

人造地球卫星精密定轨

(研究生用教材)

刘林 王海红 胡松杰
编著

南京大学天文学系
(2005 年)

目 录

绪论	1
§1 力学模型	1
§2 参考系	2
§3 计算单位	2
§4 卫星定轨简介	2
§5 短弧定轨	3
§6 精密定轨轮廓	6
第一部分 数值法定轨中受摄星历的计算	9
第一章 常用的数值方法	13
§1.1 有关数值解法的基本知识	13
§1.2 常用的单步法 — Runge-Kutta 方法	15
§1.3 线性多步法 — Adams 方法、Cowell 方法和 KSG 积分器	19
§1.4 变量的选择与相应的基本方程	28
第二章 地球非球形引力摄动	30
§2.1 带谐项摄动加速度 $\vec{F}_1(J_l)$	31
§2.2 田谐项摄动加速度 $\vec{F}_1(J_{lm})$	32
§2.3 勒让德函数 $P_l(\mu)$ 和 $P_{lm}(\mu)$ 及其导数的递推计算	32
§2.4 坐标系转换中的旋转矩阵	33
第三章 第三体（日、月）引力摄动	36
§3.1 日月引力摄动加速度 $\vec{F}_2(m', \vec{r}')$	36
§3.2 日月位置矢量 \vec{r}' 的计算	36
第四章 潮汐形变摄动	38
第五章 轨道坐标系中的附加摄动	39
第六章 太阳光压摄动	40
§6.1 光压摄动加速度 $\vec{F}_5(\rho_s)$	40
§6.2 关于地影“间断”问题的处理	41
第七章 大气阻力摄动	42
§7.1 大气阻力摄动加速度 $\vec{F}_6(D)$	42
§7.2 大气密度 $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ 的处理	43
第二部分 分析法定轨中轨道摄动的分析解	44
第八章 地球非球形引力摄动的分析解	46
§8.1 带谐项 J_2 部分	46

§8.2	带谐项摄动 $J_l(l \geq 3)$ 部分	49
§8.3	田谐项摄动 $J_{lm}(l \geq 2, m = 1 - l)$ 部分	54
第九章	第三体（日、月）引力摄动和地球潮汐形变摄动的分析解	56
§9.1	第三体（日、月）引力摄动部分	56
§9.2	地球潮汐形变摄动部分	61
第十章	坐标系附加摄动的分析解	62
§10.1	历元地心天球坐标系中的附加摄动	62
§10.2	轨道坐标系中的附加摄动	63
第十一章	非引力摄动的分析解	65
§11.1	太阳光压摄动部分	65
§11.2	大气阻力摄动部分	68
第三部分	精密定轨计算	71
第十二章	观测量的理论计算	72
§12.1	测距型资料 ρ	73
§12.2	测速型资料 $\dot{\rho}$	73
§12.3	赤道坐标 (α, δ) 型资料	73
§12.4	地平坐标 (A, h) 型资料	74
第十三章	\tilde{B} 矩阵的计算	76
§13.1	矩阵 $\left(\frac{\partial H}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} \right)$	76
§13.2	矩阵 $\left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})}{\partial \sigma} \right)$	77
§13.3	状态转移矩阵 Φ	80
第十四章	状态估计 — 最小二乘估计在精密定轨中的应用	87
§14.1	估计理论及常用的几种最优估计方法	87
§14.2	求解条件方程的批处理方法	92
§14.3	序贯估计算法	93
§14.4	定轨计算的迭代过程及有关问题	95
第十五章	关于天地基网联合定轨问题	97
§15.1	天基网简介	97
§15.2	天地基网联合定轨的基本原理	98
§15.3	自主定轨中的亏秩问题	99
第十六章	协方差分析	102
§16.1	协方差分析的提出	102
§16.2	考察协方差矩阵及其计算公式	103
§16.3	敏感矩阵和扰动矩阵	107
§16.4	观测噪声和先验状态方差误差对批处理的影响	108

附录	110
附录一 后牛顿效应	110
附录二 在持续小喷气动力作用下的轨道变化	111
附录三 Hansen 系数的简明表达式	113
附录四 天文常数	116
附录五 地球引力场模型	117
参考文献	129

绪 论

讨论人造地球卫星的运动，总是采用地心赤道坐标系。相应的表达卫星轨道的基本变量通常有两类：一类是卫星的位置矢量 \vec{r} 和速度矢量 $\dot{\vec{r}}$ ；另一类即椭圆轨道根数，或称 Kepler 根数，常用符号 $a, e, i, \Omega, \omega, M$ 来表示，其中 a 和 e 是轨道半长径和偏心率表示椭圆的大小和形状， i 是轨道倾角，即轨道平面与地球赤道面的夹角， Ω 是升交点经度，它是从赤道平面上的春分点方向沿赤道面向东计量到轨道升交点（即卫星从南到北与赤道面的交点）的一段弧， ω 是轨道上近地点的幅角，它是从升交点沿轨道（卫星运动方向）计量到近地点的一段弧， M 称为平近点角，是按卫星平运动 n 计算从近地点起量的一种近点角，即

$$M = n(t - \tau) \quad n = \sqrt{\mu} a^{-3/2}$$

其中 $\mu = GM_e$ 是地心引力常数， τ 是卫星过近地点时刻。

由于中低轨卫星的轨道偏心率 e 通常较小，相应的 ω 和 M 两根数难以确定，为了使相应的方法和计算公式能适用于各种偏心率 ($0 \leq e < 1$)，通常采用另一类根数，即消除小偏心率困难（适用于 $0 \leq e < 1$ ）的无奇点根数：

$$a, \quad i, \quad \Omega, \quad \xi = e \cos \omega, \quad \eta = e \sin \omega, \quad \lambda = M + \omega$$

对于高轨卫星（如地球同步卫星），还会遇到偏心率 e 和轨道倾角 i 都很小的情况，此时除 ω 和 M 外， Ω 亦难以确定，这将采用另一类同时消除小偏心率和倾角困难（即适用于 $0 \leq e < 1$ 和 $0 \leq i < 180^\circ$ ）的无奇点根数：

$$a, \quad h = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega, \quad k = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega, \quad \xi = e \cos \tilde{\omega}, \quad \eta = e \sin \tilde{\omega}, \quad \lambda = M + \tilde{\omega}$$

$$\tilde{\omega} = \omega + \Omega$$

上述六个椭圆轨道根数（或无奇点根数）是随时间变化的，即卫星绕地球运动是一个变化的椭圆轨道，导致椭圆轨道变化的力学因素称为摄动因素。对于不同高度和大小（指卫星的几何尺度）的卫星以及在不同定轨精度要求下，需要考虑的摄动因素是不相同的。

§1 力学模型

对于中低轨地球卫星的运动，根据当前测量精度和定轨精度要求（关于定轨精度，除有特殊需要外，通常是 100 米量级或 10 米量级，即按标准单位 10^{-6} 考虑），在力学模型中应考虑下述六类摄动因素：

1. 地球非球形引力
2. 第三体（日、月）引力
3. 潮汐形变
4. 岁差章动和极移引起的坐标系附加摄动。
5. 太阳辐射压（简称光压）
6. 大气阻力

其中第 4 项，在历元地心天球坐标系中数值求解卫星运动方程时不再出现，而包含在第 1 项计算地球非球形引力摄动中，作为引力位的变化以坐标转换的形式出现。除上述六类外，还有卫星运行中的姿控和轨控过程出现的机动力（小到可作为摄动力处理）等。根据一般卫星星体的几何参数和运行高度，在摄动量级分析中以及建立摄动解（小参数幂级数解）时，选定地球非球形引力位中的扁率项（ J_2 项）作为小量标准，即一阶量 ε ：

$$\varepsilon = O(J_2)$$

其它各种摄动均按二阶量 $O(\varepsilon^2)$ 和三阶量 $O(\varepsilon^3)$ 处理。但根据上面提出的精度要求，标准的三阶摄动量是应被忽略的，只有一些介于二阶和三阶摄动量之间的因素或一些特殊的三阶量（如耗散因素）才有必要考虑。

对于高轨卫星，除地球同步卫星中的“静止”卫星（轨道偏心率 $e \approx 0$ 和倾角 $i \approx 0$ ），在基本变量的选择上有特殊要求外，仅仅在摄动因素的取舍方面与上述中低轨卫星有所差别。至于各摄动因素摄动量级的相应改变则不必另行处理，只要在具体引用摄动计算公式时作合理的选择即可。

§2 参考系

参考系包含时间系统、空间坐标系和相应的常数系统。

时间系统涉及以地球自转角度为依据的世界时时刻 t 和均匀的时间尺度（即不变的秒长）。前者用到 $UT1$ ，而后者即地球时 TDT ，这两者之间的联系即协调世界时 UTC ，它们之间的转换关系在相关的书籍和文献中均有详细介绍，中国天文年历中亦有这一内容，这里不再重复介绍。

空间坐标系显然是采用地心赤道坐标系，但地球赤道面是变化的，因此又有一个选择问题。根据应用情况，通常对地心赤道坐标系有如下两种选择：

1. 历元 ($J2000.0$) 地心天球坐标系，即历元地心平赤道坐标系，对应 $J2000.0$ 平赤道（ xy 坐标面）和平春分点（ x 轴方向）。
2. 轨道坐标系，即以瞬时真赤道和 $J2000.0$ 平春分点方向作为 xy 坐标面和 x 轴方向。

在这两种坐标系中，只有地球非球形引力摄动部分需要考虑由于岁差章动和极移引起的附加摄动，而在考虑其它各种摄动时，不再涉及岁差、章动和极移，因为后者涉及的联合项的摄动量级为 $O(J_2^4)$ 甚至更小。

关于常数系统，除一套天文常数外，主要涉及各力学因素对应的物理参数，特别是地球引力场参数，它与测站坐标系统有关，所有的选择必须是自洽的。

§3 计算单位

对于精密定轨问题，基本物理量有三个，即长度、质量和时间。任何一种计算单位系统或是习惯的用法，总是离不开对这三个单位的选择，从公式表达、量级分析等多方面考虑，这里建议作如下选择，即长度单位 $[L]$ ，质量单位 $[M]$ 和时间单位 $[T]$ 分别取为

$$\begin{cases} [L] = a_e & (a_e \text{ 是地球参考椭球体的赤道半径}) \\ [M] = M_e & (M_e \text{ 是地球质量}) \\ [T] = (a_e^3 / GM_e)^{1/2} \end{cases}$$

在此计算单位中，引力常数 $G = 1$ 和地心引力常数 $\mu = GM_e = 1$ 。对于低轨卫星显得更为合适，此时卫星的坐标矢量和速度矢量的大小均为 1 的量级，即小参数 ε 的零阶量 $O(\varepsilon^0)$ 。不妨称上述计算单位的选择为单位的归一化（或标准化）。

§4 卫星定轨简介

卫星定轨即轨道确定，这是测控系统的一个主要工作——测轨中的一个核心环节，定轨在天体力学或轨道力学中通常有两个概念：短弧意义下的初轨计算和长弧意义下的轨道改进（或称精密定轨）。对于前者，传统意义下的定轨模型是对应一个无摄运动的二体问题。这无论在航天任务中，还是在太阳系各种小天体（小行星、自然卫星、彗星等）的发现过程中，都是不可缺少的工作。初轨本身可在某些问题中直接引用，或为精密定轨提供初值。对于后者，定轨模型则对应一个“完整”力学系统

(符合问题精度要求的力学模型)的受摄二体问题,它是根据大量观测资料所作的轨道确定工作,提供各种航天任务中所需的精密轨道。关于精密定轨,传统的叫法为轨道改进,但由于可以在卫星定轨的同时确定某些参数(与轨道有关的一些几何和物理参数),扩展了传统意义下单纯的轨道改进,现称为精密定轨。从定轨的基本原理而言,尽管后者可以涵盖前者,但前者在短弧的前提下,有其特殊的定轨方式。

用以定轨的观测资料常称为观测量,有测距量 ρ 测速量 $\dot{\rho}$ 和测角量 α, δ (赤经赤纬) 和 A, h (方位角和高度角)等,无论哪种资料,若记作 Y , 它们与定轨历元 t_0 时的状态量(指轨道量和待确定的某些参数) X_0 有如下函数关系:

$$\begin{cases} Y = Y(X, t) \\ X(t) = X(t; t_0, X_0) \end{cases} \quad (1)$$

状态量 X 是 n 维,而一系列观测量 $t_l, Y_l(l = 1, 2 \dots k)$ 是 $(m \times k)$ 维, $m \geq 1, m$ 是观测量的维数(测角量一次采样 $m = 2$), 当 $(m \times k) \geq n$ 时原则上方程 (1) 可解,但实质上它归结为一个隐函数 $\Phi(t, Y, X_0) = 0$ 解的存在性和如何求解问题,因此必须注意如下两点:

1. 对于单站测距和测速,如果测站“静止”,那么相应的系数矩阵 $\tilde{B} = (\partial Y / \partial X_0)$ 秩亏,即相应的矩阵行列式 $|\tilde{B}^T \tilde{B}| = 0$, 不可解,即使真实情况下,测站随地球自转而运动,但如果是短弧,测站几乎未动,那么仍接近秩亏状态,亦难以定轨,只有多站长弧才可定轨。然而,对于测角资料却不存在亏秩问题,单站短弧仍可定轨,这是短弧定轨的理论依据。

2. 在可定轨前提下,上述方程 (1) 是一个多变元的非线性方程,而且还包含了超越函数关系,无法直接求解,通常只能通过多变元迭代过程才能实现定轨。但对于短弧情况,只有测距和测速类型资料必须采用一般的多变元迭代方法求解,测角资料则不然,即使不采用二体问题模型,考虑完整的力学系统,亦能通过一个特殊而简单的迭代过程实现定轨。

下面两节将结合传统方法和一些改进作一介绍。

§5 短弧定轨

短弧定轨(或初轨计算)和下一段要阐述的通常在长弧情况下所作的精密定轨计算都是通过一个迭代过程完成的,但利用测角资料进行初轨计算却不必要采用一般的多变元迭代方法。在天体力学发展的几百年历史中,就出现过测角型资料的多种定轨方法,就其实质而言可以归纳为 Laplace 型和 Gauss 型两类方法,特别在当今计算条件下, Laplace 型方法显得更加简洁有效。下面就结合该方法及其推广形式,阐明短弧定初轨的特殊迭代过程,显示其与多变元迭代的根本区别。

通常所说的 Laplace 型初轨计算方法,就是指在二体问题意义下的轨道计算方法。事实上我们完全可以把这种类型的初轨计算方法推广到一般受摄二体问题,而且既可以计算椭圆轨道,亦可以计算双曲线轨道,不受轨道类型的限制。

随着地球卫星测量精度的提高(例如测角精度可达角秒量级)和深空探测的发展,将会遇到各种目标天体轨道器的初轨计算问题,主星扁率摄动、第三体引力摄动等均可达到较大的程度,而且探测器飞往目标天体附近在未变轨前处于双曲线轨道运行状态。因此针对精度要求的提高和力模型的复杂化,有必要建立一个适用范围广的初轨计算方法,我们在经典 Laplace 方法基础上进行了推广,不妨称推广后的方法为广义 Laplace 方法。尽管这种方法可适用于受摄二体问题,但并不复杂,还是简单实用的。

1. 方法原理

选取空间坐标系 $O - xyz$, 坐标原点是地心,坐标平面 xy 和 x 轴方向有多种选择。对于人造地球卫星,通常取为 J2000 对应的平赤道面和平春分点。类似于精密定轨中的提法,初轨计算涉及的两类方程,即对应几何关系的测量方程和对应动力学关系的状态微分方程(即卫星运动方程)。

(1) 几何条件 – 测量几何关系

在所选取的坐标系中，测量几何满足如下关系：

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{R} \quad (2)$$

其中 \vec{r} 是卫星的位置矢量， $\vec{\rho}$ 是测站对卫星的观测矢量，对于测角资料而言，即 $\vec{\rho}(\rho, \alpha, \delta)$ 或 $\vec{\rho}(\rho, A, h)$ ，其中测角量 (α, δ) 或 (A, h) 即赤经赤纬或方位角高度角。在坐标系 $O - xyz$ 中， $\vec{\rho}$ 可写成下列形式：

$$\vec{\rho} = \rho \hat{L}, \quad \hat{L} = (\lambda, \mu, \nu)^T \quad (3)$$

符号“ T ”为转置，直角坐标分量 (λ, μ, ν) 可由测角量 (α, δ) 或 (A, h) 经简单的坐标系转换（相应的转换关系将在后面的有关章节中给出）给出。测站坐标矢量 \vec{R} 是给定的，有

$$\vec{R} = (X, Y, Z)^T \quad (4)$$

(2) 动力学条件 – 卫星运动方程

在坐标系 $O - xyz$ 中，卫星相对地心的运动方程即

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{F}_e(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t; \varepsilon) \\ t_0 : \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\mu = GM_e$ 是的心引力常数。摄动加速度 \vec{F}_e 对应各种力学因素，可以是保守力效应，亦可以是耗散效应，只要能写出相应力学因素的数学模型即可。对于这一力学模型，初轨计算给出的将是历元 t_0 时刻的瞬时椭圆轨道或瞬时双曲线轨道。

(3) 初轨计算的基本方程

与精密定轨中对测量方程线性化后给出的条件方程（即精密定轨的基本方程，下一节要具体阐述）类似，将运动天体所遵循的动力学条件引入测量几何关系 (2)，构成初轨计算的基本方程，不同的是动力学条件所对应的既不是运动方程的数值解，亦不是分析形式的小参数幂级数解，而是方程的另一种类型的幂级数解，即时间间隔 $\Delta t = t - t_0$ 的幂级数解。就地球扁率摄动和第三体引力摄动而言，该级数解的形式可写成如下形式：

$$\vec{r}(t) = F^*(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \vec{r}_0 + G^*(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \dot{\vec{r}}_0 \quad (6)$$

其中 F^* 和 G^* 由 Δt 的幂级数表达。以此解代入测量几何关系 (2) 可得

$$\hat{L} \times (F^* \vec{r}_0 + G^* \dot{\vec{r}}_0) = \hat{L} \times \vec{R} \quad (7)$$

对于一次测角采样资料，(7) 式对应的三个方程只有两个是独立的，至少需要三次采样才能定轨。这是关于历元 t_0 时 $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $\dot{\vec{r}}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ 的形式上的线性代数方程。如果能确定，那么再经简单的转换即可由 $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$ 给出 t_0 时刻的瞬时轨道——椭圆轨道或双曲线轨道。

2. F, G 和 F_z, G_z 的表达式

只要运动方程 (5) 的右函数（轨道类型不限）满足一定条件，其满足初始条件的解即存在，且可展成时间间隔 $\Delta t = t - t_0$ 的幂级数：

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}_0^{(1)} \Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{\vec{r}}_0^{(2)} \Delta t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \vec{r}_0^{(k)} \Delta t^k + \cdots \quad (8)$$

其中 $\vec{r}_0^{(k)}$ 为 $\vec{r}(t)$ 对 t 的 k 阶导数在 t_0 点的取值，即

$$\vec{r}_0^{(k)} = \left(\frac{d^k \vec{r}}{dt^k} \right)_{t=t_0} \quad (9)$$

要给出级数解 (8) 满足初始条件的具体形式, 就需要计算各阶导数 $\vec{r}^{(k)}$ 在处 t_0 的值 $\vec{r}_0^{(k)}$ 。事实上有 $\vec{r}_0^{(1)} = \dot{\vec{r}}_0$, 而二阶以上各阶导数值 $\vec{r}_0^{(k)} (k \geq 2)$ 均可根据运动方程 (5), 由 \vec{r}_0 和 $\dot{\vec{r}}_0$ 构成, 即

$$\vec{r}_0^{(k)} = \vec{r}_0^{(k)}(t_0, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0), \quad k \geq 2 \quad (10)$$

对于无摄运动, 级数解 (6) 中的 F^* 和 G^* 即 F 和 G , 表达式简化为

$$\vec{r}(t) = F(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \vec{r}_0 + G(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \dot{\vec{r}}_0 \quad (11)$$

对于 $\vec{r}(t)$ 的三个分量 $x(t), y(t), z(t)$, F 和 G 各具有同一形式, 为一数量函数。对应受摄运动, 通常相应的 F^* 和 G^* 对于三个分量 x, y, z 各具有不同的形式。下面就中心天体扁率摄动和第三体引力摄动写出其具体表达式, 相应的两种摄动加速度为

$$\vec{F}_\varepsilon = \left(\frac{3J_2}{2} \right) \left[\left(5 \frac{z^2}{r^7} - \frac{1}{r^5} \right) \vec{r} - \left(\frac{2z}{r^5} \right) \right] - \mu' \left(\frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} + \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right) \quad (12)$$

为了便于量级分析和公式表达, 这里已采用前面 § 3 中引进的计算单位使各物理量无量纲化, 相应的地心引力常数 $\mu = GM_e = 1, \mu' = GM'/GM_e, M'$ 是第三体的质量。(12) 式中的 J_2 为地球的动力学扁率, 其他有关量定义如下:

$$\hat{k} = (0 \quad 0 \quad 1)^T, \quad \vec{\Delta} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (13)$$

\vec{r}' 为第三体的坐标矢量。

若记 $\tau = \Delta t$, 形如 (6) 式的 τ 的幂级数解如下:

$$\begin{cases} x = F(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) x_0 + G(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \dot{x}_0 \\ y = F(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) y_0 + G(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \dot{y}_0 \\ z = F_z(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) z_0 + G_z(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \dot{z}_0 \end{cases} \quad (14)$$

相应的基本方程 (7) 式按分量形式书写如下:

$$\begin{cases} (F\nu)x_0 - (F_z\lambda)z_0 + (G\nu)\dot{x}_0 - (G_z\lambda)\dot{z}_0 = (\nu X - \lambda Z) \\ (F\nu)y_0 - (F_z\mu)z_0 + (G\nu)\dot{y}_0 - (G_z\mu)\dot{z}_0 = (\nu Y - \mu Z) \\ (F\mu)x_0 - (F\lambda)y_0 + (G\mu)\dot{x}_0 - (G\lambda)\dot{y}_0 = (\mu X - \lambda Y) \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} F = & 1 + \frac{\tau^2}{2} \left[-u^3 + \left(\frac{3J_2}{2} \right) (5u_7z_0^2 - u_5) - \mu'u'_3 \right] \\ & + \frac{\tau^3}{6} \left[(3u_5\sigma) + \left(\frac{3J_2}{2} \right) (5(u_7 - 7u_9z_0^2)\sigma + 10u_7z_0\dot{z}_0) \right] \\ & + \frac{\tau^4}{24} \left[u_5(3v_0^2 - 2u_1 - 15u_2\sigma^2) + \left(\frac{3J_2}{2} \right) (6u_8(4u_2z_0^2 - 1) - 5u_7(7u_2z_0^2 - 1)v_0^2 \right. \\ & \quad \left. + 10u_7\dot{z}_0^2 + 35u_9(9u_2z_0^2 - 1)\sigma^2 - 140u_9\sigma z_0\dot{z}_0) + u_3(\mu'u'_3) \right] \\ & + \frac{\tau^5}{120} u_7[15\sigma(-3v_0^2 + 2u_1 + 7u_2\sigma^2)] \\ & + \frac{\tau^6}{720} u_7[u_2\sigma^2(630v_0^2 - 420u_1 - 945u_2\sigma^2) - (22u_2 - 66u_1v_0^2 + 45v_0^4)] \\ & + O(\tau^7) \end{aligned} \quad (16)$$

$$G = \tau + \frac{\tau^3}{6} \left[-u_3 + \left(\frac{3J_2}{2} \right) (5u_7z_0^2 - u_5) - \mu'u'_3 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau^4}{24} \left[6u_5\sigma + \left(\frac{3J_2}{2} \right) (20u_7z_0\dot{z}_0 - 10u_7(7u_2z_0^2 - 1)\sigma) \right] \\
& + \frac{\tau^5}{120} u_5[9v_0^2 - 8u_1 - 45u_2\sigma^2] \\
& + \frac{\tau^6}{720} u_7[30\sigma(-6v_0^2 + 5u_1 + 14u_2\sigma^2)] \\
& + O(\tau^7)
\end{aligned} \tag{17}$$

$$F_z = F + \left(\frac{3J_2}{2} \right) \left[\frac{\tau^2}{2}(-2u_5) + \frac{\tau^3}{6}(10u_7\sigma) + \frac{\tau^4}{24}u_7(10v_0^2 - 6u_1 - 70u_2\sigma^2) \right] \tag{18}$$

$$G_z = G + \left(\frac{3J_2}{2} \right) \left[\frac{\tau^3}{2}(-2u_5) + \frac{\tau^4}{24}(20u_7\sigma) \right] \tag{19}$$

$$\begin{cases} u_n = 1/r_0^n, & \sigma = \vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0, & v_0^2 = \dot{\vec{r}}_0 \cdot \dot{\vec{v}}_0 \\ u'_0 = 1/r_0'^3, & r'_0 = |\vec{r}'_0| \end{cases} \tag{20}$$

这里对第三体引力摄动部分已作了简化，因地球卫星不会近距离接近第三体，故对 (12) 式中的最后一部分已处理成 $-\mu'(\vec{r}/r_0^3)$ ， \vec{r}'_0 是第三体位置矢量 \vec{r}' 在历元 t_0 时的值，即 $\vec{r}'_0 = \vec{r}'(t_0)$ 。如果不作上述简化处理，同样可给出相应的表达式，这里不再介绍。

在上述无量纲的表达式中， $|\tau| < 1$ 时，级数解收敛是显然的，而且收敛范围还可扩大。对于人造地球卫星而言， $|\tau| < 1$ 对应的有量纲物理量 $\Delta t = |t - t_0| < 13^m.4468$ ，这与初轨计算对应的短弧是相适应的。注意，上述表达式中的 $\sigma = O(e)$ 是小量， e 是轨道偏心率。

对于其它类型的摄动，只要给出相应的数学模型，总是可以导出相应的 F^* 和 G^* 的表达式，因为运动方程 (5) 的右端仅出现 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ ，高阶导数 $\vec{r}_0^{(k)} (k \geq 2)$ 总是可以用 \vec{r}_0 和 $\dot{\vec{r}}_0$ 来表达。

3. 广义 Laplace 初轨计算方法的定轨过程

由一系列测角采样资料： $t_j; (\alpha_j, \delta_j)$ 或 $(A_j, h_j), j = 1, 2, \dots, N, N \geq 3$ 即可由基本方程 (15) 进行定轨，给出定轨历元 t_0 时的 $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t \in [t_1, t_N]$ 。方程组 (15) 是关于 \vec{r}_0 和 $\dot{\vec{r}}_0$ 的形式上的线性代数方程，只要知道 F, G, F_z, G_z ，即可解出 $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$ ，而 F, G, F_z, G_z 均是 $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$ 的函数。因此，这一定轨计算显然涉及一个迭代过程，但与精密定轨中的多变元迭代不同，它是一个特殊而简单的迭代过程。由于

$$\begin{cases} F = 1 + O(\tau^2), & G = \tau + O(\tau^3) \\ F_z = 1 + O(\tau^2), & G_z = \tau + O(\tau^3) \end{cases}$$

而 $|\tau| < 1$ 。因此，即使对于跟踪目标的轨道一无所知，亦可以采用

$$F^{(0)} = 1, \quad G^{(0)} = \tau, \quad F_z^{(0)} = F^{(0)}, \quad G_z^{(0)} = G^{(0)}$$

作迭代初值，按方程 (15) 和 (16)-(20) 式进行迭代，直到满足定轨精度要求终止，给出结果 $t_0, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$ 。而由 $(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0)$ 即可根据其轨道根数的关系，最终获得历元 t_0 时刻的椭圆轨道或双曲线轨道。求解 $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$ 的过程不涉及轨道类型，仅在由 $(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0)$ 转换成轨道根数时才有差别。

由上述定轨原理和过程可以清楚地看出，尽管同样是复杂函数关系的迭代计算，但它并不涉及表面上的多变元问题，而是一个极其简单的迭代计算，对迭代的初值要求也不高，即使对非合作目标一无所知，亦可定轨，如果同时有测距资料，或由星—星跟踪给出点位资料，则用上述方法，定轨过程会更简单。下面要阐述的精密定轨就必须采用对初值有一定要求的多变元迭代。

§6 精密定轨轮廓

在精密定轨中，通常用符号 X 和 Y 分别表示状态量和观测量（亦表示观测量的测量值）。状态

量 X 包括卫星轨道量 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 或轨道根数 σ 和待估参数 β ，即

$$X = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \dot{\vec{r}} \\ \beta \end{pmatrix} \quad or \quad X = \begin{pmatrix} \sigma \\ \beta \end{pmatrix} \quad (21)$$

注意，这里的轨道量 σ 不要与上一节 (20) 式中给出的定义相混淆。 \vec{r} 和 $\dot{\vec{r}}$ 是卫星在所采用坐标系中的位置矢量和速度矢量，而同一坐标系中的六个轨道根数 σ 常采用 Kepler 根数或无奇点根数， $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 和 σ 是等价的，两者之间的选择视具体问题和采用习惯而定。待估参数包括影响卫星轨道的各力学因素中的有关物理参数、测站坐标的几何参数以及卫星的星体参数等有待改进的部分，那些认为可靠的各物理和几何参数将作为一些确定的常数不在其内。状态量 X 是 n 维列向量， $n \geq 6$ 。就目前的测量技术而言，观测量 Y 包括光学或射电测角资料（赤道坐标 α, δ 或地平坐标 A, h ），雷达和激光测距资料 ρ ，多卜勒测速资料 $\dot{\rho}$ 以及卫星测高资料 H 等。只要与卫星运动有关的量均可作为观测量，而且观测站可以是地面站，亦可以是空间站，这两种观测站分别对应不同的运动性质。观测量 Y 是 m 维列向量， $m \geq 1$ 。

状态量 X 满足下列常微初值问题：

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, t) \\ t_0, \quad X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (22)$$

相应的解即状态方程：

$$X(t) = X(t_0, X_0; t) \quad (23)$$

这一解可以是分析形式，即由分析方法求解问题 (22) 获得，亦可以是离散形式，即由数值方法求解问题 (22) 给出。两者的表达形式都较为复杂，均为非线性函数，很难直接而简单地给出相应的状态转移矩阵 $\Phi(t_0, t)$ ：

$$\Phi(t_0, t) = \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right) \quad (24)$$

这是一个 $(n \times n)$ 维方阵。

观测量 Y 与状态量 X 满足下列测量方程：

$$Y = H(X, t) + V \quad (25)$$

该方程中 Y 即观测量的测量值， H 是相应观测量的理论值， V 是测量误差，在精密定轨中，原则上要求 V 只含随机差，理论上要求它是白噪声。关于测量系统差，只要建立相应的模型 V ，即可记入测量方程 (25) 的右端。就上述所提到的几种观测量形式， $H(X, t)$ 是一非线性函数。

由于待估状态量 X_0 （对应历元 t_0 ）的真值无法得到（这正是待估的原因），因此相应的 $X(t)$ 亦无法获得其真值。若将待估状态量 X_0 的近似值定义为状态量的参考值，记作 X_0^* ，相应的 $X(t)$ 即记为 X^* ，有

$$X^*(t) = X(t_0, X_0^*; t) \quad (26)$$

可将上述测量方程 (25) 在 X_0^* 处进行展开，丢弃高阶项（即线性化），从而给出精密定轨的基本方程——条件方程：

$$y = \tilde{B}x_0 + V \quad (27)$$

其中

$$y = Y - H(X^*, t) \quad (28)$$

$$x_0 = X_0 - X_0^* \quad (29)$$

$$\tilde{B} = \left(\left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right) \right)_{X^*} \quad (30)$$

y 亦称为残差, x_0 即待估状态量 X_0 的改正值, \tilde{B} 矩阵中的 $\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)$ 是测量矩阵, 而 $\left(\frac{\partial X}{\partial X_0}\right)$ 即前面所说的状态转移矩阵 Φ 。

人卫精密定轨即在上述基础上进行, 由大量观测采样数据 $Y_j (j = 1, \dots, k)$ 求解条件方程, 可给出待估状态量 X_0 的改正值 $\hat{x}_{0/k}$, 从而给出达到精度要求的历元状态量 $X_0 = \hat{X}_{0/k}$:

$$\hat{X}_{0/k} = X_0^* + \hat{x}_{0/k} \quad (31)$$

$\hat{x}_{0/k}$ 和 $\hat{X}_{0/k}$ 表示采用某种最优估计方法求解条件方程 (27) 获得的在某种意义下的最优解, 下标 k 表示引用了 k 次采样数据。

事实上, 上述定轨过程是一个迭代过程, 即第一次给出 $\hat{X}_{0/k}$ 后基本上是不能达到精度要求的, 可由它作为 X_0 的近似值再重复前面的过程, 直到满足精度要求为止。这种迭代过程亦是减小测量方程线性化引起的截断误差的常用手段。根据这一迭代过程可知, 最后的改正量 x_0 是较小的, 因此条件方程 (27) 中对 \tilde{B} 矩阵的要求并不像观测量的理论计算值 $H(X^*, t)$ 那么高, 后者要求达到观测量采样数据 Y 的精度, 而 \tilde{B} 矩阵的计算 (实为状态转移矩阵 Φ 的计算) 可作适当的简化。

根据精密定轨的过程可知, 计算主要有如下四个部分:

1. 状态微分方程 (22) 的求解
2. 观测量的理论计算 $H(X^*, t)$
3. \tilde{B} 矩阵的计算
4. 条件方程 (27) 的求解

其中第 1 部分是最主要也是计算量最大的部分, 即求解常微分方程 (22)。这一求解实质上就是卫星轨道或位置和速度的摄动外推。关于轨道或位置和速度的摄动外推, 也是卫星位置预报中的主要部分, 其计算方法通常有两类, 即分析方法和数值方法 (相应的定轨方法亦称为分析法定轨和数值法定轨)。其中分析方法的原理和建立相应分析解的过程见有关教材^{[1]~[3]}, 本教材只介绍分析解的具体结果及相应的计算公式。为了便于讲解和阅读, 本教材将数值解放在第一部分, 分析解作为第二部分的内容。而第三部分实为精密定轨计算的全过程及其有关内容。

第一部分 数值法定轨中受摄星历的计算

若轨道量采用卫星的位置矢量 \vec{r} 和速度矢量 $\dot{\vec{r}}$ ，在选取的坐标系中，卫星的位置矢量 \vec{r} 满足下列常微初值问题：

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0 + \vec{F}_\epsilon \\ t_0 : \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

\vec{F}_ϵ 是摄动加速度，有

$$\vec{F}_\epsilon = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6 \quad (1.2)$$

其中 $\vec{F}_j (j = 1, 2, \dots, 6)$ 依次为用卫星位置矢量 \vec{r} 和速度矢量 $\dot{\vec{r}}$ 表达的地球非球形引力，第三体（日，月）引力，潮汐形变，岁差章动，太阳光压和大气阻力摄动加速度。这是在轨道运动方程数值解基础上进行人卫精密定轨时习惯采用的基本变量和基本方程。通常认为这比用轨道根数作为基本变量简单，事实上，若仍采用轨道根数作为基本变量，而右函数的计算充分利用上述 \vec{F}_ϵ 形式简单的优点，在一定前提下则会更有利。

采用 Kepler 根数 $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ 的方程形式如下：

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[e(S \sin f + T \cos f) + T \right] \quad (1.3)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[(S \sin f + T \cos f) + T \cos E \right] \quad (1.4)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W \quad (1.5)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\sin i} W \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\cos i \frac{d\Omega}{dt} \\ &+ \frac{1}{nae} \left[\sqrt{1-e^2} (-S \cos f + T \sin f) + T \sin E \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \left(\frac{r}{a} \right) S \\ &- \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[\sqrt{1-e^2} (-S \cos f + T \sin f) + T \sin E \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

采用无奇点变量 $(a, i, \Omega, \xi = e \cos \omega, \eta = e \sin \omega, \lambda = M + \omega)$ 的方程形式如下：

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[S(\xi \sin u - \eta \cos u) + T \left(\frac{p}{r} \right) \right] \quad (1.9)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W \quad (1.10)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1}{\sin i} \right) W \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \eta \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\ &+ \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ S \sin u + \frac{T}{\sqrt{1-e^2}} \left[(\cos \tilde{u} + \sqrt{1-e^2} \cos u) \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\xi}{1 + \sqrt{1-e^2}} (\xi \cos \tilde{u} + \eta \sin \tilde{u}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -\xi \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\ &- \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ S \cos u - \frac{T}{\sqrt{1-e^2}} \left[(\sin \tilde{u} + \sqrt{1-e^2} \sin u) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{\eta}{1+\sqrt{1-e^2}}(\xi \cos \tilde{u} + \eta \sin \tilde{u}) \right] \Big\} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} = & n - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\ & - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ 2S\sqrt{1-e^2} \left(\frac{r}{p} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}} \left[S(\xi \cos u + \eta \sin u) - T \left(1 + \frac{r}{p} \right) (\xi \sin u - \eta \cos u) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

上述两类方程中除 $n = \sqrt{\mu}a^{-3/2}, p = a(1-e^2)$ 外, 一些中间量 $E, f, \tilde{u} = E + \omega, u = f + \omega$ 等量的计算如下:

对 Kepler 根数系统, 有

$$E - M = e \sin E \quad (\text{Kepler 方程}) \quad (1.15)$$

$$\left(\frac{a}{r} \right) = (1 - e \cos E)^{-1} \quad (1.16)$$

$$\sin(f - E) = \left(\frac{a}{r} \right) e \sin E \left(1 - \frac{1}{1 + \sqrt{1-e^2}} e \cos E \right) \quad (1.17)$$

对于无奇点变量系统, 有

$$\tilde{u} - \lambda = \xi \sin \tilde{u} - \eta \cos \tilde{u} \quad (\text{广义 Kepler 方程}) \quad (1.18)$$

$$\frac{a}{r} = \left[1 - (\xi \cos \tilde{u} + \eta \sin \tilde{u}) \right]^{-1} \quad (1.19)$$

$$\sin(u - \tilde{u}) = \left(\frac{a}{r} \right) (\tilde{u} - \lambda) \left[1 - \frac{1}{1 + \sqrt{1-e^2}} (\xi \cos \tilde{u} + \eta \sin \tilde{u}) \right] \quad (1.20)$$

两类方程中的摄动加速度 S, T, W 三个分量可利用 (1.1) 式中的 \vec{F}_ε 来形成, 转换方法如下:

$$S = \vec{F}_\varepsilon \cdot \hat{r} \quad T = \vec{F}_\varepsilon \cdot \hat{t} \quad W = \vec{F}_\varepsilon \cdot \hat{w} \quad (1.21)$$

其中 $\hat{r}, \hat{t}, \hat{w}$ 分别为径向、横向、轨道面法向单位矢量, 有

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos u \hat{P} + \sin u \hat{Q} \\ \hat{t} = -\sin u \hat{P} + \cos u \hat{Q} \\ \hat{w} = \hat{r} \times \hat{t} \end{cases} \quad (1.22)$$

单位矢量 \hat{P}, \hat{Q} , 以及 $\hat{r} \times \hat{t}$ 的表达式为

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} -\sin \Omega \cos i \\ \cos \Omega \cos i \\ \sin i \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$\hat{r} \times \hat{t} = \hat{P} \times \hat{Q} = \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

转换中通过 \vec{F}_ε 给出 S, T, W 时涉及到的 \vec{r} 和 $\dot{\vec{r}}$ 按下式计算:

$$\vec{r} = r \hat{r} \quad (1.25)$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \left[\frac{e \sin E}{\sqrt{1-e^2}} \hat{r} + \hat{t} \right] \quad \text{Kepler 根数系统} \quad (1.26)$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \left[\frac{\xi \sin \tilde{u} - \eta \cos \tilde{u}}{\sqrt{1-e^2}} \hat{r} + \hat{t} \right] \quad \text{无奇点根数系统} \quad (1.27)$$

其中 $\mu = GM_e$ 是地心引力常数。

关于地球静止卫星，这是一种特殊的高轨卫星，除绕地球运行与地球自转“同步”外，其轨道偏心率 $e \approx 0$ 和倾角 $i \approx 0$ ，对地面观测站而言，即定点在地球赤道上空的某一空间位置。对于这类卫星，若采用 \vec{r} 和 $\dot{\vec{r}}$ 作为基本变量，则相应的基本方程即前面的 (1.1) 和 (1.2)。若采用轨道根数，则由于同样的原因，将采用适当的无奇点根数。考虑到同时适用于 $0 \leq e < 1$ 和 $0 \leq i < 180^\circ$ ，一组理想的无奇点变量如下：

$$a, \quad \xi = e \cos \tilde{\omega}, \quad \eta = e \sin \tilde{\omega}, \quad h = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega, \quad k = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega, \quad \lambda = M + \tilde{\omega} \quad (1.28)$$

其中 $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$ 。这里 h 和 k 的定义中采用了 $\sin \frac{i}{2}$ 代替了习惯上采用的 $\sin i$ ，其原因是后者考虑在定轨的基本方程（条件方程）中会出现 $\frac{1}{\cos i}$ 因子，当 $i = 90^\circ$ 时失效，而采用现在这组无奇点变量，则无此问题。相应的摄动运动方程如下：

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[S(\xi \sin u - \eta \cos u) + T\left(\frac{p}{r}\right) \right] \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} = & \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ S \sin u \right. \\ & + T \left[\cos \tilde{u} + \cos u - \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-e^2})} (\xi \sin \tilde{u} - \eta \cos \tilde{u}) \right] \\ & \left. + W\left(\frac{r}{p}\right) \left[-\eta \frac{(h \sin u - k \cos u)}{\cos \frac{i}{2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} = & \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ -S \cos u \right. \\ & + T \left[\sin \tilde{u} + \sin u + \frac{\xi}{\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-e^2})} (\xi \sin \tilde{u} - \eta \cos \tilde{u}) \right] \\ & \left. + W\left(\frac{r}{p}\right) \left[\xi \frac{(h \sin u - k \cos u)}{\cos \frac{i}{2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{W}{2na\sqrt{1-e^2} \cos \frac{i}{2}} \left(\frac{r}{a}\right) \left[\cos u - h(k \sin u + h \cos u) \right] \quad (1.32)$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{W}{2na\sqrt{1-e^2} \cos \frac{i}{2}} \left(\frac{r}{a}\right) \left[\sin u - k(k \sin u + h \cos u) \right] \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} = & n - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ 2S\sqrt{1-e^2} \left(\frac{r}{p}\right) \right. \\ & + \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}} \left[S(\xi \cos u + \eta \sin u) - T\left(1 + \frac{r}{p}\right) (\xi \sin u - \eta \cos u) \right] \\ & \left. - W\left(\frac{r}{p}\right) \left[\frac{h \sin u - k \cos u}{\cos \frac{i}{2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

