalle $I$ si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Une fonction $f$ est **décroissante** sur un intervalle $I$ si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- Une fonction $f$ est **strictement décroissante** sur un intervalle $I$ si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

### 1.2.5 Maximum et minimum d'une fonction

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle

- $f(a)$ est un **maximum local** de $f$ si il existe un intervalle ouvert $I$ contenant $a$ tel que :

$$\forall x \in I \cap A : f(x) \leq f(a)$$

  On dit aussi que $f$ admet un maximum en $a$.

- $f(a)$ est un **minimum local** de $f$ si il existe un intervalle ouvert $I$ contenant $b$ tel que :

$$\forall x \in I \cap A : f(x) \geq f(b)$$

  On dit aussi que $f$ admet un minimum en $b$.

- $f(a)$ est un **maximum absolu** de $f$ si :

$$\forall x \in A : f(x) \leq f(a)$$

- $f(a)$ est un **minimum absolu** de $f$ si :

$$\forall x \in A : f(x) \geq f(a)$$

**Remarque.** *Le nom **extremum** peut être aussi utilisé à la place de maximum ou minimum.*

### 1.2.6 Opérations sur les fonctions

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $f : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles

- La **somme** des fonctions $f$ et $g$ est une nouvelle fonction notée $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- La **différence** des fonctions $f$ et $g$ est une nouvelle fonction notée $f - g : A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

- Le **produit** de la fonction $f$ par un nombre réel $c$ est une nouvelle fonction notée $c * f : A \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(c * f)(x) = fc * (x)$$

- Le **produit** des fonctions $f$ et $g$ est une nouvelle fonction notée $f * g : A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

- Le **quotient** des fonctions $f$ et $g$ est une nouvelle fonction notée $\frac{f}{g} : A \cap B \cap x|g(x) \neq 0 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(\tfrac{f}{g})(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)}$$

- La **composée** des fonctions $f$ et $g$ est une nouvelle fonction notée $g \circ f : x|x \in A \; et \; f(x) \in B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### 1.2.7 Injection, surjection, bijection

Soit une fonction $f\ A \to B$.

- $f$ est dite **surjective** si tout élément $y$ de $B$ est l'image par $f$ d'au minimum un élément $x$ de $A$ (au minimum une précédence pour chaque objet de $B$).
- $f$ est dite **injective** si tout élément $y$ de $B$ est l'image par $f$ d'au maximum un élément $x$ de $A$ (au maximum une précédence pour chaque objet de $B$).
- $f$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, chaque élément $y$ de $B$ est l'image par $f$ d'un unique élément $x$ de $A$.

### 1.2.8 Fonction réciproque

Soit une fonction $f\ A \to B$ bijective.
On appelle **réciproque** de $f$ notée ${}^{r}f$ ou $f^{-1}$ la fonction $f^{-1} : B \to A$ définie par :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Chaque fonction $f$ bijective peut donc avoir une fonction réciproque $f^{-1}$ tel que :

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x\ \forall x \in A$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = y\ \forall y \in B$$

## 1.3 Limites

### 1.3.1 Limite : définition

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $a$ sauf eventuellement en $a$.
Le nombre $L$ est **limite de $f$ en $a$ si** $f(x)$ est arbitrairement proche de $L$ dès que $x$ tend vers $a$, avec $x \neq a$. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

On dit que $f(x)$ tend vers $L$ quand $x$ tend vers $a$.

**Remarque.** *On peut aussi utiliser les limites sur des suites plutôt que sur des fonctions.*

### 1.3.2 Limite à droite, limite à gauche

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;d[$. Le nombre L est **limite à droite de f en a** si $\lim_{x \to a_+} f(x) = L$
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]g;a[$. Le nombre L est **limite à gauche de f en a** si $\lim_{x \to a_-} f(x) = L$

### 1.3.3 Propriétés des limites

Soit $f$ et $g$ deux fonctions admettant une limitent en $a$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) * g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[\tfrac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

### 1.3.4 Théorème des deux gendarmes

Soit $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur un intervalle ouvert $I$ contenant $a$,

sauf éventuellement en $a$.

