

# Aide mémoire 2021

Léo Bernard

August 23, 2021



# Contents

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Analyse</b>                                      | <b>5</b> |
| 1.1      | Notions de bases . . . . .                          | 5        |
| 1.1.1    | Introduction . . . . .                              | 5        |
| 1.1.2    | Intervalle . . . . .                                | 5        |
| 1.1.3    | Valeur absolue . . . . .                            | 6        |
| 1.1.4    | Partie entière . . . . .                            | 6        |
| 1.2      | Fonction réelle . . . . .                           | 7        |
| 1.2.1    | Représentation graphique . . . . .                  | 7        |
| 1.2.2    | Parité d'une fonction . . . . .                     | 8        |
| 1.2.3    | Périodicité d'une fonction . . . . .                | 8        |
| 1.2.4    | Croissance et décroissance d'une fonction . . . . . | 8        |
| 1.2.5    | Maximum et minimum d'une fonction . . . . .         | 9        |
| 1.2.6    | Opérations sur les fonctions . . . . .              | 10       |
| 1.2.7    | Injection, surjection, bijection . . . . .          | 11       |
| 1.2.8    | Fonction réciproque . . . . .                       | 11       |
| 1.3      | Limites . . . . .                                   | 12       |
| 1.3.1    | Limite : définition . . . . .                       | 12       |
| 1.3.2    | Limite à droite, limite à gauche . . . . .          | 12       |
| 1.3.3    | Propriétés des limites . . . . .                    | 12       |
| 1.3.4    | Théorème des deux gendarmes . . . . .               | 13       |
| 1.3.5    | Critère de d'Alembert . . . . .                     | 13       |
| 1.3.6    | Critère de Cauchy . . . . .                         | 13       |
| 1.3.7    | Continuité . . . . .                                | 13       |
| 1.3.8    | Limites de fonctions composées . . . . .            | 13       |
| 1.3.9    | Propriétés des fonctions continues . . . . .        | 14       |
| 1.3.10   | Limites infinies . . . . .                          | 15       |
| 1.3.11   | Propriétés des limites infinies . . . . .           | 15       |
| 1.3.12   | Limites à l'infini . . . . .                        | 15       |
| 1.3.13   | Asymptotes . . . . .                                | 16       |
| 1.3.14   | Astuces de calcul . . . . .                         | 16       |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1.4   | Dérivées . . . . .                                     | 18 |
| 1.4.1 | Tangente (dérivée) en $x_0$ . . . . .                  | 18 |
| 1.4.2 | Nombre dérivé à gauche, à droite . . . . .             | 18 |
| 1.4.3 | Point anguleux, à tangente verticale, de rebroussement | 18 |
| 1.4.4 | fonction dérivée . . . . .                             | 19 |
| 1.4.5 | Dérivée d'ordre supérieur . . . . .                    | 21 |
| 1.4.6 | Règle de Bernoulli-L'Hospital . . . . .                | 21 |
| 1.4.7 | Propriétés utiles . . . . .                            | 21 |
| 1.4.8 | Règles de dérivation . . . . .                         | 23 |
| 1.5   | Intégrales . . . . .                                   | 24 |
| 1.5.1 | Introduction . . . . .                                 | 24 |
| 1.5.2 | Primitives d'une fonction . . . . .                    | 25 |
| 1.5.3 | Intégration par parties . . . . .                      | 25 |
| 1.5.4 | Changement de variable . . . . .                       | 25 |
| 1.5.5 | Règles d'intégration . . . . .                         | 28 |
| 1.6   | Applications des dérivées . . . . .                    | 29 |

# Chapitre 1

## Analyse

### 1.1 Notions de bases

#### 1.1.1 Introduction

On désigne par  $\emptyset$  l'ensemble vide.  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'anneau des entiers relatifs,  $\mathbb{Q}$  le corps des nombres rationnels, et  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels.  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  étant l'ensemble des Nombres irrationnels. On a donc les inclusions suivantes :

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Par définition, on ajoute \* pour signifier que le zéro est non compris dans l'ensemble, + pour signifier que l'ensemble ne contient que des positifs, – pour signifier que l'ensemble ne contient que des négatifs.