其中

$$n = \sqrt{\mu} a^{-3/2}, \quad p = a(1-e^2) \quad e^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad (1.35)$$

$$\sin^2 \frac{i}{2} = h^2 + k^2, \quad \cos i = 1 - 2(h^2 + k^2), \quad \cos \frac{i}{2} = [1 - (h^2 + k^2)]^{1/2} \quad (1.36)$$

$$u = f + \tilde{\omega}, \quad \tilde{u} = E + \tilde{\omega} \quad (1.37)$$

$$\tilde{u} - \lambda = \xi \sin \tilde{u} - \eta \cos \tilde{u} \quad (\text{广义 Kepler 方程}) \quad (1.38)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right) = \left[1 - (\xi \cos \tilde{u} + \eta \sin \tilde{u}) \right]^{-1} \quad (1.39)$$

$$\sin(u - \tilde{u}) = \left(\frac{a}{r}\right)(\tilde{u} - \lambda) \left[1 - \frac{1}{1 + \sqrt{1-e^2}} (\xi \cos \tilde{u} + \eta \sin \tilde{u}) \right] \quad (1.40)$$

方程 (1.29)-(1.34) 右端的摄动加速度分量 S, T, W 同样可由 (1.1) 式右端的 \vec{F}_ε 形成, 即

$$S = \vec{F}_\varepsilon \cdot \hat{r}, \quad T = \vec{F}_\varepsilon \cdot \hat{t}, \quad W = \vec{F}_\varepsilon \cdot \hat{w}$$

这里的单位矢量 \hat{r} , \hat{t} , \hat{w} 由下式表达:

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos u \hat{P}^* + \sin u \hat{Q}^* \\ \hat{t} = -\sin u \hat{P}^* + \cos u \hat{Q}^* \\ \hat{w} = \hat{r} \times \hat{t} \end{cases} \quad (1.41)$$

$$\hat{P}^* = \begin{pmatrix} 1 - 2k^2 \\ 2hk \\ -2k \cos \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

$$\hat{Q}^* = \begin{pmatrix} 2hk \\ 1 - 2h^2 \\ 2h \cos \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

$$\hat{r} \times \hat{t} = \begin{pmatrix} 2k \cos \frac{i}{2} \\ -2h \cos \frac{i}{2} \\ \cos i \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

相应的 \vec{r} 和 $\dot{\vec{r}}$ 按下列公式计算:

$$\vec{r} = r \hat{r} \quad (1.45)$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \left[\frac{\xi \sin \tilde{u} - \eta \cos \tilde{u}}{\sqrt{1 - e^2}} \hat{r} + \hat{t} \right] \quad (1.46)$$

从上述基本方程以及 \vec{F}_ε 到 S, T, W 的转换过程可以看出, 在数值法定轨中, 轨道根数摄动解的计算, 主要计算量仍然集中在方程 (1.1) 右函数 \vec{F}_ε 的计算上, 这一部分将分别给出六类摄动加速度及其有关量的计算公式。

在给出摄动加速度 \vec{F}_ε 时, 必然涉及到坐标系的选取及有关问题。常用的坐标系即绪论中提到的历元地心天球坐标系 (J2000.0 地心平赤道坐标系) 和轨道坐标系 (J2000.0 平春分点和瞬时真赤道面的地心赤道坐标系)。这两种坐标系的差别就是部分岁差 (赤纬岁差)、章动 (赤纬章动和交章动) 项, 其量级之小, 除地球非球形引力摄动 (主要是扁率部分) 外, 在其它各类摄动计算中都不必考虑, 如第三体 (日、月) 的空间坐标, 不管采用上述两种坐标系的哪一种, 均可按历元地心或历元日心坐标系计算。而在地球非球形引力摄动中, 主要是由于岁差、章动和极移导致地球引力位的变化在不同坐标系中有不同的表现, 这种差别当定轨计算历元 t_0 离标准历元 T_0 (J2000.0) 较远时尤为显著, 通常不可忽略。因此, 下面考虑地球非球形引力摄动时, 在计算不复杂的情况下, 尽量“完整”地保留岁差、章动和极移量。

关于数值解法的选择, 在目前的计算条件下, 通常采用嵌套的 RKF7(8) 单步法和 Adams 型, Cowell 型或 Adams-Cowell 型以及类似的多步法等, 对一般定轨问题, 现有的这些数值法并无明显差别, 各有特点, 且均能满足定轨计算的要求。第一章将介绍这些方法, 读者可根据具体情况和自己的使用习惯作适当选择。

第一章 常用的数值方法

描述天体运动的微分方程相当复杂, 除二体问题等少数几种情况外, 都不可能给出严格解, 即使在一定条件下 (或某种近似) 给出相应的小参数幂级数解, 但是要满足高精度要求, 就涉及到幂级数解的高阶项, 其项数之多, 不仅难以推导, 就是具体推出亦难以采用, 甚至有的摄动因素无法用简单的分析表达式写出, 人造卫星精密定轨问题中就会遇到这种情况, 况且, 对于某些问题, 只需要知道解在某些点上的值。因此, 给出相应微分方程满足一定精度的离散解即行, 这就使得解微分方程 (这里指常微分方程, 以下从略) 的数值方法, 在人造卫星精密定轨中占有十分重要的地位, 特别在当今计算机高度发展的时代, 更显得它的优越性。

§1.1 有关数值解法的基本知识

1. 数值解法的基本思想

对于一个微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(a) = x_0 \\ a \leq t \leq b \end{cases} \quad (1.47)$$

x 可以看成向量 (如坐标 \vec{r} 和速度 $\dot{\vec{r}}$), 求该问题的数值解就是设法在区间 $[a, b]$ 上的一系列离散点 $t_n (n = 1, 2, \dots, m)$ 处, 计算出解 $x(t)$ 的近似值 x_1, x_2, \dots, x_m , 这里

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b \quad (1.48)$$

如无特殊要求, 通常是将 t_n 取成等间隔的, 即

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 1, 2, \dots, m \quad (1.49)$$

其中 $t_0 = a$, h 称为步长。由初值 $x_0 = x(t_0) = x(a)$ 求出 x_1 , 再由 x_1 求出 x_2 , 依次求出 x_m , 得到 m 个离散点上的 x_n 值, 此即用一种离散化方法来处理连续性问题 (1.47)。

当然, 要由 x_n 求出 x_{n+1} , 一个最直接的方法是利用泰勒 (Taylor) 展式, 即

$$x_{n+1} \approx x_n + h\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_n} + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t_n} + \dots + \frac{h^p}{p!}\left(\frac{d^p x}{dt^p}\right)_{t_n} \quad (1.50)$$

其中 p 为一正整数。通过方程 (1.47) 可以逐步把各阶导数求出, 有

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_n} = f(x_n, t_n) \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}\right)_{t_n} \\ \dots \end{cases} \quad (1.51)$$

这显然也是一种离散化方法, 但必须计算高阶导数, 当方程 (1.47) 的右函数 $f(x, t)$ 比较复杂时, 计算高阶导数就变得相当麻烦, 而天体运动方程的右函数往往就属于这种情况。因此, 在一般情况下, 泰勒多项式不宜直接引用, 各种数值解法都是采用若干个右函数值来代替高阶导数值, 使计算得以简化, 这就是微分方程数值解法的基本思想。

2. 一些基本概念

将泰勒展式从 $p = 2$ 截断，即取多项式 (1.50) 中的 $p = 1$ ，得欧拉 (Euler) 公式：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n) \\ x_0 = x(t_0) \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.52)$$

下面借用这一离散化的差分方程来介绍数值方法的一些基本概念。

从欧拉公式可以看出，每前进一步，计算相应步点 t_{n+1} 上的 x_{n+1} 值时，只要知道前一步点 t_n 上的 x_n 值，这种方法称为单步法。每前进一步时，需要知道前面多个步点上的 x 值，这样的数值方法称为多步法。

从另一个角度来看，欧拉公式每前进一步计算 x_{n+1} 时，只需知道前一步的 x 值，这样的公式称为显式公式。如果改为后退的欧拉公式：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1}, t_{n+1}) \\ x_0 = x(t_0) \end{cases} \quad (1.53)$$

则所要计算的 x_{n+1} 包含在右函数 f 中，此公式为隐式公式。对于隐式，往往要采用迭代求解办法，而且还要提供 x_{n+1} 的初值 $x_{n+1}^{(0)}$ 。

既然数值方法给出的是解 $x(t)$ 在离散步点 t_n 上的近似值 x_n ，因此就有一个误差问题，除初值误差外，还有截断误差和舍入误差。关于截断误差，仍用欧拉公式 (1.52) 来说明，相应的精确解 $x(t_{n+1})$ 应满足带余项的泰勒展式：

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\dot{x}(t_n) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_n) \quad (1.54)$$

其中 ξ_n 为区间 (t_n, t_{n+1}) 中的某一点，因为

$$\dot{x}(t_n) = f(x(t_n), t)$$

上式可改写为

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(x(t_n), t) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_n) \quad (1.55)$$

由此可见，欧拉公式 (1.52) 就是用精确解满足的表达式 (1.54) 截去其中的 $\frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_n)$ 所得到的近似公式。而 $\frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_n)$ 就称为欧拉方法的局部截断误差（简称截断误差），或称局部离散误差，它与 h^2 同阶，记为 $O(h^2)$ 。当然，其实际大小还取决于导数 $\ddot{x}(t_n)$ 的值，这涉及到解 $x(t)$ 的性质。由于丢掉的是二阶导数，就称欧拉方法为一阶方法，后面将会看到，对于一些常用的单步法，方法的阶数正好比方法的截断误差中 h 的幂次低 1，即若截断误差为 $O(h^{p+1})$ ，则方法为 p 阶的。因此，方法的阶数可作为衡量方法精度的一个重要标志。

关于舍入误差，它的产生涉及到多种因素，大致有这么几个方面：计算数据字长不可能无限，使用任何计算工具都是如此；具有有限字长的数与数之间的运算；在计算机上计算右函数 $f(x, t)$ 所使用的程序的精度等。由此可见，舍入误差的情况比截断误差复杂，但还是可以设法估计它的界，例如把舍入误差当作随机量，采用统计方法可得到较好的结果。

在讨论截断误差时，不免要提出这样的问题，即当 $h \rightarrow 0$ 时，是否有 $x_n \rightarrow x(t_n)$ ，这里 $x(t_n)$ 和 x_n 各表示方程 (1.47) 的精确解和步点上 t_n 上的数值解（近似解），这就是数值方法的收敛性问题。另一个问题是稳定性问题，不论是单步法或是多步法，某一步产生的误差（包括初值误差和舍入误差）都会传播下去，误差将会累积（即全局误差的累积），只有当误差的累积受到控制，相应的数值方法才是稳定的，否则称之为不稳定的。数值稳定性问题与数值方法的阶数以及步长都有关系，一个数值方法是否实用，稳定性是至关重要的。

关于稳定性,有多种提法。对于有限的固定步长 h , 在计算过程中某一步产生的误差, 对以后的计算结果的影响不会步步增长, 这种稳定性概念, 就是所说的绝对稳定性。如果这种稳定性具有有限的稳定区边界, 则称之为条件稳定的, 否则就是无条件稳定的。对于多步法, 无条件稳定性, 亦称 A-稳定性。这些稳定性的提法都是针对数值方法本身的, 而所讨论的微分方程 (对应一种“运动”) 应是稳定的。但天体运动方程却不然, 就连最简单的开普勒运动也是运动不稳定的, 任何一个稳定的数值方法, 也无法控制其沿迹 (即沿运动方向) 误差的步步增长; 如果一个数值方法不会使这沿迹误差增长更加恶化, 有时也称该方法为相对稳定的。在动力天文中, 对于长弧定轨问题, 一个数值方法能否控制运动沿迹误差的增长速度是至关重要的, 这将在后面的有关内容中介绍。

关于收敛性、稳定性以及误差估计问题, 是数值方法中的几个重要的理论课题, 读者需要进一步深入了解, 可阅读本章参考文献 [4] 和 [5]。下面介绍一些常用的数值方法及其有关问题。

§1.2 常用的单步法 — Runge-Kutta 方法

一种常用的单步法就是众所周知的 Runge-Kutta 方法 (以下简称 RK 方法), 其基本思想就是间接引用泰勒展式, 即用积分区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上若干点的右函数值 f 的线性组合来代替 f 的导数, 然后用泰勒展式确定相应的系数, 这样既能避免计算 f 的各阶导数, 又能保证精度。

以常用的四阶 RK 方法为例, 令

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^4 c_i k_i \quad (1.56)$$

其中 c_i 为待定的权因子, k_i 满足下列方程:

$$\begin{cases} k_i = hf(t_n + a_i h, x_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j) \\ a_i = 0, \quad \beta_{1j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (1.57)$$

即

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, x_n) \\ k_2 = hf(t_n + \alpha_2 h, x_n + \beta_{21} k_1) \\ k_3 = hf(t_n + \alpha_3 h, x_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) \\ k_4 = hf(t_n + \alpha_4 h, x_n + \beta_{41} k_1 + \beta_{42} k_2 + \beta_{43} k_3) \end{cases} \quad (1.58)$$

系数 α_i, β_{ij} 的确定方法如下: 将 k_i 右端的 f 在点 (t_n, x_n) 处展开, 有

$$\begin{aligned} k_1 &= hf_n \\ k_2 &= hf_n + h^2(\alpha_2 f'_{t_n} + \beta_{21} f'_{x_n} f_n) + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

以此代入 (1.56) 式并与 $x(t_n + h)$ 在点 t_n 处的泰勒展式

$$x(t_n + h) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)) + \frac{h^2}{2}(f'_{t_n} + f'_{x_n} f_n) + \cdots$$

逐项进行比较, 令 h, h^2, h^3, h^4 项的系数相等, 便得到确定 c_i 和 β_{ij} 的关系式, 即

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 \alpha_2 = 1/2, \quad c_2 \beta_{21} = 1/2, \quad \cdots \quad (1.59)$$

显然, 上述参数 $c_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ 的选择不是唯一的, 有自由参数, 它的不同选择就确定了不同的 RK 公式。

上述 RK 公式 (1.56) (1.57) 是显式的, 如果改写成下列形式:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^m c_i k_i \\ k_i = hf(t_n + \alpha_i h, x_n + \sum_{j=1}^m \beta_{ij} k_j) \end{cases} \quad (1.60)$$

这种 RK 公式是隐式的。而

$$k_i = hf(t_n + \alpha_i h, x_n + \sum_{j=1}^i \beta_{ij} k_j), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.61)$$

则是对角隐的 RK 公式。在动力天文中, 通常是采用显示 RK 公式。

不难看出, 对于四阶 RK 公式, 其阶数与每前进一步所需计算的函数值 f 的次数是一致的。但更高阶的 RK 公式所需计算的 f 值的次数要比阶数多。若用 $N(m)$ 表示只需计算 m 次 f 值所获得的方法的最高阶数, 则有

$$N(m) = m, \quad 1 \leq m \leq 4 \quad (1.62)$$

而

$$N(5) = 4, \quad N(6) = 5, \quad N(7) = 6, \quad N(8) = 6, \quad N(9) = 7, \quad \dots \quad (1.63)$$

下面具体给出几种常用的显式 RK 公式。

1. 四阶公式

(1) 古典形式

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (1.64)$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, x_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(t_n, x_n + k_3) \end{cases} \quad (1.65)$$

(2) Gill 公式 (它有减少舍入误差的优点)

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}[k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4] \quad (1.66)$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, x_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{\sqrt{2}-1}{2}k_1 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})k_2) \\ k_4 = hf(t_n + h, x_n - \frac{\sqrt{2}}{2}k_2 + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})k_3) \end{cases} \quad (1.67)$$

四阶 RK 方法是应用较广的一种单步法, 对于天体力学 (包括自然天体和人造天体的运动) 中的某些精度要求不太高而右函数又简单的问题, 也是适用的。

2. RKF 公式

RK 方法本身估计局部截断误差比较麻烦, 为此, Fehlberg 提出了一种使用嵌套技术的 RK 方法^[6], 利用参数 $c_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ 可有不同选择的特点, 用时给出 m 阶和 $m+1$ 阶的两组 RK 公式, 用两组公式算出的 x_{n+1} 之差可给出局部截断误差, 由此可确定下一步的步长, 这就起了自动选择步长的作用, 此方法称为 Runge-Kutta-Fehlberg 方法, 简称 RKF 方法。由于利用了自由选择参数的特点,

实现了两组公式的嵌套， m 阶公式与 $m+1$ 阶公式相差甚少，见后面的公式 (1.68) ~ (1.76)，只不多算很少几次右函数值，即可给出局部截断误差。正由于 RKF 方法具备这种优点，因此它已成为目前被广泛采用的单步法。

参考文献 [6] 中给出了 5(6) 阶，6(7) 阶，7(8) 阶和 8(9) 阶四个嵌套公式，相应地记为 RKF5(6)，RKF6(7)，RKF7(8) 和 RKF8(9)。至于更高阶的嵌套公式，已不再能提高效率。下面分别给出 RKF5(6)，RKF6(7) 和 RKF7(8) 三套公式，以便读者直接引用。

(1)RKF5(6) 公式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=0}^5 c_i f_i + O(h^6) \\ \hat{x}_{n+1} = x_n + h \sum_{i=0}^7 \hat{c}_i f_i + O(h^7) \end{cases} \tag{1.68}$$

$$\begin{cases} f_0 = f(t_n, x_n) \\ f_i = f(t_n + \alpha_i h, x_n + h \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij} f_j), \quad i = 1, 2, \dots, 7 \end{cases} \tag{1.69}$$

第 $n+1$ 步的局部截断误差为

$$TE = \frac{5}{66}(f_0 + f_5 - f_6 - f_7)h \tag{1.70}$$

系数 $\alpha_i, \beta_{ij}, c_i$ 和 \hat{c}_i 列入表 1.1。

表 1.1 RKF5(6)

	j	0	1	2	3	4	5	6	c_i	\hat{c}_i
i	α_i	β_{ij}								
0	0	0							$\frac{31}{384}$	$\frac{7}{1408}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$							0	
2	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{16}{75}$						$\frac{1125}{2916}$	
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{2}{5}$					$\frac{9}{32}$	
4	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{144}{25}$	-4	$\frac{16}{25}$				$\frac{125}{768}$	
5	1	$\frac{361}{320}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{407}{18}$	$-\frac{11}{80}$	$\frac{55}{128}$			$\frac{5}{66}$	0
6	0	$-\frac{11}{640}$	0	$\frac{11}{256}$	$-\frac{11}{160}$	$\frac{11}{256}$	0			$\frac{5}{66}$
7	1	$\frac{93}{640}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{803}{256}$	$-\frac{11}{160}$	$\frac{99}{256}$	0	1		$\frac{5}{66}$

由公式 (1.68) 不难看出，对于五阶公式而言，只多算 2 次右函数 (f_6 和 f_7)。

(2)RKF6(7) 公式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=0}^7 c_i f_i + O(h^7) \\ \hat{x}_{n+1} = x_n + h \sum_{i=0}^9 \hat{c}_i f_i + O(h^8) \end{cases} \tag{1.71}$$

$$\begin{cases} f_0 = f(t_n, x_n) \\ f_i = f(t_n + \alpha_i h, x_n + h \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij} f_j), \quad i = 1, 2, \dots, 9 \end{cases} \tag{1.72}$$

截断误差为

$$TE = \frac{11}{270}(f_0 + f_7 - f_8 - f_9)h \tag{1.73}$$

相应的系数列入表 1.2 中。

表 1.2 RKF6(7)

	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	c_i	\hat{c}_i
i	α_i	β_{ij}										
0	0	0									$\frac{77}{1440}$	$\frac{11}{860}$
1	$\frac{2}{33}$	$\frac{2}{33}$									0	
2	$\frac{4}{33}$	0	$\frac{4}{33}$								0	
3	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{22}$	0	$\frac{3}{22}$							$\frac{1771561}{6289920}$	
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{43}{64}$	0	$-\frac{165}{64}$	$\frac{77}{32}$						$\frac{32}{105}$	
5	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2383}{486}$	0	$\frac{1067}{54}$	$-\frac{26312}{1701}$	$\frac{2176}{1701}$					$\frac{243}{2560}$	
6	$\frac{6}{7}$	$\frac{10077}{4802}$	0	$-\frac{5643}{686}$	$-\frac{116259}{16807}$	$-\frac{6240}{16807}$	$\frac{1053}{2401}$				$\frac{16807}{74880}$	
7	1	$-\frac{733}{176}$	0	$\frac{141}{8}$	$-\frac{335763}{23296}$	$\frac{216}{77}$	$-\frac{4617}{2816}$	$\frac{7203}{9152}$			$\frac{11}{270}$	0
8	0	$\frac{15}{352}$	0	0	$-\frac{5445}{46592}$	$\frac{18}{77}$	$-\frac{1215}{5632}$	$\frac{1029}{18304}$	0		$\frac{11}{270}$	
9	1	$-\frac{1833}{352}$	0	$\frac{141}{8}$	$-\frac{51237}{3584}$	$\frac{18}{77}$	$-\frac{729}{512}$	$\frac{1029}{1408}$	0	1	$\frac{11}{270}$	

(2)RKF7(8) 公式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=0}^{10} c_i f_i + O(h^8) \\ \hat{x}_{n+1} = x_n + h \sum_{i=0}^{12} \hat{c}_i f_i + O(h^9) \end{cases} \quad (1.74)$$

$$\begin{cases} f_0 = f(t_n, x_n) \\ f_i = f(t_n + \alpha_i h, x_n + h \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij} f_j), \quad i = 1, 2, \dots, 12 \end{cases} \quad (1.75)$$

截断误差为

$$TE = \frac{41}{840}(f_0 + f_{10} - f_{11} - f_{12})h \quad (1.76)$$

相应的系数列入表 1.3 中。

表 1.3 RKF7(8)

	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	c_i	\hat{c}_i
i	α_i	β_{ij}													
0	0	0												$\frac{41}{840}$	0
1	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$												0	
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$											0	
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{8}$										0	
4	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{25}{16}$	$\frac{25}{16}$									0	
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$								$\frac{34}{105}$	
6	$\frac{5}{6}$	$-\frac{25}{108}$	0	0	$\frac{125}{108}$	$-\frac{65}{27}$	$\frac{125}{54}$							$\frac{9}{35}$	
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{31}{300}$	0	0	0	$\frac{61}{225}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{13}{900}$						$\frac{9}{35}$	
8	$\frac{2}{3}$	2	0	0	$-\frac{53}{6}$	$\frac{704}{45}$	$-\frac{107}{9}$	$\frac{67}{90}$	3					$\frac{9}{280}$	
9	$\frac{1}{3}$	$-\frac{91}{108}$	0	0	$\frac{23}{108}$	$-\frac{976}{135}$	$\frac{311}{54}$	$-\frac{19}{60}$	$\frac{17}{6}$	$-\frac{1}{12}$				$\frac{9}{280}$	
10	1	$\frac{2383}{4100}$	0	0	$-\frac{341}{164}$	$\frac{4496}{1025}$	$-\frac{301}{82}$	$\frac{2133}{4100}$	$\frac{45}{82}$	$\frac{45}{162}$	$\frac{18}{41}$			$\frac{41}{840}$	0
11	0	$\frac{3}{205}$	0	0	0	0	$-\frac{6}{41}$	$-\frac{3}{205}$	$-\frac{3}{41}$	$\frac{3}{41}$	$\frac{6}{41}$	0		$\frac{41}{840}$	
12	1	$-\frac{1777}{4100}$	0	0	$-\frac{341}{164}$	$\frac{4496}{1025}$	$-\frac{289}{82}$	$\frac{2193}{4100}$	$\frac{51}{82}$	$\frac{33}{164}$	$\frac{12}{41}$	0	1	$\frac{41}{840}$	

在动力天文中常遇到不显含速度项的二阶方程组，1925 年 Nyström 曾给出直接求解这类二阶方程组的 RK 方法，称为 Runge-Kutta-Nyström 算法，但对一般问题并无明显优点，引用不多。因此本章不另作介绍。

§1.3 线性多步法 — Adams 方法、Cowell 方法和 KSG 积分器

对于初值问题 (1.47)，线性多步法的一般计算公式为

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 x_n = h(\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \cdots + \beta_0 f_n) \quad (1.77)$$

其中 $\alpha_i, \beta_i (i = 0, 1, 2, \cdots, k)$ 是与 n 无关的常数， $f_i = f(t_i, x_i)$ ，一般设 $\alpha_k = 1$ ， $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$ （即 α_0 与 β_0 不同时为零）。上述公式表明：计算 t_{n+k} 步点上的 x_{n+k} 值时，需要知道它前面的 t_{n+k-1} ， t_{n+k-2}, \cdots, t_n 各步点上的 x_i 值。因此，称 (1.77) 式所确定的方法为 k 步法，当 $k = 1$ 时即单步法，而 $k > 1$ 时则称多步法。又由于公式中出现的 x_i, f_i 都是线性的，故称线性多步法。当 $\beta_k = 0$ 时，公式是显式，否则为隐式。

对于 k 步法，其特征多项式：

$$\rho(\xi) = \alpha_k \xi^k + \alpha_{k-1} \xi^{k-1} + \cdots + \alpha_0 \quad (1.78)$$

是很重要的。若方程 (1.47) 的右函数 $f(t, x)$ 在区域 $a \leq t \leq b, -\infty < x < \infty$ 中为 t, x 的连续函数，并对 x 满足 Lipschitz 条件，则 k 步公式 (1.77) 对所有这样的 $f(t, x)$ 为稳定的充分与必要条件是 k 步公式满足特征根条件，即特征多项式 (1.78) 的零点的模不大于 1，且在单位圆上的零点只能是单零点^[4]。用这一条件不仅可以判别一个具体的 k 步法是否稳定，而且也说明了对于一个稳定的 k 步公式，其系数的选择将有所“约束”。或者说，对于给定的多步法公式，可以确定它的稳定边界。为此，下面举一个简单的例子来说明。

用 Euler 法解下列方程：

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \lambda = \text{const}$$

相应的 Euler 公式为

$$x_{n+1} - x_n = h f_n = h \lambda x_n$$

其特征多项式

$$\rho(\xi) = \xi - (1 + \lambda h)$$

的特征根（即零点）为

$$\mu_1 = 1 + \lambda h$$

要想 Euler 法对于有限的固定步长 h 为绝对稳定，则应有

$$|\mu_1| = |1 + \lambda h| \leq 1$$

因而使 $|\mu_1| = 1$ 的 λh 值就构成绝对稳定区的边界。

下面介绍几种常用的多步法计算公式。

1. Adams 方法 — 显式公式与隐式公式

Adams 显式公式又称为 Adams-Bashforth 公式，隐式公式又称为 Adams-Moulton 公式。

(1) Adams 显式公式

对所给的微分方程 (1.47) 两端求积分，从 t_n 积分到 t_{n+1} ，就得到等价的积分方程：

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \quad (1.79)$$

可用插值多项式来代替上式右端的被积函数，从而使其离散化以得到数值公式。这里是采用牛顿后差公式，记

$$\nabla^m f_n = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} f_{n-l} \quad (1.80)$$

∇ 即向后差分算子：

$$\begin{cases} \nabla f_n &= \nabla f(x_n) = f(x_n) - f(x_n - h) \\ \nabla^2 f_n &= \nabla f(x_n) - \nabla f(x_n - h) \\ &= f(x_n) - 2f(x_n - h) + f(x_n - 2h) \\ \dots & \end{cases} \quad (1.81)$$

相应的函数 f 向后插值多项式为

$$p(t) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m f_n \quad (1.82)$$

这里是用 k 个插值点。辅助变量 s 由下式定义：

$$s = \frac{t - t_n}{h} \quad (1.83)$$

相应地有

$$s + 1 = \frac{t - t_n}{h} + 1 = \frac{t - t_{n-1}}{h}, \quad \dots, \quad s + m - 1 = \frac{t - t_{n-m+1}}{h} \quad (1.84)$$

$\binom{-s}{m}$ 是广义二项式系数，可表示为

$$\binom{-s}{m} = (-1)^m \binom{s + m - 1}{m} \quad (1.85)$$

将插值多项式 $p(t)$ 代入 (1.79) 式，得

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt \\ &= h \sum_{m=0}^{k-1} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{h} (-1)^m \binom{-s}{m} dt \right] \nabla^m f_n \end{aligned}$$

此式可写成

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \nabla^m f_n \quad (1.86)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{h} (-1)^m \binom{-s}{m} dt \\ &= \int_0^1 \binom{s + m - 1}{m} ds \end{aligned} \quad (1.87)$$

略去推导过程，直接给出 γ_m 所满足的关系如下：

$$\gamma_m + \frac{1}{2} \gamma_{m-1} + \frac{1}{3} \gamma_{m-2} + \dots + \frac{1}{m-1} \gamma_0 = 1 \quad (1.88)$$

将差分公式 (1.80) 代入 (1.86) 式, 可得用右函数值来表示的计算公式, 即

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \nabla^m f_n \\
 &= h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} f_{n-l} \\
 &= h \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \binom{m}{l} f_{n-l} \\
 &= h \sum_{l=0}^{k-1} [(-1)^l \sum_{m=l}^{k-1} \gamma_m \binom{m}{l}] f_{n-l}
 \end{aligned}$$

该公式可简化为

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{kl} f_{n-l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.89)$$

其中

$$\beta_{kl} = (-1)^l \sum_{m=l}^{k-l} \binom{m}{l} \beta_m = (-1)^l \left[\binom{l}{l} \gamma_l + \binom{l+1}{l} \gamma_{l+1} + \dots + \binom{k-1}{l} \gamma_{k-1} \right] \quad (1.90)$$

(1.86) 式和 (1.89) 式分别为用后差分和右函数表达的 Adams k 步显式公式, 计算 x_{n+1} 时, 只用到前 k 个步点 $t_{n+k-1}, t_{n+k-2}, \dots, t_n$ 上的 $x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n$ 值。

(2) Adams 隐式公式

对所给微分方程 (1.47) 两端从 t_{n-1} 到 t_n 求积分, 便得

$$x(t_n) - x(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, x(t)) dt \quad (1.91)$$

与前面相同, 仍用 f_n 的后差分表示插值公式, 给出

$$x_n - x_{n_1} = h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m^* \nabla^m f_n \quad (1.92)$$

仿照显式公式的推导过程, 且下标改用统一形式, 即得 Adams 隐式公式如下:

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{kl}^* f_{n+1-l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.93)$$

$$\beta_{kl}^* = (-1)^l \sum_{m=l}^{k-1} \binom{m}{l} \gamma_m^* \quad (1.94)$$

而 γ_m^* 满足下列递推关系:

$$\gamma_m^* + \frac{1}{2} \gamma_{m-1}^* + \frac{1}{3} \gamma_{m-2}^* + \dots + \frac{1}{m+1} \gamma_0^* = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (1.95)$$

$\gamma_0^*, \gamma_1^*, \dots, \gamma_m^*$ 与 γ_m 之间有如下关系:

$$\sum_{i=0}^m \gamma_i^* = \gamma_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.96)$$

Adams 隐式公式常与显式公式联合使用, 即由 Adams 显式公式提供一个近似值 $x_{n+1}^{(0)}$, 此即预估 (PE), 再用隐式公式进行校正 (CE), 从而得到所需的 x_{n+1} 值。这一联合使用的方法就称为预估

- 校正法，简称 PECE 算法。对于受摄二体问题，可针对运动方程的特点，将右函数分解为主要（即中心引力加速度）和次要（即摄动加速度）两个部分，前者是校正的主要“内容”，这种方法又称为部分预估-校正法，简称 PECE* 算法。

系数 γ_m, γ_m^* 和 β_{kl}, β_{kl}^* 的计算，在计算机上是很容易实现的，这里为了某种需要，给出直到 12 阶（步）的系数 γ_m 和 γ_m^* 值（ $m = 0, 1, \cdots, 11$ ），见表 1.4。

表 1.4 γ_m 和 γ_m^* 值						
m	0	1	2	3	4	5
γ_m	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$
γ_m^*	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$
m	6	7	8	9	10	11
γ_m	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{36799}{120960}$	$\frac{1070017}{3628800}$	$\frac{25713}{89600}$	$\frac{26842253}{95800320}$	$\frac{4777223}{17418240}$
γ_m^*	$-\frac{863}{60480}$	$-\frac{1375}{120960}$	$-\frac{33953}{3628800}$	$-\frac{8183}{1036800}$	$-\frac{3250433}{479001600}$	$-\frac{4671}{788480}$

2. Cowell 方法 —Stömer 公式和 Cowell 公式

Cowell 方法是 1910 年由 Cowell 和 Grommelin 在预报哈雷慧星回归的工作中提出的^[7]，它是求解下列二阶方程初值问题

$$\begin{cases} \ddot{x} &= f(x, t) \\ x(t_0) &= x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases} \tag{1.97}$$

的线性多步法。该二阶方程的特点是右函数不含速度 \dot{x} ，而仅需考虑引力作用的天体运动方程正是如此。所以，Cowell 方法曾是天体力学有关问题常采用的一种数值方法。在每一步计算中，只需要直接给出 x_n 而不必去算 \dot{x}_n ，这比将二阶方程 (1.97) 写为一阶方程组后用 Adams 方法求数值解要简便些。

用于初值问题 (1.97) 的线性多步法计算公式与 (1.77) 式不同，其一般形式为

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 x_n = h^2 (\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \cdots + \beta_0 f_n) \tag{1.98}$$

或写成

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} \tag{1.99}$$

通常设 $\alpha_k = 1, |\alpha_0| + |\beta_0| = 0$ 。

(1)Stömer 显式公式

对问题 (1.97) 的微分方程求积分，得

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^t f(t, x(t)) dt \tag{1.100}$$

再积分该式两端，分别从 t_n 积到 t_{n+1} 和 t_n 积到 t_{n-1} ，有

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= x(t_n) + h\dot{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t f(t, x(t)) dt^2 \\ x(t_{n-1}) &= x(t_n) - h\dot{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n-1}} \int_{t_n}^t f(t, x(t)) dt^2 \end{aligned}$$

由这两式即可消去 $\dot{x}(t_n)$ ，最后得一等价的积分方程，即

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &- 2x(t_n) + x(t_{n-1}) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t f(t, x(t)) dt^2 + \int_{t_n}^{t_{n-1}} \int_{t_n}^t f(t, x(t)) dt^2 \end{aligned}$$

用插值多项式代替被积函数，即可给出离散化后的数值公式。类似 Adams 显式公式的推导过程，可得

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2 \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_m \nabla^m f_n \quad (1.101)$$

其中

$$\begin{cases} \sigma_m &= (-1)^m \int_0^1 (1-s) \begin{bmatrix} -s & s \\ m & m \end{bmatrix} \\ s &= \frac{t-t_n}{h} \end{cases} \quad (1.102)$$

由此积分可给出系数 σ_m 的递推关系式^[4]：

$$\begin{cases} \sigma_0 &= 1 \\ \sigma_m &= 1 - \frac{2}{3}h_2\sigma_{m-1} - \frac{2}{4}h_3\sigma_{m-2} - \cdots - \frac{2}{m+2}h_{m+1}\sigma_0 \\ &= 1 - \sum_{i=1}^m (\frac{2}{i+2}h_{i+1})\sigma_{m-i}, \quad m = 1, 2, \cdots \end{cases} \quad (1.103)$$

其中 h_i 是调和级数的前 i 项的部分和，即

$$h_i = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{i} \quad (1.104)$$

由后差公式 (1.80)，可将 (1.101) 式改写成用右函数表达的形式：

$$\begin{aligned} x_{n+i} - 2x_n + x_{n-1} &= h^2 \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_m \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} f_{n-l} \\ &= h^2 \sum_{i=0}^{k-1} [(-1)^i \sum_{m=l}^{k-1} \sigma_m \binom{m}{l}] f_{n-l} \end{aligned}$$

又可简写为

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2 \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{kl} f_{n-l}, \quad k = 1, 2, \cdots \quad (1.105)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_{kl} &= (-1)^l \sum_{m=l}^{k-1} \binom{m}{l} \sigma_m \\ &= (-1)^l \left[\binom{l}{l} \sigma_l + \binom{l+1}{l} \sigma_{l+1} + \cdots + \binom{k-1}{l} \sigma_{k-1} \right] \end{aligned} \quad (1.106)$$

(1.101) 式和 (1.105) 即 Stömer 显式公式。

(2)Cowell 隐式公式

仿照建立 Adams 隐式公式的方法，容易给出^[4]

$$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = h^2 \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_m^* \nabla^m f_n \quad (1.107)$$

其中

$$\sigma_m^* = (-1)^m \int_{-1}^0 (-s) \left[\binom{-s}{m} + \binom{s+2}{m} \right] ds \quad (1.108)$$

s 的意义同前。 σ_m^* 有与 σ_m 类似的递推关系:

$$\begin{cases} \sigma_0^* &= 1 \\ \sigma_m^* &= -\frac{2}{3}h_2\sigma_{m-1}^* - \frac{2}{4}h_3\sigma_{m-2}^* - \cdots - \frac{2}{m+2}h_{m+1}\sigma_0^* \\ &= -\sum_{i=1}^m(\frac{2}{i+2}h_{i+1})\sigma_{m-i}^*, \quad m=1,2,\cdots \end{cases} \tag{1.109}$$

且有

$$\sigma_m^* = \sigma_m - \sigma_{m-1} \tag{1.110}$$

相应的用右函数表达的 Cowell 隐式公式（改用与显式同样的下标）为

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2 \sum_{i=0}^{k-1} a_{kl}^* f_{n+1-l}, \quad k=1,2,\cdots \tag{1.111}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{kl}^* &= (-1)^l \sum_{m=l}^{k-1} \binom{m}{l} \sigma_m^* \\ &= (-1)^l \left[\binom{l}{l} \sigma_l^* + \binom{l+1}{l} \sigma_{l+1}^* + \cdots + \binom{k-1}{l} \sigma_{k-1}^* \right] \end{aligned} \tag{1.112}$$

同样，可将显式公式与隐式公式联合使用，建立预估－校正算法，这就构成了一个完整的 Cowell 方法，又称为第一 Cowell 方法。Cowell 和 Crommelin 还推荐了用二次积分的方法，也称为第二 Coewll 方法，但与第一 Cowell 方法相比，并无特点，通常采用的还是第一 Cowell 方法，因此就简称 Cowell 方法。

为了某种需要，这里也给出直到 12 阶的系数 σ_m 和 σ_m^* 值（ $m=0,1,\cdots,11$ ），见表 1.5 。

表 1.5 σ_m 和 σ_m^* 值						
m	0	1	2	3	4	5
σ_m	1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{19}{240}$	$\frac{3}{40}$
σ_m^*	1	-1	$-\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{240}$
m	6	7	8	9	10	11
σ_m	$\frac{863}{12096}$	$\frac{825}{12096}$	$\frac{237671}{3628800}$	$\frac{229124}{2628800}$	$\frac{3250433}{53222400}$	$\frac{60723}{1025024}$
σ_m^*	$-\frac{221}{60480}$	$-\frac{19}{6048}$	$-\frac{9829}{3628800}$	$-\frac{8547}{3628800}$	$-\frac{330157}{159667200}$	$-\frac{24377}{13305600}$

3.Adams-Cowell 方法

k 阶（即 k 步）Adams 公式的局部截断误差是 $O(h^{k+1})$ ，而 Cowell 公式是 $O(h^{k+2})$ ，因此 Cowell 公式比同阶的 Adams 公式精确。但是，天体力学在发展，考虑的因素不断增多，右函数中会出现 \dot{x} ，而且即使纯引力问题，有时也要给出 \dot{x} ，例如人造地球卫星有摄星历表的计算，就会出现上述两种情况，这就有必要将 Adams 方法与 Cowell 方法联合使用。

考虑初值问题

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases} \tag{1.113}$$

可将方程 (1.113) 看成 \dot{x} 的一阶方程，由 Adams 公式提供 \dot{x} ，而同时用 Cowell 公式计算 x ，这比单纯用 Adams 方法有效。这种联合使用的方法就称为 Adams-Cowell 方法，在天体（包括自然天体和人造地球卫星）的精密星历表计算中常被采用。具体应用时，亦是采用预估－校正法，即显式公式与隐式公式相结合。

4. 几种方法的计算情况

对于 k 步法, 必须知道 k 个步点上的值: $x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \cdots, x_n$, 才能向后积分。因此, 首先就要碰到一个“起步”问题, 通常采用两种方法: 一是由单步法 (如精度较高的 RK 方法) 提供起步值, 另一方法即由多步法本身通过迭代来解决。 k 步法还有一个“结束”问题, 即计算的“终点”问题, 就是说, 要计算的各时刻 $t_q(q = 1, 2, \cdots)$ 一般并不在步点 $t_n(n = 1, 2, \cdots)$ 上。这也可用两种方法来解决, 一是多步法的插值公式, 另一种方法即与起步相配套, 用同一单步法来完成“最后”一步的计算, 此时对应的 $t_q - t_n < h$, h 是多步法的积分步长, 这样的处理还是及其简便的。

这里将采用 RK 方法起步、结束, 对几种线性多步法给出一些算例, 以显示这些算法的精度与稳定状况, 从而说明多步法的阶 (即步) 与精度高低、稳定程度的某种关系。

算例是取轨道变化比较明显的两种人造地球卫星, 一是测地卫星 Lageos, 另一个是一般的周期为 2^h 的近地卫星, 初值分别为:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, T = 225^m.0, e = 0.004, i = 109^\circ.9, \Omega = 45^\circ.0, \omega = 45^\circ.0, M = 0^\circ.0 \\ t_0 &= 0, T = 120^m.0, e = 0.10, i = 50^\circ.0, \Omega = 50^\circ.0, \omega = 50^\circ.0, M = 0^\circ.0 \end{aligned}$$

由于轨道偏心率不大, 可用固定步长进行计算。考虑三种方法, 即 Adams 预估 - 校正法 (记为 AD-pece)、Adams-Cowell 预估法 (记为 AC-pe) 和预估 - 校正法 (记为 AC-pece)。基本变量取 \vec{r} 和 $\dot{\vec{r}}$, 计算无摄运动和受摄运动两种情况, 后者包含了地球形状主要带谐项 (J_2, J_3, J_4) 摄动。对于这种天体的运动, 计算精度的高低, 主要由沿迹量 $(M + \omega)$ 的误差大小 $\Delta(M + \omega)$ 来体现, 其结果分别列于表 1.6 和表 1.7。积分步长都是每圈取 100 步。