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \in I\ /\{\text{a}\}$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$

alors $\lim_{x \to a} h(x) = L$

### 1.3.5 Critère de d'Alembert

### 1.3.6 Critère de Cauchy

### 1.3.7 Continuité

Une fonction $f$ est **continue** en $a$ si elle est définie sur une intervalle ouvert contenant $a$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Une fonction $f$ est **continue** en $a$ si elle est continue en tout point de l'intervalle $I$.
Une fonction $f$ est **continue sur un intervalle fermé** $[a; b]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle et si
$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

### 1.3.8 Limites de fonctions composées

Soit $f$ et $g$ deux fonctions.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et si de plus $g$ est continue en $L$, alors

$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(L)$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et si de plus $f(x) \neq L$ sur un intervalle ouvert

contenant $a$, sauf éventuellement $a$, alors :

$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{t \to L} g(t)$

### 1.3.9 Propriétés des fonctions continues

**Continuité de la réciproque**

Soit $I$ un intervalle et $f : I \to J$ une fonction bbijective et continue.

Alors la réciproque ${}^{r}f$ est continue sur l'intervalle $J$.

**Théorème de Bolzanno**

Si $f$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont

de signes différents, alors la fonction $f$ admet au moins un zéro dans

$[a; b]$

**Théorème de la valeur intermédiaire**

Si $f$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors pour tout

nombre $\gamma$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe

$c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \gamma$

**Théorème de Bolzanno-Weierstrass**

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est

un intervalle fermé borné

**Corollaire**

Une fonction continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ admet un

maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.

### 1.3.10 Limites infinies

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $a$, sauf éventuellement en $a$.

on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand quand x tend vers a, avec $x \neq a$.
on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x\to a}(-f(x)) = +\infty$

### 1.3.11 Propriétés des limites infinies

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L < 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}|\frac{f(x)}{g(x)}| = +\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

**Remarque.** $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 * \infty$ *et* $\infty - \infty$ *sont des formes dites indéterminées.*

### 1.3.12 Limites à l'infini

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.
On écrit $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ est arbitrairement proche de $L$ quand $x$ est suffisamment grand ou de manière équivalente, si $\lim_{t\to 0_+} f(\frac{1}{t}) = L$.
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a]$. On écrit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si $\lim_{x\to+\infty} f(-x) = L$

### 1.3.13 Asymptotes

**Définition.** *La droite d'équation $x = a$ est une* ***asymptote verticale*** *de la fonction $f$ si*
$\lim_{x\to a_+} |f(x)| = +\infty$ *ou si* $\lim_{x\to a_-} |f(x)| = +\infty$

**Définition.** *La droite d'équation $y = h_1$ est une* ***asymptote horizontale*** *de la fonction $f$ vers $+\infty$ si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = h_1$

**Définition.** *La droite d'équation $y = h_2$ est une* ***asymptote horizontale*** *de la fonction $f$ vers $-\infty$ si* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = h_2$

**Définition.** *La droite d'équation $y = h_1$ est une* ***asymptote horizontale*** *de la fonction $f$ vers $+\infty$ si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = h_1$

**Définition.** *La droite d'équation $y = mx + h$ est une* ***asymptote oblique*** *de la fonction $f$ vers $+\infty$ si*
$f(x) = mx + h + \delta(x)$ *avec* $\lim_{x\to+\infty} \delta(x) = 0$

**Définition.** *La droite d'équation $y = mx + h$ est une* ***asymptote oblique*** *de la fonction $f$ vers $-\infty$ si*
$f(x) = mx + h + \delta(x)$ *avec* $\lim_{x\to-\infty} \delta(x) = 0$

### 1.3.14 Astuces de calcul

#### Division euclidienne

Soit $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions rationnelles et $L = \lim_{x\to+b} \frac{f(x)}{g(x)} = "\frac{0}{0}"$,
avec b $\in \mathbb{R}$
On remarque dans cette situation que $f(x)$ et $g(x)$ sont divisibles par $(x - b)$ (car quand $x = b$, $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux nuls.)
Ainsi, nous pouvons mettre en évidence $(x - b)$ dans $f(x)$ et $g(x)$ grâce a une divison euclidienne (un schéma de Horner peut s'avérer pratique).