#### 1.1.2 Intervalle

**Définition.** Un sous ensemble  $I \neq \emptyset$  de  $\mathbb{R}$  est appelé un ***intervalle*** si pour tout couple  $(a, b) \in I \times I$  vérifiant  $a \leq b$ , la relation  $a \leq x \leq b$  implique  $x \in I$ .

Il en découle une suite de notations :

### Intervalles bornés

Intervalle ouvert :  $]a; b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Intervalle fermé :  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Intervalle semi-ouvert à gauche :  $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Intervalle semi-ouvert à droite :  $[a; b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

### Intervalles non bornés

Intervalle ouvert :  $] - \infty; a[ = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Intervalle ouvert :  $]a; +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

Intervalle fermé :  $] - \infty; a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

Intervalle fermé :  $[a; +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

### 1.1.3 Valeur absolue

**Définition.** *A tout nombre réel  $x$ , on peut associer le nombre réel positif ou nul défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$|x|$  est appelé la **valeur absolue** de  $x$ .

### 1.1.4 Partie entière

**Définition.** *A tout nombre réel  $x$ , on peut associer un unique entier relatif  $[x]$  tel que :*

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$[x]$  est appelé la **partie entière** de  $x$ , soit le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ .

## 1.2 Fonction réelle

Soit  $A$  et  $B$  deux sous ensembles de  $\mathbb{R}$ . On appelle fonction réelle une relation qui lie un élément  $x$  de  $A$  à un élément  $y$  ( $f(x)$ , la valeur de  $f$  en  $x$ ) dans  $B$ .

**Remarque.** On appelle  $A$  l'ensemble de départ et  $B$  l'ensemble d'arrivée.

**Remarque.**  $x$  est aussi appelé la préimage de  $y$  par  $f$ .

**Remarque.** L'ensemble des valeurs de  $f$  est noté  $Im(f)$ .

**Remarque.** Deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  sont dites égales si elles ont les mêmes ensembles d'arrivée et de départ, et si  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$ .  
On note alors  $f = g$ .

### 1.2.1 Représentation graphique

On représente une fonction en dessinant l'ensemble des points de coordonnées  $(a; f(a))$ . Ce dessin est appelé **graphe de  $f$** .

**Remarque.** On appelle le nombre  $a$  **zéro** de  $f$  si  $f(a) = 0$ . son ensemble correspond à l'ensemble des points où le graphe de  $f$  intersecte  $O_x$

### 1.2.2 Parité d'une fonction

Si  $f(-x) = f(x)$  pour tout  $x$  de l'ensemble de définition de  $f$ , on dit que  $f$  est une **fonction paire**.

Si  $f(-x) = -f(x)$  pour tout  $x$  de l'ensemble de définition de  $f$ , on dit que  $f$  est une **fonction impaire**.

**Remarque.** *Le graphe d'une fonction paire est symétrique à l'axe  $O_y$ , et Le graphe d'une fonction impaire est symétrique à l'origine.*

### 1.2.3 Périodicité d'une fonction

Une fonction est dite de **période  $p$**  si il existe un nombre  $p > 0$  tel que  $f(x + kp) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

**Remarque.** *Le graphe d'une fonction périodique est un motif qui se répète indéfiniment par translation horizontale (d'amplitude  $p$ ).*

### 1.2.4 Croissance et décroissance d'une fonction

Pour tout  $x_1, x_2 \in I$  on dit que :

- Une fonction  $f$  est **croissante** sur un intervalle  $I$  si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- Une fonction  $f$  est **strictement croissante** sur un intervalle  $I$  si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Une fonction  $f$  est **décroissante** sur un intervalle  $I$  si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- Une fonction  $f$  est **strictement décroissante** sur un intervalle  $I$  si :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



### 1.2.5 Maximum et minimum d'une fonction

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle

- $f(a)$  est un **maximum local** de  $f$  si il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $a$  tel que :

$$\forall x \in I \cap A : f(x) \leq f(a)$$

On dit aussi que  $f$  admet un maximum en  $a$ .

- $f(a)$  est un **minimum local** de  $f$  si il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $a$  tel que :

$$\forall x \in I \cap A : f(x) \geq f(a)$$

On dit aussi que  $f$  admet un minimum en  $a$ .