表 1.6 100 圈的 $\Delta(M + \omega)$ (Kepler 运动)

order	Lageos			2^h Satellite		
	AD-pece	AC-pe	AC-pece	AD-pece	AC-pe	AC-pece
8	4.3E-7	1.7E-6	4.9E-8	0.7E-5	2.3E-5	0.6E-6
9	1.4E-7	5.6E-7	2.1E-8	2.2E-6	0.8E-5	3.1E-7
10	1.6E-9	0.8E-8	1.8E-10	1.7E-7	0.5E-6	1.8E-8
11	4.4E-10	2.2E-9	1.7E-12	1.4E-8	2.4E-8	1.4E-10
12	*	0.9E-9	2.2E-11	*	2.6E-8	1.3E-9
13	*	4.3E-10	0.9E-10	*	2.4E-8	5.1E-10
14	*	*	1.7E-10	*	*	0.8E-10
15	*	*	4.0E-10	*	*	4.0E-10
16	*	*	3.0E-10	*	*	3.0E-10
17	*	*	1.0E-9	*	*	0.9E-9
18	*	*	2.1E-9	*	*	2.2E-9
19	*	*	0.9E-9	*	*	0.8E-9
20	*	*	*	*	*	*

表 1.6 和表 1.7 分别列出了三种方法从 8 阶到 20 阶 (见表内第一栏 order) 的计算情况。表中 * 表示发散, 如果步长 h 减小, 发散情况将改变。由此不难看出如下三点:

- (1) Adams-Cowell 方法显然优于单纯的 Adams 方法, 预估 - 校正法也明显地比单纯的预估法好。
- (2) 多步法的阶数愈高, 要使其稳定, 则对计算步长有所限制。
- (3) 对于 AC-pece 算法, 精度并不是随方法的阶数增高而增高, 这与稳定性有关 (即误差的增长问题), 在受摄情况下, 一般是 12 ~ 14 阶较好。

表 1.7 100 圈的 $\Delta(M + \omega)$ (受摄运动)

	Lageos			2^h Satellite		
order	AD-pece	AC-pe	AC-pece	AD-pece	AC-pe	AC-pece
8	4.4E-7	1.7E-6	5.0E-8	1.0E-6	1.0E-5	1.0E-7
9	1.4E-7	5.5E-7	2.1E-8	2.2E-6	0.8E-5	3.0E-7
10	1.7E-9	0.9E-8	2.2E-10	1.9E-7	0.7E-6	2.2E-8
11	4.1E-10	2.0E-9	1.0E-10	1.6E-8	2.0E-8	0.6E-9
12	*	1.0E-9	2.3E-11	*	4.4E-8	1.6E-9
13	*	4.2E-10	3.0E-11	*	1.8E-8	3.0E-10
14	*	*	1.5E-10	*	*	3.5E-11
15	*	*	3.4E-10	*	*	4.6E-10
16	*	*	2.7E-10	*	*	2.5E-10
17	*	*	0.9E-9	*	*	0.9E-9
18	*	*	2.1E-9	*	*	2.2E-9
19	*	*	0.9E-9	*	*	0.8E-9
20	*	*	*	*	*	*

5.KSG 积分器

这是 Krogh-Shampine-Gordon 三位作者在 Adms-Cowell 方法的基础上稍作改进给出的一种定阶、定步长多步数值方法^[8]，简称 KSG 积分器，其算法与 Adams-Cowell 方法不同之处在于校正过程相当简单。

仍讨论初值问题 (1.113)，相应的预报公式为：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\dot{x}_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{j+1} (\nabla^j f_n) \\ \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j+1} (\nabla^j f_n) \end{cases} \quad (1.114)$$

其中计算位置 x 的公式与 Cowell 方法的相应公式 (1.102) 优点差别，这里用 \dot{x}_n 代替了 $(x_n - x_{n-1})/h$ 。引用后差分公式 (1.80)，上式即可改写成右函数表达的形式，即：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\dot{x}_n + h^2 \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l+1}^* f_{n-l} \\ \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{l+1}^* f_{n-l} \end{cases} \quad (1.115)$$

$$\begin{cases} \alpha_{l+1}^* = (-1)^l \sum_{j=l+1}^k \binom{j-1}{l} \alpha_j \\ \quad = (-1)^l \left[\binom{l}{l} \alpha_{l+1} + \binom{l+1}{l} \alpha_{l+2} + \cdots + \binom{k-1}{l} \alpha_k \right] \\ \beta_{l+1}^* = (-1)^l \sum_{j=l+1}^k \binom{j-1}{l} \beta_j \\ \quad = (-1)^l \left[\binom{l}{l} \beta_{l+1} + \binom{l+1}{l} \beta_{l+2} + \cdots + \binom{k-1}{l} \beta_k \right] \end{cases} \quad (1.116)$$

其中 $\alpha_j, \beta_j (j = 1, 2, \dots, k)$ 的计算公式为

$$\alpha_j = g_{j,2}, \quad \beta_j = g_{j,1} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1.117)$$

和

$$\begin{cases} \alpha_1 = g_{1,2} = 1/2, & \beta_1 = g_{1,1} = 1 \\ \alpha_j = g_{j,2}, & \beta_j = g_{j,1} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (1.118)$$

$$\begin{cases} g_{1,q} = 1/q! & (q = 1, 2, \dots, k+2) \\ g_{j,q} = g_{j-1,q} - \frac{q}{j-1} g_{j-1,q+1} & (j = 2, 3, \dots, k+1) \end{cases} \quad (1.119)$$

这里 j 取到 $k+1$ 是为了下面校正公式中所需要的。上列系数 α_j 与 β_j 有如下关系:

$$\alpha_j = j(\beta_j - \beta_{j+1}) \quad (1.120)$$

校正公式为:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_{n+1}^p + h^2 \alpha_{k+1} (\nabla^k f_{n+1}^p) \\ \quad = x_{n+1}^p + h^2 \alpha_{k+1} (f_{n+1}^p - d_1) \\ \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_{n+1}^p + h^2 \beta_{k+1} (\nabla^k f_{n+1}^p) \\ \quad = \dot{x}_{n+1}^p + h^2 \beta_{k+1} (f_{n+1}^p - d_1) \end{cases} \quad (1.121)$$

$$d_1 = \sum_{l=0}^{k-1} \gamma_{l+1}^* f_{n-l} \quad (1.122)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{l+1}^* &= (-1)^l \sum_{j=l+1}^k \binom{j-1}{l} \\ &= (-1)^l \left[\binom{l}{l} + \binom{l+1}{l} + \dots + \binom{k-1}{l} \right] \end{aligned} \quad (1.123)$$

其中

$$f_{n+1}^p = f(x_{n+1}^p, \dot{x}_{n+1}^p, t_{n+1})$$

x_{n+1}^p 和 \dot{x}_{n+1}^p 是预报值。

事实上, Cowell 方法正是针对不显含 \dot{x} 的二阶方程直接计算 x , 相应的公式 (1.101) 中不出现 \dot{x} , 局部截断误差比相应的解一阶方程组的同阶 Adams 算法小, 而 KSG 积分器针对必须计算 \dot{x} , 用 \dot{x} 代替 x_n 和 x_{n+1} , 就局部截断误差而言, 这显然是不可取的。但是, 它的校正过程特别简单, 既省机时又能减少舍入误差的积累。对于字长不太长的计算机, 若舍入误差的累积超过局部截断误差的累积, 那么 KSG 积分器将会优于 Adams-Cowell 方法; 反之, 若截断误差的累积占主导地位, 则 KSG 积分器的精度要比 Adams-Cowell 方法差, 此时它仅能保留计算简单而省机时的优点。因此, 本节专门介绍 KSG 积分器的目的, 并不是着眼于精度的高低, 而是想让读者了解在不同的计算“环境”下, 可选择不同的算法, KSG 积分器就是一例。目前, 还是有一些工作 (特别是人工精密定轨) 采用 KSG 积分器。

为了证实上述论断, 下面给出具体算例。仍以 Lageos 卫星的无摄运动作为计算背景, 分别在 Sun 工作站和 Cray 机上采用 AC-pece 算法和 KSG-pece 算法, 计算结果列于表 1.8。两种算法均为 10 阶, 且每圈 (对应无摄运动周期 T_0) 取 100 步。Sun 工作站的双倍字长为 10 进制 15 位有效数字, 而 Cray 机只能用单字长, 只有 13 位。

从表 1.8 中列出的结果可以清楚的看出, 对于 Sun 工作站, 舍入误差不重要, 故 AC-pece 算法优于 KSG-pece 算法, 而反之, 在后者不比前者差, 所用机时也明显地少于前者。

表 1.8 两种算法的沿迹误差 $\Delta(M + \omega)$					
机器	方法	100(T_0)	1000(T_0)	10000(T_0)	30000(T_0)
Sun	AC	1.9E-10	2.4E-8	2.5E-6	2.2E-5
	KSG	2.1E-9	2.1E-7	2.1E-5	1.9E-4
Cray	AC	4.2E-8	4.2E-6	4.2E-5	3.7E-3
	KSG	1.9E-8	1.9E-6	1.9E-4	1.7E-3

关于线性多步法，近年来又出现了对于 Hamilton 系统比较有效的对称算法^{[9],[10]}，作者先后给出了 2,4,6,10 和 14 阶计算公式，后又在此基础上加入了减小舍入误差的 ADD 算法^[11]，并在动力天文的某些研究中得到应用。

§1.4 变量的选择与相应的基本方程

求解天体运动方程，基本变量的选择是否恰当，会影响整个计算效率。对于受摄二体问题，通常有三种选择：

- (1) 运动天体的位置矢量 \vec{r} 和速度矢量 $\dot{\vec{r}}$ ，这是被普遍采用的一种变量，它不仅适用于受摄二体问题，同样在一般 N 体 ($N \geq 3$) 问题和限制性三体问题中也常被采用。
- (2) 运动天体的摄动坐标矢量 \vec{u} 和相应的速度矢量 $\dot{\vec{u}}$ ，即

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_c, \quad \dot{\vec{u}} = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_c \tag{1.124}$$

其中 \vec{r}_c 和 $\dot{\vec{r}}_c$ 对应参考轨道。关于参考轨道，最简单的选择是将它取为运动天体对应的无摄轨道。

- (3) 在一定条件下，用运动天体的轨道根数 σ （对应变化椭圆）代替上述摄动坐标和速度。下面分别介绍这三种选择和相应的运动方程，以及它们在实际应用中的有关问题。

1. \vec{r} 和 $\dot{\vec{r}}$ 作为基本变量

初值问题为

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0 \end{cases} \tag{1.125}$$

对于一般 N 体问题， $\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$ 应理解为 N 个天体的坐标、速度和加速度。对于受摄二体问题，右函数 \vec{F} 可分为两部分，即

$$\vec{F} = \vec{F}_0(\vec{r}) + \vec{F}_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t; \varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1.126}$$

其中 $\vec{F}_0(\vec{r})$ 是中心引力加速度，表达式如下：

$$\vec{F}_0 = -G(M + m) \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1.127}$$

这里 M 和 m 各为中心天体和运动天体的质量，而 \vec{F}_1 是摄动加速度。

采用这种变量的原因很明显，方程右函数 \vec{F} 的形似简单，而计算效率的高低，往往取决于右函数简单与否。这种选择的缺点是右函数包含无摄部分，变化快，在一定精度要求下，积分步长往往被限制得较小。

2. \vec{u} 和 $\dot{\vec{u}}$ 作为基本变量

对于这种变量，相应的初值问题为

$$\begin{cases} \ddot{\vec{u}} = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_c \\ \quad = -(\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \ddot{\vec{r}}_c) + \vec{F}_1(\vec{u}, \dot{\vec{u}}, \vec{r}_c, \dot{\vec{r}}_c, t; \varepsilon) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0, \quad \dot{\vec{u}}(t_0) = \dot{\vec{u}}_0 \end{cases} \quad (1.128)$$

其中 $\mu = G(M + m)$ ，初始条件 \vec{u}_0 和 $\dot{\vec{u}}$ 为

$$\vec{u}_0 = \vec{r}_0 - \vec{r}_c(t_0), \quad \dot{\vec{u}}_0 = \dot{\vec{r}}_0 - \dot{\vec{r}}_c(t_0) \quad (1.129)$$

这里参考轨道取不变椭圆， $\ddot{\vec{r}}_c = -\mu \vec{r}_c / r_c^3$ ，有严格解 $\vec{r}_c(t), \dot{\vec{r}}_c(t)$ ，且

$$\vec{u}_0 = 0, \quad \dot{\vec{u}}_0 = 0$$

在上述选择下，对于同一精度要求，其积分步长显然可以取得比第一种情况大。但每一步要增加参考轨道星历表的计算，而且当摄动变化快时，还要逐段改变零点，即逐段校正参考轨道，这将导致不断初始化的问题，显然不可取。

既然是计算摄动量，那么可直接采用轨道根数作为基本变量，这就不会出现逐段校正参考轨道的问题。

3. 轨道根数 σ 作为基本变量

此时，初值问题的提法是

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = f(\sigma, t; \varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1 \\ \sigma(t_0) = \sigma_0 \end{cases} \quad (1.130)$$

如果 σ 取为六个常用的 Kepler 根数， $a, e, i, \Omega, \omega, M$ ，并采用一般摄动运动方程的形式，在此情况下，若将右函数 f 表示成轨道根数的形式 $f(\sigma, t; \varepsilon)$ ，那么，其具体表达式显然比较复杂，特别当存在多种摄动因素时，就更加如此。为了适用数值方法，这里介绍一种变量的选择和相应的方程右函数的表达形式。

σ 取 $a, e, i, \Omega, \omega, E$ ，用 E 代替 M 的目的，是为了在采用下述右函数的表达形式时，避免解 Kepler 方程的麻烦。如果偏心率 e 不大，解 Kepler 方程简便，亦可不必用 E 代替 M 。关于右函数 $f(\sigma, t; \varepsilon)$ 将由第一种变量选择中的 $\vec{F}_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t; \varepsilon)$ 提供，具体形式见公式 (1.3) ~ (1.8) 以及 (1.21) ~ (1.24)。从上述表达式可以清楚地看出，对于这种形式，计算右函数并不十分复杂，特别当摄动因素较多时，例如人造地球卫星在多种摄动因素影响下的运动，具有大偏心率轨道的小行星在多个大行星影响下的运动，乃至大行星的运动等，此时 \vec{F}_1 本身就比较复杂，第一种选择中的 \vec{F}_1 或整个 \vec{F} 的计算量，与方程 (1.3) ~ (1.8) 右函数的计算量相差甚微，只多一步 \vec{F}_1 到 S, T, W 的转换，而这一步转换相对 \vec{F}_1 的计算量所占比例甚小。但这种形式的方程积分步长可以取大些，整个计算量反而减小；若取相同步长，则局部截断误差明显地减小，计算精度将会提高。因此，选择轨道根数作为自变量，在摄动加速度 \vec{F}_1 本身复杂的情况下，还是有其实用价值的。另外，采用轨道根数 σ 作为基本变量，因具有轨道几何清晰的特点，便于分析问题。

第二章 地球非球形引力摄动

地球非球形引力摄动位 ΔV （即摄动函数 R ）如下：

$$\begin{aligned}\Delta V &= \sum_{l,m} \Delta V_{lm} \\ &= \frac{GM_e}{R} \sum_{l \geq 2} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{R}\right)^l P_{lm}(\sin \varphi) (C_{lm} \cos m\lambda_G + S_{lm} \sin m\lambda_G)\end{aligned}\quad (1.131)$$

其中 GM_e 是地心引力常数, a_e 是地球参考椭球体赤道半径, 与之相“配套”的一组谐系数即 C_{lm}, S_{lm} , 它们反映了地球引力位的不均匀性。式中 R, φ, λ_G 是地固坐标系中卫星所在的空间点的球坐标: 地心距, 地心纬度和从格林尼治方向起量的经度。

与分析方法一样, 采用前言中提出的无量纲化计算单位系统, 且对缔合让德多项式 $P_{lm}(\sin \varphi)$ 和相应的谐系数 C_{lm}, S_{lm} 采用归一化形式, 这是因为在数值法定轨中, 可允许对 l, m 取项增多的情况下, 保持 $P_{lm}(\sin \varphi)$ 的数值在一定范围内 ($||\bar{P}_{l,m}(\sin \varphi)|| = \sqrt{4\pi}$), 相应的归一化谐系数 $\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}$ 的值亦保持一种“平稳”规律。归一化的 ΔV 表达式为

$$\Delta V = \sum_{l \geq 2} \sum_{m=0}^l \left(\frac{1}{R}\right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) [\bar{C}_{lm} \cos m\lambda_G + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda_G] \quad (1.132)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{P}_{lm}(\mu) = P_{lm}(\mu)/N_{lm} \\ \bar{C}_{lm} = C_{lm} \cdot N_{lm} \quad \bar{S}_{lm} = S_{lm} \cdot N_{lm} \end{cases} \quad (1.133)$$

$$\begin{cases} N_{lm} = \left[\left(\frac{1}{1+\delta}\right) \frac{(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \right]^{1/2} \\ \delta = \begin{cases} 0 & m=0 \\ 1 & m \neq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.134)$$

为了便于计算和分析, 将 ΔV 分成带谐项和田谐项两个部分:

$$\Delta V = \Delta V_l + \Delta V_{lm} \quad (1.135)$$

$$\Delta V_l = \sum_{l \geq 2} \bar{C}_{l,0} \left(\frac{1}{R}\right)^{l+1} \bar{P}_l(\sin \varphi) \quad (1.136)$$

$$\Delta V_{lm} = \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \left(\frac{1}{R}\right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) [\bar{C}_{lm} \cos m\lambda_G + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda_G] \quad (1.137)$$

其中 $\cos \lambda_G$ 和 $\sin \lambda_G$ 可采用简单的递推算法, 只需计算一对三角函数值 $\cos \lambda_G$ 和 $\sin \lambda_G$ 就可直接按代数运算过程给出 $\cos m\lambda_G$ 和 $\sin m\lambda_G (m \geq 2)$, 递推公式如下:

$$\begin{cases} \cos m\lambda_G = 2 \cos \lambda_G \cos(m-1)\lambda_G - \cos(m-2)\lambda_G \\ \sin m\lambda_G = 2 \cos \lambda_G \sin(m-1)\lambda_G - \sin(m-2)\lambda_G \end{cases} \quad m \geq 2 \quad (1.138)$$

由于 $\sin \varphi, \cos \lambda_G$ 和 $\sin \lambda_G$ 均为地固坐标系中的量, 而卫星运动方程是在两种空间坐标系 (历元地心天球坐标系和轨道坐标系) 中建立并求解的, 故涉及到坐标转换问题。转换中将用到 $\sin \varphi, \cos \lambda_G$ 和 $\sin \lambda_G$ 的表达式及其有关的偏导数, 相应的表达式为

$$\sin \varphi = \frac{Z}{R} \quad (1.139)$$

$$\left(\frac{\partial(\sin \varphi)}{\partial \vec{R}}\right)^T = -\frac{Z}{R^3} \vec{R} + \frac{1}{R} \vec{k}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.140)$$

$$\cos \lambda_G = X/R' \quad \sin \lambda_G = Y/R' \quad (1.141)$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_G}{\partial \vec{R}}\right)^T = \begin{pmatrix} -Y/R'^2 \\ X/R'^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{R'} \begin{pmatrix} -\sin \lambda_G \\ \cos \lambda_G \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.142)$$

其中 $R' = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ 。由 (1.141) 式和 (1.142) 式可给出

$$\left(\frac{\partial(\cos m \lambda_G)}{\partial \vec{R}}\right)^T = \left(-\frac{m}{R'} \sin m \lambda_G\right) \begin{pmatrix} -\sin \lambda_G \\ \cos \lambda_G \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.143)$$

$$\left(\frac{\partial(\sin m \lambda_G)}{\partial \vec{R}}\right)^T = \left(+\frac{m}{R'} \cos m \lambda_G\right) \begin{pmatrix} -\sin \lambda_G \\ \cos \lambda_G \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.144)$$

§2.1 带谐项摄动加速度 $\vec{F}_1(J_l)$

地固坐标系中卫星的地心位置矢量 \vec{R} 与两种空间坐标系中的地心位置矢量 \vec{r} 之间的转换关系为

$$\vec{R} = \begin{cases} (HG) \vec{r} & \text{对历元地心天球坐标系} \\ (EG) \vec{r} & \text{对轨道坐标系} \end{cases} \quad (1.145)$$

相应地有

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}}\right)^T = \begin{cases} (HG)^T & \text{对历元地心天球坐标系} \\ (EG)^T & \text{对轨道坐标系} \end{cases} \quad (1.146)$$

由此可给出带谐项摄动加速度 $\vec{F}_1(J_l)$ 的计算公式，即

$$\boxed{\vec{F}_1(J_l) = \left(\frac{\partial(\Delta V_l)}{\partial \vec{r}}\right)^T = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}}\right)^T \left(\frac{\partial(\Delta V_l)}{\partial \vec{R}}\right)^T} \quad (1.147)$$

这涉及到两个矩阵 (HG) 和 (EG) 的计算，有

$$(HG) = (EP)(ER)(GR) \quad (1.148)$$

$$(EG) = (EP)(ER)(GP) \quad (1.149)$$

这两个矩阵均由等式右端的极移、自转和岁差章动矩阵构成，具体计算公式和有关说明见 §2.4。另一个重要矩阵

$$\left(\frac{\partial(\Delta V_l)}{\partial \vec{R}}\right)^T$$

的表达式为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\Delta V_l)}{\partial \vec{R}}\right)^T &= -\sum_{l \geq 2} \bar{C}_{l,0} \left(\frac{1}{R}\right)^{l+3} \left\{ \left[(l+1) \bar{P}_l(\sin \varphi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \varphi \bar{P}'_l(\sin \varphi) \right] (\vec{R}) - R \bar{P}'_l(\sin \varphi) (\vec{k}) \right\} \end{aligned} \quad (1.150)$$

其中

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.151)$$

注意， $R = r$ 。这部分的计算，除用到了 (1.145) 式，由基本变量 \vec{r} 给出 \vec{R} 外，将遇到地球非球形引力加速度（带谐部分）计算的主要部分—勒让德多项式 $\bar{P}_l(\mu)$ 以及其导数 $\bar{P}'_l(\mu) = \partial \bar{P}_l(\mu)/\partial \mu$ 的计算，见 §2.3。

§2.2 田谐项摄动加速度 $\vec{F}_1(J_{lm})$

计算内容和公式与带谐项摄动加速度类似，有

$$\vec{F}_1(J_{lm}) = \left(\frac{\partial(\Delta V_{lm})}{\partial \vec{r}} \right)^T = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}} \right)^T \left(\frac{\partial(\Delta V_{lm})}{\partial \vec{R}} \right)^T \quad (1.152)$$

其中 $\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}} \right)^T$ 即 (1.146) 式，另一矩阵计算公式为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\Delta V_{lm})}{\partial \vec{R}} \right)^T &= - \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \left\{ \left(\frac{1}{R} \right)^{l+3} \left[((l+1)\bar{P}_{lm}(\sin \varphi) + \sin \varphi \bar{P}'_{lm}(\sin \varphi))(\vec{R}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - R \bar{P}'_{lm}(\sin \varphi)(\vec{k}) \right] \left[\bar{C}_{lm} \cos m\lambda_G + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda_G \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m}{R'} \right) \left(\frac{1}{R} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \left[\bar{C}_{lm} \sin m\lambda_G - \bar{S}_{lm} \cos m\lambda_G \right] (\vec{G}) \right\} \quad (1.153) \end{aligned}$$

$$(\vec{G}) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda_G & \cos \lambda_G & 0 \end{pmatrix}^T \quad (1.154)$$

其中 $R' = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ ，前面已出现过，见 (1.142) 式。

§2.3 勒让德函数 $P_l(\mu)$ 和 $P_{lm}(\mu)$ 及其导数的递推计算

关于勒让德函数 $P_l(\mu), P_{lm}(\mu)$ 以及它们的导数 $P'_l(\mu), P'_{lm}(\mu), \mu = \sin \varphi \in [-1, 1]$ ，原则上可直接按它们的定义计算，但当阶次 (m 和 l) 取得较高时，除计算量较大外，由于计算公式的特点，在字长一定前提下会导致有效位数的严重损失并最终导致计算失效。因此有必要采用适当的递推过程较好地控制计算误差的传播程度，从而保证计算的有效性（即保持一定的精度），下面给出的递推公式就能达到这一目的。

1 $\bar{P}_l(\mu)$ 和 $\bar{P}_{lm}(\mu)$ 的递推公式

$$\begin{cases} \bar{P}_0(\mu) = 1 & \bar{P}_1(\mu) = \sqrt{3}\mu \\ \bar{P}_l(\mu) = \left(\frac{2l+1}{2l-1} \right)^{1/2} \left[\left(2 - \frac{1}{l} \right) \mu \bar{P}_{l-1}(\mu) - \left(\frac{2l-1}{2l-3} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{l} \right) \bar{P}_{l-2}(\mu) \right], & l \geq 2 \end{cases} \quad (1.155)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{P}_{1,1}(\mu) = \sqrt{3}(1-\mu^2)^{1/2} \\ \bar{P}_{l,l}(\mu) = \left(\frac{2l+1}{2l}\right)^{1/2}(1-\mu^2)^{1/2}\bar{P}_{l-1,l-1}(\mu), \quad l \geq 2 \\ \bar{P}_{l,m}(\mu) = \left[\frac{(2l+1)(2l-1)}{(l+m)(l-m)}\right]^{1/2}\mu\bar{P}_{l-1,m}(\mu) \\ \quad - \left[\frac{(2l+1)(l-1+m)(l-1-m)}{(2l-3)(l+m)(l-m)}\right]^{1/2}\bar{P}_{l-2,m}(\mu), \quad l \geq 2, m = 1, \dots, l-1 \end{array} \right. \quad (1.156)$$

注意，上述递推计算中，有

$$\bar{P}_{i,j}(\mu) = 0, \quad i < j \quad (1.157)$$

2 $\bar{P}'_l(\mu)$ 和 $\bar{P}'_{lm}(\mu)$ 的计算公式

这部分的计算是在 $\bar{P}_l(\mu)$ 和 $\bar{P}_{lm}(\mu)$ 已给出的情况下进行计算，有

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{P}'_1(\mu) = \sqrt{3} \\ \bar{P}'_l(\mu) = l(1-\mu^2)^{-1} \left[\left(\frac{2l+1}{2l-1}\right)^{1/2}\bar{P}_{l-1}(\mu) - \mu\bar{P}_l(\mu) \right], \quad l > 1 \end{array} \right. \quad (1.158)$$

$$\bar{P}'_{lm}(\mu) = (1-\mu^2)^{-1/2} \left[((l+m+1)(l-m))^{1/2}\bar{P}_{l,m+1}(\mu) - m\mu(1-\mu^2)^{-1/2}\bar{P}_{lm}(\mu) \right] \quad (1.159)$$

§2.4 坐标系转换中的旋转矩阵

地球非球形引力摄动加速度计算中涉及的坐标转换矩阵即 (1.148) 和 (1.149) 式给出的 (HG) 和 (EG) ，有

$$\begin{aligned} (HG) &= (EP)(ER)(GR) \\ (EG) &= (EP)(ER)(GP) \end{aligned}$$

其中 $(GR) = (NR)(PR)$ 是岁差章动矩阵， (GP) 是部分岁差章动矩阵，即赤经岁差章动矩阵， (ER) 是地球自转矩阵， (EP) 是极移矩阵。它们分别由下列各式表达：

$$(EP) = R_y(-x_p)R_x(-y_p) \quad (1.160)$$

$$(ER) = R_z(S_G) \quad (1.161)$$

$$(NR) = R_x(-\Delta\epsilon)R_y(\Delta\theta)R_z(-\Delta\mu) \quad (1.162)$$

$$(PR) = R_z(-z_A)R_y(\theta_A)R_z(-\zeta_A) \quad (1.163)$$

$$(ER)(GP) = R_z(S_G)R_z(-(\mu + \Delta\mu)) = R_z(\theta_G) \quad (1.164)$$

各式中的 x_p, y_p 是极移分量，格林尼治恒星时 S_G 及 θ_G 的计算公式为

$$S_G = \bar{S}_G + \Delta\mu \quad (1.165)$$

$$\theta_G = \bar{S}_G - \mu \quad (1.166)$$

这里的 μ 和 $\Delta\mu$ 是赤经岁差和章动，J2000.0 系统中的格林尼治平恒星时 \bar{S}_G 由下式计算^[12]：

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_G = 18^h.6973746 + 879000^h.0513367t + 0^s.093104t^2 \\ t = \frac{1}{36525.0} [JD(t) - JD(J2000.0)] \end{array} \right. \quad (1.167)$$

这里 $JD(t)$ 的 t 对应 $UT1$ 。岁差常数 ζ_A, z_A 和 θ_A 如下：

$$\begin{cases} \zeta_A = 2306''.2181t + 0''.30188t^2 \\ z_A = 2306''.2181t + 1''.09468t^2 \\ \theta_A = 2004''.3109t - 0''.42665t^2 \end{cases} \quad (1.168)$$

θ_A 是赤纬岁差，相应的赤经岁差 μ （或记作 m_A ）为

$$\begin{aligned} \mu &= \zeta_A + z_A \\ &= 4612''.4362t + 1''.39656t^2 \end{aligned} \quad (1.169)$$

章动量取 IAU(1980) 序列，该序列给出的黄经章动 $\Delta\psi$ 和交角章动 $\Delta\epsilon$ 的计算公式，包括振幅大于 $0''.0001$ 的 106 项。考虑到定轨弧段一般只有几天，故只要取振幅大于 $0''.005$ 的前 20 项即可，由于是周期项（最快的是月球运动周期项），故小于 $0''.005$ 的项引起的误差约为 $0''.01$ ，相当于低轨卫星（高度在 $2000Km$ 以下）的定位误差约 0.2 米，这对米级精度的定轨要求无影响。取前 20 项的公式如下：

$$\begin{cases} \Delta\psi = \sum_{j=1}^{20} (A_{0j} + A_{1j}t) \sin\left(\sum_{i=1}^5 k_{ji}\alpha_i(t)\right) \\ \Delta\epsilon = \sum_{j=1}^{20} (B_{0j} + B_{1j}t) \cos\left(\sum_{i=1}^5 k_{ji}\alpha_i(t)\right) \end{cases} \quad (1.170)$$

相应的赤经和赤纬章动 $\Delta\mu$ 和 $\Delta\theta$ 为

$$\begin{cases} \Delta\mu = \Delta\psi \cos \epsilon \\ \Delta\theta = \Delta\psi \sin \epsilon \end{cases} \quad (1.171)$$

其中黄赤交角的计算公式如下：

$$\epsilon = 23^\circ 26' 21''.448 - 46''.8150t \quad (1.172)$$

章动序列中的 5 个幅角计算公式为

$$\begin{cases} \alpha_1 = 134^\circ 57' 46''.733 + (1325^r + 198^\circ 52' 02''.633)t + 31''.310t^2 \\ \alpha_2 = 357^\circ 31' 39''.804 + (99^r + 359^\circ 03' 01''.224)t - 0''.577t^2 \\ \alpha_3 = 93^\circ 16' 18''.877 + (1342^r + 82^\circ 01' 03''.137)t - 13''.257t^2 \\ \alpha_4 = 297^\circ 51' 01''.307 + (1236^r + 307^\circ 06' 41''.328)t - 6''.891t^2 \\ \alpha_5 = 125^\circ 02' 40''.280 - (5^r + 134^\circ 08' 10''.539)t + 7''.455t^2 \end{cases} \quad (1.173)$$

其中 $1^r = 360^\circ$ 。章动序列前五项的有关系数见表 2.1

事实上，按前面所说的精度考虑，保留大于 $0''.005$ 的周期项，且至多涉及距标准历元 $T_0(J2000.0)$ 25 年的计算，故公式 (1.170) 右端的 A_{1j} 和 B_{1j} 也可略去。尽管岁差章动计算公式和有关数据还在改变，但这不影响上述计算方法。

表 2.1: IAU1980 章动序列的前 20 项

j	周期 (日)	k_{j1}	k_{j2}	k_{j3}	k_{j4}	k_{j5}	A_{0j} ($0''.0001$)	A_{1j} ($0''.0001$)	B_{0j} ($0''.0001$)	B_{1j} ($0''.0001$)
1	6793.4	0	0	0	0	1	-171996	-174.2	92025	8.9
2	182.6	0	0	2	-2	2	-13187	-1.6	5736	-3.1
3	13.7	0	0	2	0	2	-2274	-0.2	977	-0.5
4	3399.2	0	0	0	0	2	2062	0.2	-895	0.5
5	365.2	0	1	0	0	0	1426	-3.4	54	-0.1
6	27.6	1	0	0	0	0	712	0.1	-7	0.0
7	121.7	0	1	2	-2	2	-517	1.2	224	-0.6
8	13.6	0	0	2	0	1	-386	-0.4	200	0.0
9	9.1	1	0	2	0	2	-301	0.0	129	-0.1
10	365.3	0	-1	2	-2	2	217	-0.5	-95	0.3
11	31.8	1	0	0	-2	0	-158	0.0	-1	0.0
12	177.8	0	0	2	-2	1	129	0.1	70	0.0
13	27.1	-1	0	2	0	2	123	0.0	-53	0.0
14	27.7	1	0	0	0	1	63	0.1	-33	0.0
15	14.8	0	0	0	2	0	63	0.0	-2	0.0
16	9.6	-1	0	2	2	2	-59	0.0	26	0.0
17	27.4	-1	0	0	0	1	-58	-0.1	32	0.0
18	9.1	1	0	2	0	1	-51	0.0	27	0.0
19	205.9	2	0	0	-2	0	48	0.0	1	0.0
20	1305.5	-2	0	2	0	1	46	0.0	-24	0.0

上述各式中的 t ，意义同 (1.167) 式中所定义的世纪数，但 $JD(t)$ 中的 t 对应 TDT 。而各旋转矩阵 $R_x(\theta), \dots$ 的计算公式为

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \\ R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.174)$$

注意，旋转矩阵 $R_x(\theta), \dots$ 是正交矩阵，有 $R_x^T(\theta) = R_x^{-1}(\theta) = R_x(-\theta), \dots$ 。

作为本章的结束，这里说明一点。关于非球形引力摄动加速度的计算，当卫星过地球两极上空时， λ_G 不确定，相应的 $R' = (X^2 + Y^2)^{1/2} = 0$ ，似乎无法计算。实际上这是容易解决的，只要将相应的计算公式稍加改变即可，但因出现的可能性极小，不再加以讨论。另外，将带谐项与田谐项合并统一计算，相应的计算公式亦可避免这一点，详见参考文献 [13]。

第三章 第三体（日、月）引力摄动

§3.1 日月引力摄动加速度 $\vec{F}_2(m', \vec{r}')$

$$\begin{cases} \vec{F}_2(m', \vec{r}') = -m'(\frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} + \frac{\vec{r}'}{r'^3}) \\ \vec{\Delta} = \vec{r} - \vec{r}' \end{cases} \quad (1.175)$$

其中 m' 是日、月质量（无量纲）， \vec{r}' 是日、月的地心位置矢量。

§3.2 日月位置矢量 \vec{r}' 的计算

对于太阳, 仍可采用平均轨道 $\vec{\sigma}'(t)$ 计算其相应的位置矢量 $\vec{r}'(t)$, 米级精度是可以保证的。经计算比较, 与 DE200 精密历表相比, 即使离标准历元 T_0 (J2000.0) 20 年, 差别也较小, 有 $|\Delta\vec{r}'|/r' = 5.0 \times 10^{-3}$, 对于几天的定轨弧段, 其摄动计算误差的量级只有 10^{-7} , 米级以下。具体计算公式如下

$$\begin{cases} \bar{a} = 1.00000102(\text{AU}), & \text{AU} = 1.49597870 \times 10^8 \text{Km} \\ \bar{e} = 0.016709 \\ \bar{i} = \epsilon = 23^\circ.4393 \\ \bar{\Omega} = 0^\circ.0 \\ \bar{\omega} = 282^\circ.9373 + 0^\circ.32T \\ \bar{M} = 357^\circ.5291 + 0^\circ.9856d \end{cases}$$

对于月球, 由于其轨道摄动变化较大, 最大的周期项振幅可达 2×10^{-2} 。故在数值定轨米级精度的要求下, 不再采用分析方法中的简单算法, 这里给出精度 $|\Delta\vec{r}'|/r' = O(10^{-3})$ 的计算方法。

首先计算月球的地心黄道坐标 (λ, β, π) , 公式如下:

$$\lambda = 218^\circ.32 + 481267^\circ.883t + \sum_{j=1}^6 K_j \sin(\alpha_j) \quad (1.176)$$

$$\beta = \sum_{j=7}^{10} K_j \sin(\alpha_j) \quad (1.177)$$

$$\pi = 0^\circ.9508 + \sum_{j=11}^{14} K_j \cos(\alpha_{j-10}) \quad (1.178)$$

其中系数 K_j 和幅角 α_j 分别为

$$\begin{cases} K_1 = 6^\circ.29 & K_2 = -1^\circ.27 & K_3 = 0^\circ.66 & K_4 = 0^\circ.21 \\ K_5 = -0^\circ.19 & K_6 = -0^\circ.11 & K_7 = 5^\circ.13 & K_8 = 0^\circ.28 \\ K_9 = -0^\circ.28 & K_{10} = 0^\circ.17 & K_{11} = 0^\circ.0518 & K_{12} = 0^\circ.0095 \\ K_{13} = 0^\circ.0078 & K_{14} = 0^\circ.0028 \end{cases} \quad (1.179)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 134^\circ.9 + 477198^\circ.85t & \alpha_2 = 259^\circ.2 - 413335^\circ.38t \\ \alpha_3 = 235^\circ.7 + 890534^\circ.23t & \alpha_4 = 269^\circ.9 + 954397^\circ.70t \\ \alpha_5 = 357^\circ.5 + 35999^\circ.05t & \alpha_6 = 186^\circ.6 + 966404^\circ.05t \\ \alpha_7 = 93^\circ.3 + 483202^\circ.13t & \alpha_8 = 228^\circ.2 + 960400^\circ.87t \\ \alpha_9 = 318^\circ.3 + 6003^\circ.18t & \alpha_{10} = 217^\circ.6 - 407332^\circ.20t \end{cases} \quad (1.180)$$

由上述 (λ, β, π) 计算月球的地心赤道坐标 $\vec{R} = (X, Y, Z)$:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R\hat{R} \quad (1.181)$$

$$R = 1/\sin \pi \quad (1.182)$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ 0.9175 \cos \beta \sin \lambda - 0.3978 \sin \beta \\ 0.3978 \cos \beta \sin \lambda + 0.9175 \sin \beta \end{pmatrix} \quad (1.183)$$

这是瞬时平赤道坐标系中的位置矢量。相应的历元 J2000.0 地心平赤道坐标系中的位置矢量 \vec{r}' 需经岁差改正，有

$$\vec{r}' = (PR)^T \vec{R} \quad (1.184)$$

上述各式中出现的 $t = [JD(t) - JD(J2000.0)]/36525.0$ 与前面坐标转换中的 t 相同，见 (1.167) 式。

第四章 潮汐形变摄动

潮汐形变已在分析方法中给出，即

$$\Delta V_{2,0} = k_2 \beta P_2(\sin \varphi') \left[\frac{1}{r^3} P_2(\sin \varphi) \right] \quad (1.185)$$

$$\Delta V_{2,m} = \sum_{m=1}^2 \frac{2(2-m)!}{(2+m)!} k_2 \beta P_{2m}(\sin \varphi') \left[\frac{1}{r^3} P_{2m}(\sin \varphi) \right] \cos m(\lambda - \lambda^*) \quad (1.186)$$

其中 k_2 是二阶 Love 数， $\beta = m'/r'^3$ 以及日、月的地心球坐标 φ' 和 $\lambda^* = \lambda' + \nu$ (ν 是滞后角) 中的 λ' 与地心直角坐标的关系为

$$\begin{cases} \sin \varphi' = \frac{z'}{r'} \\ \cos \lambda' = x'/\sqrt{x'^2 + y'^2} \quad \sin \lambda' = y'/\sqrt{x'^2 + y'^2} \end{cases} \quad (1.187)$$

在潮汐形变摄动加速度的计算中，日、月坐标的计算可完全采用分析方法中所采用的近似方法，亦可采用上一章的计算结果。

潮汐形变摄动加速度 $\vec{F}_3(k_2, J_2)$ 的计算公式如下：

$$\boxed{\vec{F}_3(k_2, J_2) = \left(\frac{\partial \sum \Delta V_{2m}}{\partial \vec{r}} \right)^T} \quad (1.188)$$

其中潮汐形变位分成两个部分，即带谐项 ($m=0$) 部分和田谐项 ($m=1,2$) 部分，相应地有

$$\left(\frac{\partial \Delta V_{2,0}}{\partial \vec{r}} \right)^T = -k_2 \beta P_2(\sin \varphi') \left(\frac{1}{r} \right)^5 \left\{ \left[3P_2(\sin \varphi) + \sin \varphi P_2'(\sin \varphi) \right] \vec{r} - r P_2'(\sin \varphi) \vec{k} \right\} \quad (1.189)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Delta V_{2,m}}{\partial \vec{r}} \right)^T &= -k_2 \beta \sum_{m=1}^2 \frac{2(2-m)!}{(2+m)!} P_{2m}(\sin \varphi') \\ &\times \left\{ \left(\frac{1}{r} \right)^5 \left[(3P_{2m}(\sin \varphi) + \sin \varphi P_{2m}'(\sin \varphi)) \vec{r} - r P_{2m}'(\sin \varphi) \vec{k} \right] \cos m(\lambda - \lambda^*) \right. \\ &\left. + \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{1}{r} \right)^3 \left[P_{2m}(\sin \varphi) \sin m(\lambda - \lambda^*) \right] \vec{G} \right\} \end{aligned} \quad (1.190)$$

其中

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.191)$$

$P_2(\sin \varphi)$ ， $P_{2m}(\sin \varphi)$ 以及它们的导数等量的计算公式如下：

$$P_2(\sin \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \quad P_2'(\sin \varphi) = 3 \sin \varphi \quad (1.192)$$

$$P_{21}(\sin \varphi) = \frac{3}{2} \sin 2\varphi \quad P_{21}'(\sin \varphi) = 3 \cos 2\varphi / \cos \varphi \quad (1.193)$$

$$P_{22}(\sin \varphi) = 3 \cos^2 \varphi - 3(1 - \sin^2 \varphi) \quad P_{22}'(\sin \varphi) = -6 \sin \varphi \quad (1.194)$$

$$\begin{cases} \cos \lambda = x/\sqrt{x^2 + y^2} & \sin \lambda = y/\sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos 2\lambda = \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda & \sin 2\lambda = 2 \sin \lambda \cos \lambda \end{cases} \quad (1.195)$$

第五章 轨道坐标系中的附加摄动

轨道坐标系是运动坐标系, 岁差章动导致惯性力的出现, 相应的惯性加速度即摄动加速度 $\vec{F}_4(\theta)$, 这里 θ 角表示由于岁差章动导致的地球赤道面的变化角。但这一摄动加速度采用卫星轨道根数的变化来表达, 并直接加入基本方程 (1.3)-(1.8) 或 (1.9)-(1.14) 中, 即

