Aide mémoire 2021

Léo Bernard

June 25, 2021

Contents

Chapitre 1

Analyse

1.1 Notions de bases

1.1.1 Fonction réelle

Soit A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. On appelle fonction réelle une relation qui lie un élément x de A à un élément y ($f(x)$, la valeur de f en x) dans B.

Remarque. *On appelle A l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée.*

Remarque. *x est aussi appelé la préimage de y par f.*

Remarque. *L'ensemble des valeurs de f est noté $Im(f)$.*

Remarque. *Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont dites égales si elles ont les mêmes ensembles d'arrivée et de départ, et si $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$.*
On note alors $f = g$.

1.1.2 Représentation graphique

On représente une fonction en dessinant l'ensemble des points de coordonnées $(a; f(a))$. Ce dessin est appelé **graphe de** f.

Remarque. *On appelle le nombre a **zéro** de f si $f(a) = 0$. son ensemble correspond à l'ensemble des points ou le graphe de f intersecte O_x*

1.1.3 Parité d'une fonction

Si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définiton de f, on dit que f est une **fonction paire**.
Si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définiton de f, on dit que f est une **fonction impaire**.

Remarque. *Le graphe d'une fontion paire est symétrique à l'axe O_y, et Le graphe d'une fontion impaire est symétrique à l'origine.*

1.1.4 Périodicité d'une fonction

Une fonction est dite de **période p** si il existe un nombre $p > 0$ tel que $f(x + kp) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Remarque. *Le graphe d'une fonction périodique est un motif qui se répète indéfiniment par translation horizontale (d'amplitude p).*

1.1.5 Croissance et décroissance d'une fonction

Pour tout $x_1, x_2 \quad \in I$ on dit que :

- Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- Une fonction f est **strictement croissante** sur un intervalle I si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- Une fonction f est **strictement décroissante** sur un intervalle I si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

1.1.6 Maximum et minimum d'une fonction

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle

- $f(a)$ est un **maximum local** de f si il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que :

$$\forall x \in I \cap A : \ f(x) \leq f(a)$$

  On dit aussi que f admet un maximum en a.

- $f(a)$ est un **minimum local** de f si il existe un intervalle ouvert I contenant b tel que :

$$\forall x \in I \cap A : \ f(x) \geq f(b)$$

  On dit aussi que f admet un minimum en b.

- $f(a)$ est un **maximum absolu** de f si :

$$\forall x \in A : \ f(x) \leq f(a)$$

- $f(a)$ est un **minimum absolu** de f si :

$$\forall x \in A : \ f(x) \geq f(a)$$

Remarque. *Le nom **extremum** peut être aussi utilisé à la place de maximum ou minimum.*

1.1.7 Opérations sur les fonctions

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $f : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles

- La **somme** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- La **différence** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f - g : A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

- Le **produit** de la fonction f par un nombre réel c est une nouvelle fonction notée $c * f : A \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(c * f)(x) = fc * (x)$$

- Le **produit** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f * g : A \cap B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

- Le **quotient** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $\frac{f}{g} : A \cap B \cap x|g(x) \neq 0 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(\tfrac{f}{g})(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)}$$

- La **composée** des fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $g \circ f : x|x \in A\ et\ f(x) \in B \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

1.1.8 Injection, surjection, bijection

Soit une fonction $f\ A \to B$.

- f est dite **surjective** si tout élément y de B est l'image par f d'au minimum un élément x de A (au minimum une précédence pour chaque objet de B).
- f est dite **injective** si tout élément y de B est l'image par f d'au maximum un élément x de A (au maximum une précédence pour chaque objet de B).
- f est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, chaque élément y de B est l'image par f d'un unique élément x de A.

1.1.9 Fonction réciproque

Soit une fonction $f\ A \to B$ bijective.
On appelle **réciproque** de f notée ${}^r f$ ou f^{-1} la fonction $f^{-1} : B \to A$ définie par :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Chaque fonction f bijective peut donc avoir une fonction réciproque f^{-1} tel que :

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x\ \forall x \in A$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = y\ \forall y \in B$$

1.2 Limites

1.2.1 Limite : définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a sauf eventuellement en a.
Le nombre L est **limite de f en a si** $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x tend vers a, avec $x \neq a$. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a.