**Remarque.** *Si le reste de la division euclidienne est de zéro, il peut être intéressant de remettre $(x - b)$ en évidence dans la nouvelle limite obtenue.*

#### Règle de Bernouilli-L'Hospital

Se réferer à la définition de la règle de Bernouilli L'Hospital.
Rappel rapide :

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Avec $g$ et $g'$ non nuls, et $f$, $g$ dérivables.

**Limites remarquables**

| Fonctions Trigonométriques : | Fonctions Logarithmiques : |
|---|---|
| $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$ | $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ | $\lim_{x\to 0}(1+\frac{a}{x})^x = e^a$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{arcsin(x)}{x} = 1$ | $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+ax)}{x} = a$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$ | $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ |

## 1.4 Dérivées

### 1.4.1 Tangeante (dérivée) en $x_0$

Soit deux points M et $M_0$, définis par : $M_0(x_0; f(x_0))$ et $M(x; f(x))$.
Quand $x$ tend vers $x_0$, alors $M$ s'approche de $M_0$ et la droite $(M_0M)$ tend vers une droite limite que l'on appelle **tangeante** à f(x) en $M_0$. Cette tangeante en $x_0$ est nommée dérivée de $f$ au point $x_0$, et sa pente est donnée par la limite :

$$\boxed{f'(x_0) := m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

### 1.4.2 Nombre dérivé à gauche, à droite

La notion de limite a gauche (resp. à droite) permet de définir le nombre dérivé à gauche (resp. droite) d'une fonction en un point. Ceci nous permet de déterminer si la fonction est **dérivable en ce point** si les limites à gauche et à droite sont les mêmes.
Ainsi :

$$\boxed{f'(x_0) \text{ existe si : } = \lim_{x \to x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

*(notons ici que $x_{0-}$ et $x_{0+}$ représentent un nombre légèrement plus petit que x, et resp. un nombre légèrement plus grand que x.)*

### 1.4.3 Point anguleux, à tangeante verticale, de rebroussement

- Le graphe d'une fonction $f$ admet un **point anguleux en a** si $f$ est continue en $a$ et si :

$$\boxed{\lim_{x \to a_-} f'(x) \neq \lim_{x \to a_+} f'(x)}$$

*(si la fonction $f$ est continue en $a$ mais non dérivable en $a$ alors $f$ admet un point anguleux en a.)*

- Le graphe d'une fonction $f$ admet une **tangeante verticale en a** si $f$ est continue en $a$ et si :

$$\boxed{\lim_{x \to a_-} |f'(x)| = +\infty}$$

*ce point est un **point de rebroussement** si de plus la limite* $\lim_{x \to a_-} f'(x)$ *n'existe pas.*

### 1.4.4 fonction dérivée

**Définition.** *Une fonction $f$ est **dérivable** sur une partie de $A$ sur $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout points de $A$. On définit la fonction dérivée par :*

$$\begin{array}{c} f' : A \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{array}$$

**Dérivées de fonction élémentaires**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c$ | $0$ |
| $x$ | $1$ |
| $x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$ | $n * x^{n-1}$ |
| $e^u$ | $u'e^u$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2} \quad x \neq 0$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0$ |
| $cos(x)$ | $-sin(x)$ |
| $\|x\|$ | $sgn(x) \quad x \neq 0$ |

**Dérivées de fonction particulières**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^q \quad q \in \mathbb{Q}$ | $qx^{q-1}$ |
| $tan(x)$ | $\dfrac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$ |
| $cot(x)$ | $\dfrac{-1}{sin^2(x)} = -1 - cot^2(x)$ |
| $arcsin(x)$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $arccos(x)$ | $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $arctan(x)$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |

### 1.4.5 Dérivée d'ordre supérieur

**Définition.** *La* ***dérivée d'ordre n*** *de $f$ est la fonction $n$ fois dérivée $f^{(n)}$ définie par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$*