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = f(\sigma, t; \epsilon) + \vec{F}_4(\theta)} \quad (1.196)$$

注意, 这里 σ 是 6 维矢量, f 是相应的 6 维矢量函数。摄动加速度 $\vec{F}_4(\theta)$ 有如下形式:

$$\boxed{\vec{F}_4(\theta) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^T} \quad (1.197)$$

该惯性力加速度表现在 i, Ω, ω 三个根数的变化上, 即

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) = \left(0, 0, \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right), \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right), \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right), 0 \right) \quad (1.198)$$

其中

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right) = & 10^{-3} \left[-0''.512 \sin \Omega - 0''.070 \sin(\Omega - \Omega') \right. \\ & \left. + 0''.404 \sin(\Omega - 2L') + 0''.176 \sin(\Omega - 2L'') \right] \end{aligned} \quad (1.199)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) = & 10^{-3} \cot i \left[-0''.512 \cos \Omega - 0''.070 \cos(\Omega - \Omega') \right. \\ & \left. + 0''.404 \cos(\Omega - 2L') + 0''.176 \cos(\Omega - 2L'') \right] \end{aligned} \quad (1.200)$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = -\sec i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) \quad (1.201)$$

这里 Ω', L' 和 L'' 分别为月球轨道升交点经度, 月球平黄经和太阳平黄经, 即

$$L' = M' + \omega' + \Omega' \quad L'' = M'' + \omega'' \quad (1.202)$$

Ω', M', ω' 和 M'', ω'' 的计算公式在分析方法中的第三体摄动计算公式中均已给出, 只是那里用的平均轨道根数符号 $\bar{\Omega}, \bar{\omega}, \bar{M}$ 等。

上述三个惯性加速度分量 $\left(\frac{\partial i}{\partial t} \right)$, $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)$ 和 $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)$ 对采用 Kepler 根数的系统, 即可直接以摄动加速度的形式加到基本方程 (1.5)-(1.7) 中去。而对采用无奇点变量的系统, 稍有不同, 对 $\frac{di}{dt}$ 和 $\frac{d\Omega}{dt}$ 同上, 而另一分量 $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)$ 则与 $\frac{d\xi}{dt}$ 和 $\frac{d\eta}{dt}$ 两个方程有关, 应在方程 (1.12) 和 (1.13) 右端分别加上 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)$ 和 $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)$, 形式如下:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = -\eta \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \quad (1.203)$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \xi \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \quad (1.204)$$

第六章 太阳光压摄动

对于典型的有效面质比为 10^9 的人造地球卫星，光压摄动量级为

$$\varepsilon = \frac{|\vec{F}_\varepsilon|}{|\vec{F}_0|} = \begin{cases} 10^{-8} & \text{中低轨卫星} \\ 10^{-7} & \text{高轨卫星} \end{cases} \quad (1.205)$$

而光压摄动涉及的地影可采用圆柱形地影模型。在圆柱形地影中将圆柱半径取为地球参考椭球体赤道半径 a_e ，略去的地球非球形和大气消光的衰减效应引起的差别也只有 10^{-3} 的量级。

综上所述，采用半径为 a_e 的圆柱形地影模型，给光压摄动加速度带来的误差仅仅是 10^{-11} （对中低轨卫星）或 10^{-10} （对高轨卫星），对计算涉及几天弧段的定轨问题，不会影响到米级精度。

§6.1 光压摄动加速度 $\vec{F}_5(\rho_s)$

对于数值方法，可采用光压摄动加速度的等效公式：

$$\vec{F}_5(\rho_s) = \nu(k_0 \frac{\Delta_s^2}{\Delta^2}) \hat{\Delta} \quad (1.206)$$

$$k_0 = (\frac{\kappa S}{m}) \rho_s \quad (1.207)$$

$$\vec{\Delta} = \vec{r} - \vec{r}_s \quad (1.208)$$

这里 ν 是地影因子，有

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{地影外} \\ 0 & \text{地影内} \end{cases} \quad (1.209)$$

\vec{r} 和 \vec{r}_s 各为卫星和太阳的地心位置矢量， k_0 涉及到的 $\kappa = 1 + \eta$ ， η 是卫星表面反射系数 ($0 \leq \eta \leq 1$)，因此通常有 $1 < \kappa < 2$ ， ρ_s 是距太阳 Δ_s 处的光压强度，常取地球表面处的值（对应 Δ_s ），即太阳常数：

$$\begin{aligned} \rho_s &= 4.5605 \times 10^{-6} N/m^2 \\ &= 0.3166 \times 10^{-17} \end{aligned} \quad (1.210)$$

相应的 $\Delta_s = \text{AU} = 1.49597870 \times 10^8 \text{Km} = 2.3455 \times 10^4 a_e$

关于 k_0 中的一个重要参数，卫星的有效面质比 S/m ，如果掌握卫星的形状（外形）和相应的姿态，可给出较精确的值，而且可将 (1.206) 改为更精确的表达式，即

$$\vec{F}_5(\rho_s) = \nu(\frac{S}{m} \rho_s) (\frac{\Delta_s^2}{\Delta^2}) \cos \theta \left[(1 - \eta) \hat{\Delta} + 2\eta \cos \theta \hat{n} \right] \quad (1.211)$$

其中 \hat{n} 是截面积 S 的法向单位矢量，与太阳光线方向 $\hat{\Delta}$ 指向截面积 S 的同一侧，相互夹角为 θ ，通常（主要是较大的太阳能帆板）该法向（负方向）指向太阳， $\theta = 0$ ， $\cos \theta = 1$ ，则 (1.211) 式退化成 (1.206) 式。如果缺乏上述信息，只能将其取为常数，即 $\frac{S}{m} = \text{const.}$ 在定轨中可作为参数待估，但通常以组合参数 $(\frac{\kappa S}{m} \rho_s)$ 作为待估状态量。

§6.2 关于地影“间断”问题的处理

就光压作用机制而言，相应的摄动加速度是连续的，只是在卫星进、出地影两处（对应时刻 t_1^* 和 t_2^* ）变化特别大，由一有限值很快变为零（进地影）或由零很快变为一有限值（出地影）。这对数值求解而言，实为一“间断”问题，即使对地影不采用简单的圆柱型模型也如此。对这一“间断”问题如处理不当，则将明显地影响数值解的精度。

通常数值求解常微分方程初值问题时，对间断的处理采用如下计算步骤：寻找间断点（包括邻域），处理间断点（或邻域）的计算，越过间断点（或邻域）后重新起步。处理地影间断亦是如此。

判别卫星是否进入地影是容易的，当同时满足下列条件：

$$\cos \psi = \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot \left(\frac{\vec{r}_s}{r_s} \right) < 0 \quad \text{and} \quad \sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} < \frac{1}{r} \quad (1.212)$$

时卫星在地影内，否则在地影外。而当 $\cos \psi < 0$ and $\sin \psi = \frac{1}{r}$ 时，则卫星正好处于进、出地影的边界上。不过，从数值计算的角度来看，这一正好落在边界上的条件并无实际意义。

计算中处理地影的过程如下：

(1) 每一步均进行上述卫星是否在地影内的判断，若在地影外，采用单步法或多步法均可，此时 $\nu = 1$ 。若当进行到由 t_j 到 t_{j+1} 的计算中出现条件 (1.212) 被满足时（对多步法，第一次计算右函数时就会出现，而对单步法，可能是在该步的多次计算右函数过程当中出现），该步积分就返回原处（即 t_j ）作为寻找地影边界的开始，但此时必须采用（或改用）单步法。重新用步长减半的方法寻找地影边界，当该计算截断误差满足精度控制时，即认为边界已找到，进入下面第二阶段处理地影内的计算。

(2) 用单步法计算地影内的光压摄动，此时 $\nu = 0$ 。而当进行到由 t_k 到 t_{k+1} 的计算中，出现条件 (1.212) 不被满足时，该步积分就返回原处（即 t_k ）作为寻找离开地影边界的开始，同样采用步长减半的方法，当截断误差满足精度控制时，即认为卫星达到出地影的边界，进入下面第三阶段的计算。

(3) 出地影重新起步，对于单步法无特殊之处，计算同上述第一步，而对多步法则需要重新用单步法起步（即重新初始化），构造多步法所需要的节点上的所有数据后，再往下计算。

第七章 大气阻力摄动

对于典型的有效面质比为 10^9 的人造地球卫星，如果运行高度在 300 公里以上，大气阻力摄动量级不会高于 10^{-6} ，即对中低轨卫星而言，大气阻力摄动仍可当作二阶小量来处理。但考虑到大气密度模式的“静态”（主要指某段时期内的内符合状况）精度不高，模式误差可达 5% - 10 %。故计算大气阻力摄动不可能象对待地球非球形引力摄动、第三体引力摄动等那样作各种仔细的考虑，而作各种近似处理是很自然的。但也不会像分析解那样受分析解构造遇到的困难，使力模型过于简化，这里将尽量保持力模型的合理性。

§7.1 大气阻力摄动加速度 $\vec{F}_6(D)$

大气阻力摄动加速度仍采用如下近似表达式：

$$\vec{F}_6(D) = -\frac{1}{2}\left(\frac{C_D S}{m}\right)\rho V \vec{V} \quad (1.213)$$

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{v}_a \quad (1.214)$$

其中 C_D 是阻力系数，对于 300Km（甚至 200Km）高度以上的飞行器而言 C_D 可取为常数。与分析解中相同，取

$$C_D = 2.2 \quad (1.215)$$

关于卫星的有效面质比 S/m ，取值情况与光压摄动中的处理类似，如果有姿态信息，给出 $\frac{S}{m}(t)$ ，对数值求解不会遇到困难，如果采用一等效值 $\frac{S}{m} = \text{const.}$ ，亦可在定轨中以另一种组合参数 $(\frac{C_D S}{m} \bar{\rho}_{p_0})$ 作为待估参数，其中 $\bar{\rho}_{p_0}$ 是卫星轨道初始近地点处的平均大气密度。关于大气旋转速度 \vec{v}_a ，与分析方法相同，对应的旋转角速度 ω_a 仍取

$$\omega_a = n_e \quad (1.216)$$

于是大气旋转速度 \vec{v}_a 在地心赤道直角坐标系 O-xyz 中和 S,T,W 坐标中的表达式可分别写成下列形式：

$$\vec{v}_a = n_e \vec{\Omega}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.217)$$

和

$$\vec{v}_a = \begin{pmatrix} (\vec{v}_a)_S \\ (\vec{v}_a)_T \\ (\vec{v}_a)_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ rn_e \cos i \\ -rn_e \cos u \sin i \end{pmatrix} \quad u = f + \omega \quad (1.218)$$

由此，卫星相对大气的运动速度 \vec{V} ，在地心赤道坐标系中即可表示为

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} - n_e \vec{\Omega} \quad (1.219)$$

但可不必再分解到 $\hat{r}, \hat{t}, \hat{w}$ 三个方向上去，待给出全部摄动加速度（即运动方程 (1.2) 的 \vec{F}_ϵ ）后一并作形如 (1.21) 式的转换。

计算中问题最大的是摄动加速度 $\vec{F}_6(D)$ 右端的大气密度 $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ ，下节具体给出。

§7.2 大气密度 $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ 的处理

根据目前对大气模式的了解, 要给出密度的精确值不可能, 只能采用某种近似。经过分析比较, 取具有周日变化的扁球指数密度模式较为合理, 即

$$\rho = \bar{\rho}_{p_0}(1 + F^* \cos \psi^*) \exp\left(-\frac{r - \sigma(p_0)}{H(r)}\right) \quad (1.220)$$

其中

$$F^* = \frac{f^* - 1}{f^* + 1} \quad f^* = \frac{\rho_{max}}{\rho_{min}} \quad (1.221)$$

$$\begin{cases} \cos \psi^* = \hat{r} \cdot \hat{r}_m & \hat{r} = \vec{r}/r \\ \hat{r}_m = \begin{pmatrix} \cos \delta_s \cos(\alpha_s + \lambda_m) \\ \cos \delta_s \sin(\alpha_s + \lambda_m) \\ \sin \delta_s \end{pmatrix} = \frac{1}{r_s} \begin{pmatrix} x_s \cos \lambda_m - y_s \sin \lambda_m \\ y_s \cos \lambda_m + x_s \sin \lambda_m \\ z_s \end{pmatrix} \end{cases} \quad \lambda_m \geq 30^\circ \quad (1.222)$$

$$\begin{cases} \sigma(p_0) = r_{p_0}(1 - \epsilon \sin^2 \varphi)/(1 - \epsilon \sin^2 \varphi_{p_0}) \\ \sin \varphi = \sin i \sin(f + \omega) \quad \sin \varphi_{p_0} = \sin i_0 \sin \omega_0 \end{cases} \quad (1.223)$$

$$H(r) = H_{p_0} + \frac{\mu}{2}(r - r_{p_0}) \quad \mu = 0.1 \quad (1.224)$$

这里 ϵ 即前面提到过的地球几何扁率, f 是真近点角, \hat{r}_m 是大气密度周日峰方向, α_s 和 δ_s 是太阳的地心赤经、赤纬, 可由相应的平均轨道根数 $\bar{\sigma}'$ 计算, 见前面 §3.2, 而 λ_m 的取值可调整。

关于初始近地点 r_{p_0} 处的周日平均密度 $\bar{\rho}_{p_0}$, 它对应高度 h_{p_0} , 有

$$h_{p_0} = a_0(1 - e_0) - (1 - \epsilon \sin^2 i_0 \sin^2 \omega_0) \quad (1.225)$$

由引数 h_{p_0} 可查国际标准大气表, 例如 $h = 300Km$, $\bar{\rho} = 1.916 \times 10^{-11}(Kg/m^3)$, $h = 800Km$, $\bar{\rho} = 1.136 \times 10^{-14}(Kg/m^3)$, 详见文献 [14] 的第一章。但这种由标准大气表给出的平均密度 $\bar{\rho}$ 往往又难以满足精度要求, 通常可由精密定轨中给出更可靠的组合值 $\left(\frac{C_D S}{m} \bar{\rho}_{p_0}\right)$ 来弥补, 该值反映了力模型的补偿, 通常用 \dot{n} 来表达, $n = a^{-3/2}$ 是卫星平运动速度, \dot{n} 即其变率。

关于大气密度 $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ 的处理, 还可根据具体要求采用相应的大气模式, 如 Jacchia 系列和 DTM 系列等。

第二部分 分析法定轨中轨道摄动的分析解

用分析方法进行轨道外推，通常只能采用轨道根数 σ ，针对绝大多数在轨卫星（包括碎片等）的轨道都是偏心率较小的近圆轨道，宜采用第一类无奇点根数作为基本变量，即

$$\begin{cases} \sigma = (a, i, \Omega, \xi, \eta, \lambda) \\ \xi = e \cos \omega \quad \eta = e \sin \omega \quad \lambda = M + \omega \end{cases} \quad (2.1)$$

相应的摄动分析解将适用于 $0 \leq e < 1$ ，对倾角 i 的适用范围也较大，只要 i 在 $[0^\circ.1, 179^\circ.9]$ 内，都不会发生问题。

在第一部分中已给出上述第一类无奇点根数变化所满足的摄动运动方程，见公式(1.9)–(1.14)，那是为了便于数值法求解所采用的一种形式。这里为了便于推导保守力摄动对应的分析解，给出另一种形式的摄动运动方程，其形式如下：

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (2.2)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left[\cos i \left(-\eta \frac{\partial R}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial R}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right] \quad (2.3)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.4)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \eta} - \xi \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \eta \cos i \frac{d\Omega}{dt} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \xi} - \eta \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \xi \cos i \frac{d\Omega}{dt} \quad (2.6)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \left(\xi \frac{\partial R}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial R}{\partial \eta} \right) - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \quad (2.7)$$

对于非保守力摄动因素（如大气），或便于采用摄动加速度的摄动因素（如光压），仍采用第一部分给出的那种形式的摄动运动方程。

由消除奇点的拟平均根数法给出的一阶摄动分析解有如下形式：

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) + \sigma_s^{(1)}(t) \quad (2.8)$$

这里 $\bar{\sigma}(t)$ 是仅消除短周期项的拟平均根数，定义如下^{[1]~[3]}：

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}_0 + (\delta \bar{n}_0 + \sigma_1 + \sigma_2)(t - t_0) + \Delta \sigma_l^{(1)}(t) \\ \Delta \sigma_l^{(1)} = \sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 - \left[\sigma_s^{(1)}(t_0) \right] \quad (2.10)$$

$$\bar{a}_0 = a_0 - \left[a_s^{(1)}(t_0) + a_s^{(2)}(t_0) \right] \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} \bar{n}_0 = \bar{a}_0^{-3/2} \\ \delta = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T \end{cases} \quad (2.12)$$

有几点说明，一是关于 \bar{a}_0 的计算，由于沿迹根数 $\lambda = M + \omega$ 的要求， λ 是快变量，其变化包含了无摄运动的变化，即 $\bar{n}_0(t - t_0)$ ，对 \bar{a}_0 的要求要高一阶，故应消除 $a_s^{(2)}(t_0)$ 。另外，在地球非球形引力位的田谐项摄动中，包含地球自转项，其量级为 10^{-5} ，相应的分析解中短周期项亦应考虑，就

记作 $\sigma_s^{(1)}(t)$, (2.8) 式右端应包含这一部分。其次要说明的是, 为了保持轨道根数变化的基本特征, $\bar{\xi}$ 和 $\bar{\eta}$ 由下式表达:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \bar{\xi}_0 \cos [\omega_1(t - t_0)] - \bar{\eta}_0 \sin [\omega_1(t - t_0)] + \frac{\xi_2}{\omega_1} \sin [\omega_1(t - t_0)] \\ \bar{\eta} = \bar{\eta}_0 \cos [\omega_1(t - t_0)] + \bar{\xi}_0 \sin [\omega_1(t - t_0)] + \frac{\xi_2}{\omega_1} [1 - \cos(\omega_1(t - t_0))] \end{cases} \quad (2.13)$$

其中 ξ_2 仅指地球非球形引力摄动部分 (由奇次带谐项 J_l 产生, $l = 3, 5, \cdots$), 其它相应摄动部分, 将以二阶长期项 $\xi_2(t - t_0)$ 和 $\eta_2(t - t_0)$ 表达。还有一点, 即关于大气阻力摄动和光压摄动中有关地影的处理, 在 $\bar{\sigma}(t)$ 中均有相应地修正, 这在后面的具体计算公式中表明。

第八章 地球非球形引力摄动的分析解

§8.1 带谐项 J_2 部分

1. σ_1 和 σ_2

$$a_1 = 0, \quad i_1 = 0 \quad (2.14)$$

$$\Omega_1 = -\frac{3J_2}{2p^2}n \cos i \quad (2.15)$$

$$\lambda_1 = \frac{3J_2}{2p^2}n \left[\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \sqrt{1 - e^2} \right] \quad (2.16)$$

$\bar{\xi}$ 和 $\bar{\eta}$ 所对应的 σ_1 以完整的 (2.13) 式所代替, 其中所包含的 ω_1 仍由下式表达:

$$\omega_1 = \frac{3J_2}{2p^2}n \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) \quad (2.17)$$

$$a_2 = 0 \quad (2.18)$$

$$i_2 = 0 \quad (2.19)$$

$$\Omega_2 = -\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n \cos i \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}e^2 + \sqrt{1 - e^2}\right) - \sin^2 i \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{24}e^2 + \frac{3}{2}\sqrt{1 - e^2}\right) \right] \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 n \left\{ \left[\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{12}e^2\right) + \left(\frac{9}{2} + \frac{10}{3}e^2\right) \sqrt{1 - e^2} \right] \right. \\ & - \sin^2 i \left[\left(\frac{121}{12} - \frac{9}{8}e^2\right) + \left(\frac{71}{6} + \frac{26}{3}e^2\right) \sqrt{1 - e^2} \right] \\ & + \sin^4 i \left[\left(\frac{269}{48} - \frac{51}{32}e^2\right) + \left(\frac{413}{48} + \frac{103}{12}e^2\right) \sqrt{1 - e^2} \right] \\ & \left. + \frac{e^4}{\sqrt{1 - e^2}} \left(\frac{35}{12} - \frac{35}{4} \sin^2 i + \frac{315}{32} \sin^4 i\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\xi_2 = 0 \quad (2.22)$$

$$\eta_2 = 0 \quad (2.23)$$

上述各式中出现的 a, i, e^2 和 n, p 即 $\bar{a}_0, \bar{i}_0, \bar{e}_0^2 = \bar{\xi}_0^2 + \bar{\eta}_0^2$ 和 $n = \bar{a}_0^{-3/2}, p = \bar{a}_0(1 - \bar{e}_0^2)$ 。

2. $\Delta\sigma_l^{(1)}(t) = \sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0)$ 中的 $\sigma_l^{(1)}(t)$

$$\Delta a_l^{(1)}(t) = 0 \quad (2.24)$$

$$\Delta i_l^{(1)}(t) = -\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right) \sin 2i \left[\frac{1}{6} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) F_2(e) + \left(\frac{7}{24} - \frac{5}{16} \sin^2 i\right) \right] G_4 \quad (2.25)$$

$$\Delta \Omega_l^{(1)}(t) = \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right) \cos i \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \sin^2 i\right) F_2(e) + \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{4} \sin^2 i\right) \right] G_3 \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_l^{(1)}(t) = & -\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right) \left\{ F_1(e) \left[\frac{7}{12} / F_1(e) - \left(\frac{101}{24} + \frac{2}{3}e^2 + \frac{21}{8} \sqrt{1 - e^2}\right) \sin^2 i \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{43}{16} + 2e^2 + \frac{13}{16} \sqrt{1 - e^2}\right) \sin^4 i \right] \\ & + F_1(e) F_2(e) \left[\frac{2}{3} / F_1(e) - \left(6 - \frac{7}{3}e^2 + \frac{20}{3} \sqrt{1 - e^2}\right) \sin^2 i + \left(\frac{25}{4} - \frac{35}{12}e^2 \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{85}{12} \sqrt{1 - e^2}\right) \sin^4 i \right] + \frac{7}{2} \frac{e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \left[\sin^2 i \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \right] \left. \right\} G_3 \\ & + \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right) \frac{3}{64} \frac{\sin^4 i}{\sqrt{1 - e^2}} G_7 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}\Delta\xi_i^{(1)}(t) = & \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\left\{\left[(4+\frac{7}{24}e^2+2\sqrt{1-e^2})-(\frac{15}{2}-\frac{47}{48}e^2+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2})\sin^2 i\right.\right. \\ & +(\frac{155}{48}-\frac{25}{16}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2})\sin^4 i-(\frac{1}{3}-\frac{11}{6}\sin^2 i+\frac{5}{3}\sin^4 i)e^2F_2(e)\Big]G_1 \\ & +\left[(\frac{7}{24}-\frac{39}{16}\sin^2 i+\frac{75}{32}\sin^4 i)+(\frac{1}{3}-\frac{11}{6}\sin^2 i+\frac{5}{3}\sin^4 i)F_2(e)\right. \\ & \left.\left.+\frac{1}{3}\sin^2 i(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)(1-e^2)F_3(e)\right]G_5\right\}\end{aligned}\quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}\Delta\eta_i^{(1)}(t) = & -\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\left\{\left[(4+\frac{7}{8}e^2+2\sqrt{1-e^2})-(\frac{29}{3}+\frac{83}{48}e^2+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2})\sin^2 i\right.\right. \\ & +(\frac{275}{48}+\frac{5}{8}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2})\sin^4 i+(\frac{1}{3}-\frac{11}{6}\sin^2 i+\frac{5}{3}\sin^4 i)e^2F_2(e)\Big]G_2 \\ & +\left[(\frac{7}{24}-\frac{39}{16}\sin^2 i+\frac{75}{32}\sin^4 i)+(\frac{1}{3}-\frac{11}{6}\sin^2 i+\frac{5}{3}\sin^4 i)F_2(e)\right. \\ & \left.\left.+\frac{1}{3}\sin^2 i(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)(1-e^2)F_3(e)\right]G_6\right\}\end{aligned}\quad (2.29)$$

其中 $a, e^2, i, p = a(1-e^2)$ 均为平均根数 $\bar{a}, \bar{e}^2 = \bar{\xi}_0^2 + \bar{\eta}_0^2, \bar{i}, \bar{p} = \bar{a}(1-\bar{e}^2)$ 。 $F_1(e), \dots$ 与 G_1, \dots, G_7 的表达式分别由下列各式表达:

$$\left\{\begin{aligned}F_1(e) &= 1/(1+\sqrt{1-e^2}) \\ F_2(e) &= \frac{\cos 2f}{e^2} = \frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{64}e^4 + \dots \\ F_3(e) &= \frac{1}{e^4}(\cos 2f - \frac{3}{4}e^2) = \frac{1+3\sqrt{1-e^2}}{4(1+\sqrt{1-e^2})^3} = \frac{1}{8} + \frac{3}{64}e^2 + \frac{3}{128}e^4 + \dots\end{aligned}\right.\quad (2.30)$$

$$\left\{\begin{aligned}G_1 &= \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{(2-5\sin^2 i/2)} \rightarrow -\bar{\eta}_0(\frac{3J_2}{2p^2})\bar{n}(t-t_0) \\ G_2 &= \frac{-(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)}{(2-5\sin^2 i/2)} \rightarrow -\bar{\xi}_0(\frac{3J_2}{2p^2})\bar{n}(t-t_0) \\ G_3 &= \frac{-(2\bar{\xi}\bar{\eta} - 2\bar{\xi}_0\bar{\eta}_0)}{2(2-5\sin^2 i/2)} \rightarrow -(\bar{\xi}_0^2 - \bar{\eta}_0^2)(\frac{3J_2}{2p^2})\bar{n}(t-t_0) \\ G_4 &= \frac{(\bar{\xi}^2 - \bar{\eta}^2) - (\bar{\xi}_0^2 - \bar{\eta}_0^2)}{2(2-5\sin^2 i/2)} \rightarrow -2\bar{\xi}_0\bar{\eta}_0(\frac{3J_2}{2p^2})\bar{n}(t-t_0) \\ G_5 &= \frac{\bar{\xi}(\bar{\xi}^2 - 3\bar{\eta}^2) - \bar{\xi}_0(\bar{\xi}_0^2 - 3\bar{\eta}_0^2)}{3(2-5\sin^2 i/2)} \rightarrow \bar{\eta}_0(\bar{\eta}_0^2 - 3\bar{\xi}_0^2)(\frac{3J_2}{2p^2})\bar{n}(t-t_0) \\ G_6 &= \frac{\bar{\eta}(\bar{\eta}^2 - 3\bar{\xi}^2) - \bar{\eta}_0(\bar{\eta}_0^2 - 3\bar{\xi}_0^2)}{3(2-5\sin^2 i/2)} \rightarrow \bar{\xi}_0(3\bar{\eta}_0^2 - \bar{\xi}_0^2)(\frac{3J_2}{2p^2})\bar{n}(t-t_0) \\ G_7 &= \frac{4\bar{\xi}\bar{\eta}(\bar{\xi}^2 - \bar{\eta}^2) - 4\bar{\xi}_0\bar{\eta}_0(\bar{\xi}_0^2 - \bar{\eta}_0^2)}{4(2-5\sin^2 i/2)} \rightarrow [(\bar{\xi}_0^2 - \bar{\eta}_0^2)^2 - 4\bar{\xi}_0\bar{\eta}_0^2](\frac{3J_2}{2p^2})\bar{n}(t-t_0)\end{aligned}\right.\quad (2.31)$$

上述表达式“ \rightarrow ”左右两端表示两种算法，左端是通常算法，右端是对“临界”倾角 $i = 63^\circ 26'$ 的处理，即当 $|2 - \frac{5}{2}\sin^2 i| < \varepsilon^*$ （通常取 10^{-3} ）时，即采用右端的算法。

3. $\sigma_s^{(1)}(t)$ 与 $a_s^{(2)}(t)$

$$a_s^{(1)}(t) = \left(\frac{3J_2}{2a}\right)\left\{\frac{2}{3}(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - (1-e^2)^{-3/2}\right] + \sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2u\right\}\quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}i_s^{(1)}(t) = & \left(\frac{3J_2}{8p^2}\right)\sin 2i\left\{(\xi \cos u - \eta \sin u) + \cos 2u + \frac{1}{3}(\xi \cos 3u + \eta \sin 3u)\right. \\ & \left.+\frac{1}{3}(\xi^2 - \eta^2)F_2(e)\right\}\end{aligned}\quad (2.33)$$

$$\Omega_s^{(1)}(t) = \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\cos i\left\{-(u-\lambda) - \left(\frac{1}{2}\xi \sin u - \frac{3}{2}\eta \cos u\right) + \frac{1}{2}\sin 2u\right\}$$

$$+\frac{1}{6}(\xi \sin 3u - \eta \cos 3u) + \frac{1}{3}\xi\eta F_2(e) \Big\} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \lambda_s^{(1)}(t) = & -\cos i \cdot \Omega_s^{(1)}(t) \\ & + \left(\frac{3J_2}{2p^2} \right) \left\{ \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) (u - \lambda) + (\xi \sin u - \eta \cos u) \right. \\ & + F_1(e) \left[\left(1 - \frac{e^2}{4} \right) (\xi \sin u - \eta \cos u) + \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2) \sin 2u - \xi \eta \cos 2u \right. \\ & + \frac{1}{12} (\xi^2 - 3\eta^2) \xi \sin 3u + \frac{1}{12} (\eta^2 - 3\xi^2) \eta \cos 3u \Big] \Big\} \\ & + \left(\frac{3J_2}{2p^2} \right) \sin^2 i \left\{ -(2\xi \sin u - \eta \cos u) + \frac{3}{4} \sin 2u - \frac{1}{6} (\xi \sin 3u - \eta \cos 3u) + \frac{1}{2} \xi \eta F_2(e) \right. \\ & + F_1(e) \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \sqrt{1-e^2} + \frac{1}{8} (\xi^2 - \eta^2) \right) \xi \sin u \right. \\ & + \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{4} \sqrt{1-e^2} - \frac{1}{8} (7\xi^2 + 5\eta^2) \right) \eta \cos u \\ & - \frac{3}{4} (\xi^2 - \eta^2) \sin 2u + \frac{3}{2} \xi \eta \cos 2u + \left(1 + \frac{5}{12} \sqrt{1-e^2} - \frac{7}{48} \xi^2 + \frac{17}{48} \eta^2 \right) \xi \sin 3u \\ & - \left(1 + \frac{5}{12} \sqrt{1-e^2} - \frac{19}{48} \xi^2 + \frac{5}{48} \eta^2 \right) \eta \cos 3u + \frac{3}{8} (\xi^2 - \eta^2) \sin 4u - \frac{3}{4} \xi \eta \cos 4u \\ & + \frac{1}{16} (\xi^2 - 3\eta^2) \xi \sin 5u - \frac{1}{16} (3\xi^2 - \eta^2) \eta \cos 5u - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) F_2(e) \right) \xi \eta \Big] \Big\} \quad (2.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_s^{(1)}(t) = & \left(\frac{3J_2}{2p^2} \right) \left\{ - \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) (u - \lambda) \eta \right. \\ & + \left[\left(1 + \frac{1}{4} \xi^2 + \frac{9}{4} \eta^2 \right) \cos u - \xi \eta \sin u + \frac{1}{2} \xi \cos 2u + \eta \sin 2u \right. \\ & + \frac{1}{12} (\xi^2 - 3\eta^2) \cos 3u + \frac{1}{3} \xi \eta \sin 3u + \left(1 - \frac{e^2}{12} F_2(e) \right) \xi - \frac{1}{12} (\xi^2 - 3\eta^2) \xi F_2(e) \Big] \\ & + \sin^2 i \left[\left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{8} \xi^2 - \frac{25}{8} \eta^2 \right) \cos u + \frac{1}{4} \xi \eta \sin u + \frac{1}{2} \xi \cos 2u - 2\eta \sin 2u \right. \\ & + \left(\frac{7}{12} + \frac{11}{48} \xi^2 + \frac{25}{48} \eta^2 \right) \cos 3u - \frac{7}{24} \xi \eta \sin 3u + \frac{3}{8} \xi \cos 4u + \frac{3}{8} \eta \sin 4u \\ & + \frac{1}{16} (\xi^2 - \eta^2) \cos 5u + \frac{1}{8} \xi \eta \sin 5u - \left(\frac{5}{4} - \frac{e^2}{6} F_2(e) \right) \xi \\ & + \left(\frac{1}{4} F_2(e) - \frac{1}{6} F_3(e) \right) (\xi^2 - 3\eta^2) \xi \Big] \Big\} \quad (2.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_s^{(1)}(t) = & \left(\frac{3J_2}{2p^2} \right) \left\{ \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) (u - \lambda) \xi \right. \\ & + \left[\left(1 + \frac{5}{4} \xi^2 + \frac{1}{4} \eta^2 \right) \sin u - 2\xi \eta \cos u - \frac{1}{2} \eta \cos 2u \right. \\ & - \frac{e^2}{12} \sin 3u + \left(1 - \frac{e^2}{12} F_2(e) \right) \eta + \frac{1}{12} (\eta^2 - 3\xi^2) \eta F_2(e) \Big] \\ & + \sin^2 i \left[- \left(\frac{7}{4} + \frac{9}{8} e^2 \right) \sin u + \frac{13}{4} \xi \eta \cos u + \frac{1}{2} \xi \sin 2u + 2\eta \cos 2u \right. \\ & + \left(\frac{7}{12} + \frac{13}{48} \xi^2 + \frac{23}{48} \eta^2 \right) \sin 3u + \frac{5}{24} \xi \eta \cos 3u + \frac{3}{8} \xi \sin 4u - \frac{3}{8} \eta \cos 4u \\ & + \frac{1}{16} (\xi^2 - \eta^2) \sin 5u - \frac{1}{8} \xi \eta \cos 5u - \left(\frac{5}{4} - \frac{e^2}{6} F_2(e) \right) \eta \\ & + \left(\frac{1}{4} F_2(e) - \frac{1}{6} F_3(e) \right) (3\xi^2 - \eta^2) \eta \Big] \Big\} \quad (2.37) \end{aligned}$$

$$a_s^{(2)}(t) = -2 \left\{ \frac{a_s^{(1)}(t)}{a} + \left(\frac{3J_2}{2p^2} \right) \sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right\} a_s^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{3J_2}{a}\right)\left\{\sin i \cos i \left(\frac{a}{r}\right)^3(1 - \cos 2u)\right\}i_s^{(1)} \\
& -\left(\frac{3J_2}{a}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{r}\right)^4(\xi \sin u - \eta \cos u)\left[1 - \frac{3}{2}\sin^2 i(1 - \cos 2u)\right]\right. \\
& \left. + \sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^5 \sin^2 i \sin 2u\right\}\lambda_s^{(1)} \\
& +\left(\frac{3J_2}{a}\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^4\left[1 - \frac{3}{2}\sin^2 i(1 - \cos 2u)\right]\left[\cos u + F_4(e)(\eta^2 \cos u - \xi \eta \sin u)\right]\right. \\
& \left. + (1-e^2)^{-3/2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 i \sin 2u\left[-F_5(e)\eta - 2 \sin u - \frac{1}{2}(\xi \sin 2u - \eta \cos 2u)\right.\right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2}F_1(e)\xi(4(\xi \sin u - \eta \cos u) + (\xi^2 - \eta^2) \sin 2u - 2\xi \eta \cos 2u)\right]\right\}\eta_s^{(1)} \\
& +\left(\frac{3J_2}{a}\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^4\left[1 - \frac{3}{2}\sin^2 i(1 - \cos 2u)\right]\left[\sin u + F_4(e)(\xi^2 \sin u - \xi \eta \cos u)\right]\right. \\
& \left. + (1-e^2)^{-3/2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 i \sin 2u\left[F_5(e)\xi + 2 \cos u + \frac{1}{2}(\xi \cos 2u + \eta \sin 2u)\right.\right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2}F_1(e)\eta(4(\xi \sin u - \eta \cos u) + (\xi^2 - \eta^2) \sin 2u - 2\xi \eta \cos 2u)\right]\right\}\eta_s^{(1)} \\
& -\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2 a \sqrt{1-e^2}\left\{\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)^2\left[\left(\frac{16}{9} + \frac{19}{9}e^2\right) + \frac{1}{1-e^2}\left(\frac{35}{18}e^4\right) + \frac{2}{9}\sqrt{1-e^2}\right]\right. \\
& \left. + \sin^2 i\left(1 + \frac{2}{3}e^2\right) + \sin^4 i\left[-\left(\frac{5}{6} - \frac{25}{24}e^2\right) + \frac{1}{1-e^2}\left(\frac{35}{16}e^4\right)\right]\right. \\
& \left. + \sin^2 i\left[-\frac{2}{3}\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right)F_2(e) + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{4}\sin^2 i\right) + \frac{e^2}{1-e^2}\left(\frac{7}{3} - \frac{7}{2}\sin^2 i\right)\right](\xi^2 - \eta^2)\right. \\
& \left. + \sin^4 i\left[\frac{1}{32(1-e^2)}(\xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4)\right]\right\} \quad (2.38)
\end{aligned}$$

上述短周期项中出现的 $u = f + \omega$ 和 $(\frac{a}{r})$ ，由 ξ, η, λ 按下列广义 Kepler 方程和相应公式计算：

$$\begin{cases} \tilde{u} - \lambda &= \xi \sin \tilde{u} + \eta \cos \tilde{u} \\ (\frac{a}{r}) &= (1 - \xi \cos \tilde{u} - \eta \sin \tilde{u})^{-1} \\ \sin(u - \tilde{u}) &= (\frac{a}{r})(\tilde{u} - \lambda)[1 - F_1(e)(\xi \cos \tilde{u} + \eta \sin \tilde{u})] \\ u &= \lambda + [(u - \tilde{u}) + (\tilde{u} - \lambda)] \end{cases} \quad (2.39)$$

其中 $\tilde{u} = E + \omega$ ， E 是偏近点角，注意 $u - \lambda$ ， $\tilde{u} - \lambda$ 与 $u - \tilde{u}$ 均为 $O(e)$ 的量级。

除在前面长周期变化项 $\Delta\sigma_l^{(1)}$ 中已出现过的 $F_1(e)$ 等量外， $F_4(e)$ 和 $F_5(e)$ 由下式表达：

$$\begin{cases} F_4(e) = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-e^2})} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}F_1(e) \\ F_5(e) = \frac{(5+3\sqrt{1-e^2}-2e^2)}{2(1+\sqrt{1-e^2})} = \frac{1}{2}(5+3\sqrt{1-e^2}-2e^2)F_1(e) \end{cases} \quad (2.40)$$

上述短周期项各式右端出现的根数均为 $\bar{\sigma}(t)$ 。

§8.2 带谐项摄动 $J_l(l \geq 3)$ 部分

1. σ_2

$$a_2 = 0, \quad i_2 = 0 \quad (2.41)$$

$$\Omega_2 = \bar{n} \cos i \sum_{l(2) \geq 4} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l}\right) \sum_{q=1}^{l/2} 2q(-1)^{\frac{1}{2}(l+2q)} \left(\frac{1}{2}\right)^{(l+2q)}$$

$$\begin{aligned}
& \times \binom{l}{l/2-q} \binom{l+2q}{l} \binom{2q}{q} (\sin i)^{(2q-2)} K_1(e) \\
\lambda_2 = & -\cos i \Omega_2 \\
& + \bar{n} \sum_{l(2) \geq 4} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \left[\sum_{q=0}^{l/2} (-1)^{\frac{1}{2}(l+2q)} \left(\frac{1}{2} \right)^{(l+2q)} \right. \\
& \times \binom{l}{l/2-q} \binom{l+2q}{l} \binom{2q}{q} (\sin i)^{(2q)} \Big] \\
& \times \left[(2l-1+3\sqrt{1-e^2}) K_1(e) + (1-\sqrt{1-e^2})(1-e^2) K_2(e) \right] \quad (2.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 = & \bar{n} \sum_{l(2) \geq 3} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \sum_{q=0}^{l/2} (-1)^{\frac{1}{2}(l+2q-1)} \left(\frac{1}{2} \right)^{(l+2q+1)} \\
& \times \binom{l}{(l-1)/2-q} \binom{l+2q+1}{l} \binom{2q+1}{q} (\sin i)^{(2q+1)} \\
& \times \left[-(2l-1) + (2q+1) \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i} e^2 K_3(e) - (1-e^2) K_4(e) \right] \quad (2.43)
\end{aligned}$$

$$\eta_2 = 0 \quad (2.44)$$

注意, 这里的 ξ_2 在计算中并入前面 $\bar{\xi}$ 和 $\bar{\eta}$ 的完整表达式 (2.13) 式。各式右端出现的根数 a, e^2 和 i 均为拟平均根数 $\bar{a}_0, \bar{e}_0^2, \bar{i}, \bar{p} = \bar{a}_0(1 - \bar{e}_0^2), \bar{n} = \bar{a}_0^{-3/2}$ 。