- $f(a)$  est un **maximum absolu** de  $f$  si :

$$\forall x \in A : f(x) \leq f(a)$$

- $f(a)$  est un **minimum absolu** de  $f$  si :

$$\forall x \in A : f(x) \geq f(a)$$

**Remarque.** Le nom ***extremum*** peut être aussi utilisé à la place de *maximum* ou *minimum*.

### 1.2.6 Opérations sur les fonctions

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions réelles

- La **somme** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $f + g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- La **différence** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $f - g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

- Le **produit** de la fonction  $f$  par un nombre réel  $c$  est une nouvelle fonction notée  $c * f : A \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(c * f)(x) = f(x) * c$$

- Le **produit** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $f * g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

- Le **quotient** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $\frac{f}{g} : A \cap B \cap \{x | g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- La **composée** des fonctions  $f$  et  $g$  est une nouvelle fonction notée  $g \circ f : x | x \in A \text{ et } f(x) \in B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### 1.2.7 Injection, surjection, bijection

Soit une fonction  $f : A \rightarrow B$ .

- $f$  est dite **surjective** si tout élément  $y$  de  $B$  est l'image par  $f$  d'au minimum un élément  $x$  de  $A$  (au minimum une précedence pour chaque objet de  $B$ ).
- $f$  est dite **injective** si tout élément  $y$  de  $B$  est l'image par  $f$  d'au maximum un élément  $x$  de  $A$  (au maximum une précedence pour chaque objet de  $B$ ).
- $f$  est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, chaque élément  $y$  de  $B$  est l'image par  $f$  d'un unique élément  $x$  de  $A$ .

### 1.2.8 Fonction réciproque

Soit une fonction  $f : A \rightarrow B$  bijective.

On appelle **réciproque** de  $f$  notée  ${}^r f$  ou  $f^{-1}$  la fonction  $f^{-1} : B \rightarrow A$  définie par :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Chaque fonction  $f$  bijective peut donc avoir une fonction réciproque  $f^{-1}$  telle que :

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= x \quad \forall x \in A \\ (f \circ f^{-1})(y) &= y \quad \forall y \in B \end{aligned}$$

## 1.3 Limites

### 1.3.1 Limite : définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$  sauf éventuellement en  $a$ .

Le nombre  $L$  est **limite de  $f$  en  $a$  si**  $f(x)$  est arbitrairement proche de  $L$  dès que  $x$  tend vers  $a$ , avec  $x \neq a$ . On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

On dit que  $f(x)$  tend vers  $L$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

**Remarque.** On peut aussi utiliser les limites sur des suites plutôt que sur des fonctions.

### 1.3.2 Limite à droite, limite à gauche

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a; d[$ . Le nombre  $L$  est **limite à droite de  $f$  en  $a$  si**  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]g; a[$ . Le nombre  $L$  est **limite à gauche de  $f$  en  $a$  si**  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$

### 1.3.3 Propriétés des limites

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant une limite en  $a$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

### 1.3.4 Théorème des deux gendarmes

Soit  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle ouvert  $I$  contenant  $a$ ,

sauf éventuellement en  $a$ .

Si  $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \in I \setminus \{a\}$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

alors  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

### 1.3.5 Critère de d'Alembert

### 1.3.6 Critère de Cauchy

### 1.3.7 Continuité

Une fonction  $f$  est **continue** en  $a$  si elle est définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Une fonction  $f$  est **continue** en  $a$  si elle est continue en tout point de l'intervalle  $I$ .

Une fonction  $f$  est **continue sur un intervalle fermé**  $[a; b]$  si elle est continue en tout point de l'intervalle et si

$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$ .

### 1.3.8 Limites de fonctions composées

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  et si de plus  $g$  est continue en  $L$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(L)$$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  et si de plus  $f(x) \neq L$  sur un intervalle ouvert

contenant  $a$ , sauf éventuellement  $a$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow L} g(t)$$

### 1.3.9 Propriétés des fonctions continues

#### Continuité de la réciproque

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow J$  une fonction bijective et continue.

Alors la réciproque  $f^{-1}$  est continue sur l'intervalle  $J$ .

#### Théorème de Bolzano

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$  et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes différents, alors la fonction  $f$  admet au moins un zéro dans  $[a; b]$

#### Théorème de la valeur intermédiaire

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , alors pour tout nombre  $\gamma$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = \gamma$

#### Théorème de Bolzano-Weierstrass

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné

#### Corollaire

Une fonction continue sur un intervalle fermé  $[a; b]$  admet un maximum absolu et un minimum absolu sur cet intervalle.