1.2.2 Limite à droite, limite à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; d[$. Le nombre L est **limite à droite de f en a** si $\lim_{x \to a_+} f(x) = L$
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]g; a[$. Le nombre L est **limite à gauche de f en a** si $\lim_{x \to a_-} f(x) = L$

1.2.3 Propriétés des limites

Soit f et g deux fonctions admettant une limitent en a et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) * g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

1.2.4 Théorème des deux gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a,

sauf éventuellement en a.

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \in I\ /\{\text{a}\}$ et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$

alors $\lim_{x\to a} h(x) = L$

1.2.5 Continuité

Une fonction f est **continue** en a si elle est définie sur une intervalle ouvert contenant a et si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
Une fonction f est **continue** en a si elle est continue en tout point de l'intervalle I.
Une fonction f est **continue sur un intervalle fermé** $[a; b]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle et si
$\lim_{x\to a_+} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x\to b_-} f(x) = f(b)$.

1.2.6 Limites de fonctions composées

Soit f et g deux fonctions.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ et si de plus g est continue en L, alors

$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(L)$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ et si de plus $f(x) \neq L$ sur un intervalle ouvert

contenant a, sauf éventuellement a, alors :

$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{t\to L} g(t)$

1.2.7 Propriétés des fonctions continues

Continuité de la réciproque

Soit I un intervalle et $f : I \to J$ une fonction bbijective et continue.

Alors la réciproque ${}^{r}f$ est continue sur l'intervalle J.

Théorème de Bolzanno

Si f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont

de signes différents, alors la fonction f admet au moins un zéro dans

$[a; b]$

Théorème de la valeur intermédiaire

Si f est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors pour tout

nombre γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe

$c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \gamma$

Théorème de Bolzanno-Weierstrass

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est

un intervalle fermé borné

Corollaire

Une fonction continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ admet un

maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.

1.2.8 Limites infinies

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a.

on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est arbitrairement grand quand x tend vers a, avec $x \neq a$.
on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x\to a}(-f(x)) = +\infty$

1.2.9 Propriétés des limites infinies

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L < 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}|\frac{f(x)}{g(x)}| = +\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Remarque. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 * \infty$ *et* $\infty - \infty$ *sont des formes dites indéterminées.*

1.2.10 Limites à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.
On écrit $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ est arbitrairement proche de L quand x est suffisamment grand ou de manière équivalente, si $\lim_{t\to 0_+} f(\frac{1}{t}) = L$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a]$. On écrit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si $\lim_{x\to+\infty} f(-x) = L$

1.2.11 Asymptotes

Définition. *La droite d'équation* $x = a$ *est une* ***asymptote verticale*** *de la fonction* f *si*
$\lim_{x\to a_+} |f(x)| = +\infty$ *ou si* $\lim_{x\to a_-} |f(x)| = +\infty$

Définition. *La droite d'équation* $y = h_1$ *est une* ***asymptote horizontale*** *de la fonction* f *vers* $+\infty$ *si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = h_1$

Définition. *La droite d'équation* $y = h_2$ *est une* ***asymptote horizontale*** *de la fonction* f *vers* $-\infty$ *si* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = h_2$

Définition. *La droite d'équation* $y = h_1$ *est une* ***asymptote horizontale*** *de la fonction* f *vers* $+\infty$ *si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = h_1$

Définition. *La droite d'équation* $y = mx + h$ *est une* ***asymptote oblique*** *de la fonction* f *vers* $+\infty$ *si*
$f(x) = mx + h + \delta(x)$ *avec* $\lim_{x\to+\infty} \delta(x) = 0$

Définition. *La droite d'équation* $y = mx + h$ *est une* ***asymptote oblique*** *de la fonction* f *vers* $-\infty$ *si*
$f(x) = mx + h + \delta(x)$ *avec* $\lim_{x\to-\infty} \delta(x) = 0$

1.3 Dérivées

1.3.1 Tangeante (dérivée) en x_0

Soit deux points M et M_0, définis par : $M_0(x_0; f(x_0))$ et $M(x; f(x))$.
Quand x tend vers x_0, alors M s'approche de M_0 et la droite (M_0M) tend vers une droite limite que l'on appelle **tangeante** à f(x) en M_0. Cette tangeante en x_0 est nommée dérivée de f au point x_0, et sa pente est donnée par la limite :

$$\boxed{f'(x_0) := m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

1.3.2 Nombre dérivé à gauche, à droite

La notion de limite a gauche (resp. à droite) permet de définir le nombre dérivé à gauche (resp. droite) d'une fonction en un point. Ceci nous permet de déterminer si la fonction est **dérivable en ce point** si les limites à gauche et à droite sont les mêmes.
Ainsi :

$$\boxed{f'(x_0) \text{ existe si : } = \lim_{x \to x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

(notons ici que x_{0-} et x_{0+} représentent un nombre légèrement plus petit que x, et resp. un nombre légèrement plus grand que x.)