2. $\sigma_l^{(1)}(t) = [\sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0)]$ 中的 $\sigma_l^{(1)}(t)$

$$a_l^{(1)}(t) = 0 \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
i_l^{(1)}(t) = & \left(\frac{\bar{n}}{\omega_1} \right) \cos i \sum_{l \geq 3} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^p (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{(2l-2p+2q-1)} \right. \\
& \times \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q-1)} \Big] K_{6p}(e) e^{(l-2p)} \\
& \times \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p)\omega + \delta_1 \sin(l-2p)\omega \right] \quad (2.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_l^{(1)} = & \left(\frac{\bar{n}}{\omega_1} \right) \cos i \sum_{l \geq 3} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^p \frac{(l-2p+2q)}{(l-2p)} (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{(2l-2p+2q-1)} \right. \\
& \times \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q-2)} \Big] K_{6p}(e) e^{(l-2p)} \\
& \times \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p)\omega - \delta_1 \cos(l-2p)\omega \right] \quad (2.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_l^{(1)} = & -\cos i \Omega_l^{(1)}(t) \\
& + \left(\frac{\bar{n}}{\omega_1} \right) \sum_{l \geq 3} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \frac{1}{(l-2p)} \left[\sum_{q=0}^p (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \right. \\
& \times \left(\frac{1}{2} \right)^{(2l-2p+2q-1)} \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} \Big] \\
& \times (\sin i)^{(l-2p+2q)} \Big] \left[(2l-1+3\sqrt{1-e^2}) K_{6p}(e) \right. \\
& \left. + \frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} K_{7p}(e) \right] e^{(l-2p)} \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p)\omega - \delta_1 \cos(l-2p)\omega \right] \quad (2.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_l^{(1)} = & \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \bar{\xi} \\
& + \left(\frac{\bar{n}}{\omega_1} \right) \sum_{l(2) \geq 3} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \sum_{q=0}^{(l-1)/2} (-1)^{(l+2q+1)/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{(2l+2q+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \binom{l}{(l-1)/2-q} \binom{l+2q+1}{l} \binom{2q+1}{q} (\sin i)^{(2q+1)} \\
& \times \left[((2l-1) - (2q+1) \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i}) K_3(e) - (1-e^2) K_5(e) \right] \left(\frac{1}{2} e^2 \sin 2\omega \right) \\
& + \left(\frac{\bar{n}}{\omega_1} \right) \sum_{l \geq 4} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2-\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^p (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{(2l-2p+2q)} \right. \\
& \times \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)} \\
& \left. \left\{ \left[((2l-1) - (l-2p+2q) \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i}) e^2 K_{6p}(e) + (1-e^2) K_{8p}(e) \right] \frac{e^{(l-2p-1)}}{(l-2p-1)} \right. \right. \\
& \times (-1) \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p-1)\omega + \delta_1 \sin(l-2p-1)\omega \right] \\
& + \left[((2l-1) - (l-2p+2q) \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i}) K_{6p}(e) - (1-e^2) K_{9p}(e) \right] \frac{e^{(l-2p+1)}}{(l-2p+1)} \\
& \left. \left. \times \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p+1)\omega + \delta_1 \sin(l-2p+1)\omega \right] \right\} \right] \quad (2.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_l^{(1)} &= \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \bar{\eta} \\
& + \left(\frac{\bar{n}}{\omega_1} \right) \sum_{l(2) \geq 3} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \sum_{q=0}^{(l-1)/2} (-1)^{(l+2q-1)/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{(2l+2q+1)} \\
& \times \binom{l}{(l-1)/2-q} \binom{l+2q+1}{l} \binom{2q+1}{q} (\sin i)^{(2q+1)} \\
& \times \left[((2l-1) - (2q+1) \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i}) K_3(e) - (1-e^2) K_5(e) \right] \left(-\frac{1}{2} e^2 \cos 2\omega \right) \\
& + \left(\frac{\bar{n}}{\omega_1} \right) \sum_{l \geq 4} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2-\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^p (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{(2l-2p+2q)} \right. \\
& \times \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{l-2p+2q} \\
& \times \left\{ \left[((2l-1) - (l-2p+2q) \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i}) e^2 K_{6p}(e) + (1-e^2) K_{8p}(e) \right] \frac{e^{(l-2p-1)}}{(l-2p-1)} \right. \\
& \times \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p-1)\omega - \delta_1 \cos(l-2p-1)\omega \right] \\
& + \left[((2l-1) - (l-2p+2q) \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i}) K_{6p}(e) - (1-e^2) K_{9p}(e) \right] \frac{e^{(l-2p+1)}}{(l-2p+1)} \\
& \left. \left. \times \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p+1)\omega - \delta_1 \cos(l-2p+1)\omega \right] \right\} \right] \quad (2.50)
\end{aligned}$$

各式中出现的 ω_1 见 (2.17) 式, $\xi_l^{(1)}$ 和 $\eta_l^{(1)}$ 右端的 ω_2 由下式表达:

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \bar{n} \sum_{l(2) \geq 4} \left(\frac{-J_l}{\bar{p}^l} \right) \sum_{q=0}^{l/2} (-1)^{\frac{1}{2}(l+2q)} \left(\frac{1}{2} \right)^{l+2q} \binom{l}{l/2-q} \binom{l+2q}{l} \binom{2q}{q} \\
& \times \left\{ (\sin i)^{2q} \left[(2l-1+2q) K_1(e) + (1-e^2) K_2(e) \right] - 2q (\sin i)^{2q-2} K_1(e) \right\} \quad (2.51)
\end{aligned}$$

各式右端出现的 a, e^2, i 和 ω 均为拟平均根数 $\bar{a}, \bar{e}^2, \bar{i}$ 和 $\bar{\omega}$, 相应的 \bar{n}, \bar{p} 与之对应。而 σ_2 和 $\sigma_l^{(1)}(t)$ 中

出现的 $K_1(e), \dots, K_5(e)$ 和 $K_{6p}(e), \dots, K_{9p}(e)$ 由下列各式表达:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1(e) = \sum_{\alpha(2)=0}^{l-2} \binom{l-1}{\alpha} \binom{\alpha}{\alpha/2} \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^\alpha \\ K_2(e) = \sum_{\alpha(2)=2}^{l-2} \binom{l-1}{\alpha} \binom{\alpha}{\alpha/2} \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^{\alpha-2} \\ K_3(e) = \sum_{\alpha(2)=1}^{l-2} \binom{l-1}{\alpha} \binom{\alpha}{(\alpha-1)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^{\alpha-1} \\ K_4(e) = \sum_{\alpha(2)=1}^{l-2} \binom{l-1}{\alpha} \binom{\alpha}{(\alpha-1)/2} (1+\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^{\alpha-1} \\ K_5(e) = \sum_{\alpha(2)=3}^{l-2} \binom{l-1}{\alpha} \binom{\alpha}{(\alpha-1)/2} (1-\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^{\alpha-3}, \quad (l \geq 5) \end{array} \right. \quad (2.52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{6p}(e) = \sum_{\alpha(2)=l-2p}^{l-2} \binom{l-1}{\alpha} \binom{\alpha}{[\alpha-(l-2p)]/2} \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^{\alpha-(l-2p)} \\ K_{7p}(e) = \sum_{\alpha(2)=l-2p}^{l-2} \binom{l-1}{\alpha} \binom{\alpha}{[\alpha-(l-2p)]/2} \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^{\alpha-(l-2p)} \\ K_{8p}(e) = \sum_{\alpha(2)=l-2p}^{l-2} \binom{l-1}{\alpha} \binom{\alpha}{[\alpha-(l-2p)]/2} (l-2p+\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^{\alpha-(l-2p)} \\ K_{9p}(e) = \sum_{\alpha(2)=l-2p+2}^{l-2} \binom{l-1}{\alpha} \binom{\alpha}{[\alpha-(l-2p)]/2} (l-2p-\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha e^{\alpha-(l-2p+2)}, \quad (p \geq 2) \end{array} \right. \quad (2.53)$$

当 $\omega_1 \rightarrow 0$ 时, 即临界角情况, $\Delta\sigma_l^{(1)}(t)$ 可改为二阶长期项计算公式, 即

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_1} \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p)\bar{\omega} - \delta_1 \cos(l-2p)\bar{\omega} \right]_{t_0}^t \\ \rightarrow (l-2p) \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p)\bar{\omega}_0 + \delta_1 \sin(l-2p)\bar{\omega}_0 \right] (t-t_0) \\ \frac{1}{\omega_1} \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p)\bar{\omega} + \delta_1 \sin(l-2p)\bar{\omega} \right]_{t_0}^t \\ \rightarrow -(l-2p) \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p)\bar{\omega}_0 - \delta_1 \cos(l-2p)\bar{\omega}_0 \right] (t-t_0) \\ \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \bar{\xi} \right]_{t_0}^t \rightarrow -\omega_2 \bar{\eta}_0(t-t_0) \\ \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \bar{\eta} \right]_{t_0}^t \rightarrow \omega_2 \bar{\xi}_0(t-t_0) \\ \left[\left(\frac{\bar{n}}{2\omega_1}\right) \sin 2\bar{\omega} \right]_{t_0}^t \rightarrow \cos 2\bar{\omega}_0 \bar{n}(t-t_0) \\ \left[\left(\frac{\bar{n}}{2\omega_1}\right) \cos 2\bar{\omega} \right]_{t_0}^t \rightarrow -\sin 2\bar{\omega}_0 \bar{n}(t-t_0) \end{array} \right. \quad (2.54)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{\omega_1} \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p-1)\bar{\omega} + \delta_1 \sin(l-2p-1)\bar{\omega} \right]_{t_0}^t \\ & \rightarrow \frac{1}{(l-2p-1)} \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p-1)\bar{\omega}_0 - \delta_1 \cos(l-2p-1)\bar{\omega}_0 \right] (t-t_0) \\ & -\frac{1}{\omega_1} \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p+1)\bar{\omega} + \delta_1 \sin(l-2p+1)\bar{\omega} \right]_{t_0}^t \\ & \rightarrow \frac{1}{(l-2p+1)} \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p+1)\bar{\omega}_0 - \delta_1 \cos(l-2p+1)\bar{\omega}_0 \right] (t-t_0) \\ & \frac{1}{\omega_1} \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p-1)\bar{\omega} - \delta_1 \cos(l-2p-1)\bar{\omega} \right]_{t_0}^t \\ & \rightarrow \frac{1}{(l-2p-1)} \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p-1)\bar{\omega}_0 + \delta_1 \sin(l-2p-1)\bar{\omega}_0 \right] (t-t_0) \\ & \frac{1}{\omega_1} \left[(1-\delta_1) \sin(l-2p+1)\bar{\omega} - \delta_1 \cos(l-2p+1)\bar{\omega} \right]_{t_0}^t \\ & \rightarrow \frac{1}{(l-2p+1)} \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p+1)\bar{\omega}_0 + \delta_1 \sin(l-2p+1)\bar{\omega}_0 \right] (t-t_0) \end{aligned} \right. \quad (2.55)$$

上述各式中 δ_1 的定义如下

$$\delta_1 = \frac{1}{2} [1 - (-1)^l] = \begin{cases} 1 & l \text{ 奇} \\ 0 & l \text{ 偶} \end{cases} \quad (2.56)$$

上述长周期项计算公式中并未将 $e^p \cos p\omega, e^p \sin p\omega$ 写成 ξ, η 的形式, 其原因在于当 p 值较大时, 写成 ξ, η 的形式复杂, 而对实际计算而言, 不必拘泥于这种形式。可由 ξ, η 反解出 e 和 ω , 然后再计算 $e^p \cos p\omega, e^p \sin p\omega$ 即可, 而关键在于无奇点根数摄动解中必须是以 $e^p \cos p\omega, e^p \sin p\omega$ 的形式出现。

3. $a_s^{(2)}(t)$

$$a_s^{(2)}(t) = 2a^2 R_{2s} \quad (2.57)$$

$$R_{2s} = R_l - [(R_l)_c + (R_l)_l] \quad (2.58)$$

其中

$$\begin{aligned} R_l &= \sum_{l \geq 3} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}} \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^p (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{(2l-2p+2q-\delta_2)} \right. \\ &\quad \times \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)} \Big] \\ &\quad \times \left[(1-\delta_1) \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \cos(l-2p)u + \delta_1 \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \sin(l-2p)u \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$(R_l)_c = \sum_{l(2) \geq 4} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}} \left[\sum_{q=0}^{l/2} (-1)^{(l+2q)/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{l+2q} \right. \quad (2.60)$$

$$\times \binom{l}{l/2-q} \binom{l+2q}{l} \binom{2q}{q} (\sin i)^{2q} \Big] K_{l+1}(e) \quad (2.61)$$

$$(R_l)_l = \sum_{l \geq 3} \frac{(-J_l)}{a^{l+1}} \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}(l-2+\delta_1)} \left[\sum_{q=0}^p (-1)^{(l+2q-\delta_1)/2} \left(\frac{1}{2} \right)^{(2l-2p+2q-1)} \right. \quad (2.62)$$

$$\times \binom{l}{p-q} \binom{2l-2p+2q}{l} \binom{l-2p+2q}{q} (\sin i)^{(l-2p+2q)} \Big] \quad (2.63)$$

$$\times K_{l+1}^p(e) e^{(l-2p)} \left[(1-\delta_1) \cos(l-2p)\omega + \delta_1 \sin(l-2p)\omega \right] \quad (2.64)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_{l+1}(e) &= \overline{\left(\frac{a}{r} \right)^{l+1}} = (1-e^2)^{-(l-\frac{1}{2})} K_1(e) \\ K_{l+1}^p(e) &= e^{-(l-2p)} \overline{\left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \cos(l-2p)f} \\ &= \delta_3 (1-e^2)^{-(l-\frac{1}{2})} K_{6p}(e) \end{aligned} \right. \quad (2.65)$$

$$\delta_2 = \begin{cases} 0, & l - 2p = 0 \\ 1, & l - 2p \neq 0 \end{cases} \quad \delta_3 = \begin{cases} 0, & p = 0 \\ 1, & p \neq 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

$$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (2.67)$$

(2.59) 式中出现的 $u = f + \omega$, 其计算方法见 (2.39) 式, 而 ω 可由 ξ 和 η 给出。

§8.3 田谐项摄动 $J_{lm}(l \geq 2, m = 1 - l)$ 部分

这里所说的田谐项摄动, 即本教材第二部分一开始就指出的, 尽管其摄动影响只有短周期项, 除对轨道半长径有特殊要求 (即 \bar{a}_0 要消除二阶短周期项 $a_s^{(2)}(t_0)$), 需要计算这种摄动项外, 因相应的短周期项中包含量级为 10^{-5} 的地球自转项, 故六个根数均需要计算这种摄动项, 作为 (2.8) 式和 (2.10) 式右端 $\sigma_s^{(1)}(t)$ 的一部分, 而且就记作 $\sigma_s^{(1)}(t)$ 。

$$a_s^{(1)}(t) = \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l a \left(\frac{J_{lm}}{a^l} \right) \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \left\{ \frac{2(l-2p)}{(l-2p) - m\alpha} S_0 \right\} \quad (2.68)$$

$$i_s^{(1)}(t) = \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \left(\frac{J_{lm}}{a^l} \right) \frac{1}{\sin i} \left\{ \sum_{p=0}^l \left[(l-2p) \cos i - m \right] F_{lmp}(i) \frac{1}{(l-2p) - m\alpha} S_0 \right\} \quad (2.69)$$

$$\Omega_s^{(1)}(t) = \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \left(\frac{J_{lm}}{a^l} \right) \frac{1}{\sin i} \left\{ \sum_{p=0}^l F'_{lmp}(i) \frac{1}{(l-2p) - m\alpha} S_0^* \right\} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \xi_s^{(1)}(t) &= \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \left(\frac{J_{lm}}{a^l} \right) \left\{ \sum_{p=0}^l \left(-\frac{1}{2} \right) F_{lmp}(i) \right. \\ &\quad \times \left[\frac{(l+1) - 2(l-2p)}{(l-2p-1) - m\alpha} S_{0-1} - \frac{(l+1) + 2(l-2p)}{(l-2p+1) - m\alpha} S_{01} \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \eta_s^{(1)}(t) &= \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \left(\frac{J_{lm}}{a^l} \right) \left\{ \sum_{p=0}^l \left(\frac{1}{2} \right) F_{lmp}(i) \right. \\ &\quad \times \left[\frac{(l+1) - 2(l-2p)}{(l-2p-1) - m\alpha} S_{0-1}^* + \frac{(l+1) + 2(l-2p)}{(l-2p+1) - m\alpha} S_{01}^* \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \lambda_s^{(1)}(t) &= -\cos i \cdot \Omega_s^{(2)}(t) \\ &\quad + \sum_{l \geq 2} \sum_{m=1}^l \left(\frac{J_{lm}}{a^l} \right) \left\{ \sum_{p=0}^l F_{lmp}(i) \left[2(l+1) - \frac{3(l-2p)}{(l-2p) - m\alpha} \right] \frac{1}{(l-2p) - m\alpha} S_0^* \right\} \end{aligned} \quad (2.73)$$

上述各式右端出现的 J_{lm} 等量由下列各式表达:

$$J_{lm} = (C_{lm}^2 + S_{lm}^2)^{1/2} \quad (2.74)$$

$$m\lambda_{lm} = \arctan(S_{lm}/C_{lm}) \quad (2.75)$$

$$\Omega_m = \Omega - (\bar{S}_G + \lambda_{lm}) \quad (2.76)$$

$$\begin{cases} \bar{S}_G = 280^\circ.460619 + 360^\circ.98564736d \\ d = JD(t) - JD(J2000.0), \quad t \text{ 对应 UT1} \end{cases} \quad (2.77)$$

$$n_e = 360^\circ.98564736/d \quad (2.78)$$

$$\alpha = n_e/\bar{n}, \quad \bar{n} = \bar{a}^{-3/2} \quad (2.79)$$

$$\begin{cases} S_0 = (1 - \delta_{lm}) \cos((l-2p)\lambda + m\Omega_{lm}) + \delta_{lm} \sin((l-2p)\lambda + m\Omega_{lm}) \\ S_0^* = (1 - \delta_{lm}) \sin((l-2p)\lambda + m\Omega_{lm}) - \delta_{lm} \cos((l-2p)\lambda + m\Omega_{lm}) \end{cases} \quad (2.80)$$

$$\begin{cases} S_{0-1} = (1 - \delta_{lm}) \cos((l - 2p - 1)\lambda + m\Omega_{lm}) + \delta_{lm} \sin((l - 2p - 1)\lambda + m\Omega_{lm}) \\ S_{01} = (1 - \delta_{lm}) \cos((l - 2p + 1)\lambda + m\Omega_{lm}) + \delta_{lm} \sin((l - 2p + 1)\lambda + m\Omega_{lm}) \\ S_{0-1}^* = (1 - \delta_{lm}) \sin((l - 2p - 1)\lambda + m\Omega_{lm}) - \delta_{lm} \cos((l - 2p - 1)\lambda + m\Omega_{lm}) \\ S_{01}^* = (1 - \delta_{lm}) \sin((l - 2p + 1)\lambda + m\Omega_{lm}) - \delta_{lm} \cos((l - 2p + 1)\lambda + m\Omega_{lm}) \end{cases} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} F_{lmp}(i) &= \frac{(l+m)!}{2^l p! (l-p)!} \sum_{k=k_1}^{k_2} (-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2} \binom{2l-2p}{k} \binom{2p}{l-m-k} \\ &\quad \times (\sin \frac{i}{2})^{-(l-m-2p-2k)} (\cos \frac{i}{2})^{(3l-m-2p-2k)} \\ &= \frac{(l+m)!}{2^{2l} p! (l-p)!} \sum_{k=k_1}^{k_2} (-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2} \binom{2l-2p}{k} \binom{2p}{l-m-k} \\ &\quad \times (\sin i)^{-(l-m-2p-2k)} (1 + \cos i)^{(2l-m-2p-2k)} \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$k_1 = \max(0, l - m - 2p), \quad k_2 = \min(l - m, 2l - 2p) \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} F'_{lmp}(i) &= \frac{d}{di} F_{lmp}(i) \\ &= \frac{(l+m)!}{2^l p! (l-p)!} \left(\frac{1}{\sin i} \right) \sum_{k=k_1}^{k_2} (-1)^{k+(l-m+\delta_{lm})/2} \binom{2l-2p}{k} \binom{2p}{l-m-k} \\ &\quad \times \left[-2l \sin^2 \frac{i}{2} - (l - m - 2p - 2k) \right] (\sin \frac{i}{2})^{-(l-m-2p-2k)} \\ &\quad \times (\cos \frac{i}{2})^{(3l-m-2p-2k)} \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\delta_{lm} = \frac{1}{2} [1 - (-1)^{l-m}] = \begin{cases} 1 & (l-m) \text{ 奇} \\ 0 & (l-m) \text{ 偶} \end{cases} \quad (2.85)$$

根据田谐项摄动及其地球自转项的特点，除 $a_s^{(1)}(t)$ 右端求和取项中对 p 无限制外，(2.69) 式，(2.70) 式和 (2.73) 式中的 p 取值要求 $l - 2p = 0$ ，而 (2.71) 式和 (2.72) 式中，对 p 则分别要求 $l - 2p - 1 = 0$ 和 $l - 2p + 1 = 0$ 。

第九章 第三体（日、月）引力摄动和地球潮汐形变摄动的分析解

§9.1 第三体（日、月）引力摄动部分

1. 长期项 $\sigma_2(t - t_0)$

$$a_2 = 0 \quad (2.86)$$

$$i_2 = 0 \quad (2.87)$$

$$\Omega_2 = -\left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)(1 - e^2)^{-1/2}n \cos i \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & \left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i'\right)\left\{-\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(\frac{7}{3} + e^2\right)\right. \\ & \left. + \left[\left(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i\right) + \frac{1}{2}e^2\right](1 - e^2)^{-1/2}\right\}n \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\xi_2 = 0 \quad (2.90)$$

$$\eta_2 = 0 \quad (2.91)$$

其中

$$\beta = m'/r'^3 \quad (2.92)$$

上述各式右端出现的根数及其有关量均对应平均根数，而 $e^2 = \bar{e}_0^2$ 只是一个符号，亦对应拟平均根数，按定义 (2.13) 有

$$e^2 = \bar{e}_0^2 = \bar{\xi}_0^2 + \bar{\eta}_0^2 \quad (2.93)$$

m' 是日、月质量，而日、月根数 σ' 及其有关量的计算见后面第 (4) 段。

2. 长周期变化项 $\Delta\sigma_l^{(1)}(t) = [\sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0)]$ 的 $\sigma_l^{(1)}(t)$

$$a_l^{(1)}(t) = 0 \quad (2.94)$$

$$i_l^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{n}{\sqrt{1 - e^2}\sin i}(-2H_2) \quad (2.95)$$

$$\Omega_l^{(1)}(t) = \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)\frac{n}{\sqrt{1 - e^2}\sin i}(H_4) \quad (2.96)$$

$$\lambda_l^{(1)}(t) = -\cos i \Omega_l^{(1)}(t) - \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)n(4H_6) \quad (2.97)$$

$$\xi_l^{(1)}(t) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\bar{\xi} + \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)n\left\{\sqrt{1 - e^2}\left[\frac{3}{2}(eH_{12}) - 5(eH_8)\right] - \frac{\cos i}{\sqrt{1 - e^2}\sin i}\frac{1}{2}(eH_{10})\right\} \quad (2.98)$$

$$\eta_l^{(1)}(t) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\bar{\eta} + \left(\frac{3}{2}\beta a^3\right)n\left\{\sqrt{1 - e^2}\left[\frac{3}{2}(eH_{13}) + 5(eH_9)\right] - \frac{\cos i}{\sqrt{1 - e^2}\sin i}\frac{1}{2}(eH_{11})\right\} \quad (2.99)$$

其中

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \left(\frac{3}{4}\beta a^3\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i'\right)/\left(\frac{3J_2}{2a^2}\right) \quad (2.100)$$

上述各式中出现的 H_2, H_4, \dots, H_{13} 以及与其有关的 K_6, K_7, \dots 的表达式如下：

$$H_2 = \frac{1}{16}\left[\sin^2 i K_6 + \sin 2i K_7\right] \quad (2.101)$$

$$H_4 = \frac{1}{16}\left[\sin 2i K_{16} + 4 \cos 2i K_{17} - 6 \sin 2i K_{18}\right] \quad (2.102)$$

$$H_6 = \frac{1}{16}\left[\sin^2 i K_{16} + 2 \sin 2i K_{17} + 2(2 - 3 \sin^2 i) K_{18}\right] \quad (2.103)$$

$$H_8 = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{2} (1 - \cos i)^2 K_{21} + \frac{1}{2} (1 + \cos i)^2 K_{22} + \sin^2 i K_{23} \right. \\ \left. + 2 \sin i (1 - \cos i) K_{24} + 2 \sin i (1 + \cos i) K_{25} \right] \quad (2.104)$$

$$H_9 = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{2} (1 - \cos i)^2 K_{31} + \frac{1}{2} (1 + \cos i)^2 K_{32} + \sin^2 i K_{33} \right. \\ \left. + 2 \sin i (1 - \cos i) K_{34} + 2 \sin i (1 + \cos i) K_{35} \right] \quad (2.105)$$

$$H_{10} = \frac{1}{16} \left[\sin 2i (K_{21} + K_{22}) + 4 \cos 2i (K_{24} - K_{25}) - 6 \sin 2i K_{19} \right] \quad (2.106)$$

$$H_{11} = \frac{1}{16} \left[\sin 2i (K_{31} + K_{32}) + 4 \cos 2i (K_{34} - K_{35}) - 6 \sin 2i K_{20} \right] \quad (2.107)$$

$$H_{12} = \frac{1}{16} \left[\sin^2 i (K_{21} + K_{22}) + 2 \sin 2i (K_{24} - K_{25}) + 2(2 - 3 \sin^2 i) K_{19} \right] \quad (2.108)$$

$$H_{13} = \frac{1}{16} \left[\sin^2 i (K_{31} + K_{32}) + 2 \sin 2i (K_{34} - K_{35}) + 2(2 - 3 \sin^2 i) K_{20} \right] \quad (2.109)$$

$$\begin{cases} K_6 = 2 \sin^2 i' \cos 2\theta / 2\theta_c + (1 + \cos i')^2 \cos(2\theta - 2u') / n_{15} \\ \quad + (1 - \cos i')^2 \cos(2\theta + 2u') / n_{16} \\ K_7 = \sin 2i' \cos \theta / \theta_c - \sin i' (1 + \cos i') \cos(\theta - 2u') / n_{17} \\ \quad + \sin i' (1 - \cos i') \cos(\theta + 2u') / n_{18} \end{cases} \quad (2.110)$$

$$\begin{cases} K_{16} = 2 \sin^2 i' \sin 2\theta / 2\theta_c + (1 + \cos i')^2 \sin(2\theta - 2u') / n_{15} \\ \quad + (1 - \cos i')^2 \sin(2\theta + 2u') / n_{16} \\ K_{17} = \sin 2i' \sin \theta / \theta_c - \sin i' (1 + \cos i') \sin(\theta - 2u') / n_{17} \\ \quad + \sin i' (1 - \cos i') \sin(\theta + 2u') / n_{18} \\ K_{18} = \sin^2 i' \sin 2u' / 2n' \end{cases} \quad (2.111)$$

$$\begin{cases} K_{19} = \sin^2 i' \left[\cos(\omega - 2u') / n_{27} + \cos(\omega + 2u') / n_{28} \right] \\ K_{20} = \sin^2 i' \left[\sin(\omega - 2u') / n_{27} + \sin(\omega + 2u') / n_{28} \right] \\ K_{21} = 2 \sin^2 i' \cos(\omega - 2\theta) / n_{21} + (1 + \cos i')^2 \cos(\omega - 2\theta + 2u') / n_{23} \\ \quad + (1 - \cos i')^2 \cos(\omega - 2\theta - 2u') / n_{24} \\ K_{22} = 2 \sin^2 i' \cos(\omega + 2\theta) / n_{22} + (1 + \cos i')^2 \cos(\omega + 2\theta - 2u') / n_{25} \\ \quad + (1 - \cos i')^2 \cos(\omega + 2\theta + 2u') / n_{26} \\ K_{23} = 2(2 - 3 \sin^2 i') \cos \omega / \omega_1 + 3 \sin^2 i' \cos(\omega - 2u') / n_{27} \\ \quad + 3 \sin^2 i' \cos(\omega + 2u') / n_{28} \\ K_{24} = \sin i' \left[2 \cos i' \cos(\omega - \theta) / n_{29} - (1 + \cos i') \cos(\omega - \theta + 2u') / n_{31} \right. \\ \quad \left. + (1 - \cos i') \cos(\omega - \theta - 2u') / n_{32} \right] \\ K_{25} = \sin i' \left[-2 \cos i' \cos(\omega + \theta) / n_{30} + (1 + \cos i') \cos(\omega + \theta - 2u') / n_{33} \right. \\ \quad \left. - (1 - \cos i') \cos(\omega + \theta + 2u') / n_{34} \right] \end{cases} \quad (2.112)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{31} = 2 \sin^2 i' \sin(\omega - 2\theta)/n_{21} + (1 + \cos i')^2 \sin(\omega - 2\theta + 2u')/n_{23} \\ \quad + (1 - \cos i')^2 \sin(\omega - 2\theta - 2u')/n_{24} \\ K_{32} = 2 \sin^2 i' \sin(\omega + 2\theta)/n_{22} + (1 + \cos i')^2 \sin(\omega + 2\theta - 2u')/n_{25} \\ \quad + (1 - \cos i')^2 \sin(\omega + 2\theta + 2u')/n_{26} \\ K_{33} = 2(2 - 3 \sin^2 i') \sin \omega / \omega_1 + 3 \sin^2 i' \sin(\omega - 2u')/n_{27} \\ \quad + 3 \sin^2 i' \sin(\omega + 2u')/n_{28} \\ K_{34} = \sin i' \left[2 \cos i' \sin(\omega - \theta)/n_{29} - (1 + \cos i') \sin(\omega - \theta + 2u')/n_{31} \right. \\ \quad \left. + (1 - \cos i') \sin(\omega - \theta - 2u')/n_{32} \right] \\ K_{35} = \sin i' \left[-2 \cos i' \sin(\omega + \theta)/n_{30} + (1 + \cos i') \sin(\omega + \theta - 2u')/n_{33} \right. \\ \quad \left. - (1 - \cos i') \sin(\omega + \theta + 2u')/n_{34} \right] \end{array} \right. \quad (2.113)$$

上述各式中的 $n_{15}, n_{16}, \dots, n_{34}$ 定义如下:

$$n_{15} = 2\theta_c - 2n', \quad n_{16} = 2\theta_c + 2n', \quad n_{17} = \theta_c - 2n', \quad n_{18} = \theta_c + 2n' \quad (2.114)$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} n_{21} = \omega_1 - 2\theta_c, & n_{22} = \omega_1 + 2\theta_c, & n_{23} = \omega_1 - 2\theta_c + 2n' \\ n_{24} = \omega_1 - 2\theta_c - 2n', & n_{25} = \omega_1 + 2\theta_c - 2n', & n_{26} = \omega_1 + 2\theta_c + 2n' \\ n_{27} = \omega_1 - 2n', & n_{28} = \omega_1 + 2n', & n_{29} = \omega_1 - \theta_c \\ n_{30} = \omega_1 + \theta_c, & n_{31} = \omega_1 - \theta_c + 2n', & n_{32} = \omega_1 - \theta_c - 2n' \\ n_{33} = \omega_1 + \theta_c - 2n', & n_{34} = \omega_1 + \theta_c + 2n' \end{array} \right. \quad (2.115)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \Omega - \Omega' \\ \theta_c = \Omega_1 - \Omega'_c \end{array} \right. \quad (2.116)$$

Ω_1 和 ω_1 的计算见 (2.15) 和 (2.17) 式, 而有关日、月量 σ' 及其有关变率 Ω'_c 的计算见后面第 (4) 段。

上述 (2.95)-(2.99) 式中的 eH_8, eH_9 等分别对应 $e \cos \omega, e \sin \omega$, 本应表达成 ξ, η, ξ^2, η^2 变量的形式, 但相应公式将变得更复杂些, 与前面对 $J_l (l \geq 3)$ 项相应的摄动解表达式处理相同, 只要能在无奇点根数摄动解中真正构成上述 $e \cos \omega, e^2 \cos 2\omega$ 等形式即可, 而不必拘泥于“完整”形式, 在应用过程中可通过 $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ 给出 $\bar{e}, \bar{\omega}$, 再按上述表达形式计算。

3. 半长径的二阶短周期项 $a_s^{(2)}(t)$

$$a_s^{(2)}(t) = 2a \left(\frac{3}{2} \beta a^3 \right) \left[-2S_1 (\xi \cos \tilde{u} + \eta \sin \tilde{u}) - 2S_{21}^* + S_{22}^* \right] \quad (2.117)$$

其中 $\tilde{u} = E + \omega$, 它由 ξ, η, λ 计算, 计算方法见 (2.39) 式。 $S_1, S_{21}^* \dots$ 的计算公式如下

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i' \right) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \\ &\quad + \frac{1}{16} \left\{ \sin^2 i \left[2 \sin^2 i' \cos 2\theta + (1 + \cos i')^2 \cos(2\theta - 2u') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \cos i')^2 \cos(2\theta + 2u') \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin 2i \left[\sin 2i' \cos \theta - \sin i' (1 + \cos i') \cos(\theta - 2u') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin i' (1 - \cos i') \cos(\theta + 2u') \right] + 4 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[\sin^2 i' \cos 2u' \right] \right\} \\ S_{21}^* &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{2} (1 - \cos i)^2 D_{21}^* + \frac{1}{2} (1 + \cos i)^2 D_{22}^* + \sin^2 i D_{23}^* \right] \end{aligned} \quad (2.118)$$

$$+2\sin i(1-\cos i)D_{24}^*+2\sin i(1+\cos i)D_{25}^*] \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} S_{22}^* = & \frac{1}{16} \left[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2 D_{26}^* + \frac{1}{2}(1+\cos i)^2 D_{27}^* + \sin^2 i D_{28}^* \right. \\ & \left. + 2\sin i(1-\cos i)D_{29}^* + 2\sin i(1+\cos i)D_{30}^* \right] \end{aligned} \quad (2.120)$$

S_{21}^* 和 S_{22}^* 右端出现的 $D_{21}^*, D_{22}^*, \dots, D_{30}^*$ 的表达式如下:

$$\left\{ \begin{aligned} D_{21}^* &= 2\sin^2 i' \left[\xi \cos(\tilde{u} - 2\theta) - \eta \sin(\tilde{u} - 2\theta) \right] \\ &\quad + (1 + \cos i')^2 \left[\xi \cos(\tilde{u} - 2\theta + 2u') - \eta \sin(\tilde{u} - 2\theta + 2u') \right] \\ &\quad + (1 - \cos i')^2 \left[\xi \cos(\tilde{u} - 2\theta - 2u') - \eta \sin(\tilde{u} - 2\theta - 2u') \right] \\ D_{22}^* &= 2\sin^2 i' \left[\xi \cos(\tilde{u} + 2\theta) - \eta \sin(\tilde{u} + 2\theta) \right] \\ &\quad + (1 + \cos i')^2 \left[\xi \cos(\tilde{u} + 2\theta - 2u') - \eta \sin(\tilde{u} + 2\theta - 2u') \right] \\ &\quad + (1 - \cos i')^2 \left[\xi \cos(\tilde{u} + 2\theta + 2u') - \eta \sin(\tilde{u} + 2\theta + 2u') \right] \\ D_{23}^* &= 2(2 - 3\sin^2 i')(\xi \cos \tilde{u} - \eta \sin \tilde{u}) + 6\sin^2 i'(\xi \cos \tilde{u} - \eta \sin \tilde{u}) \cos 2u' \end{aligned} \right. \quad (2.121)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_{24}^* &= \sin i' \left[2\cos i'(\xi \cos(\tilde{u} - \theta) - \eta \sin(\tilde{u} - \theta)) \right. \\ &\quad \left. - (1 + \cos i')(\xi \cos(\tilde{u} - \theta + 2u') - \eta \sin(\tilde{u} - \theta + 2u')) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \cos i')(\xi \cos(\tilde{u} - \theta - 2u') - \eta \sin(\tilde{u} - \theta - 2u')) \right] \\ D_{25}^* &= \sin i' \left[-2\cos i'(\xi \cos(\tilde{u} + \theta) - \eta \sin(\tilde{u} + \theta)) \right. \\ &\quad \left. + (1 + \cos i')(\xi \cos(\tilde{u} + \theta - 2u') - \eta \sin(\tilde{u} + \theta - 2u')) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \cos i')(\xi \cos(\tilde{u} + \theta + 2u') - \eta \sin(\tilde{u} + \theta + 2u')) \right] \\ D_{26}^* &= 2\sin^2 i' \cos(2\tilde{u} - 2\theta) + (1 + \cos i')^2 \cos(2\tilde{u} - 2\theta + 2u') \\ &\quad + (1 - \cos i')^2 \cos(2\tilde{u} - 2\theta - 2u') \\ D_{27}^* &= 2\sin^2 i' \cos(2\tilde{u} + 2\theta) + (1 + \cos i')^2 \cos(2\tilde{u} + 2\theta - 2u') \\ &\quad + (1 - \cos i')^2 \cos(2\tilde{u} + 2\theta + 2u') \\ D_{28}^* &= 2(2 - 3\sin^2 i') \cos 2\tilde{u} + 3\sin^2 i' \left[\cos(2\tilde{u} - 2u') + \cos(2\tilde{u} + 2u') \right] \\ D_{29}^* &= \sin i' \left[2\cos i' \cos(2\tilde{u} - \theta) - (1 + \cos i') \cos(2\tilde{u} - \theta + 2u') \right. \\ &\quad \left. + (1 - \cos i') \cos(2\tilde{u} - \theta - 2u') \right] \\ D_{30}^* &= \sin i' \left[-2\cos i' \cos(2\tilde{u} + \theta) + (1 + \cos i') \cos(2\tilde{u} + \theta - 2u') \right. \\ &\quad \left. - (1 - \cos i') \cos(2\tilde{u} + \theta + 2u') \right] \end{aligned} \right. \quad (2.122)$$

上述各式中出现的日、月有关量的含义及其计算方法见下面第(4)段。

4. 日、月轨道及有关量的计算

对于分析解,可采用日、月平均轨道,即在初始值计算时采用长期进动椭圆,而几天弧段的摄动计算亦可采用“不变椭圆”轨道。

太阳在 J2000.0 地心天球坐标系中的平均轨道根数 $\bar{\sigma}'$ 为

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{a} &= 1.00000102(\text{AU}), \quad \text{AU} = 1.49597870 \times 10^8 \text{Km} \\ \bar{e} &= 0.016709 \\ \bar{i} &= \epsilon = 23^\circ.4393 \\ \bar{\Omega} &= 0^\circ.0 \\ \bar{\omega} &= 282^\circ.9373 + 0^\circ.32T \\ \bar{M} &= 357^\circ.5291 + 0^\circ.9856d \end{aligned} \right. \quad (2.123)$$

月球在 J2000.0 地心平黄道坐标系中的平均轨道根数 $\bar{\sigma}'$ 为

$$\begin{cases} \bar{a} = 384747.981 Km \\ \bar{e} = 0.054880 \\ \bar{i} = J = 5^\circ.1298 \\ \bar{\Omega} = 125^\circ.0446 - 1934^\circ.14T \\ \bar{\omega} = 318^\circ.3087 + 6003^\circ.15T \\ \bar{M} = 134^\circ.9634 + 13^\circ.0650d \end{cases} \quad (2.124)$$

上述两公式中出现的 T 和 d 分别为由标准历元 J2000.0 起算的世纪数和儒略日。

日、月摄动解中出现的 $a', e', i', \Omega', u' = f' + \omega'$, 对太阳有

$$\begin{cases} a' = \bar{a}, & e' = \bar{e}, & i' = \bar{i} = \epsilon, & \Omega' = 0^\circ.0 \\ u' = \bar{f} + \bar{\omega} \end{cases} \quad (2.125)$$

对月球有

$$a' = \bar{a} \quad e' = \bar{e} \quad (2.126)$$

而 i', Ω', u' 的计算公式如下:

$$\begin{cases} \cos i' = \cos \epsilon \cos J - \sin \epsilon \sin J \cos \bar{\Omega} \\ \sin i' = \sqrt{1 - \cos^2 i'} \end{cases} \quad (2.127)$$

$$\begin{cases} \sin \Omega' = \frac{\sin J \sin \bar{\Omega}}{\cos J - \cos \epsilon \cos i'} \\ \cos \Omega' = \frac{\sin \epsilon \sin i'}{\cos J - \cos \epsilon \cos i'} \end{cases} \quad (2.128)$$

$$\begin{cases} u' = (\bar{f} + \bar{\omega} + \bar{\Omega}) - (\bar{\Omega} - \varphi) \\ \sin(\bar{\Omega} - \varphi) = \frac{\cos \epsilon \sin \bar{\Omega}}{\sin i'} \sin J - \frac{\sin \epsilon \sin 2\bar{\Omega}}{\sin i'} \sin^2 \frac{J}{2} \end{cases} \quad (2.129)$$

\bar{f} 的计算涉及解 Kepler 方程, 有

$$\bar{E} - \bar{e} \sin \bar{E} = \bar{M} \quad (2.130)$$

$$r' = \bar{r} = \bar{a}(1 - \bar{e} \cos \bar{E}) \quad (2.131)$$

$$\begin{cases} \sin \bar{f} = (\frac{\bar{a}}{\bar{r}}) \sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin \bar{E} \\ \cos \bar{f} = (\frac{\bar{a}}{\bar{r}}) (\cos \bar{E} - \bar{e}) \end{cases} \quad \text{tg} \frac{\bar{f}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \text{tg} \frac{\bar{E}}{2} \quad (2.132)$$

长周期项中涉及到的变率 Ω'_c 和 n' , 对太阳有

$$\Omega'_c = 0, \quad n' = 0^\circ.9856/d \quad (2.133)$$

对月球有

$$\begin{cases} \Omega'_c = (\frac{\sin J}{\cos J - \cos^2 \epsilon}) \cos \bar{\Omega} \cdot \dot{\bar{\Omega}} \\ n' = 13^\circ.0650/d \end{cases} \quad (2.134)$$

§9.2 地球潮汐形变摄动部分

1. σ_2

$$a_2 = 0, \quad i_2 = 0 \quad (2.135)$$

$$\Omega_2 = -\frac{3}{4p^2}\beta_1 n \cos i \quad (2.136)$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{4p^2}\beta_1 n(3 - 4\sin^2 i) \quad (2.137)$$

$$\xi_2 = 0, \quad \eta_2 = 0 \quad (2.138)$$

2. $\Delta\sigma_l^{(1)}(t) = [\sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0)]$ 中的 $\sigma_l^{(1)}(t)$

$$a_l^{(1)}(t) = 0 \quad (2.139)$$

$$i_l^{(1)}(t) = -\frac{3}{8p^2}\beta_2 \left\{ \cos i \sin i' \left[2 \cos i' \left(\frac{n}{\Omega_1} \right) \cos \Omega^* + (1 + \cos i') \left(\frac{n}{\alpha_2} \right) \cos(2u' - \Omega^*) \right] \right. \\ \left. + \frac{\sin i}{4} \left[2 \sin^2 i' \left(\frac{n}{\Omega_1} \right) \cos 2\Omega^* - (1 + \cos i')^2 \left(\frac{n}{\alpha_6} \right) \cos(2u' - 2\Omega^*) \right] \right\} \quad (2.140)$$

$$\Omega_l^{(1)}(t) = -\frac{3}{8p^2}\beta_2 \left\{ 3 \left[\sin^2 i' \cos i \left(\frac{n}{2n'} \right) \sin 2u' \right] \right. \\ \left. + \sin i' \frac{\cos 2i}{\sin i} \left[2 \cos i' \left(\frac{n}{\Omega_1} \right) \sin \Omega^* - (1 + \cos i') \left(\frac{n}{\alpha_2} \right) \sin(2u' - \Omega^*) \right] \right. \\ \left. - \frac{\cos i}{4} \left[2 \sin^2 i' \left(\frac{n}{\Omega_1} \right) \sin 2\Omega^* + (1 + \cos i')^2 \left(\frac{n}{\alpha_6} \right) \sin(2u' - 2\Omega^*) \right] \right\} \quad (2.141)$$

$$\lambda_l^{(1)}(t) = \frac{3}{8p^2}\beta_2 \left\{ 3 \sin^2 i' (3 - 4\sin^2 i) \left(\frac{n}{2n'} \right) \sin 2u' - \sin i' \cot i (1 - 8\sin^2 i) \left[2 \cos i' \left(\frac{n}{\Omega_1} \right) \sin \Omega^* \right. \right. \\ \left. \left. - (1 + \cos i') \left(\frac{n}{\alpha_2} \right) \sin(2u' + \Omega^*) \right] - \frac{1}{4} (1 - 4\sin^2 i) \left[2 \sin^2 i' \left(\frac{n}{\Omega_1} \right) \sin 2\Omega^* \right. \right. \\ \left. \left. + (1 + \cos i')^2 \left(\frac{n}{\alpha_6} \right) \sin(2u' - 2\Omega^*) \right] \right\} \quad (2.142)$$

$$\xi_l^{(1)} = 0 \quad (2.143)$$

$$\eta_l^{(1)} = 0 \quad (2.144)$$

上述各式右端出现的根数 a, e^2, i, \dots 均为拟平均根数 $\bar{a}, \bar{e}^2 = \bar{\xi}_0^2 + \bar{\eta}_0^2, \bar{i}, \dots$ 。其它有关量如下:

$$\begin{cases} \beta = \frac{Gm'}{r'^3} = \frac{m'}{r'^3} \\ \beta_1 = k_2\beta(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i') = \beta_2(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i') \\ \beta_2 = k_2\beta \end{cases} \quad (2.145)$$

$$\alpha_2 = 2n' - \Omega_1, \quad \alpha_6 = n' - \Omega_1 \quad (2.146)$$

$$\begin{cases} \Omega_1 = -\frac{3J_2}{2p^2}n \cos i \\ \omega_1 = \frac{3J_2}{2p^2}n(2 - \frac{5}{2}\sin^2 i) \end{cases} \quad (2.147)$$

$$\Omega^* = \Omega - (\Omega' + \nu) \quad (2.148)$$

与第三体(日、月)引力摄动的计算类似, i', Ω', u' 和 n' 均为日、月的有关量, 计算方法同前, ν 是潮汐滞后角, 通常取 $\nu = 30^\circ$ 。