### 1.3.10 Limites infinies

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$ , sauf éventuellement en  $a$ .

on écrit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  si  $f(x)$  est arbitrairement grand quand  $x$  tend vers  $a$ , avec  $x \neq a$ .

on écrit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = +\infty$

### 1.3.11 Propriétés des limites infinies

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

**Remarque.**  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 * \infty$  et  $\infty - \infty$  sont des formes dites indéterminées.

### 1.3.12 Limites à l'infini

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a; +\infty[$ .

On écrit  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  si  $f(x)$  est arbitrairement proche de  $L$  quand  $x$  est suffisamment grand ou de manière équivalente, si  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{t}) = L$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $] -\infty; a]$ . On écrit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = L$

### 1.3.13 Asymptotes

**Définition.** La droite d'équation  $x = a$  est une **asymptote verticale** de la fonction  $f$  si

$$\lim_{x \rightarrow a+} |f(x)| = +\infty \text{ ou si } \lim_{x \rightarrow a-} |f(x)| = +\infty$$

**Définition.** La droite d'équation  $y = h_1$  est une **asymptote horizontale** de la fonction  $f$  vers  $+\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h_1$

**Définition.** La droite d'équation  $y = h_2$  est une **asymptote horizontale** de la fonction  $f$  vers  $-\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = h_2$

**Définition.** La droite d'équation  $y = h_1$  est une **asymptote horizontale** de la fonction  $f$  vers  $+\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = h_1$

**Définition.** La droite d'équation  $y = mx + h$  est une **asymptote oblique** de la fonction  $f$  vers  $+\infty$  si

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$$

**Définition.** La droite d'équation  $y = mx + h$  est une **asymptote oblique** de la fonction  $f$  vers  $-\infty$  si

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow -\infty} \delta(x) = 0$$

### 1.3.14 Astuces de calcul

#### Division euclidienne

Soit  $f(x)$ ,  $g(x)$  deux fonctions rationnelles et  $L = \lim_{x \rightarrow +b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ , avec  $b \in \mathbb{R}$

On remarque dans cette situation que  $f(x)$  et  $g(x)$  sont divisibles par  $(x - b)$  (car quand  $x = b$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  sont tous deux nuls.)

Ainsi, nous pouvons mettre en évidence  $(x - b)$  dans  $f(x)$  et  $g(x)$  grâce à une division euclidienne (un schéma de Horner peut s'avérer pratique).

**Remarque.** Si le reste de la division euclidienne est de zéro, il peut être intéressant de remettre  $(x - b)$  en évidence dans la nouvelle limite obtenue.

#### Règle de Bernoulli-L'Hospital

Se référer à la définition de la règle de Bernoulli L'Hospital.

Rappel rapide :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Avec  $g$  et  $g'$  non nuls, et  $f$ ,  $g$  dérivables.



**Limites remarquables**

| Fonctions Trigonométriques :                                   | Fonctions Logarithmiques :                                    |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$                 | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$                |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$              | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$              |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$                 | $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$         |

## 1.4 Dérivées

### 1.4.1 Tangente (dérivée) en $x_0$

Soit deux points  $M$  et  $M_0$ , définis par :  $M_0(x_0; f(x_0))$  et  $M(x; f(x))$ . Quand  $x$  tend vers  $x_0$ , alors  $M$  s'approche de  $M_0$  et la droite  $(M_0M)$  tend vers une droite limite que l'on appelle **tangente** à  $f(x)$  en  $M_0$ . Cette tangente en  $x_0$  est nommée dérivée de  $f$  au point  $x_0$ , et sa pente est donnée par la limite :

$$f'(x_0) := m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### 1.4.2 Nombre dérivé à gauche, à droite

La notion de limite à gauche (resp. à droite) permet de définir le nombre dérivé à gauche (resp. droite) d'une fonction en un point. Ceci nous permet de déterminer si la fonction est **dérivable en ce point** si les limites à gauche et à droite sont les mêmes.

Ainsi :

$$f'(x_0) \text{ existe si : } = \lim_{x \rightarrow x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(notons ici que  $x_{0-}$  et  $x_{0+}$  représentent un nombre légèrement plus petit que  $x$ , et resp. un nombre légèrement plus grand que  $x$ .)