1.3.3 Point anguleux, à tangeante verticale, de rebroussement

- Le graphe d'une fonction f admet un **point anguleux en a** si f est continue en a et si :

$$\boxed{\lim_{x \to a_-} f'(x) \neq \lim_{x \to a_+} f'(x)}$$

(si la fonction f est continue en a mais non dérivable en a alors f admet un point anguleux en a.)

- Le graphe d'une fonction f admet une **tangeante verticale en a** si f est continue en a et si :

$$\boxed{\lim_{x\to a_-} |f'(x)| = +\infty}$$

ce point est un ***point de rebroussement*** *si de plus la limite* $\lim_{x\to a_-} f'(x)$ *n'existe pas.*

1.3.4 fonction dérivée

Définition. *Une fonction f est* ***dérivable*** *sur une partie de A sur $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout points de A. On définit la fonction dérivée par :*

$$f' : A \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x)$$

Dérivées de fonction élémentaires

$f(x)$		$f'(x)$	
c		0	
x		1	
x^n	$n \in \mathbb{N}^*$	$n * x^{n-1}$	
$\frac{1}{x}$		$-\dfrac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$		$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$cos(x)$		$-sin(x)$	
$\lvert x \rvert$		$sgn(x)$	$x \neq 0$

Dérivées de fonction particulières

$f(x)$		$f'(x)$
x^q	$q \in \mathbb{Q}$	qx^{q-1}
$tan(x)$		$\dfrac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$
$cot(x)$		$\dfrac{-1}{sin^2(x)} = -1 - cot^2(x)$
$arcsin(x)$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$		$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$		$\dfrac{1}{1+x^2}$

1.3.5 Dérivée d'ordre supérieur

Définition. *La **dérivée d'ordre n** de f est la fonction n fois dérivée $f^{(n)}$ définie par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$*

1.3.6 Propriétés utiles

Toute fonction dérivable en a est continue en a

Si la fonction f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors $f'(a) = 0$

Théorème de Rolle

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$, et dérivable sur

l'intervalle $]a; b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins

un nombre c dans $]a; b[$ t.q. $f'(c) = 0$

(Il existe entre les points A et B de "même hauteur" un point ayant une tangeante horizontale.)

Théorème des accroisements finis (TAF)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, et dérivable

sur l'intervalle $]a;b[$ alors il existe au moins un nombre c

dans $]a;b[$ t.q. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(Il existe entre les points A et B un point ayant une tangeante parrallèle à la droite AB.)

1.3.7 Règles de dérivation

Soit f et g deux fonction dérivables en a. Soit $c \in \mathbb{R}$

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

$$(c * f)'(a) = c * f'(a)$$

$$(f * g)'(a) = f'(a) * g(x) + f(a) * g'(a)$$

$$(\tfrac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)*g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Si f est une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) * f'(a)$$

Exemple. *On "dérive en boîtes" :*

$\rightarrow sin^2(2x)' =$

1 *Dériver le carré :* $2sin(2x)$
2 *Dériver le sinus :* $cos(2x)$
3 *Dériver 2x :* 2
4 *Multiplier chaque partie entre elles :*$2sin(2x)*cos(2x)*2 = 4sin(2x)cos(2x)$

1.3.8 Primitives d'une fonction

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I (une partie de $\mathbb{R}$). Une fonction dérivable F est une* ***primitive*** *de f sur I si*
$F'(x) = f(x) \forall x \in I$.

On désigne généralement par $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de f sur I. On l'appelle **intégrale indéfinie** de f.
Intégrer une fonction f sur un intervalle I c'est chercher toutes les primiteives de f sur I.
Si F est primitive de f sur I, alors toute primitive de f est de la forme $F(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. On convient d'écrire :

$$\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

1.4 Applications des dérivées