第十章 坐标系附加摄动的分析解

这一章所说的坐标系附加摄动仅指岁差章动引起地球赤道变化所导致的附加摄动，而极移的影响较小，不必考虑。

§10.1 历元地心天球坐标系中的附加摄动

这里将混合项处理成一般的长周期变化项 $\Delta\sigma_l^{(1)}(t) = [\sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0)]$ ， $\sigma_l^{(1)}(t)$ 的表达式如下：

$$a_l^{(1)}(t) = 0 \quad (2.149)$$

$$i_l^{(1)}(t) = I \quad (2.150)$$

$$\Omega_l^{(1)}(t) = (2 \cot 2i)Q \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned} \xi_l^{(1)}(t) = & -\frac{1}{2}\left(\frac{1-5\sin^2 i}{\sin i}\right) \\ & \times \left\{ (\theta \sin \alpha) \left[(\xi \sin \Omega - \eta \cos \Omega)/\alpha_1 - (\xi \sin \Omega + \eta \cos \Omega)/\alpha_2 \right] \right. \\ & \left. + (\theta \cos \alpha) \left[(\xi \cos \Omega + \eta \sin \Omega)/\alpha_1 - (\xi \cos \Omega - \eta \sin \Omega)/\alpha_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$\begin{aligned} \eta_l^{(1)}(t) = & -\frac{1}{2}\left(\frac{1-5\sin^2 i}{\sin i}\right) \\ & \times \left\{ (\theta \sin \alpha) \left[(\xi \cos \Omega + \eta \sin \Omega)/\alpha_1 + (\xi \cos \Omega - \eta \sin \Omega)/\alpha_2 \right] \right. \\ & \left. - (\theta \cos \alpha) \left[(\xi \sin \Omega - \eta \cos \Omega)/\alpha_1 + (\xi \sin \Omega + \eta \cos \Omega)/\alpha_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} \lambda_l^{(1)}(t) = & \left[-\frac{1}{\sin i} + (5 + 3\sqrt{1-e^2}) \sin i \right] \left[(\theta \sin \alpha) \cos \Omega \right. \\ & \left. - (\theta \cos \alpha) \sin \Omega \right] \end{aligned} \quad (2.154)$$

其中

$$\begin{cases} (\theta \sin \alpha) = \theta_A + \Delta\theta = 2004.''3t - 6.''8 \sin \Omega' \\ (\theta \cos \alpha) = -\Delta\varepsilon = 9.''2 \cos \Omega' \end{cases} \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} I = (\theta \sin \alpha) \sin \Omega + (\theta \cos \alpha) \cos \Omega = & (2004.''3t) \sin \Omega \\ & - 8''.0 \cos(\Omega - \Omega') - 1''.2 \cos(\Omega + \Omega') \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned} Q = (\theta \sin \alpha) \cos \Omega - (\theta \cos \alpha) \sin \Omega = & (2004.''3t) \cos \Omega \\ & + 8''.0 \sin(\Omega - \Omega') + 1''.2 \sin(\Omega + \Omega') \end{aligned} \quad (2.157)$$

这里岁差章动量中出现的 Ω' 是月球轨道升交点的平黄经，计算公式见 (2.124) 式中的 $\bar{\Omega}$ 。 α_1 和 α_2 的表达式如下：

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\omega_1}{\Omega_1} \quad \alpha_2 = 1 + \frac{\omega_1}{\Omega_1} \quad (2.158)$$

Ω_1 和 ω_1 即地球非球形引力摄动中 J_2 项导致的 Ω 和 ω 的变率，见 (2.15) 和 (2.17) 式。当 $i \rightarrow 90^\circ (|i - 90^\circ| < 0^\circ.5)$, $\cos i \rightarrow 0$ 和 $\sin 2i \rightarrow 0$ ，此时 $\Delta\Omega_l^{(2)}(t) = [\Omega_l^{(2)}(t) - \Omega_l^{(2)}(t_0)]$ 的算法改为 $\Omega_2(t - t_0)$, Ω_2 和 $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}$ 的计算公式变为：

$$\Omega_2 = \frac{3J_2}{2p^2} n \left(\frac{\cos 2i}{\sin i} \right) I \quad (2.159)$$

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_1 - \omega_1}, \quad \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\Omega_1}{\Omega_1 + \omega_1} \quad (2.160)$$

§10.2 轨道坐标系中的附加摄动

和历元地心天球坐标系的情况不一样, 在轨道坐标系中, 岁差章动引起的附加摄动是由于该坐标系的运动而导致, 即惯性力项, 与地球非球形引力位的具体细节无关, 而且引起卫星轨道的变化是典型的二阶长周期项, 通常可不考虑, 这正是该坐标系的“优点”。相应的二阶长周期变化项 $\Delta\sigma_l^{(2)}(t) = [\sigma_l^{(2)}(t) - \sigma_l^{(2)}(t_0)]$ 中 $\sigma_l^{(2)}(t)$ 的表达式如下:

$$a_l^{(2)}(t) = 0 \quad (2.161)$$

$$i_l^{(2)}(t) = \left(\frac{10^{-3}}{\Omega_1}\right) \left[0.''512 \cos \Omega - 0.''404 \cos(\Omega - 2L')/n_1 - 0.''176 \cos(\Omega - 2L'')/n_2 \right] \quad (2.162)$$

$$\Omega_l^{(2)}(t) = -\cot i \left(\frac{10^{-3}}{\Omega_1}\right) \left[0.''512 \sin \Omega - 0.''404 \sin(\Omega - 2L')/n_1 - 0.''176 \sin(\Omega - 2L'')/n_2 \right] \quad (2.163)$$

$$\lambda_l^{(2)} = -\sec i \Omega_l^{(2)}(t) \quad (2.164)$$

$$\xi_l^{(2)}(t) = \left(-\frac{1}{2 \sin i}\right) \left(\frac{10^{-3}}{\Omega_1}\right) \left\{ 0.''512 \left[\cos(\Omega - \omega)/\alpha_1 - \cos(\Omega + \omega)/\alpha_2 \right] - 0.''404 \left[\cos(\Omega - \omega - 2L')/\alpha_3 - \cos(\Omega + \omega - 2L')/\alpha_4 \right] - 0.''176 \left[\cos(\Omega - \omega - 2L'')/\alpha_5 - \cos(\Omega + \omega - 2L'')/\alpha_6 \right] \right\} \quad (2.165)$$

$$\eta_l^{(2)}(t) = \left(\frac{1}{2 \sin i}\right) \left(\frac{10^{-3}}{\Omega_1}\right) \left\{ 0.''512 \left[\sin(\Omega - \omega)/\alpha_1 + \sin(\Omega + \omega)/\alpha_2 \right] - 0.''404 \left[\sin(\Omega - \omega - 2L')/\alpha_3 + \sin(\Omega + \omega - 2L')/\alpha_4 \right] - 0.''176 \left[\sin(\Omega - \omega - 2L'')/\alpha_5 + \sin(\Omega + \omega - 2L'')/\alpha_6 \right] \right\} \quad (2.166)$$

其中

$$n_1 = 1 - \frac{2n'}{\Omega_1} \quad n_2 = 1 - \frac{2n''}{\Omega_1} \quad (2.167)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 - \omega_1/\Omega_1 & \alpha_2 = 1 + \omega_1/\Omega_1 \\ \alpha_3 = 1 - (\omega_1 + 2n')/\Omega_1 & \alpha_4 = 1 + (\omega_1 - 2n')/\Omega_1 \\ \alpha_5 = 1 - (\omega_1 + 2n'')/\Omega_1 & \alpha_6 = 1 + (\omega_1 - 2n'')/\Omega_1 \end{cases} \quad (2.168)$$

当 $i \rightarrow 90^\circ (|i - 90^\circ| < 0^\circ.5)$ 时, $\Delta i_l^{(2)}(t)$, $\Delta \Omega_l^{(2)}(t_0)$ 和 $\Delta \lambda_l^{(2)}(t)$ 改为 $\sigma_3(t - t_0)$, 相应的 σ_3 如下:

$$\begin{cases} i_3 = 10^{-3} \left[-0.''512 \sin \Omega + 0.''404 \sin(\Omega - 2L') + 0.''176 \sin(\Omega - 2L'') \right] \\ \Omega_3 = 10^{-3} \cot i \left[-0.''512 \cos \Omega + 0.''404 \cos(\Omega - 2L') + 0.''176 \cos(\Omega - 2L'') \right] \\ \lambda_3 = (-\sec i) \Omega_3 \end{cases} \quad (2.169)$$

$i_l^{(2)}(t), \Omega_l^{(2)}(t), \xi_l^{(2)}(t)$ 和 $\eta_l^{(2)}(t)$ 各式右端的 $\frac{1}{\Omega_1 n_1}, \frac{1}{\Omega_1 n_2}, \frac{1}{\Omega_1 \alpha_1}, \frac{1}{\Omega_1 \alpha_2}, \dots, \frac{1}{\Omega_1 \alpha_6}$ 改为直接计算如下相应各项:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\Omega_1 n_1} = \frac{1}{\Omega_1 - 2n'} & \frac{1}{\Omega_1 n_2} = \frac{1}{\Omega_1 - 2n''} \\ \frac{1}{\Omega_1 \alpha_1} = \frac{1}{\Omega_1 - \omega_1} & \frac{1}{\Omega_1 \alpha_2} = \frac{1}{\Omega_1 + \omega_1} \\ \frac{1}{\Omega_1 \alpha_3} = \frac{1}{\Omega_1 - (\omega_1 + 2n')} & \frac{1}{\Omega_1 \alpha_4} = \frac{1}{\Omega_1 + (\omega_1 - n')} \\ \frac{1}{\Omega_1 \alpha_5} = \frac{1}{\Omega_1 - (\omega_1 + 2n'')} & \frac{1}{\Omega_1 \alpha_6} = \frac{1}{\Omega_1 + (\omega_1 - 2n'')} \end{array} \right. \quad (2.170)$$

上述各式中出现的根数皆为 t_0 时的拟平均根数 $\bar{\sigma}_0$, L' 和 L'' 分别对应月球和太阳的平黄经, n' 和 n'' 则分别为月球和太阳的平运动角速度, 这些量的计算见 (2.123) 和 (2.124) 式。

第十一章 非引力摄动的分析解

§11.1 太阳光压摄动部分

对于低轨卫星而言，绕地球运行中每一圈都有进出地影的过程，故按有地影情况来处理光压摄动，即将所有摄动项处理成长周期变化，且有下列形式：

$$\Delta\sigma_l^{(1)}(t) = [\Delta\sigma_l^{(1)}(t)]_l + [\Delta\sigma_l^{(1)}(t)]_s \quad (2.171)$$

$$[\Delta\sigma_l^{(1)}(t)]_l = (1 - \frac{\Delta\tilde{u}}{2\pi})[\sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0)] \quad (2.172)$$

$$[\Delta\sigma_l^{(1)}(t)]_s = \frac{1}{2\pi}[\sigma_s^{(2)}(\tilde{u}_1) - \sigma_s^{(2)}(\tilde{u}_0)]n(t - t_0) \quad (2.173)$$

其中第二项是由于地影存在，短周期项转化为长周期项。这种处理即使对于高轨卫星无地影的情形，也不影响外推计算，只是该项作为短周期项“消失”。 $\sigma_l^{(1)}(t), \sigma_s^{(2)}(t)$ 的计算公式如下：

1. $\sigma_l^{(1)}(t)$

$$a_l^{(1)}(t) = 0 \quad (2.174)$$

$$i_l^{(1)}(t) = (\frac{3}{8}k_0)\frac{a^2}{\sqrt{1-e^2}}n\left[\sin i(eG_1) - \sin i(eG_2) + 2\cos i(eG_3)\right] \quad (2.175)$$

$$\Omega_l^{(1)}(t) = (\frac{3}{8}k_0)\frac{a^2}{\sqrt{1-e^2}\sin i}n\left[\sin i(eG_4) - \sin i(eG_5) + 2\cos i(eG_6)\right] \quad (2.176)$$

$$\begin{aligned} \xi_l^{(1)}(t) = & -(\frac{3}{4}k_0)\frac{a^2}{\sqrt{1-e^2}}n\left\{-\frac{2}{\sin i}\left[(1-e^2) - (1-\frac{e^2}{2})\cos^2 i\right]\sin\varepsilon\cos u'/n' \right. \\ & + \cos i(1-\frac{e^2}{2})\left[(1+\cos\varepsilon)\cos(\Omega-u')/(\Omega_1-n') + (1-\cos\varepsilon)\cos(\Omega+u')/(\Omega_1+n')\right]\Big\} \\ & -(\frac{3}{16}k_0)\frac{a^2}{\sqrt{1-e^2}}n\cos i \\ & \times\left\{(1+\cos\varepsilon)\left[(\xi^2-\eta^2)\cos(\Omega-u')(\frac{1}{n_7}-\frac{1}{n_9}) + 2\xi\eta\sin(\Omega-u')(\frac{1}{n_7}+\frac{1}{n_9})\right] \right. \\ & + (1-\cos\varepsilon)\left[(\xi^2-\eta^2)\cos(\Omega+u')(\frac{1}{n_8}-\frac{1}{n_{10}}) + 2\xi\eta\sin(\Omega+u')(\frac{1}{n_8}+\frac{1}{n_{10}})\right] \\ & \left. + 2\frac{\cos i}{\sin i}\sin\varepsilon\left[(\xi^2-\eta^2)\cos u'(\frac{1}{n_{11}}-\frac{1}{n_{12}}) + 2\xi\eta\sin u'(\frac{1}{n_{11}}+\frac{1}{n_{12}})\right]\right\} \end{aligned} \quad (2.177)$$

$$\begin{aligned} \eta_l^{(1)}(t) = & (\frac{3}{4}k_0)a^2\sqrt{1-e^2}n \\ & \times\left\{(1+e\cos\varepsilon)\sin(\Omega-u')/(\Omega_1-n') + (1-\cos\varepsilon)\sin(\Omega+u')/(\Omega_1+n')\right\} \\ & -(\frac{3}{16}k_0)\frac{a^2}{\sqrt{1-e^2}}n\cos i \\ & \times\left\{(1+\cos\varepsilon)\left[2\xi\eta\cos(\Omega-u')(\frac{1}{n_7}-\frac{1}{n_9}) - (\xi^2-\eta^2)\sin(\Omega-u')(\frac{1}{n_7}+\frac{1}{n_9})\right] \right. \\ & + (1-\cos\varepsilon)\left[2\xi\eta\cos(\Omega+u')(\frac{1}{n_8}-\frac{1}{n_{10}}) - (\xi^2-\eta^2)\sin(\Omega+u')(\frac{1}{n_8}+\frac{1}{n_{10}})\right] \\ & \left. + 2\frac{\cos i}{\sin i}\sin\varepsilon\left[2\xi\eta\cos u'(\frac{1}{n_{11}}-\frac{1}{n_{12}}) - (\xi^2-\eta^2)\sin u'(\frac{1}{n_{11}}+\frac{1}{n_{12}})\right]\right\} \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$\begin{aligned} \lambda_l^{(1)}(t) = & -\cos i\Omega_l^{(1)}(t) \\ & -(\frac{3}{8}k_0)a^2(1+\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}})n\left\{(1-\cos i)(eG_4) + (1+\cos i)(eG_5) + 2\sin i(eG_6)\right\} \end{aligned} \quad (2.179)$$

其中

$$\begin{cases} eG_1 = (1 + \cos \varepsilon)[\xi \cos(\Omega - u') + \eta \sin(\Omega - u')]/n_1 + (1 - \cos \varepsilon)[\xi \cos(\Omega + u') + \eta \sin(\Omega + u')]/n_2 \\ eG_2 = (1 + \cos \varepsilon)[\xi \cos(\Omega - u') - \eta \sin(\Omega - u')]/n_3 + (1 - \cos \varepsilon)[\xi \cos(\Omega + u') - \eta \sin(\Omega + u')]/n_4 \\ eG_3 = \sin \varepsilon[(\xi \cos u' + \eta \sin u')/n_5 - (\xi \cos u' - \eta \sin u')/n_6] \\ eG_4 = (1 + \cos \varepsilon)[\eta \cos(\Omega - u') - \xi \sin(\Omega - u')]/n_1 + (1 - \cos \varepsilon)[\eta \cos(\Omega + u') - \xi \sin(\Omega + u')]/n_2 \\ eG_5 = (1 + \cos \varepsilon)[\eta \cos(\Omega - u') + \xi \sin(\Omega - u')]/n_3 + (1 - \cos \varepsilon)[\eta \cos(\Omega + u') + \xi \sin(\Omega + u')]/n_4 \\ eG_6 = \sin \varepsilon[(\eta \cos u' - \xi \sin u')/n_5 - (\eta \cos u' + \xi \sin u')/n_6] \end{cases} \quad (2.180)$$

$$\begin{cases} n_1 = \omega_1 - \Omega_1 + n' & n_2 = \omega_1 - \Omega_1 - n' \\ n_3 = \omega_1 + \Omega_1 - n' & n_4 = \omega_1 + \Omega_1 + n' \\ n_5 = \omega_1 - n' & n_6 = \omega_1 + n' \\ n_7 = 2\omega_1 - \Omega_1 + n' & n_8 = 2\omega_1 - \Omega_1 - n' \\ n_9 = 2\omega_1 + \Omega_1 - n' & n_{10} = 2\omega_1 + \Omega_1 + n' \\ n_{11} = 2\omega_1 - n' & n_{12} = 2\omega_1 + n' \end{cases} \quad (2.181)$$

上述各式右端出现的根数 σ 皆为拟平均根数 $\bar{\sigma}(t)$ 。 Ω_1, ω_1 以及与太阳有关量 u' , n' , ε 的含义与第三体（日、月）引力摄动计算中的处理相同，下面不再说明。

2. $\sigma_s^{(2)}(t)$ 和 $[\Delta\lambda_l^{(1)}(t)]_s$

$$\begin{aligned} a_s^{(2)}(t) &= -\frac{1}{2}k_0a^3 \left\{ \left[(1 - \cos i)G_{11} + (1 + \cos i)G_{12} + 2 \sin iG_{13} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\xi G_{01} - \eta(\cos iG_{02} - 2 \sin iG_{03}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.182)$$

$$\begin{aligned} i_s^{(2)}(t) &= -\left(\frac{k_0}{4}\right)a^2 \left\{ \left[\sin iG_{11} - \sin iG_{12} + 2 \cos iG_{13} \right] + \eta \left[\sin iG_{02} + 2 \cos iG_{03} \right] \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[\xi(\sin iG_{21} - \sin iG_{22} + 2 \cos iG_{23}) + \eta(\sin iG_{24} - \sin iG_{25} + 2 \cos iG_{26}) \right] \\ &\quad \left. - \frac{3}{16} \left[\eta(\sin iG_{24} - \sin iG_{25} + 2 \cos iG_{26}) - \xi(\sin iG_{21} - \sin iG_{22} + 2 \cos iG_{23}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.183)$$

$$\begin{aligned} \Omega_s^{(2)}(t) &= -\left(\frac{k_0}{4}\right)\frac{a^2}{\sin i} \left\{ \left[\sin iG_{14} - \sin iG_{15} + 2 \cos iG_{16} \right] - \xi \left[\sin iG_{02} + 2 \cos iG_{03} \right] \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[-\eta(\sin iG_{21} - \sin iG_{22} + 2 \cos iG_{23}) + \xi(\sin iG_{24} - \sin iG_{25} + 2 \cos iG_{26}) \right] \\ &\quad \left. - \frac{3}{16} \left[\eta(\sin iG_{21} - \sin iG_{22} + 2 \cos iG_{23}) + \xi(\sin iG_{24} - \sin iG_{25} + 2 \cos iG_{26}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.184)$$

$$\begin{aligned} \xi_s^{(2)}(t) &= \eta \cos i \Omega_s^{(2)}(t) - \frac{1}{8}k_0a^2 \left\{ \left[\xi(\cos iG_{11} - \cos iG_{12} - 2 \sin iG_{13}) + \eta(G_{14} + G_{15}) \right] \right. \\ &\quad + \eta \left[(1 - \cos i)G_{14} + (1 + \cos i)G_{15} + 2 \sin iG_{16} \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[(1 - \cos i)G_{21} + (1 + \cos i)G_{22} + 2 \sin iG_{23} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.185)$$

$$\begin{aligned} \eta_s^{(2)}(t) &= -\xi \cos i \Omega_s^{(2)}(t) - \frac{1}{8}k_0a^2 \left\{ \left[-\xi(\cos iG_{14} - \cos iG_{15} - 2 \sin iG_{16}) + \eta(G_{11} + G_{12}) \right] \right. \\ &\quad + \xi \left[(1 - \cos i)G_{14} + (1 + \cos i)G_{15} + 2 \sin iG_{16} \right] \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[(1 - \cos i)G_{24} + (1 + \cos i)G_{25} + 2 \sin iG_{26} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.186)$$

$$[\Delta\lambda_l^{(1)}(t)]_s = \frac{1}{2\pi} [\lambda_s^{(2)}(\tilde{u}_1) - \lambda_s^{(2)}(\tilde{u}_0)] n(t - t_0) + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2a}\right) [\Delta a_l^{(1)}(t)]_s n(t - t_0) \quad (2.187)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_s^{(2)}(t) = & -\cos i \Omega_s^{(2)}(t) - \left(\frac{k_0}{4}\right) a^2 \left\{ -2 \left[(1 - \cos i) G_{14} + (1 + \cos i) G_{15} + 2 \sin i G_{16} \right] \right. \\
& -2 \left[\eta G_{01} + \xi (\cos i G_{02} - 2 \sin i G_{03}) \right] + \frac{5}{8} \left[\xi ((1 - \cos i) G_{24} + (1 + \cos i) G_{25} + 2 \sin i G_{26}) \right. \\
& \left. \left. - \eta ((1 - \cos i) G_{21} + (1 + \cos i) G_{22} + 2 \sin i G_{23}) \right] \right. \\
& + \frac{15}{32} \left[-\xi (G_{24} + G_{25} + \cos i G_{24} - \cos i G_{25} - 2 \sin i G_{26}) \right. \\
& \left. \left. - \eta (G_{21} + G_{22} + \cos i G_{21} - \cos i G_{22} - 2 \sin i G_{23}) \right] \right\} \quad (2.188)
\end{aligned}$$

上述各式右端的根数 σ 皆为拟平均根数 $\bar{\sigma}$, G_{01}, G_{02}, \dots 等量的表达式如下:

$$\begin{cases} G_{01} = (1 + \cos \varepsilon) \cos(\Omega - u') + (1 - \cos \varepsilon) \cos(\Omega + u') \\ G_{02} = (1 + \cos \varepsilon) \sin(\Omega - u') + (1 - \cos \varepsilon) \sin(\Omega + u') \\ G_{03} = \sin \varepsilon \sin u' \end{cases} \quad (2.189)$$

$$\begin{cases} G_{11} = (1 + \cos \varepsilon) \cos(\tilde{u} - \Omega + u') + (1 - \cos \varepsilon) \cos(\tilde{u} - \Omega - u') \\ G_{12} = (1 + \cos \varepsilon) \cos(\tilde{u} + \Omega - u') + (1 - \cos \varepsilon) \cos(\tilde{u} + \Omega + u') \\ G_{13} = \sin \varepsilon [\cos(\tilde{u} - u') - \cos(\tilde{u} + u')] \end{cases} \quad (2.190)$$

$$\begin{cases} G_{14} = (1 + \cos \varepsilon) \sin(\tilde{u} - \Omega + u') + (1 - \cos \varepsilon) \sin(\tilde{u} - \Omega - u') \\ G_{15} = (1 + \cos \varepsilon) \sin(\tilde{u} + \Omega - u') + (1 - \cos \varepsilon) \sin(\tilde{u} + \Omega + u') \\ G_{16} = \sin \varepsilon [\sin(\tilde{u} - u') - \sin(\tilde{u} + u')] \end{cases} \quad (2.191)$$

$$\begin{cases} G_{21} = (1 + \cos \varepsilon) \cos(2\tilde{u} - \Omega + u') + (1 - \cos \varepsilon) \cos(2\tilde{u} - \Omega - u') \\ G_{22} = (1 + \cos \varepsilon) \cos(2\tilde{u} + \Omega - u') + (1 - \cos \varepsilon) \cos(2\tilde{u} + \Omega + u') \\ G_{23} = \sin \varepsilon [\cos(2\tilde{u} - u') - \cos(2\tilde{u} + u')] \end{cases} \quad (2.192)$$

$$\begin{cases} G_{24} = (1 + \cos \varepsilon) \sin(2\tilde{u} - \Omega + u') + (1 - \cos \varepsilon) \sin(2\tilde{u} - \Omega - u') \\ G_{25} = (1 + \cos \varepsilon) \sin(2\tilde{u} + \Omega - u') + (1 - \cos \varepsilon) \sin(2\tilde{u} + \Omega + u') \\ G_{26} = \sin \varepsilon [\sin(2\tilde{u} - u') - \sin(2\tilde{u} + u')] \end{cases} \quad (2.193)$$

上述各式中出现的 $\tilde{u} = E + \omega$ 代替 Kepler 根数摄动解中的快变量 E (偏近点角), 是无奇点根数中快变量 $\lambda = M + \omega$ 的另一种表示。由 λ, ξ, η 计算 \tilde{u} 的公式已在前面出现过, 见第 (2.39) 式。

关于短周期项中出现的 G_{01}, G_{02} 和 G_{03} , 表面上与快变量 \tilde{u} 无关, 这是保证上述 $\sigma_s^{(2)}(t)$ 的平均值 $\overline{\sigma_s^{(2)}(t)} = 0$ 。

3. 地影方程的解

计算 $\sigma_s^{(2)}(t)$ 时, t 对应的是出、进地影的 \tilde{u}_0 和 \tilde{u}_1 , 这需要解地影方程。关于地影, 可采用圆柱形地影模型。首先求解 $u = f + \omega$ 所满足的地影方程:

$$\sin(\theta + u) = -\frac{1}{K} \left[1 - \frac{R^2}{p^2} (1 + \xi \cos u + \eta \sin u)^2 \right]^{1/2} \quad (2.194)$$

其中

$$\begin{cases} K^2 = A_0^2 + B_0^2 \quad (K > 0) \\ \theta = \tan^{-1}(A_0/B_0) \end{cases} \quad (2.195)$$

$$\begin{cases} A_0 = \cos \Omega \cos u' + \sin \Omega \sin u' \cos \varepsilon \\ B_0 = -\cos i (\sin \Omega \cos u' - \cos \Omega \sin u' \cos \varepsilon) \\ \quad + \sin i (\sin \varepsilon \sin u') \end{cases} \quad (2.196)$$

方程 (2.194) 中的圆柱半径 R 可取为 a_e ，在标准计算单位中 $R = 1$ 。(2.196) 式中的 ε 和 u' 是太阳的有关量，同第三体（日、月）引力摄动中出现的 ε 和 u' ，见 (2.125) 式。

解地影方程 (2.194) 实为一迭代过程：

(1) 首先令 $\xi = \eta = 0$ （相当于 $e = 0$ ），由

$$\sin(\theta + u)^{(0)} = -\frac{1}{K} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{1/2} \quad (2.197)$$

给出 u_0 和 u_1 的迭代初值 $u_0^{(0)}$ 和 $u_1^{(0)}$ 。该式两个解分别在第三和第四象限，而根据地影的特点要求弧 $\widehat{u_0 u_1} > 180^\circ$ ，因此 $(\theta + u)^{(0)}$ 在第四象限的一个解给出的是 $u_0^{(0)}$ ，另一个是 $u_1^{(0)}$ 。如果无解，即 $|\sin(\theta + u)^{(0)}| > 1$ ，则取 $\sin(\theta + u)^{(0)} = -1$ ， $(\theta + u)^{(0)} = 270^\circ$ ， $u_0^{(0)} = u_1^{(0)} = 270^\circ - \theta$ 。

(2) 由初值 $u_0^{(0)}$ 和 $u_1^{(0)}$ 分别代入原方程 (2.194) 进行迭代，即

$$\sin(\theta + u)^{(k)} = -\frac{1}{K} \left[1 - \frac{1}{p^2} (1 + \xi \cos u^{(k-1)} + \eta \sin u^{(k-1)})^2\right]^{1/2} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.198)$$

直到 u_0 和 u_1 分别满足精度要求终止，即相邻两次的 u_0 和 u_1 满足下列条件：

$$|u_0^{(k)} - u_0^{(k-1)}| < \varepsilon^* \quad |u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}| < \varepsilon^* \quad (2.199)$$

ε^* 是所给的精度要求，视具体问题而定。若在迭代过程中，只要再有一次 $|\sin(\theta + u)^{(k)}| > 1$ ，就认为无地影，此时可取 $u_0 = 0$ ， $u_1 = 2\pi$ 。

解出 u_0 和 u_1 后，由下式给出最后需要的 \tilde{u}_0 和 \tilde{u}_1 ：

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tan^{-1}(\sin \tilde{u} / \cos \tilde{u}) \\ \sin \tilde{u} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 + (\xi \cos u + \eta \sin u)} \left[\left(1 - \frac{\eta^2}{1 + \sqrt{1-e^2}} \sin u - \frac{\xi \eta}{1 + \sqrt{1-e^2}} \cos u\right) \right] + \eta \\ \cos \tilde{u} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 + (\xi \cos u + \eta \sin u)} \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{1 + \sqrt{1-e^2}} \cos u - \frac{\xi \eta}{1 + \sqrt{1-e^2}} \sin u\right) \right] + \xi \end{cases} \quad (2.200)$$

关于求解地影方程 (2.194) 所涉及的卫星和太阳的轨道根数 σ 和 σ' ，可采用摄动外推弧段中间时刻 $t_0 + (t - t_0)/2$ 的平均根数。

§11.2 大气阻力摄动部分

1. 大气阻力摄动解

对于低轨卫星，这种耗散因素的摄动影响，主要表现为长期累积效应。在高度低于 800 公里的范围，其摄动量级一般不超过二阶小量，处理成二阶长期项 $\sigma_2(t - t_0)$ 显然是合理的，短周期项不必考虑。 σ_2 的表达式如下：

$$\begin{aligned} a_2 = & -B_1 a^2 n \left\{ \left[1 + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) C_r\right] I_0 + \left(\frac{a}{H}\right) e^2 (I_0 - I_2) + \mu z_0^2 \left(\frac{3}{4} I_0 - I_1 + \frac{1}{4} I_2\right) \right. \\ & + \frac{1}{8} \left(C - \frac{C_r}{6} \sin^2 i\right) \left(\frac{a}{H}\right)^2 (\xi^2 - \eta^2) (I_0 - \frac{4}{3} I_1 + \frac{1}{3} I_4) \\ & + \frac{\xi}{4} F^* A_0^* \left[2 \left(1 + \frac{a}{H}\right) I_0 + 2 \left(3 - \frac{a}{H}\right) I_2\right] \\ & \left. - \frac{\eta}{4} F^* B_0^* \left[-2 \left(1 + \frac{a}{H}\right) I_0 - 2 \left(3 - \frac{a}{H}\right) I_2\right] \right\} \end{aligned} \quad (2.201)$$

$$i_2 = -\frac{1}{4} B_2 a \sin i \left\{ I_0 + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{H}\right)^2 (\xi^2 - \eta^2) (I_0 - \frac{4}{3} I_2 + \frac{1}{3} I_4) \right\} \quad (2.202)$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{4} B_2 a \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{a}{H}\right)^2 \xi \eta (I_0 - \frac{4}{3} I_2 + \frac{1}{3} I_4) \right\} \quad (2.203)$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \eta \cos i \Omega_2 \\
&- B_1 a n \left\{ \frac{\xi}{4} \left[2(I_0 + I_2) + (2 + C + (2 - \frac{19}{6} \sin^2 i) C_r) (\frac{a}{H})(I_0 - I_2) \right. \right. \\
&+ \frac{1}{24} (C - \frac{C_r}{6} \sin^2 i) (\frac{a}{H})^3 (\xi^2 - 3\eta^2) (I_0 - \frac{3}{2} I_2 + \frac{3}{5} I_4 - \frac{1}{10} I_6) \\
&+ \mu z_0 (\frac{a}{H}) (-2I_0 + \frac{7}{2} I_1 - 2I_2 + \frac{1}{2} I_3) \left. \right] \\
&+ \frac{1}{4} F^* A_0^* \left[2I_0 + (\frac{a}{H}) e^2 (I_0 - I_2) + \frac{1}{3} (\frac{a}{H}) (\xi^2 - \eta^2) (I_2 - I_4) \right. \\
&+ \frac{1}{4} (\frac{a}{H})^2 (\xi^2 - \eta^2) (I_0 - \frac{4}{3} I_2 + \frac{1}{3} I_4) \left. \right] \\
&+ \frac{1}{4} \xi \eta F^* B_0^* \left[\frac{1}{2} (\frac{a}{H})^2 (I_0 - \frac{4}{3} I_2 + \frac{1}{3} I_4) + \frac{2}{3} (\frac{a}{H}) (I_2 - I_4) \right] \left. \right\} \quad (2.204)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= -\xi \cos i \Omega_2 \\
&- B_1 a n \left\{ \frac{\eta}{4} \left[2(I_0 + I_2) + (2 - C + (2 - \frac{17}{6} \sin^2 i) C_r) (\frac{a}{H})(I_0 - I_2) \right. \right. \\
&- \frac{1}{24} (C - \frac{C_r}{6} \sin^2 i) (\frac{a}{H})^3 (\eta^2 - 3\xi^2) (I_0 - \frac{3}{2} I_2 + \frac{3}{5} I_4 - \frac{1}{10} I_6) \\
&+ \mu z_0 (\frac{a}{H}) (-2I_0 + \frac{7}{2} I_1 - 2I_2 + \frac{1}{2} I_3) \left. \right] \\
&+ \frac{1}{4} \xi \eta F^* A_0^* \left[\frac{1}{2} (\frac{a}{H})^2 (I_0 - \frac{4}{3} I_2 + \frac{1}{3} I_4) + \frac{2}{3} (\frac{a}{H}) (I_2 - I_4) \right] \\
&+ \frac{1}{4} F^* B_0^* \left[2I_0 + (\frac{a}{H}) e^2 (I_0 - I_2) - \frac{1}{3} (\frac{a}{H}) (\xi^2 - \eta^2) (I_2 - I_4) \right. \\
&- \frac{1}{4} (\frac{a}{H})^2 (\xi^2 - \eta^2) (I_0 - \frac{4}{3} I_2 + \frac{1}{3} I_4) \left. \right] \left. \right\} \quad (2.205)
\end{aligned}$$

$$\lambda_2 = -\cos i \Omega_2 + B_1 a n \left\{ \left(-\frac{\eta}{4} F^* A_0^* + \frac{\xi}{4} F^* B_0^* \right) (I_0 - I_2) \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{3n}{2a} \right) a_2 (t - t_0) \quad (2.206)$$

上述各式中的有关量 B_1, B_2 等, 对应第一章中所采用的大气密度模型, 已出现过的量不再说明, 详见 (1.220) - (1.225) 式。另有一些量的定义如下:

$$\begin{cases} B_1 = (\frac{C_D S}{m}) \bar{\rho}_{p_0} F^2 \exp \left(-\frac{1}{H_{p_0}} (a - a_0 + a_0 e_0) - C \cos 2\omega_0 \right) \\ B_2 = (\frac{C_D S}{m}) \bar{\rho}_{p_0} F n_e \exp \left(-\frac{1}{H_{p_0}} (a - a_0 + a_0 e_0) - C \cos 2\omega_0 \right) \\ F = 1 - \frac{r_{p_0} n_e}{v_{p_0}} \cos i_0 \\ C = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{H_{p_0}} r_{p_0} \right) \sin^2 i_0 \end{cases} \quad (2.207)$$

这里的 $\epsilon = 1/298.257$ 是地球扁率, H_{p_0} 是初始近地点 $r_{p_0} = a_0(1 - e_0)$ 处的大气密度标高, 上述各式中出现的 H 即 H_{p_0} 。

$$\begin{cases} C_r = \frac{3J_2}{2aH_{p_0}} \\ z_0 = \frac{a_0 e_0}{H_{p_0}} \end{cases} \quad (2.208)$$

$$\begin{cases} A_0^* = \cos(\Omega - \lambda_m) \cos u' + \sin(\Omega - \lambda_m) \sin u' \cos \varepsilon \\ B_0^* = -\cos i [\sin(\Omega - \lambda_m) \cos u' - \cos(\Omega - \lambda_m) \sin u' \cos \varepsilon] \\ \quad + \sin i [\sin \varepsilon \sin u'] \end{cases} \quad (2.209)$$

其中 ε 和 u' 与第三体 (日、月) 引力摄动计算公式中出现的 ε 和 u' 相同, 见 (2.125) 式。

2. Bessel 函数 $I_n(z)$ 的计算

$I_n(z)$ 的级数定义如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \\ z = \frac{ae}{H_{p_0}} = \frac{\bar{a}\bar{e}}{H_{p_0}} \end{array} \right. \quad (2.210)$$

其中 $\bar{e} = (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)^{1/2}$ 。计算时求和中 k 的取值根据 $I_n(z)$ 的相对精度而定, 即要求精度满足下列条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{[I_n(z)]_{k=N+1}}{[I_n(z)]_{k=[0,N]}} < \varepsilon^* \\ [I_n(z)]_{k=[0,N]} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(n+k)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \\ [I_n(z)]_{k=N+1} = \frac{1}{(n+N+1)!(N+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2N+2} \end{array} \right. \quad (2.211)$$

这里 ε^* 是精度控制值, 根据具体要求取值。

第三部分 精密定轨计算

在绪论中已阐明精密定轨的基本方程（即条件方程）是测量方程线性化的结果：

$$y = \tilde{B}x_0 + V \quad (3.1)$$

其中 V 是测量随机差， y 是残差，即

$$y = Y - H(X^*, t) \quad (3.2)$$

Y 和 $H(X^*, t)$ 各为观测量的测量值和按状态量 X 的参考值 X^* 给出的理论计算值，状态量的参考值应由状态方程给出。

状态方程即状态微分方程的解，引用前面三部分提供的全套计算公式即可获得。由分析方法给出的是函数表达式：

$$X(t) = X(t_0, X_0; t) \quad (3.3)$$

其中轨道量 σ 包含了长期变化、长周期变化和短周期变化等，而待估参数 β 往往对应

$$\dot{\beta} = 0 \quad \beta = \beta_0 \quad (3.4)$$

由数值方法给出的解是离散形式，即

$$X_{n+1} = X(t_n, X_n; t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

无论是分析解还是数值解，其本身的计算精度均要与观测量的测量精度“一致”，而它们的差别应归结为待估状态量 X_0 的参考值 X_0^* 不准所引起，即基本方程 (3.1) 中的 x_0 ：

$$x_0 = X_0 - X_0^* \quad (3.6)$$

x_0 到 y 的传播规律即由基本方程中的 \tilde{B} 矩阵来体现。

\tilde{B} 矩阵由下列两个矩阵所组成：

$$\tilde{B} = \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right) \quad (3.7)$$

其中 $\left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)$ 是测量矩阵，如果定轨中的轨道量采用 \vec{r} 和 $\dot{\vec{r}}$ ，则有

$$\left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)} \right) \quad (3.8)$$

如果轨道量采用轨道根数 σ ，则该矩阵将分为两部分，即

$$\left(\frac{\partial H}{\partial X} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)} \right) \left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)}{\partial(\sigma, \beta)} \right) \quad (3.9)$$

\tilde{B} 矩阵的第二部分 $\left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right)$ 即称为状态转移矩阵，记作 Φ ：

$$\Phi = \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right) \quad (3.10)$$

精密定轨中，由前两部分用两种方法分别给出状态量的参考值 X^* 后接着就要解决绪论中所说的另三个部分的计算：观测量的理论计算， \tilde{B} 矩阵的计算和基本方程的求解（估值理论中的批处理方法）。下面按此内容分三章逐一阐述，并给出相应的计算公式。

第十二章 观测量的理论计算

根据我国航天测控系统状况, 这里给出 $(\alpha, \delta), (A, h)$, ρ 和 $\dot{\rho}$ 型观测量的理论值在历元地心天球坐标系和轨道坐标系中的计算公式。

观测矢量 $\vec{\rho}$, 测站坐标矢量 \vec{r}_e 和卫星坐标矢量 \vec{r} 在同一地心坐标系中满足如下几何关系:

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_e \quad (3.11)$$

关于测站坐标矢量 \vec{r}_e , 通常是在地固坐标系中给出的 (应与引用的参考椭球体有关), 记作 \vec{R}_e , 它与 \vec{r}_e 的关系如下:

$$\vec{r}_e = \begin{cases} (HG)^T \vec{R}_e & \text{历元地心天球坐标系} \\ (EG)^T \vec{R}_e & \text{轨道坐标系} \end{cases} \quad (3.12)$$