### 1.4.3 Point anguleux, à tangente verticale, de rebroussement

- Le graphe d'une fonction  $f$  admet un **point anguleux en  $a$**  si  $f$  est continue en  $a$  et si :

$$\lim_{x \rightarrow a-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$$

(si la fonction  $f$  est continue en  $a$  mais non dérivable en  $a$  alors  $f$  admet un point anguleux en  $a$ .)

- Le graphe d'une fonction  $f$  admet une **tangente verticale en  $a$**  si  $f$  est continue en  $a$  et si :

$$\lim_{x \rightarrow a-} |f'(x)| = +\infty$$

ce point est un **point de rebroussement** si de plus la limite  $\lim_{x \rightarrow a-} f'(x)$  n'existe pas.

#### 1.4.4 fonction dérivée

**Définition.** Une fonction  $f$  est **dérivable** sur une partie de  $A$  sur  $\mathbb{R}$  si elle est dérivable en tout points de  $A$ . On définit la fonction dérivée par :

$$\begin{aligned} f' : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x) \end{aligned}$$

## Dérivées de fonction élémentaires

| $f(x)$                         | $f'(x)$                                |
|--------------------------------|--|
| $c$                            | $0$                                    |
| $x$                            | $1$                                    |
| $x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$ | $n * x^{n-1}$                          |
| $e^u$                          | $u' e^u$                               |
| $\frac{1}{x}$                  | $-\frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$        |
| $\sqrt{x}$                     | $\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0$      |
| $\cos(x)$                      | $-\sin(x)$                             |
| $ x $                          | $\operatorname{sgn}(x) \quad x \neq 0$ |

## Dérivées de fonction particulières

| $f(x)$                       | $f'(x)$                                 |
|------------------------------|---|
| $x^q \quad q \in \mathbb{Q}$ | $qx^{q-1}$                              |
| $\tan(x)$                    | $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$   |
| $\cot(x)$                    | $\frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$ |
| $\arcsin(x)$                 | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                |
| $\arccos(x)$                 | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$               |
| $\arctan(x)$                 | $\frac{1}{1+x^2}$                       |

### 1.4.5 Dérivée d'ordre supérieur

**Définition.** La **dérivée d'ordre  $n$**  de  $f$  est la fonction  $n$  fois dérivée  $f^{(n)}$  définie par  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

### 1.4.6 Règle de Bernoulli-L'Hospital

**Définition.** Soient des fonctions  $f, g$  telles que  $f, g : ]a, b[ \rightarrow F$ , dérivables telles que  $g, g'$  ne s'annulent pas sur  $]a, b[$ . De plus, on suppose que :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$  avec  $\alpha = 0, -\infty$  ou  $+\infty$ ;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , avec  $L \in \mathbb{R} \cup -\infty, +\infty$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

**Remarque.** cette règle reste valable quand  $x$  tend vers  $b-$ ,  $a+$ ,  $-\infty$  ou  $+\infty$

### 1.4.7 Propriétés utiles

Toute fonction dérivable en  $a$  est continue en  $a$

Si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  et admet un extremum en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$

### Théorème de Rolle

Si  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , et dérivable sur

l'intervalle  $]a; b[$  et si  $f(a) = f(b)$  alors il existe au moins

un nombre  $c$  dans  $]a; b[$  t.q.  $f'(c) = 0$

(Il existe entre les points  $A$  et  $B$  de "même hauteur" un point ayant une tangente horizontale.)

### Théorème des accroissements finis (TAF)

Si  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , et dérivable  
sur l'intervalle  $]a; b[$  alors il existe au moins un nombre  $c$

$$\text{dans } ]a; b[ \text{ t.q. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*(Il existe entre les points  $A$  et  $B$  un point ayant une tangente parallèle à la droite  $AB$ .)*

### 1.4.8 Règles de dérivation

Soit  $f$  et  $g$  deux fonction dérivables en  $a$ . Soit  $c \in \mathbb{R}$

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

$$(c * f)'(a) = c * f'(a)$$

$$(f * g)'(a) = f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) * g(a) - f(a) * g'(a)}{g^2(a)}$$

Si  $f$  est une fonction dérivable en  $a$  et  $g$  une fonction dérivable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) * f'(a)$$

**Exemple.** On "dérive en boîtes" :

$$\rightarrow \sin^2(2x)' =$$

① Dériver le carré :  $2\sin(2x)$

② Dériver le sinus :  $\cos(2x)$

③ Dériver  $2x$  :  $2$

④ Multiplier chaque partie entre elles :  $2\sin(2x) * \cos(2x) * 2 = 4\sin(2x)\cos(2x)$

## 1.5 Intégrales

### 1.5.1 Introduction

Soient  $a < b$  deux éléments de  $\mathbb{R}$ . Le sous-ensemble fini et ordonné

$$\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \text{ avec } a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b$$

est appelé une **subdivision** de l'intégrale  $[a; b]$ .