### 1.4.6 Règle de Bernouilli-L'Hospital

**Définition.** *Soient des fonctions $f$, $g$ telles que $f, g : ]a, b[ \to F$, dérivables telles que $g, g'$ ne s'annulent pas sur $]a, b[$. De plus, on suppose que :*

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$ *avec* $\alpha = 0, -\infty$ *ou* $+\infty$*;*
- $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, avec* $L \in \mathbb{R} \cup -\infty, +\infty$

*Alors,*

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$$

**Remarque.** *cette règle reste valable quand $x$ tend vers b-, a+, -$\infty$ ou +$\infty$*

### 1.4.7 Propriétés utiles

| |
|---|
| Toute fonction dérivable en $a$ est continue en $a$ |

| |
|---|
| Si la fonction $f$ est dérivable en $a$ et admet un extremum en $a$, alors $f'(a) = 0$ |

**Théorème de Rolle**

| |
|---|
| Si $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$, et dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un nombre c dans $]a; b[$ t.q. $f'(c) = 0$ |

*(Il existe entre les points A et B de "même hauteur" un point ayant une tangeante horizontale.)*

**Théorème des accroisements finis (TAF)**

Si $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, et dérivable

sur l'intervalle $]a;b[$ alors il existe au moins un nombre c

dans $]a;b[$ t.q. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

*(Il existe entre les points A et B un point ayant une tangeante parrallèle à la droite AB.)*

### 1.4.8 Règles de dérivation

Soit $f$ et $g$ deux fonction dérivables en $a$. Soit $c \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{gathered}(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \\ (f-g)'(a) = f'(a) - g'(a) \\ (c*f)'(a) = c*f'(a) \\ (f*g)'(a) = f'(a)*g(x) + f(a)*g'(a) \\ (\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)*g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}\end{gathered}}$$

Si $f$ est une fonction dérivable en $a$ et g une fonction dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en $a$ et :

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) * f'(a)}$$

**Exemple.** *On "dérive en boîtes" :*

$\rightarrow sin^2(2x)' =$

1 *Dériver le carré :* $2sin(2x)$
2 *Dériver le sinus :* $cos(2x)$
3 *Dériver 2x :* $2$
4 *Multiplier chaque partie entre elles :* $2sin(2x)*cos(2x)*2 = 4sin(2x)cos(2x)$

# 1.5 Intégrales

## 1.5.1 Primitives d'une fonction

**Définition.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ (une partie de $\mathbb{R}$). Une fonction dérivable $F$ est une **primitive** de $f$ sur $I$ si*
*$F'(x) = f(x) \forall x \in I$.*

On désigne généralement par $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de $f$ sur $I$. On l'appelle **intégrale indéfinie** de f.
**Intégrer** une fonction $f$ sur un intervalle $I$ c'est chercher toutes les primiteives de $f$ sur $I$.
Si $F$ est primitive de $f$ sur $I$, alors toute primitive de $f$ est de la forme $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{c}$, avec $c \in \mathbb{R}$. On convient d'écrire :

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

**Primitives de fonctions élémentaires**

| $f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|
| $a$ | $ax + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $x^q \;\; q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ | $\frac{x^{q+1}}{q+1} + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln \lvert x \rvert + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $\ln\, x \quad a \neq 1, a > 0, x > 0$ | $x(\ln\, x - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $cos(x)$ | $sin(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $sin(x)$ | $-cos(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$ |

**Primitives de fonctions particulières**

| $f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|
| $\frac{1}{a^2+x^2} \quad a \neq 0$ | $\frac{1}{a} Arctg(\frac{x}{a}) + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $a^x \quad a \neq 1, a > 0$ | $\frac{a^x}{ln(a)} + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $log_a x \quad a \neq 1, a > 0, x > 0$ | $x(log_a x - log_a e) + c \quad c \in \mathbb{R}$ |

### 1.5.2 Règles d'intégration

Soit $f$ et $g$ deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle $I$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int g(f(x)) * f'(x)dx = G(f(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Où $G$ est une primitive de $g$.

## 1.6 Applications des dérivées