其中转换矩阵 (HG) 和 (EG) 见第一部分中的 (1.148) 和 (1.149) 式及它们的具体计算公式 (1.160)-(1.174)。

若记

$$\vec{\rho} = \rho \hat{\rho} \quad \rho = |\vec{r} - \vec{r}_e| \quad (3.13)$$

即 ρ 和 $\hat{\rho}$ 各表示测站到卫星的距离和观测矢量方向的单位矢量, 则有

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (\vec{r} - \vec{r}_e) \cdot (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_e) \quad (3.14)$$

其中

$$\dot{\vec{r}}_e = \begin{cases} \frac{d}{dt}(HG)^T \vec{R}_e & \text{历元地心天球坐标系} \\ \frac{d}{dt}(EG)^T \vec{R}_e & \text{轨道坐标系} \end{cases} \quad (3.15)$$

由于岁差和章动、极移的变化率很小, 它们分别为 3×10^{-9} 和 10^{-10} , 可略去这些变化。故根据旋转矩阵 (HG) 和 (EG) 的定义及相应的计算公式 (1.161), (1.164)-(1.167) 可知, 只要考虑地球自转的变化率即可。记

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(HG)^T = (HG)_s^T \dot{\hat{S}}_G \\ \frac{d}{dt}(EG)^T = (EG)_s^T \dot{\hat{S}}_G \end{cases} \quad (3.16)$$

矩阵 $(HG)_s$, $(EG)_s$ 与矩阵 (HG) , (EG) 的差别, 仅仅是后者分别包含的 $R_z(S_G)$ 和 $R_z(\theta_G)$ 两个矩阵相应地变为对恒星时 S 的导数:

$$\frac{d}{dS} R_z(S_G) = \begin{pmatrix} -\sin S_G & \cos S_G & 0 \\ -\cos S_G & -\sin S_G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{dS} R_z(\theta_G) = \begin{pmatrix} -\sin \theta_G & \cos \theta_G & 0 \\ -\cos \theta_G & -\sin \theta_G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$\dot{\hat{S}}_G$ 的值由 (1.167) 式给出, 即

$$\dot{\hat{S}}_G = 360^\circ.985647365/day \quad (3.19)$$

根据上述对测站坐标矢量 \vec{r}_e 及其变化率 $\dot{\vec{r}}_e$ 的阐明可知, 四种类型观测量的理论值计算还涉及到 \vec{r} , $\dot{\vec{r}}$ 和单位矢量 $\hat{\rho}(\alpha, \delta)$ 或 $\hat{\rho}(A, h)$ 的计算。

§12.1 测距型资料 ρ

$$\rho = |\vec{r} - \vec{r}_e| \quad (3.20)$$

其中 \vec{r} 在历元地心天球坐标系和轨道坐标系中的计算公式相同，有

$$\vec{r} = \vec{r}(\sigma) = r \cos u \hat{P} + r \sin u \hat{Q} \quad (3.21)$$

$$r = |\vec{r}| \quad u = f + \omega \quad (3.22)$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} -\sin \Omega \cos i \\ \cos \Omega \cos i \\ \sin i \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

这里 \vec{r} 的计算公式对 Kepler 根数系统和消除小 e 困难的无奇点根数系统均适用， u 的计算则分别采用公式 (1.15)-(1.17) 和 (1.18)-(1.20)。而对同时消除小 e 和小 i 困难的无奇点根数系统，见公式 (1.45),(1.41)-(1.43) 及 (1.38) - (1.40)。

§12.2 测速型资料 $\dot{\rho}$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (\vec{r} - \vec{r}_e) \cdot (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_e) \quad (3.24)$$

其中 ρ 和 \vec{r} 的计算公式上面已表达。 $\dot{\vec{r}}$ 与 \vec{r} 的计算类似，在两种坐标系中亦相同，有

$$\dot{\vec{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[(-\sin u - e \sin \omega) \hat{P} + (\cos u + e \cos \omega) \hat{Q} \right] \quad (3.25)$$

同样适用于两类根数系统的计算，而 u 的计算公式与 \vec{r} 的计算过程相同。这里地心引力常数 $\mu = 1$ 。对同时消除小 e 和小 i 困难的无奇点根数系统， $\dot{\vec{r}}$ 的计算见公式 (1.46) 及 (1.41)-(1.44) 和 (1.38)-(1.40)。

§12.3 赤道坐标 (α, δ) 型资料

无论是早期的照相观测还是近年来所采用的 CCD 技术，都是通过背景星定位的，故给出的 (α, δ) 型测角资料，均对应历元地心天球坐标系。

根据测量值的状况，我们分别记历元地心天球坐标系和轨道坐标系中观测量 (α, δ) 的理论计算值为 (α_0, δ_0) 和 (α_t, δ_t) ，则有

$$\hat{\rho}_0 = \begin{pmatrix} \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix} = (\vec{r} - \vec{r}_e) / \rho \quad (3.26)$$

$$\hat{\rho}_t = \begin{pmatrix} \cos \delta_t \cos \alpha_t \\ \cos \delta_t \sin \alpha_t \\ \sin \delta_t \end{pmatrix} = (\vec{r} - \vec{r}_e) / \rho \quad (3.27)$$

其中 $\rho = |\vec{r} - \vec{r}_e|$ ，注意 (3.26) 和 (3.27) 式右端的 \vec{r} 和 \vec{r}_e 各对应上述两种坐标系，由相应的轨道根数和测站坐标矢量计算， \vec{r} 的计算公式见 §12.1 中的阐述。

由 (3.26) 和 (3.27) 式即可计算相应的 (α_0, δ_0) 和 (α_t, δ_t) 。若统一记作

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\vec{r} - \vec{r}_e) \quad (3.28)$$

则 α, δ 的理论值 (α_c, δ_c) 由下式计算:

$$\begin{cases} \alpha_c = \tan^{-1}(y'/x') \\ \delta_c = \sin^{-1}(z'/\rho) \end{cases} \quad (3.29)$$

这里要说明的是, 对于轨道坐标系, 要给出残差 $y = Y - H(X^*, t)$, 需要将历元地心天球坐标系中观测量 Y 的测量值 (α, δ) 转换到轨道坐标系中去, 有

$$(\hat{\rho}_t)_0 = (NP)(GR)\hat{\rho} \quad (3.30)$$

其中

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$(GR) = (NR)(PR)$ 是岁差章动矩阵, 计算公式见第三部分的 (1.162) 和 (1.163) 式, 矩阵 (NP) 的定义如下:

$$(NP) = R_z(\mu + \Delta\mu) \quad (3.32)$$

μ 和 $\Delta\mu$ 即赤经岁差和赤经章动, 计算公式见 (1.169) 和 (1.171) 式。

§12.4 地平坐标 (A, h) 型资料

测角资料 (A, h) 对应的瞬时真地平坐标系, 相应的观测矢量为

$$\begin{cases} \vec{\rho} &= \rho \hat{A}_h \\ \hat{A}_h &= \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ -\cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.33)$$

其中方位角 A (亦称地平经度) 由地平北点沿地平向东计量, 高度角 h 由地平沿地平经圈向天顶方向计量。

对于历元地心天球坐标系, 直接由轨道给出的计算值

$$(\vec{r}(\sigma) - \vec{r}_e)/\rho$$

经坐标转换后才能给出与观测量的测量值 (3.33) 式对应的理论计算值 $(\hat{A}_h)_c$:

$$(\hat{A}_h)_c = \begin{pmatrix} \cos h_c \cos A_c \\ -\cos h_c \sin A_c \\ \sin h_c \end{pmatrix} = (ZR)^T (GR)[(\vec{r} - \vec{r}_e)/\rho] \quad (3.34)$$

其中矩阵 $(GR) = (NR)(PR)$ 前面已出现过, 是岁差、章动矩阵, 而 (ZR) 是瞬时真赤道坐标系与地平坐标系之间的转换矩阵, 有

$$\begin{cases} (ZR) = R_z(\pi - S)R_y(\pi/2 - \varphi) \\ S = S_G + \lambda_G \end{cases} \quad (3.35)$$

这里 S_G 是格林尼治恒星时，其计算公式见 (1.165) 式。 λ_G 和 φ 是测站的经度和纬度（天文纬度）。由 (3.34) 式即可计算相应的 (A_c, h_c) 。若记

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (ZR)^T (GR)(\vec{r} - \vec{r}_e) \quad (3.36)$$

则

$$\begin{cases} A_c = \tan^{-1}(-y'/x') \\ h_c = \sin^{-1}(z'/\rho) \end{cases} \quad (3.37)$$

对于轨道坐标系，相应的 (A_c, h_c) 的计算公式 (3.34) 变为下列形式：

$$(\hat{A}_h)_c = \begin{pmatrix} \cos h_c \cos A_c \\ -\cos h_c \sin A_c \\ \sin h_c \end{pmatrix} = (ZR)^T (NP)^T [(\vec{r} - \vec{r}_e)/\rho] \quad (3.38)$$

其中矩阵 (NP) 表达式是 (3.32) 式。由此可知， (A_c, h_c) 的计算公式类似于 (3.36) 和 (3.37) 式，即

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (ZR)^T (NP)^T (\vec{r} - \vec{r}_e) \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} A_c = \tan^{-1}(-y'/x') \\ h_c = \sin^{-1}(z'/\rho) \end{cases} \quad (3.40)$$

注意，上述各式中的 $(\vec{r} - \vec{r}_e)$ 在历元地心天球坐标系和轨道坐标系中各有不同含义， $\vec{r} = \vec{r}(\sigma)$ 对应两种坐标系中不同的轨道根数， \vec{r}_e 的两种算法即由 (3.12) 式表达。

第十三章 \tilde{B} 矩阵的计算

由 (3.8) 和 (3.9) 式可知, 在轨道量采用坐标、速度 $(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ 和轨道根数 σ 两种选择下, \tilde{B} 矩阵亦有相应的两种形式, 即

$$\tilde{B} = \left(\frac{\partial H}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)} \right) \left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)}{\partial(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \beta_0)} \right) \quad (3.41)$$

和

$$\tilde{B} = \left(\frac{\partial H}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)} \right) \left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)}{\partial(\sigma, \beta)} \right) \left(\frac{\partial(\sigma, \beta)}{\partial(\sigma_0, \beta_0)} \right) \quad (3.42)$$

在分析法定轨中 σ_0 是待估历元 t_0 的平均根数 $\bar{\sigma}_0$, 而在数值法定轨中, σ_0 则是待估历元 t_0 的瞬时根数。总之, \tilde{B} 矩阵将会涉及到三个矩阵的计算, 即测量矩阵

$$\left(\frac{\partial H}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} \right) \quad \left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})}{\partial\sigma} \right)$$

和状态转移矩阵 Φ :

$$\Phi = \begin{cases} \left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)}{\partial(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \beta_0)} \right) & \text{轨道量为}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \\ \left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)}{\partial(\sigma_0, \beta_0)} \right) & \text{轨道量为}\sigma \end{cases} \quad (3.43)$$

在测站坐标确定的情况下, 前面两个矩阵中, 如下的子矩阵: 零矩阵 (0) 和单位阵 (1) 未列入, 即

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial H}{\partial\beta} \right) = (0) & \left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})}{\partial\beta} \right) = (0) \\ \left(\frac{\partial\beta}{\partial\sigma} \right) = (0) & \left(\frac{\partial\beta}{\partial\beta} \right) = (1) = I \end{cases} \quad (3.44)$$

在编制定轨软件时需加入相应的零元素和单位元素。但要注意, 如果待估参数 β 中含测站坐标量, 则 $\left(\frac{\partial H}{\partial\beta} \right)$ 为非零矩阵, 其形式视具体背景而有所不同, 这里不予讨论, 详见参考文献 [3] 第十五章。

§13.1 矩阵 $\left(\frac{\partial H}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} \right)$

1. 测距资料 ρ

$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}} \right) = 0$, 只需给出矩阵 $\left(\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}} \right)$, 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}} \right) &= \frac{1}{\rho}(\vec{r} - \vec{r}_e)^T \\ &= \frac{1}{\rho}((x - x_e), (y - y_e), (z - z_e)) \end{aligned} \quad (3.45)$$

其中

$$\rho = |\vec{r} - \vec{r}_e| \quad (3.46)$$

2. 测速资料 $\dot{\rho}$

$$\left(\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \vec{r}}\right) = \frac{1}{\rho} \left((\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_e) - \frac{\dot{\rho}}{\rho} (\vec{r} - \vec{r}_e) \right)^T \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \vec{r}}\right) = \frac{1}{\rho} (\vec{r} - \vec{r}_e)^T \quad (3.48)$$

其中

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (\vec{r} - \vec{r}_e) \cdot (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_e) \quad (3.49)$$

3. 测角资料 (α, δ) 型

$\left(\frac{\partial(\alpha, \delta)}{\partial \vec{r}}\right) = 0$ ，只需要给出矩阵 $\left(\frac{\partial(\alpha, \delta)}{\partial \vec{r}}\right)$ ，但对测角资料中的 α 和 A 相应的残差 y 是以 $\cos \delta(\alpha - \alpha_c)$ ， $\cos h(A - A_c)$ 表示的，故相应的矩阵 $\left(\frac{\partial(\alpha, \delta)}{\partial \vec{r}}\right)$ 为

$$\left(\begin{array}{c} \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial \vec{r}} \\ \frac{\partial \delta}{\partial \vec{r}} \end{array}\right) = \frac{1}{\rho} \left(\begin{array}{ccc} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \delta \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha & \cos \delta \end{array}\right) \quad (3.50)$$

4. 测角资料 (A, h) 型

在历元地心天球坐标系和轨道坐标系中分别有

$$\left(\begin{array}{c} \cos h \frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \\ \frac{\partial h}{\partial \vec{r}} \end{array}\right) = \frac{1}{\rho} \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_{11} & h_{12} & h_{13} \end{array}\right) (GR) \quad (3.51)$$

和

$$\left(\begin{array}{c} \cos h \frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \\ \frac{\partial h}{\partial \vec{r}} \end{array}\right) = \frac{1}{\rho} \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_{11} & h_{12} & h_{13} \end{array}\right) (NP)^T \quad (3.52)$$

其中矩阵 (GR) 和 (NP) 前面第十一章中已出现过。而元素 a_{ij}, h_{ij} 的表达式如下：

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11} = -\sin S \cos A + \cos S \sin A \sin \varphi \\ a_{12} = \cos S \cos A + \sin S \sin A \sin \varphi \\ a_{13} = -\cos \varphi \sin A \end{array}\right. \quad (3.53)$$

$$\left\{\begin{array}{l} h_{11} = \cos S \cos \varphi \cos h + \sin S \sin h \sin A + \cos S \sin \varphi \sin h \cos A \\ h_{12} = \sin S \cos \varphi \cos h - \cos S \sin h \sin A + \sin S \sin \varphi \sin h \cos A \\ h_{13} = \sin \varphi \cos h - \cos \varphi \sin h \cos A \end{array}\right. \quad (3.54)$$

§13.2 矩阵 $\left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})}{\partial \sigma}\right)$

1. σ 为 Kepler 椭圆根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma}\right) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial a}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial e}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \omega}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial M}\right) \\ \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \sigma}\right) = \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial e}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial i}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \Omega}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \omega}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial M}\right) \end{array}\right. \quad (3.55)$$

12 个元素的表达式如下:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} = \frac{1}{a} \vec{r} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega} = \vec{\Omega} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = H \vec{r} + K \dot{\vec{r}} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{r}} = \vec{\omega} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} = \vec{I} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial M} = \frac{1}{n} \dot{\vec{r}} \end{array} \right. \quad (3.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a} = -\frac{1}{2a} \dot{\vec{r}} & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \Omega} = \vec{\Omega}' \\ \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial r} = H' \vec{r} + K' \dot{\vec{r}} & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{r}} = \vec{\omega}' \\ \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial i} = \vec{I}' & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial M} = -\frac{\mu}{n} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{n} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \end{array} \right. \quad (3.57)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{ll} H = -\frac{a}{p}(\cos E + e) & K = \frac{\sin E}{n} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \\ p = a(1 - e^2) & n = \sqrt{\mu a}^{-3/2} = a^{-3/2} \quad E - e \sin E = M \end{array} \right. \quad (3.58)$$

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} z \sin \Omega \\ -z \cos \Omega \\ -x \sin \Omega + y \cos \Omega \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

$$\vec{\omega} = \hat{R} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} zR_y - yR_z \\ xR_z - zR_x \\ yR_x - xR_y \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H' = \frac{\sqrt{\mu a}}{rp} \sin E \left[1 - \frac{a}{r} \left(1 + \frac{p}{r} \right) \right] \\ K' = \frac{a}{p} \cos E \end{array} \right. \quad \mu = 1 \quad (3.62)$$

$$\vec{I}' = \begin{pmatrix} \dot{z} \sin \Omega \\ -\dot{z} \cos \Omega \\ -\dot{x} \sin \Omega + \dot{y} \cos \Omega \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$\vec{\Omega}' = \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

$$\vec{\omega}' = \hat{R} \times \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{z}R_y - \dot{y}R_z \\ \dot{x}R_z - \dot{z}R_x \\ \dot{y}R_x - \dot{x}R_y \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

(3.61) 和 (3.65) 式中的 \hat{R} 是轨道面法向单位矢量, 有

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

关于 \vec{r} 和 $\dot{\vec{r}}$ 的计算公式在 §11.1 和 §11.2 中已有阐述。

2. σ 为第一类无奇点根数 $a, i, \Omega, \xi = e \cos \omega, \eta = e \sin \omega, \lambda = M + \omega$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial a}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} \right) \\ \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \sigma} \right) = \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial i}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \Omega}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \xi}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \eta}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \lambda} \right) \end{cases} \quad (3.67)$$

12 个元素的表达式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} = \frac{1}{a} \vec{r} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = A \vec{r} + B \dot{\vec{r}} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} = \vec{I} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = C \vec{r} + D \dot{\vec{r}} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega} = \vec{\Omega} & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \lambda} = \frac{1}{n} \dot{\vec{r}} \end{cases} \quad (3.68)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a} = -\frac{1}{2a} \dot{\vec{r}} & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \xi} = A' \vec{r} + B' \dot{\vec{r}} \\ \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial i} = \vec{I}' & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \eta} = C' \vec{r} + D' \dot{\vec{r}} \\ \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \Omega} = \vec{\Omega}' & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \lambda} = -\frac{\mu}{n} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{n} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \end{cases} \quad (3.69)$$

其中 $\vec{I}, \vec{\Omega}$ 和 $\vec{I}', \vec{\Omega}'$ 已在前面出现过, 剩下的 $A, B, \dots, A', B', \dots$ 8 个量由下列各式表达 (表达式中已取地心引力常数 $\mu = 1$):

$$\begin{cases} A = \frac{a}{p} \left[-(\cos u + \xi) - \left(\frac{r}{p} \right) (\sin u + \eta) (\xi \sin u - \eta \cos u) \right] \\ B = \frac{ar}{\sqrt{p}} \left[\sin u + \left(\frac{a}{r} \right) \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \eta + \left(\frac{r}{p} \right) (\sin u + \eta) \right] \\ C = -\frac{a}{p} \left[(\sin u + \eta) - \left(\frac{r}{p} \right) (\cos u + \xi) (\xi \sin u - \eta \cos u) \right] \\ D = -\frac{ar}{\sqrt{p}} \left[\cos u + \left(\frac{a}{r} \right) \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \xi + \left(\frac{r}{p} \right) (\cos u + \xi) \right] \end{cases} \quad (3.70)$$

$$\begin{cases} A' = \sqrt{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{1}{p} (\sin u + \eta) - \frac{1}{r} \left[\left(\frac{a}{p} \right) (\sin u + \eta) + \left(\frac{a}{r} \right) \sin u + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \eta \right] \right\} \\ B' = \left(\frac{r}{p} \right) \cos u + \left(\frac{a}{p} \right) \xi \\ C' = -\sqrt{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{1}{p} (\cos u + \xi) - \frac{1}{r} \left[\left(\frac{a}{p} \right) (\cos u + \xi) + \left(\frac{a}{r} \right) \cos u + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \xi \right] \right\} \\ D' = \left(\frac{r}{p} \right) \sin u + \left(\frac{a}{p} \right) \eta \end{cases} \quad (3.71)$$

这里的 $e^2 = \xi^2 + \eta^2$, 而 $r, \sin u$ 和 $\cos u$ 的计算, 同样见 §11.1 和 §11.2 中的阐述。

3. σ 为第二类无奇点根数 $a, \xi = e \cos \tilde{\omega}, \eta = e \sin \tilde{\omega}, h = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega, k = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega, \lambda = M + \tilde{\omega}$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial a}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial h}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial k}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} \right) \\ \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \sigma} \right) = \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \xi}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \eta}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial h}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial k}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \lambda} \right) \end{cases} \quad (3.72)$$

其中 12 个元素可分为三类, 即

(1) $\frac{\partial \vec{r}}{\partial a}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \lambda}$ 的表达式与第一类无奇点根数中的相应表达式完全相同, 见 (3.68) 和 (3.69) 式。

(2) $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \xi}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \eta}$ 的表达式与第一类无奇点根数中的相应表达式在形式上相同, 见 (3.70) 和 (3.71) 式中 A, B, C, D 和 A', B', C', D' 的表达式, 只是那里的 ξ, η 和 u , 应改为

$$\xi = e \cos \tilde{\omega} \quad \eta = e \sin \tilde{\omega} \quad u = f + \tilde{\omega} \quad \tilde{\omega} = \omega + \Omega$$

(3) $\frac{\partial \vec{r}}{\partial h}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial h}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial k}, \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial k}$ 前面未出现过, 其表达式如下 (同样取 $\mu = 1$):

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} = \vec{H} = r \cos u \hat{P}_h + r \sin u \hat{Q}_h \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial k} = \vec{K} = r \cos u \hat{P}_k + r \sin u \hat{Q}_k \end{cases} \quad (3.73)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial h} = \vec{H}' = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[-(\sin u + \eta) \hat{P}_h + (\cos u + \xi) \hat{Q}_h \right] \\ \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial k} = \vec{K}' = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[-(\sin u + \eta) \hat{P}_k + (\cos u + \xi) \hat{Q}_k \right] \end{cases} \quad (3.74)$$

其中

$$\hat{P}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 2hk / \cos \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad \hat{Q}_h = \begin{pmatrix} 2k \\ -4h \\ 2(1 - 2h^2 - k^2) / \cos \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

$$\hat{P}_k = \begin{pmatrix} -4k \\ 2h \\ -2(1 - h^2 - 2k^2) / \cos \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad \hat{Q}_k = \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \\ -2hk / \cos \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

$$\cos \frac{i}{2} = [1 - (h^2 + k^2)]^{1/2} \quad (3.77)$$

关于上述各式中 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 和 u 的计算, 见第一部分的 (1.45) 和 (1.46) 式以及有关公式。

§13.3 状态转移矩阵 Φ

仍以通常在精密定轨中所引进的大气参数作为历元待估参数, 有

$$\begin{cases} \dot{\beta} = 0 \\ \beta = \beta_0 = \left(\frac{C_D S}{m} \right) \bar{\rho}_{p_0} \end{cases} \quad (3.78)$$

状态量 X 为 7 维列向量。

1. 计算状态转移矩阵 $\Phi = \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right)$ 的数值方法

数值解 (3.5) 的具体形式依赖于所选用的数值方法, 不同的方法有不同的差分格式。因此, 即使 (3.5) 式右端的形式不复杂, 可以给出状态转移矩阵:

$$\Phi(t_n, t_{n+1}) = \left(\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} \right) \quad (3.79)$$

亦因采用不同的数值方法而异, 这当然不便于使用, 何况 (3.5) 式右端是较复杂的, 特别是高阶积分器或多步法。因此, 实际定轨中显然不会采用这种途径给出状态转移矩阵 Φ 。

因条件方程 (3.1) 本来就是测量方程线性化的结果, 故给出矩阵 Φ 的过程亦可采用相应线性化处理。为此, 令

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X_0 \quad (3.80)$$

相应地有

$$\begin{cases} X^* = \Phi(t, t_0)X_0^* \\ x = X - X^* = \Phi(t, t_0)x_0 \end{cases} \quad (3.81)$$

这一线性化的状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 所满足的条件可通过对状态微分方程

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, t) \\ t_0, \quad X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (3.82)$$

的线性化而得，有

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi \\ A = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{X^*}, \quad \Phi(t_0, t_0) = I \end{cases} \quad (3.83)$$

其中 $A = A(t)$ ，因此这是一高阶 ($n \times n$ 阶) 变系数线性常微分方程，它要与状态微分方程 (3.82) 同时积分，明显地增加了数值法定轨的计算量。

以上述状态量 X 为 7 维列向量为例，若轨道量采用 $(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ ，相应的状态微分方程有如下形式：

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \\ \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta_0) \end{cases} \quad (3.84)$$

状态转移矩阵 Φ 的形式为

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)}{\partial(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \beta_0)} \end{pmatrix}_{(n \times n)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial X_0} \end{pmatrix}_{3 \times n} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial X_0} \end{pmatrix}_{3 \times n} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial X_0} \end{pmatrix}_{1 \times n} \end{pmatrix}, \quad n = 7 \quad (3.85)$$

若记

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial X_0} \end{pmatrix}_{3 \times n} \quad (3.86)$$

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial X_0} \end{pmatrix}_{3 \times n} \quad (3.87)$$

$$Z_\beta = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial X_0} \end{pmatrix}_{1 \times n} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \quad (3.88)$$

则方程 (3.83) 的系数矩阵 A 有如下形式：

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \vec{r}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{\vec{r}}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \beta} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \vec{r}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \dot{\vec{r}}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \beta} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial 0}{\partial \vec{r}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial 0}{\partial \dot{\vec{r}}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial 0}{\partial \beta} \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{X^*} = \begin{pmatrix} (0) & (1) & (0) \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \vec{r}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \dot{\vec{r}}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \beta} \end{pmatrix} \\ (0) & (0) & (0) \end{pmatrix}_{X^*} \quad (3.89)$$

相应的方程 (3.83) 即可写成下列一阶方程组：

$$\dot{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{dZ}{dt} \\ \frac{d\dot{Z}}{dt} \\ \frac{dZ_\beta}{dt} \end{pmatrix}_{X^*} = \begin{pmatrix} (\dot{Z})_{3 \times n} \\ C_1(t)Z + C_2(t)\dot{Z} + C_3(t) \\ (0)_{1 \times n} \end{pmatrix}_{X^*} \quad (3.90)$$

其中

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \vec{r}} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad (3.91)$$

$$C_2(t) = \left(\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \vec{r}} \right)_{3 \times 3} \quad (3.92)$$

$$C_3(t) = \left(\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial X_0} \right)_{3 \times n} = \left((0)_{3 \times 3}, (0)_{3 \times 3}, \left(\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial \beta_0} \right) \right)_{3 \times n} \quad (3.93)$$

$C_1(t)$, $C_2(t)$ 和 $C_3(t)$ 均用参考值 X^* 进行计算。事实上待定参数 $\beta = \beta_0$ 不参加计算, 上述方程 (3.83) 实为 $(6 \times n)$ 维, 这里 $n = 7$ 。

若轨道量采用轨道根数, 相应的状态微分方程有如下形式

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = f(\sigma, t; \beta_0) \\ \dot{\beta} = 0 \end{cases} \quad (3.94)$$

状态转移矩阵 Φ 的形式为

$$\Phi = \left(\frac{\partial(\sigma, \beta)}{\partial(\sigma_0, \beta_0)} \right)_{(n \times n)} = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial X_0} \\ \frac{\partial \beta}{\partial X_0} \end{pmatrix}_{6 \times n} \right), \quad n = 7 \quad (3.95)$$

若记

$$Z = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial X_0} \right)_{6 \times n} \quad (3.96)$$

$$Z_\beta = \left(\frac{\partial \beta}{\partial X_0} \right)_{1 \times n} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \quad (3.97)$$

则方程 (3.83) 的系数矩阵 A 有如下形式:

$$A = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial 0}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ \frac{\partial 0}{\partial \beta} \end{pmatrix} \right)_{X^*} = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ (0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ (0) \end{pmatrix} \right)_{X^*} \quad (3.98)$$

相应的方程 (3.83) 即下列一阶方程组:

$$\dot{\Phi} = \left(\begin{pmatrix} \frac{dZ}{dt} \\ \frac{dZ_\beta}{dt} \end{pmatrix} \right)_{X^*} = \left(\begin{pmatrix} D_1(t)Z + D_2(t) \\ (0)_{1 \times n} \end{pmatrix} \right)_{X^*} \quad (3.99)$$

其中

$$D_1(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{6 \times 6} \quad (3.100)$$

$$D_2(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_0} \right)_{6 \times n} = \left((0)_{6 \times 6}, \frac{\partial f}{\partial \beta_0} \right)_{6 \times n}, \quad n = 7 \quad (3.101)$$

同样 $D_1(t)$ 和 $D_2(t)$ 均用参考值 X^* 进行计算, $\beta = \beta_0$ 不参加计算。

轨道量采用 $(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ 时, 状态转移矩阵 Φ 所满足的方程组可以写成上述一阶方程组的形式, 即 (3.90) 式, 而实为二阶方程组, 即

$$\ddot{Z} = C_1(t)Z + c_2(t)\dot{Z} + C_3(t) \quad (3.102)$$

与上述二阶运动方程一致。对于采用轨道根数的情况, 相应的方程组皆为一阶形式, 即

$$\dot{Z} = D_1(t)Z + D_2(t) \quad (3.103)$$

但 $D_1(t)$ 的形式比 $C_1(t)$ 和 $C_2(t)$ 的形式复杂。故在精密定轨中, 若轨道量采用轨道根数, 则不宜采用上述方法给出状态转移矩阵 Φ , 而可用其他方法来构造状态转移矩阵, 下面介绍。

2. 状态转移矩阵 $\Phi = \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right)$ 的分析表达式

由于定轨方法受线性化过程的影响，实际上是采用迭代过程来完成的，迭代收敛前，待估状态量 X_0 的改正值 x_0 已很小。既然如此，那么在条件方程中对矩阵 \tilde{B} 的要求就无需像对观测量的理论计算值 $H(X^*, t)$ 那样，可对 \tilde{B} 的计算进行简化处理。通常定轨弧段不太长，状态转移矩阵中只需要考虑轨道量的主要变化（如一阶长期项等）即可。于是，无论是分析法定轨还是数值法定轨都可以通过轨道量摄动解的分析表达式给出状态转移矩阵 Φ 的计算公式。

(1) 轨道量采用 $(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ ，待估状态量 X_0 为 $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$ 和 β_0 ，此时状态转移矩阵的形式为

$$\Phi = \left(\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \beta)}{\partial(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \beta_0)} \right) = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} \quad (3.104)$$

$\Phi^{(0)}$ 和 $\Phi^{(1)}$ 分别是无摄部分和受摄部分（只需考虑主要摄动项，即一阶长期项），其表达式在参考文献 [15] 中已具体给出，而且定轨中多采用轨道根数，因此我们不再列出 $\Phi^{(0)}$ 和 $\Phi^{(1)}$ 的具体表达式。

(2) 轨道量采用轨道根数 σ ，待估状态量 X_0 为 σ_0 和 β_0 ，在分析法定轨中 σ_0 为平均根数，而在数值法定轨中 σ_0 为瞬时根数。同样记

$$\Phi = \left(\frac{\partial(\sigma, \beta)}{\partial(\sigma_0, \beta_0)} \right) = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} \quad (3.105)$$

下面对不同根数系统分别给出 $\Phi^{(0)}$ 和 $\Phi^{(1)}$ 。

σ 取 Kepler 根数 $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ 的情况，有

$$\Phi^{(0)} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{61} = -\frac{3n}{2a}(t - t_0) \quad (3.106)$$

$$\Phi^{(1)} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & 0 & 0 & 0 & b_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

其中

$$\begin{cases} b_{17} = \frac{\partial a}{\partial \beta_0} = -[a^2 I_0(z) \exp(-\frac{a - r_{p_0}}{H_{p_0}})]n(t - t_0) \\ b_{67} = \frac{\partial M}{\partial \beta_0} = [\frac{3}{2}aI_0(z) \exp(-\frac{a - r_{p_0}}{H_{p_0}})]\frac{1}{2}[n(t - t_0)]^2 \end{cases} \quad (3.108)$$

$$\begin{cases} b_{41} = -\frac{7}{2a}\Omega_1(t - t_0) \\ b_{42} = \frac{4e}{1 - e^2}\Omega_1(t - t_0) \\ b_{43} = -\tan i\Omega_1(t - t_0) \end{cases} \quad (3.109)$$

$$\begin{cases} b_{51} = -\frac{7}{2a} \omega_1(t-t_0) \\ b_{52} = \frac{5 \sin 2i}{1-e^2} \omega_1(t-t_0) \\ b_{53} = -\frac{5 \sin 2i}{4-5 \sin^2 i} \omega_1(t-t_0) \end{cases} \quad (3.110)$$

$$\begin{cases} b_{61} = -\frac{7}{3e} M_1(t-t_0) \\ b_{62} = \frac{3 \sin 2i}{1-e^2} M_1(t-t_0) \\ b_{63} = -\frac{3 \sin 2i}{2-3 \sin^2 i} M_1(t-t_0) \end{cases} \quad (3.111)$$

$$\begin{cases} \Omega_1 = -\frac{3J_2}{2p^2} n \cos i \\ \omega_1 = \frac{3J_2}{2p^2} n \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) \\ M_1 = \frac{3J_2}{2p^2} n \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \sqrt{1-e^2} \end{cases} \quad (3.112)$$

上述各式中出现的 a, e, i 及 $p = a(1-e^2), n = a^{-3/2}$ ，在分析法定轨中都是待估历元 t_0 时刻的平均根数 $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, \dots$ ，而在数值法定轨中则为待估历元 t_0 时的瞬时根数 a_0, e_0, i_0, \dots 。关于与大气有关的 b_{17} 和 b_{67} 表达式中的有关量的计算，见参考文献 [1] 或 [3]

σ 取第一类无奇点根数 ($a, i, \Omega, \xi = e \cos \omega, \eta = e \sin \omega, \lambda = M + \omega$) 的情况， $\Phi^{(0)}$ 与 (3.106) 式相同，而 $\Phi^{(1)}$ 的表达式变为下列形式：

$$\Phi^{(1)} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & b_{44} & b_{45} & 0 & 0 \\ b_{51} & b_{52} & 0 & b_{54} & b_{55} & 0 & 0 \\ b_{61} & b_{62} & 0 & b_{64} & b_{65} & 0 & b_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

其中 b_{17} 和 b_{67} 由 (3.108) 表达。其它元素如下：

$$\begin{cases} b_{31} = -\frac{7}{2a} \Omega_1(t-t_0) \\ b_{32} = -\tan i \Omega_1(t-t_0) \\ b_{34} = \frac{4\xi_0}{1-e^2} \Omega_1(t-t_0) \\ b_{35} = \frac{4\eta_0}{1-e^2} \Omega_1(t-t_0) \end{cases} \quad (3.114)$$

$$\begin{cases} b_{41} = -\eta_0 \left[-\frac{7}{2a} \omega_1(t-t_0) \right] \\ b_{42} = -\eta_0 \left[-\frac{5 \sin 2i}{4-5 \sin^2 i} \omega_1(t-t_0) \right] \\ b_{44} = -\eta_0 \left[\frac{4\xi_0}{1-e^2} \omega_1(t-t_0) \right] \\ b_{45} = -\left[1 + \frac{4}{1-e^2} \eta_0^2 \right] \omega_1(t-t_0) \end{cases} \quad (3.115)$$

$$\begin{cases} b_{51} = \xi_0 \left[-\frac{7}{2a} \omega_1(t-t_0) \right] \\ b_{52} = \xi_0 \left[-\frac{5 \sin 2i}{4-5 \sin^2 i} \omega_1(t-t_0) \right] \\ b_{54} = \left[1 + \frac{4}{1-e^2} \xi_0^2 \right] \omega_1(t-t_0) \\ b_{55} = \xi_0 \left[\frac{4\eta_0}{1-e^2} \omega_1(t-t_0) \right] \end{cases} \quad (3.116)$$

$$\begin{cases} b_{61} = -\frac{7}{2a}\lambda_1(t-t_0) \\ b_{62} = -(\frac{3}{2-3\sin^2 i}M_1 + \frac{5}{4-5\sin^2 i}\omega_1)\sin 2i(t-t_0) \\ b_{64} = \frac{\xi_0}{1-e^2}(3M_1+4\omega_1)(t-t_0) \\ b_{65} = \frac{\eta_0}{1-e^2}(3M_1+4\omega_1)(t-t_0) \end{cases} \quad (3.117)$$

与前面相同, 各式中出现的 a, e, i 等根数分别取待估历元 t_0 时的平均根数 $\bar{a}_0, \bar{e}_0^2 = \bar{\xi}_0^2 + \bar{\eta}_0^2, \bar{i}_0, \dots$ 或瞬时根数 $a_0, e_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2, i_0, \dots$ 。其它各量的意义同前, 并有 $\lambda_1 = M_1 + \omega_1$ 。

σ 取第二类无奇点根数 ($a, \xi = e \cos \tilde{\omega}, \eta = e \sin \tilde{\omega}, h = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega, k = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega, \lambda = M + \tilde{\omega}$) 的情况, $\Phi^{(0)}$ 亦同前, $\Phi^{(1)}$ 的形式如下:

$$\Phi^{(1)} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{17} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & 0 & 0 \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & 0 & 0 \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & 0 & b_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

其中 b_{17} 和 b_{67} 仍由 (3.108) 式表达, 其它各元素由下列各式表达:

$$\begin{cases} b_{21} = -\eta_0[-\frac{7}{2a}\tilde{\omega}_1(t-t_0)] \\ b_{22} = -\eta_0[-\frac{4\xi_0}{1-e^2}\tilde{\omega}_1(t-t_0)] \\ b_{23} = -[1 + \frac{4}{1-e^2}\eta_0^2]\tilde{\omega}_1(t-t_0) \\ b_{24} = -\eta_0[(-\frac{5}{2})8h_0(1-2(h_0^2+k_0^2)) + 4h_0](\frac{3J_2}{2p^2})n(t-t_0) \\ b_{25} = -\eta_0[(-\frac{5}{2})8k_0(1-2(h_0^2+k_0^2)) + 4k_0](\frac{3J_2}{2p^2})n(t-t_0) \end{cases} \quad (3.119)$$

$$\begin{cases} b_{31} = \xi_0[-\frac{7}{2a}\tilde{\omega}_1(t-t_0)] \\ b_{32} = [1 + \frac{4}{1-e^2}\xi_0^2]\tilde{\omega}_1(t-t_0) \\ b_{33} = \xi_0[-\frac{4\eta_0}{1-e^2}\tilde{\omega}_1(t-t_0)] \\ b_{34} = \xi_0[(-\frac{5}{2})8h_0(1-2(h_0^2+k_0^2)) + 4h_0](\frac{3J_2}{2p^2})n(t-t_0) \\ b_{35} = \xi_0[(-\frac{5}{2})8k_0(1-2(h_0^2+k_0^2)) + 4k_0](\frac{3J_2}{2p^2})n(t-t_0) \end{cases} \quad (3.120)$$

$$\begin{cases} b_{41} = -k_0[-\frac{7}{2a}\Omega_1(t-t_0)] \\ b_{42} = -k_0[\frac{4\xi_0}{1-e^2}\Omega_1(t-t_0)] \\ b_{43} = -k_0[\frac{4\eta_0}{1-e^2}\Omega_1(t-t_0)] \\ b_{44} = -k_0[4h_0(\frac{3J_2}{2p^2})n(t-t_0)] \\ b_{45} = -[\Omega_1 + 4k_0^2(\frac{3J_2}{2p^2})n](t-t_0) \end{cases} \quad (3.121)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{51} = h_0[-\frac{7}{2a}\Omega_1(t-t_0)] \\ b_{52} = h_0[\frac{4\xi_0}{1-e^2}\Omega_1(t-t_0)] \\ b_{53} = h_0[\frac{4\eta_0}{1-e^2}\Omega_1(t-t_0)] \\ b_{54} = [\Omega_1 + 4h_0^2(\frac{3J_2}{2p^2})n](t-t_0) \\ b_{55} = h_0[4k_0(\frac{3J_2}{2p^2})n(t-t_0)] \end{array} \right. \quad (3.122)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{61} = -\frac{7}{2a}\lambda_1(t-t_0) \\ b_{62} = \frac{\xi_0}{1-e^2}(3M_1 + 4\tilde{\omega}_1)(t-t_0) \\ b_{63} = \frac{\eta_0}{1-e^2}(3M_1 + 4\tilde{\omega}_1)(t-t_0) \\ b_{64} = [(-\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2} - \frac{5}{2})8h_0(1-2(h_0^2 + k_0^2)) + 4h_0](\frac{3J_2}{2p^2})n(t-t_0) \\ b_{65} = [(-\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2} - \frac{5}{2})8k_0(1-2(h_0^2 + k_0^2)) + 4k_0](\frac{3J_2}{2p^2})n(t-t_0) \end{array} \right. \quad (3.123)$$

各式右端出现的量，其意义均同前，但 $\lambda_1 = M_1 + \tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 + \Omega_1$ ，而 M_1, ω_1 和 Ω_1 中出现的 e_0 和 i_0 由 $e_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2$ 和 $\sin^2(i_0/2) = h_0^2 + k_0^2$ 给出。这里的 σ_0 亦与前面两种情况相同，在不同的定轨方法中各取平均根数 $\bar{\sigma}_0$ 和瞬时根数 σ_0 。

第十四章 状态估计 — 最小二乘估计在精密定轨中的应用

条件方程 (3.1) 是一线性代数方程组。测量采样 k 次，相应方程组的维数是 $(m \times k)$ ，通常采样量较大， $(m \times k) \gg n$ ， n 是待估状态量的维数。因此，如何充分利用采样的统计特性，给出待估状态量 X_0 的最优估计值亦是精密定轨中的一个重要环节。有关最优估计理论的基本原理，可见参考文献 [16]~[18]，本章将首先对其作一简单介绍。

§14.1 估计理论及常用的几种最优估计方法

估计理论实际上是根据状态方程和测量方程，按概率统计和优化的原理对系统的状态或参数作出估计。下面以图形说明估计的过程。图 14.1 表示一个连续动态系统，其 t 时刻的状态由多维向量 $X(t)$ 表示。描述状态 $X(t)$ 演变的方程通常受到系统误差的影响，同样描述观测量 $Y(t)$ 与状态量 $X(t)$ 关系的测量方程也不可避免地受到测量噪声的影响。这个系统可用数学形式描述如下：

$$\begin{cases} \dot{X} &= F(X,t) + Q \\ Y &= H(X,t) + V \end{cases} \tag{3.124}$$