#### Somme de Riemann supérieure

Soit  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  une subdivision de  $[a, b]$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

On nomme **somme de Riemann Supérieure** le nombre :

$$\bar{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

avec  $f(t_k) = \sup\{f(t), t_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$

#### Somme de Riemann inférieure

Soit  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  une subdivision de  $[a, b]$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

On nomme **somme de Riemann Inférieure** le nombre :

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

avec  $f(t_k) = \inf\{f(t), t_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$

#### Intégrale Bornée

Soit  $\underline{S}(f)$ ,  $\bar{S}(f)$ , deux nombres réels tels que :

$$\begin{aligned} \underline{S}(f) &= \inf\{\underline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\} \\ &\text{et} \\ \bar{S}(f) &= \inf\{\bar{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\} \end{aligned}$$

Soient  $a < b$  deux éléments de  $\mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Par définition, le nombre réel  $\underline{S}(f) = \bar{S}(f)$  est appelé l'**intégrale** de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  et on écrit :

$$\underline{S}_\sigma(f) = \bar{S}_\sigma(f) = \int_a^b f(x)dx$$



### 1.5.2 Primitives d'une fonction

**Définition.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  (une partie de  $\mathbb{R}$ ). Une fonction dérivable  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$  si  $F'(x) = f(x) \forall x \in I$ .

On désigne généralement par  $\int f(x)dx$  l'ensemble des primitives de  $f$  sur  $I$ . On l'appelle **intégrale indéfinie** de  $f$ .

**Intégrer** une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  c'est chercher toutes les primitives de  $f$  sur  $I$ .

Si  $F$  est primitive de  $f$  sur  $I$ , alors toute primitive de  $f$  est de la forme  $F(x) + c$ , avec  $c \in \mathbb{R}$ . On convient d'écrire :

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### Théorème fondamental du calcul intégral

Soient  $a < b$  deux éléments de  $\mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors, si  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive on écrit :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

on utilise aussi la notation :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$$

### 1.5.3 Intégration par parties

Soient  $I$  un intervalle ouvert,  $a, b \in I$  et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions telles que  $f, g$  soient dérivables sur  $I$ , et  $f', g'$  sont continues sur  $I$ . Alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ou plus généralement :

$$\int u * v' = u * v - \int u' * v$$

### 1.5.4 Changement de variable

à remplir

**Changements de variables communs / recommandés**

à remplir

**Primitives de fonctions élémentaires**

| $f(x)$  | $\int f(x)dx$                                    |
|---|--|
| $a$   | $ax + c \quad c \in \mathbb{R}$                  |
| $x^q \quad q \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ | $\frac{x^{q+1}}{q+1} + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$                                 | $\ln  x  + c \quad c \in \mathbb{R}$             |
| $e^x$   | $e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$                 |
| $\ln x \quad a \neq 1, a > 0, x > 0$          | $x(\ln x - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}$        |
| $\cos(x)$                                     | $\sin(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$             |
| $\sin(x)$                                     | $-\cos(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$            |

**Primitives de fonctions particulières**

| $f(x)$                                  | $\int f(x)dx$   |
|---|---|
| $\frac{1}{a^2+x^2} \quad a \neq 0$      | $\frac{1}{a} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad c \in \mathbb{R}$ |
| $a^x \quad a \neq 1, a > 0$             | $\frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad c \in \mathbb{R}$                                       |
| $\log_a x \quad a \neq 1, a > 0, x > 0$ | $x(\log_a x - \log_a e) + c \quad c \in \mathbb{R}$                                   |

### 1.5.5 Règles d'intégration

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle  $I$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$\int g(f(x)) * f'(x) dx = G(f(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Où  $G$  est une primitive de  $g$ .

## 1.6 Applications des dérivées