其中 Q 和 V 分别为动态系统模型误差和测量噪声。一般地， $F(X,t)$ 和 $H(X,t)$ 都是复杂的非线性函数。如果上述动态系统是人造地球卫星在各种力因素作用下的运动过程，那么上述过程就是精密定轨，给出的状态估计是卫星的状态向量，如 $(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; \beta)$ 或 (σ, β) ，其中 β 可以是参与估计的力模型涉及的物理参数或卫星本体的星体参数。

所谓最优估计是指在某一估计准则条件下求得的最优估计值，如果换了一个估计准则，这一估计就不一定是最优的。实践中，根据经验和不同的需要人们提出了多种估计准则：最小方差准则、极大似然准则、极大验后准则、线性最小方差准则及最小二乘准则等，对应每一种准则各有相应的估计方法，例如最小方差估计、极大似然估计、极大验后估计、线性最小方差估计及最小二乘估计等，这些估计方法提供了图 14.1 中估计器的灵活选择。

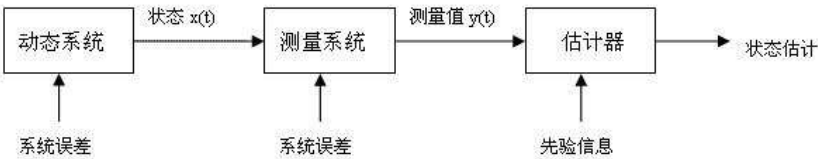


图 14.1: 估计过程框图

事实上，卫星观测量 Y ，对应的是动态测量中的随机量。人卫精密定轨中的估计问题可归结为：有一随机观测（向量）序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_k ，要给出非随机或随机（向）量 X （卫星轨道量及相关的待估参数）的估计。通常将 X 的估计写为 \hat{X} ，显然， \hat{X} 是随机序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 的函数，由于 $Y_j (1 \leq j \leq k)$ 是随机量， \hat{X} 亦是随机量，一般可以表示为

$$\hat{X}_k = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \tag{3.125}$$

式中 \hat{X}_k 的下标 k 表示依据 k 个观测量的估计。不同的函数 g 将给出不同的估计，如何衡量一个估计值的优劣？下面将在介绍常用的几种估计方法中逐一说明。

1. 一致估计

定义 1：如果序列 $\{\hat{X}_k\}$ 随机收敛到 X ，则称 \hat{X}_k 为 X 的一致估计。其含义是，对任何 $\varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|\hat{X}_k - X| > \varepsilon) = 0 \quad (3.126)$$

这里 P 即概率函数。这表明，如果 \hat{X}_k 是 X 的一致估计，则当样本 Y_k 数量 k 充分大时，估计 \hat{X}_k 在其真值 X 的附近。

2. 无偏估计

如果随机序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 有 N 个重复独立取样，设第 n 次取样为 $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)}$ ，用这第 n 次取样求得的 X 的估计值记作 $\hat{X}_k^{(n)}$ 。很自然，我们将要求

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{X}_k^{(n)}$$

当 N 充分大时，趋于 X 的均值。具有这种性质的估计，就是无偏估计，可作如下定义：

定义 2：如果关系式

$$E\hat{X}_k = EX \quad (3.127)$$

成立，则称 \hat{X}_k 为 X 的无偏估计，这里 $E\hat{X}_k$ 表示随机量 \hat{X}_k 的数学期望，即平均值。如果关系式

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\hat{X}_k = EX \quad (3.128)$$

成立，则称 \hat{X}_k 为 X 的渐近无偏估计。

无偏性将保证估计 \hat{X} 在真值 X 的附近摆动，但没有指明这种摆动幅度的大小。下一段将要介绍的最小方差估计将保证这种摆动幅度的平均值达到极小。

3. 最小方差估计

定义 3：如果估计误差 $\hat{X} - X$ 的方差达到极小，即

$$Var(\hat{X} - X) = E(\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T = \min \quad (3.129)$$

则称 \hat{X} 为 X 的最小方差估计。这里“ T ”即转置，而 \min 是对一切可能的估计 \hat{X} 而言。

通常又称无偏最小方差估计为均方意义下的最优估计，它既保证估计 \hat{X} 在真值 X 的附近摆动，又保证这种摆动幅度的平均值达到极小。这里的最优估计是指在一切实数（ $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ 是 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 的线性函数）和非线性无偏估计中使方差达到极小的一种估计。

4. 线性无偏最小方差估计

上面已指出，无偏最小方差估计未必是线性的，因此这里要介绍的线性无偏最小方差估计，一般不是均方意义下的最优估计。

所谓线性估计，就是指 X 的估计 \hat{X} 为观测量 Y 的线性函数，一般地有如下形式：

$$\hat{X} = C + AY \quad (3.130)$$

这里考虑 X 为 n 维随机向量， Y 为 m 维随机向量，上式中的 C 为 n 维非随机向量， A 则为 $n \times m$ 维矩阵。引进线性估计是由于在很多实际应用中将会涉及到。

5. 最小二乘估计

最小二乘估计是一种古典的估计方法，该方法早在二百年前（ Gauss, 1809 ）的天文定轨（即轨道改进）问题中就已采用，随着最优估计理论的发展，古典最小二乘估计也被赋予了新的内容。古典最小二乘估计只是残差平方和达极小意义下的一种估计，从最优估计的观点来看，它是一个线性无偏估计，但一般而言，它不是线性无偏最小方差估计，只有在赋予最优加权的前提下，它才是线性无偏最小方差估计。这种取最优加权的最小二乘估计通常又称为马尔可夫 (Markov) 估计。

(1) 古典最小二乘估计

考虑下列线性系统：

$$\begin{cases} X_l = \Phi_{l,0}X_0 \\ Y_l = H_lX_l + V_l \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots, k \quad (3.131)$$

其中观测序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 对应时间序列 t_1, t_2, \dots, t_k ， X_0 对应时刻 $t_0, t_0 \in [t_1, t_k]$ ，这一系统中状态量 X 的动态方程和观测量 Y 的测量方程均为线性的。 X 为非随机向量 (n 维)， $\Phi_{l,0}$ 是 $n \times n$ 维的状态转移矩阵。观测量 Y 是 m 维随机向量， H_l 为 $m \times n$ 维测量矩阵。 V_l 为测量噪声，假定均值为零，且有方差矩阵：

$$\begin{cases} EV_lV_l^T = R_l \quad (R_l > 0) \\ EV_lV_s^T = 0 \quad (l \neq s) \end{cases} \quad (3.132)$$

由观测序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 获得的 X_0 的最小二乘估计 $X_{0/k}$ ，它使残差平方和达到极小。残差平方和即

$$U = \sum_{l=1}^k (Y_l - H_l\Phi_{l,0}\hat{X}_{0/k})^T (Y_l - H_l\Phi_{l,0}\hat{X}_{0/k}) = \min$$

要求其达到极小，即应满足下式：

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{X}_{0/k}} = -2 \sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T (Y_l - H_l\Phi_{l,0}\hat{X}_{0/k}) = 0$$

因此得

$$\left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T H_l \Phi_{l,0} \right) \hat{X}_{0/k} = \sum_{l=1}^k (\Phi_{l,0}^T H_l^T) Y_l \quad (3.133)$$

此方程通常称为法化方程（ Normal Equation ），简称法方程，而矩阵

$$\sum_{l=1}^k (H_l\Phi_{l,0})^T (H_l\Phi_{l,0}) \quad (3.134)$$

就称为法化矩阵。

方程组 (3.133) 是关于 n 维向量 $\hat{X}_{0/k}$ 的线性方程组，能唯一确定其解的充要条件即 $(n \times n)$ 维法化矩阵 (3.134) 是正定的，亦即要求矩阵 $(H_l\Phi_{l,0})$ 是满秩的。这一要求就是通常所说的可观测性，即可由观测序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 唯一确定系统 (3.131) 在时刻 t_0 的状态 X_0 。其解为

$$\hat{X}_{0/k} = \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T Y_l \right) \quad (3.135)$$

不难证明上述古典最小二乘估计 $\hat{X}_{0/k}$ 是 X_0 的无偏估计，有

$$E\hat{X}_{0/k} = \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T EY_l \right)$$

而

$$EY_l = E(H_l X_l + V_l) = H_l X_l + EV_l = H_l \Phi_{l,0} X_0$$

代入上式即得

$$E\hat{X}_{0/k} = \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T H_l \Phi_{l,0} \right) X_0 = X_0 \quad (3.136)$$

由此可知，古典最小二乘是线性无偏估计，保证了估计 \hat{X}_0 在真值 X_0 附近摆动，并使估计的残差平方和 U 达极小。

显然，古典最小二乘估计没有充分利用大量随机采样数据的统计特性，这是限于当时的实际背景。随着测量技术的提高和最优估计理论的发展，古典最小二乘估计也被赋予了新的内容，如最优加权的考虑，下面介绍。

(2) 加权最小二乘估计

考虑随机采样数据具有不同的精度，假定一测量序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_k ，相应地有权矩阵序列 W_1, W_2, \dots ，皆为正定矩阵。加权残差平方和为

$$U = \sum_{l=1}^k (Y_l - H_l \Phi_{l,0} \hat{X}_{0/k})^T W_l (Y_l - H_l \Phi_{l,0} \hat{X}_{0/k})$$

由

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{X}_{0/k}} = 0$$

得

$$\left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,0} \right) \hat{X}_{0/k} = \sum_{l=1}^k (\Phi_{l,0}^T H_l^T) W_l Y_l \quad (3.137)$$

这就是加权法方程，由此可得加权最小二乘估计 $\hat{X}_{0/k}$ 的计算公式：

$$\hat{X}_{0/k} = \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T W_l Y_l \right) \quad (3.138)$$

可以证明加权最小二乘估计 $\hat{X}_{0/k}$ 也是无偏估计，即

$$E\hat{X}_{0/k} = X_0$$

由此可给出估计误差：

$$\begin{aligned} \hat{X}_{0/k} - X_0 &= \hat{X}_{0/k} - E\hat{X}_{0/k} \\ &= \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T W_l V_l \right) \end{aligned}$$

相应的误差方差矩阵为

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{X}_{0/k} - X_0) &= \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \times \\ &\quad \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T W_l R_l W_l H_l \Phi_{l,0} \right) \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.139)$$

其中用到 V_l 的性质（见 (3.132) 式）和 $W_l = W_l^T$ 。不难证明，当权矩阵 W_l 取 R_l^{-1} 时，上述方差达极小。这里证明从略，详细过程可阅读参考文献 [1] 的第十四章。

当取最优加权

$$W_l = R_l^{-1} \quad (3.140)$$

时, 有如下估计结果:

$$\hat{X}_{0/k} = \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T R_l^{-1} Y_l \right) \quad (3.141)$$

相应的估计误差方差阵 $\text{var}(\hat{X}_{0/k} - X_0)$ 记作 $P_{0/k}$, 由下式表达:

$$P_{0/k} = \left(\sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \quad (3.142)$$

这一估计是线性无偏方差达极小意义下的最优估计, 这在当代精密定轨等工作中常被引用。但是, 由于观测序列 $\{Y_k\}$ 很难达到 (3.132) 式的要求, 因此权矩阵 W_l 的选择实际上会受到限制, 在精密定轨中往往会以其它选择来代替。

6. 最小二乘估计的两种算法

最小二乘估计的两种常用算法, 即批处理算法和递推算法。

批处理算法是最小二乘估计的经典算法, 即前面各段中阐述的, 观测序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 的所有采样值同时参与估计过程, 给出 t_0 时刻状态量 X_0 的估计值 $\hat{X}_{0/k}$ 。这种算法的采用有其历史原因, 过去天文观测所取得的资料不多, 也不需要“快速”给出结果。而当今应用背景已大不相同, 不仅观测数据量大, 还需要快速给出结果。这就在上述最小二乘估计算法中发展了一种下面要介绍的递推算法, 既避免大量数据存储, 又可快速获得估计值。

最小二乘的递推算法可用下述过程说明: 将观测序列 $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots, Y_{k+s}$ 分成两批 (亦可分成多批), 首先由 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 获得 X_k 的最小二乘估计 $\hat{X}_{k/k}$, 然后丢掉这一批观测量, 再利用估计 $\hat{X}_{k/k}$ 和后一批观测量 $Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots, Y_{k+s}$ 求得状态 X_{k+s} 的最小二乘估计 $\hat{X}_{k+s/k+s}$, 这不同于批处理算法中将 $k+s$ 个观测量作为一批处理而获得 $\hat{X}_{0/k+s}$ (这里 X_0 对应的 t_0 即 t_{k+s}) 的过程。

按上述最小二乘估计公式 (3.141) 和 (3.142) 给出

$$\hat{X}_{k+s/k+s} = \left(\sum_{l=1}^{k+s} \Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k+s} \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^{k+s} \Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} Y_l \right) \quad (3.143)$$

$$P_{k+s/k+s} = \left(\sum_{l=1}^{k+s} \Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k+s} \right)^{-1} \quad (3.144)$$

若令

$$\hat{X}_{k+s/k} = \Phi_{k+s,k} \hat{X}_{k/k} \quad (3.145)$$

$$P_{k+s/k} = \Phi_{k+s,k} P_{k/k} \Phi_{k+s,k}^T \quad (3.146)$$

并利用

$$\Phi_{k+s,k}^{-1} = \Phi_{k,k+s}$$

则得

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k+s/k+s} &= \left(P_{k+s/k}^{-1} + \sum_{l=k+1}^{k+s} \Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k+s} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(P_{k+1/k}^{-1} \hat{X}_{k+s/k} + \sum_{l=k+1}^{k+s} \Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} Y_l \right)\end{aligned}\quad (3.147)$$

$$P_{k+s/k+s} = \left(P_{k+s/k}^{-1} + \sum_{l=k+1}^{k+s} \Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k+s} \right)^{-1} \quad (3.148)$$

(3.145)—(3.148) 式就构成了最小二乘估计递推公式，可以称 $\hat{X}_{k+s/k}$ 为预估值， $P_{k+s/k}$ 即预估值误差方差阵。显然，上述分批不限于两批，对线性系统而言，这种由 (3.145)—(3.148) 分批递推给出的最小二乘估计 $\hat{X}_{k+s/k+s}$ 与由前面批处理给出的估计结果是等价的。

由于 s 表示该批观测量的个数，而且可任意选取，那么当 $s = 1$ 时，就可构成类似卡尔曼 (Kalman) 滤波那样的逐步递推。

7. 具有先验值的最小二乘估计

一般的最小二乘估计是没有状态量 X_0 的先验值的（或称先验估计），这是最小二乘估计与卡尔曼滤波的一个重要区别。但是，利用上一段最小二乘递推算法，同样可导出具有先验估计条件下的最小二乘估计公式。

除有一测量序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 外，对 t_0 时刻的状态量 X_0 还有一个先验估计值 $\hat{X}_{0/0}$ ，并知道 $\hat{X}_{0/0}$ 的估计误差方差阵 $P_{0/0}$ （又称 $P_{0/0}^{-1}$ 为先验权）。在此情况下，由 (3.145)—(3.148) 式不难给出具有先验估计的最小二乘估计，计算公式如下：

$$\hat{X}_{k/0} = \Phi_{k,0} \hat{X}_{0/0} \quad (3.149)$$

$$P_{k/0} = \Phi_{k,0} P_{0/0} \Phi_{k,0}^T \quad (3.150)$$

$$\hat{X}_{k/k} = \left(P_{k/0}^{-1} + \sum_{l=1}^k \Phi_{l,k}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k} \right)^{-1} \left(P_{k/0}^{-1} \hat{X}_{k/0} + \sum_{l=1}^k \Phi_{l,k}^T H_l^T R_l^{-1} Y_l \right) \quad (3.151)$$

$$P_{k/k} = \left(P_{k/0}^{-1} + \sum_{l=1}^k \Phi_{l,k}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k} \right)^{-1} \quad (3.152)$$

或

$$\hat{X}_{0/k} = \left(P_{0/0}^{-1} + \sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \left(P_{0/0}^{-1} \hat{X}_{0/0} + \sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T R_l^{-1} Y_l \right) \quad (3.153)$$

$$P_{0/k} = \left(P_{0/0}^{-1} + \sum_{l=1}^k \Phi_{l,0}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,0} \right)^{-1} \quad (3.154)$$

其中 $\hat{X}_{k/0}$ 就可看作初始预估值， $P_{k/0}$ 为其预报误差方差阵。

本节所介绍的最小二乘估计方法，已在人工精密定轨中得到了广泛的应用，特别在事后处理中，批处理算法也成为主要算法，而在某些实时处理中，常采用由递推算法派生出的序贯估计算法。

§14.2 求解条件方程的批处理方法

根据加权最小二乘估计原理，在批处理方法中，按 k 次采样数据， $t_j, Y_j (j = 1, 2, \dots, k)$ ，首先

对条件方程 (3.1) 进行法化给出

$$\sum_{l=1}^k (\tilde{B}_l^T W_l) y_l = \sum_{l=1}^k (\tilde{B}_l^T W_l \tilde{B}_l) x_0 \quad (3.155)$$

其中下标 l 对应采样时刻 t_l ， W 是权矩阵，有 $W = W^T$ ，如果是等权处理，则 W 为单位矩阵。方程 (3.155) 即称为法方程，相应的矩阵

$$\sum_{l=1}^k (\tilde{B}_l^T W_l \tilde{B}_l)$$

称为法化矩阵。关于该矩阵，可以对 k 次采样数据一次性成批形成，亦可以逐个形成，后者可简化计算过程，特别是采样数据较多时更为有利，可避免高维矩阵的求逆。对应于法化矩阵的不同形成方式，线性方程组 (3.155) 就有不同的解法，关于这个问题，可见参考文献 [19]。

在无初始估计（这里指先验估计）的条件下，法方程 (3.155) 的解为

$$\hat{x}_{0/k} = \left(\sum_{l=1}^k \tilde{B}_l^T W_l \tilde{B}_l \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \tilde{B}_l^T W_l y_l \right) \quad (3.156)$$

相应的待估状态量 X_0 的最优估计和方差为

$$\hat{X}_{0/k} = X_0^* + \hat{x}_{0/k} \quad (3.157)$$

$$P_{0/k} = \left(\sum_{l=1}^k \tilde{B}_l^T W_l \tilde{B}_l \right)^{-1} \quad (3.158)$$

若有初始估计 $(\hat{X}_{0/0}, P_{0/0})$ ，则法方程 (3.155) 的解为

$$\begin{cases} \hat{x}_{0/k} = \left(P_{0/0}^{-1} + \sum_{l=1}^k \tilde{B}_l^T W_l \tilde{B}_l \right)^{-1} \left(P_{0/0}^{-1} \hat{x}_{0/0} + \sum_{l=1}^k \tilde{B}_l^T W_l y_l \right) \\ \hat{x}_{0/0} = \hat{X}_{0/0} - X_0^* \end{cases} \quad (3.159)$$

相应的待估状态量 X_0 的最优估计和方差为

$$\hat{X}_{0/k} = X_0^* + \hat{x}_{0/k} \quad (3.160)$$

$$P_{0/k} = \left(P_{0/0}^{-1} + \sum_{l=1}^k \tilde{B}_l^T W_l \tilde{B}_l \right)^{-1} \quad (3.161)$$

§14.3 序贯估计算法

本节介绍一种可代替批处理算法的估计方法，这种算法可及时处理新获取的测量采样值，称为序贯处理算法。这种算法的最大优点是只需要对较低维甚至与观测向量同维的矩阵求逆。因此，如果观测数据是逐一处理的，那么只需要进行简单的标量除法就可得到 x 的估计。事实上，这就是 §14.1 中介绍的最小二乘递推算法，在递推意义上类似于卡尔曼滤波。

估值 \hat{X}_l 和方差矩阵 P_l 可用下列关系向前传播（映射）至时刻 t_k ：

$$\begin{cases} \bar{X}_k &= \Phi(t_k, t_l) \hat{X}_l \\ \bar{P}_k &= \Phi(t_k, t_l) P_l \Phi^T(t_k, t_l) \end{cases} \quad (3.162)$$

这里符号 $\Phi(t_k, t_l)$ ，即前面的转移矩阵 $\Phi_{k,l}$ 。假定在 t_k 时刻有观测数据 Y_k ，相应的条件方程为

$$\begin{cases} y_k &= \tilde{B}_k x_k + V_k \\ x_k &= X_k - X_k^* \end{cases} \quad (3.163)$$

其中随机差 V_k 满足条件 (3.132)。由 (3.153) 和 (3.154) 式或 (3.159) 和 (3.161) 式得到 x_k 的最优估计

$$\begin{cases} \hat{x}_k &= (\tilde{B}_k^T W_k \tilde{B}_k + \bar{P}_k^{-1})^{-1} (\tilde{B}_k^T W_k y_k + \bar{P}_k^{-1} \bar{x}_k) \\ \hat{X}_k &= X_k^* + \hat{x}_k \end{cases} \quad (3.164)$$

$$P_k = (\tilde{B}_k^T W_k \tilde{B}_k + \bar{P}_k^{-1})^{-1} \quad (3.165)$$

由上式得到

$$P_k^{-1} = \tilde{B}_k^T W_k \tilde{B}_k + \bar{P}_k^{-1}$$

两边左乘矩阵 P_k ，再右乘 \bar{P}_k 得到

$$\bar{P}_k = P_k \tilde{B}_k^T W_k \tilde{B}_k \bar{P}_k + P_k \quad (3.166)$$

即

$$P_k = \bar{P}_k - P_k \tilde{B}_k^T W_k \tilde{B}_k \bar{P}_k \quad (3.167)$$

对 (3.166) 式右乘 $\tilde{B}_k^T W_k$ ，即得

$$\begin{aligned} \bar{P}_k \tilde{B}_k^T W_k &= P_k \tilde{B}_k^T W_k [\tilde{B}_k \bar{P}_k \tilde{B}_k^T W_k + I] \\ &= P_k \tilde{B}_k^T W_k [\tilde{B}_k \bar{P}_k \tilde{B}_k^T + W_k^T] W_k \end{aligned}$$

由此解出 $P_k \tilde{B}_k^T W_k$ 得到：

$$P_k \tilde{B}_k^T W_k = \bar{P}_k \tilde{B}_k^T [\tilde{B}_k \bar{P}_k \tilde{B}_k^T + W_k^T]^{-1} \quad (3.168)$$

这个关系将先验方差和后验方差联系起来。如果用 (3.168) 式消去 (3.167) 式中的 $P_k \tilde{B}_k^T W_k$ ，就得到

$$P_k = \bar{P}_k - \bar{P}_k \tilde{B}_k^T [\tilde{B}_k \bar{P}_k \tilde{B}_k^T + W_k^T]^{-1} \tilde{B}_k \bar{P}_k \quad (3.169)$$

(3.169) 式涉及的求逆代替了 (3.165) 式中的求逆方法。在 (3.169) 式中需要求逆的矩阵的维数与观测误差方差矩阵的维数一致。如果一次只处理一个观测数据，那么只需要进行简单的标量除法即可。

如果将权矩阵 K_k （也有人称之为卡尔曼增益矩阵或直接叫做增益矩阵）定义为

$$K_k \equiv \bar{P}_k \tilde{B}_k^T [\tilde{B}_k \bar{P}_k \tilde{B}_k^T + W_k^T]^{-1} \quad (3.170)$$

于是 (3.169) 式可写成更简单的形式：

$$P_k = [I - K_k \tilde{B}_k] \bar{P}_k \quad (3.171)$$

将 (3.165) 式代入 (3.164) 式，可将估计 \hat{x}_k 写成下列形式：

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= P_k [\tilde{B}_k^T W_k y_k + \bar{P}_k^{-1} \bar{x}_k] \\ &= P_k \tilde{B}_k^T W_k y_k + P_k \bar{P}_k^{-1} \bar{x}_k \end{aligned} \quad (3.172)$$

又根据 (3.168) 式， K_k 的定义可写为

$$K_k = P_k \tilde{B}_k^T W_k \quad (3.173)$$

利用此式和 (3.171) 式, (3.172) 即可写为

$$\hat{x}_k = K_k y_k + [I - K_k \tilde{B}_k] \bar{P}_k \bar{P}_k^{-1} \bar{x}_k$$

整理后得到 x_k 的序贯估计 \hat{x}_k :

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k [y_k - \tilde{B}_k \bar{x}_k] \quad (3.174)$$

(3.174) 式结合 (3.162) 式、(3.170) 式和 (3.171) 式以及 t_k 时刻的观测数据 Y_k (以残差 y_k 体现在上述计算公式中), 就可得到 t_k 时刻估值 \hat{x}_k 的递推结果。

这里要说明的是, 在上述序贯估计算法中, 递推初始时刻给定的参考状态量 X_0^* 在整个递推过程中是不变的, 而又不像批处理那样用一个迭代过程来逐次修改 X_0^* , 保证其收敛性。在这种状态下, 线性化的条件方程中略去的高阶项很快就会起作用, 往往使序贯估计递推发散。

为了尽量减小给出条件方程 (3.1) 线性化过程中忽略高阶项而引入的误差对序贯算法收敛性的影响, 就提出了改进的序贯估计算法。这种算法主要的不同之处在于, 每处理完一个观测资料或一批资料后, 就利用 t_k 时刻的状态估计提供一个新的状态量:

$$(X_k^*)_{new} = X_k^* + \hat{x}_k \quad (3.175)$$

由此再往后递推, 这样可改善序贯估计算法的收敛性。修改参考状态量的后果是不断初始化, 这就影响了序贯估计算法的效率。因此, 在递推中, 要视具体的发散趋势来确定修改参考状态量的“时机”。

§14.4 定轨计算的迭代过程及有关问题

1. 迭代计算过程

事实上, 批处理定轨计算是一迭代过程, 这是由于非线性测量方程线性化所导致。所谓状态量的参考值 X_0^* , 在无先验估计的情况下, 实为迭代初值, 记作 $\hat{X}_{0/k}^{(j-1)}, j = 1, 2, \dots$ 即迭代次数。上述计算过程中, 待估状态量的最优估计实为

$$\hat{X}_{0/k}^{(j)} = \hat{X}_{0/k}^{(j-1)} + \hat{x}_{0/k}^{(j)} \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.176)$$

这里 $\hat{X}_{0/k}^{(j-1)}$ ($j = 1$ 时对应 $\hat{X}_0^{(0)}$) 即作为每次迭代计算的参考值 X_0^* 。

迭代收敛的控制条件通常有两种取法, 即

$$|\sigma^{*(j)} - \sigma^{*(j-1)}| < \mu^* \quad (3.177)$$

或

$$|(\sigma^{*(j)} - \sigma^{*(j-1)})/\sigma^{*(j)}| < \mu^* \quad (3.178)$$

μ^* 的取值是根据测量误差和定轨精度要求等条件确定。这里 σ^* 即为均方根差 (RMS), 有

$$\sigma^* = \sqrt{U/(k \times m)} \quad (3.179)$$

其中 U 为加权的残差平方和:

$$U = \sum_{l=1}^k (y_l^T W_l y_l) \quad (3.180)$$

k 是采样次数, m 即前面已说明过的观测量 Y 的维数。关于权矩阵 W_l 的取法, 在实际定轨工作中, 很难按最优加权的要求取为 R_l^{-1} , 往往根据残差的大小来加权。

2. 关于可观测性 (即是否出现亏秩问题而导致定轨计算发散)

这一问题归结为基本方程 (3.1) 右端 \tilde{B} 矩阵的性质, 即是否正定, 或相应的矩阵行列式 $|\tilde{B}^T \tilde{B}| = 0$ 与否, 关系到定轨的成败。事实上这涉及到多个方面, 包括定轨资料类型, 定轨弧段分布, 状态量的选择等, 这里不再讨论。

3. 定轨中的野值剔除问题

这一问题, 理论上有一“结论”, 即残差 $y > 3\sigma^*$ 的采样资料出现的概率应很小, 如果出现, 即认为是“错误”, 作为野值剔除。但在实际定轨中将会遇到各种情况, 要视具体问题和定轨状态而定。

4. 协方差分析问题

在评估各种误差源对估值精度的影响时, 人们通常在协方差分析这个框架下进行讨论。这里作一简要说明, 后面第十六章还会详细介绍。

为了简化表达形式, 下面采用简化符号。令 x 是 $n \times 1$ 维待估参数 (即前面所定义的待估状态量的改正值), c 是 $m \times 1$ 维考察参数 (即不参加待估的参数 c 的误差值), 而测量模型对应的基本方程 (3.1) 可写为下列形式:

$$y = H_x x + H_c c + V \quad (3.181)$$

式中 H_x 为观测量对 x 的观测偏导数, H_c 为观测量对 c 的观测偏导数, V 为观测噪声, 满足 $E(V) = 0, E(VV^T) = R$, R 为对角线矩阵, 即前面的权矩阵 W 为最优加权, $W = R^{-1}$ 。由加权最小二乘可得

$$\hat{x} = (H_x^T R^{-1} H_x + \bar{P}^{-1})^{-1} [H_x^T R^{-1} (y - H_c c) + \bar{P}^{-1} \hat{x}_{0/0}] \quad (3.182)$$

这里 \bar{P} 即 \hat{x} 的先验协方差。

若考察参数 $\bar{c} = c$, 即不考虑考察参数的误差影响, 则状态估值 \hat{x} 的协方差矩阵为

$$P = (H_x^T R^{-1} H_x + \bar{P}^{-1})^{-1} \quad (3.183)$$

协方差矩阵反映了待估状态参数受观测数据噪声影响的敏感程度, 也可以在一定程度上反映出测站几何对定轨精度的影响。

此外, 为了研究考察参数对待估参数的影响, 人们往往引入敏感矩阵 S_{xc} , 其定义如下:

$$S_{xc} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial c} \quad (3.184)$$

由式 (3.182) 可得

$$S_{xc} = -(H_x^T R^{-1} H_x + \bar{P}^{-1})^{-1} H_x^T R^{-1} H_c \quad (3.185)$$

敏感矩阵描述了 \hat{x} 是如何随考察参数 c 而变化的, S_{xc} 中的每一个元素 S_{ij} 反映了从考察参数 c 的误差到待估参数 x 的误差放大的倍数。

第十五章 关于天地基网联合定轨问题

§15.1 天基网简介

1. 天基网的组成

天基网的建设是为了部分的代替全球布站的地面测控站。目前的天基系统主要有两类，一类是跟踪与数据中继卫星系统 (Tracking and Data Relay Satellite System)，是以数据中继为主要任务的综合航天测控系统；另一类是导航定位系统，包括全球导航系统和区域导航系统，可为航天器和地面目标提供高精度定位、测速和定时能力。

中继星系统是天基系统的重要组成部分。数据中继卫星是转发地面站对中、低轨道运载器以及航天器测控信号和数据的地球同步轨道通讯卫星，它相当于把地面上的测控站升高到地球同步轨道高度，三颗数据中继卫星便能形成全球测控的天基网。利用以数据中继卫星系统为主建设的天地一体化测控网，不仅能有效地提高网的测控覆盖率、定轨精度、导弹全程测量和同时多目标测控能力，而且能够完成各类对地观测卫星的高速实时数据传输的任务。目前美国的 TDRSS 包括 6 颗在轨工作的中继星，在 1998 年增加了关岛地面终端站后实现了中低轨卫星 100% 的轨道覆盖率。

导航定位系统是天基测控网的另一重要组成部分。美国的全球定位系统 GPS(Global Position System) 在建成后得到了广泛的应用，俄罗斯也建立了 GLONASS 系统，欧洲则积极推进 Galileo 计划，为航天器的导航提供定位服务。导航定位系统可以全天候实时地为地面到 36000km 高度之间的航天器提供高精度的定位（位置、速度和时间）服务。目前美国 GPS 系统包括 24 颗在轨工作的高度为 20000km 的导航卫星，全球 5 个监视站，在本土有一个主控站。它的主要优点是简化地面测控站从而降低成本，可实现轨道自主保持和近实时的轨道修正，减少跟踪系统的许多误差源，对中低轨卫星观测几何好、跟踪时间长等。

从测轨角度而言，利用这类高轨卫星星座对低轨卫星进行跟踪定轨，那么这类星座的每颗卫星就相当于一个空间测量站，整个星座就相当于一个天基测控网，相应的定轨体制即天基网定轨。

除上述两种星座系统外，随着卫星应用需求的日益发展，越来越多的飞行任务要靠多颗卫星组成的星座来实现，特别是一些星与星之间距离较近的星座。对于这类星座，与 GPS 星座不同，地面测控系统可对其中几颗或一颗（均称为测量星）进行跟踪测量定轨，而其他星则由星-星（测量星和用户星）间的相对测量数据进行定轨，或将地面测量资料和星-星相对测量资料一并对上述测量星和用户星同时进行定轨。对于星间跟踪而言，测量星就相当于空间测控站。这种定轨形式就称为天基网和地基网联合定轨。

2. 天基网测轨体制

天基网系统的测量类型一般是测距和测速资料。

(1) 中继星系统对用户航天器的测轨

中继星系统对用户航天器提供测距测速跟踪，其中双向测距测速用于确定用户航天器轨道。对用户航天器的双向测距测速过程是由地面终端站发出伪码测距、测速信号，经中继星到用户航天器的前向链路到达用户航天器，用户航天器相关转发，再经中继星到达地面终端站，由伪码相关技术测得地面-中继星-用户航天器的双向距离及其变化率，从中“扣除”中继星到地面终端站的位置、速度，就可以得到用户航天器到中继星的位置速度。在第二代 TDRSS 中将考虑采用单向测距测速，即由用户航天器发出信标信号，经中继星转发至地面终端站进行数据处理，测速精度可达到 2.5mm/s。

中继星本身的轨道测量可以有几种不同的方法。目前 TDRSS 轨道是由分别在全球的四个地面站构成的系统 BRTS(Bilateration Ranging Transponder System) 测距确定的，精度在 40 ~ 60m。还可以由几何交汇的方法定位，即地面终端站发向中继星的测距信号，一路由中继星直接返回，另两路经

中继星转发到相距很远的无人转发站，信号再次转发通过中继星回到地面终端站。由此测得中继星到地面多个点的距离，可以精确确定中继星的位置。

(2) 导航定位系统对用户航天器的测轨

利用导航定位系统测定用户航天器轨道的方法有两种：一种是伪码测距，另一种是载波相位测量。测量量都可以转化为用户航天器与 GPS 卫星间的距离，可以由接收的导航信息提取出 GPS 卫星的星历实现星上自主定轨。实时性要求不高时也可以将接收的 GPS 信号转发给地面，地面获取 GPS 精密星历处理后得到精度更高轨道解。

(3) 编队组网卫星间的相对测量

星座中卫星之间可建立星间链路进行相对测量，由于在大气层外部，可以减少甚至消除电离层对资料的影响，而起可减轻地面测控系统的负担。同时还可以利用星间相对测量实现星座整网的自主定轨，美国的 GPS BLOCK IIR 卫星就增加星间横向测距能力，即使部分地面站遭到破坏，仍可以在一定时间内维持导航系统的正常工作。

§15.2 天地基网联合定轨的基本原理

航天器采用不同的测控体制，那么就对应着不同的定轨方法。目前基于 GPS 或者 TDRSS 的中低轨用户星采用的是由地面站提供高轨测量星轨道的单纯的天基网定轨模式。由于天基系统的测量星轨道由地面测控系统负责测轨，测量星就相当于测站坐标已知的在空间绕地球运转的观测站，测量星本身的轨道误差就相当于地面站的坐标误差，不同的是它随时间变化，而且由于提供的测量星轨道可能并不对应用户星的测量时刻，测量星的轨道误差会随二者时间差距的增大而增大，这给用户航天器的轨道确定带来一个新的并且可能是比较大的误差源，从而在一定程度上限制了这种定轨模式的应用。

鉴于上述原因，可采用测量星与用户航天器联合定轨的方法来提高定轨精度，但这必须同时有地面站对测量星的采样资料，故称之为天地基网联合定轨。一个中低轨星座中星-星相对测量与地面站对星座中一颗或几颗星（相当于测量星）的采样资料进行联合定轨亦是基于同一原理。下面将以测距资料为例，对天地基网联合定轨的基本原理加以阐明。

测量资料有两种，即地面测控网对测量星和测量星对用户星的测距资料 ρ_1 和 ρ_2 ，状态量为 X ，有

$$X = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (3.186)$$

其中 σ_1 和 σ_2 分别为测量星和用户星的轨道量，可以是坐标矢量和速度矢量，亦可以是轨道根数。

状态微分方程的形式与单星类似，即

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, t) \\ t_0, \quad X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (3.187)$$

观测量仍记为 Y ，测量方程为

$$Y = H(X, t) + V \quad (3.188)$$

对于 ρ 资料，有

$$\rho_1 = H_1(t, X) + V_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_e| + V_1 \quad (3.189)$$

$$\rho_2 = H_2(t, X) + V_2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| + V_2 \quad (3.190)$$

这里 \vec{r}_e 是地面站的位置矢量，相应的条件方程为

$$y = Bx + V \quad (3.191)$$

这里 y 是残差, x 是待估状态量 X_0 的改正值, 即

$$y = Y_o - Y_c = \rho_o - \rho_c \quad (3.192)$$

其中 Y_o 和 Y_c 分别是观测量的测量值和计算值。对于 ρ 资料, 矩阵 B 的具体形式为

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial(\vec{r}_1, \vec{r}_e)} \right) & \left(\frac{\partial(\vec{r}_1, \vec{r}_e)}{\partial X} \right) & \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right) \\ \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial(\vec{r}_2, \vec{r}_1)} \right) & \left(\frac{\partial(\vec{r}_2, \vec{r}_1)}{\partial X} \right) & \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right) \end{pmatrix} \quad (3.193)$$

如果地面测站坐标不参予定轨, 上式可写为

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \vec{r}_1} \right) & \left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial X} \right) & \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right) \\ \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial(\vec{r}_2, \vec{r}_1)} \right) & \left(\frac{\partial(\vec{r}_2, \vec{r}_1)}{\partial X} \right) & \left(\frac{\partial X}{\partial X_0} \right) \end{pmatrix} \quad (3.194)$$

这里涉及的各项表达式的具体形式不再列出, 与前面单星情况无实质性差别。

根据上述定轨原理的介绍可知, 天地基网联合定轨的计算过程, 与单星定轨类似, 读者在阅读前面三章后是不难理解的。这里要说明一点, 如果对测量星没有地面站的支持, 单靠星-星之间的相对测距资料, 是无法定轨的。在上述定轨计算过程中反映出的是迭代过程发散, 它对应一个亏秩问题, 直观上亦容易理解, 即从轨道几何上看, 两星的轨道发生整体漂移, 因它们与地面无任何联系, 轨道面当然不确定, 亏秩问题也正是出现在 B 矩阵中的 Ω 元素上, 下一节将给出证明。

§15.3 自主定轨中的亏秩问题

这里要讨论的是仅利用星-星之间的相对测距资料能否定轨问题, 测量方程即 (3.190) 式, 相应的 B 矩阵即 (3.194) 中的 B_2 , 而且为了清楚地了解问题所在, 待估状态量 X 仅限于两颗卫星的 Kepler 根数 $\sigma = (a, e, i, \Omega, \omega, M)^T$, 有

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_2}{\partial(\vec{r}_2, \vec{r}_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial(\vec{r}_2, \vec{r}_1)}{\partial(\sigma_2, \sigma_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial(\sigma_2, \sigma_1)}{\partial(\sigma_{20}, \sigma_{10})} \end{pmatrix} \quad (3.195)$$

其中

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_2}{\partial(\vec{r}_2, \vec{r}_1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_2} ((x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1), -(x_2 - x_1), -(y_2 - y_1), (z_2 - z_1)) \quad (3.196)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\partial(\vec{r}_2, \vec{r}_1)}{\partial(\sigma_2, \sigma_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \sigma_2} \right) & (0)_{3 \times 6} \\ (0)_{3 \times 6} & \left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \sigma_1} \right) \end{pmatrix} \\ \left(\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \sigma_2} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{r}_2}{a_2} & H_2 \vec{r}_2 + K_2 \dot{\vec{r}}_2 & \frac{z_2}{\sin i_2} \hat{R}_2 & \vec{\Omega}_2 & \hat{R}_2 \times \vec{r}_2 & \frac{1}{n_2} \dot{\vec{r}}_2 \end{pmatrix} \\ \left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \sigma_1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{r}_1}{a_1} & H_1 \vec{r}_1 + K_1 \dot{\vec{r}}_1 & \frac{z_1}{\sin i_1} \hat{R}_1 & \vec{\Omega}_1 & \hat{R}_1 \times \vec{r}_1 & \frac{1}{n_1} \dot{\vec{r}}_1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.197)$$

而状态转移矩阵 $\left(\frac{\partial(\sigma_2, \sigma_1)}{\partial(\sigma_{20}, \sigma_{10})}\right)$ 只要取无摄部分即可。有

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial(\sigma_2, \sigma_1)}{\partial(\sigma_{20}, \sigma_{10})}\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_{20}}\right) & (0)_{6 \times 6} \\ (0)_{6 \times 6} & \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_{10}}\right) \end{pmatrix} + O(\varepsilon) \\ \left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_{20}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3n_2}{2a_2}\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_{10}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3n_1}{2a_1}\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.198)$$

(3.197) 式和 (3.198) 式中的有关量（去掉两星根数的下标“1”或“2”）为

$$\left\{ \begin{array}{l} H = -\frac{a}{p}(\cos E + e), \quad K = \frac{\sin E}{n}(1 + \frac{r}{p}) \\ p = a(1 - e^2), \quad n = \sqrt{\mu}a^{-3/2}, \quad \mu = GE \end{array} \right. \quad (3.199)$$

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix} \quad (3.200)$$

其中 E 是偏近点角， $\mu = GE$ 是地心引力常数。(3.198) 式右端 $O(\varepsilon)$ 即受摄部分，它对要讨论的亏秩问题无实质性影响。

经简单运算，即可给出一次星间测距采样所对应的矩阵 B_2 的 1 行 12 列的 12 个元素如下：

$$B_2 = \frac{1}{\rho_2} (B_{1,1} \quad B_{1,2} \quad \cdots \quad B_{1,6} \quad B_{1,7} \quad \cdots \quad B_{1,12}) \quad (3.201)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{1,1} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \left(\frac{\vec{r}_2}{a_2} \right) + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \left(\frac{\dot{\vec{r}}_2}{n_2} \right) \left(-\frac{3n_2}{2a_2} \Delta t \right) \\ B_{1,2} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) (H_2 \vec{r}_2 + K_2 \dot{\vec{r}}_2) \\ B_{1,3} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \left(\frac{z_2}{\sin i_2} \hat{R}_2 \right) \\ B_{1,4} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \vec{\Omega}_2 \\ B_{1,5} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) (\hat{R}_2 \times \vec{r}_2) \\ B_{1,6} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \left(\frac{\dot{\vec{r}}_2}{n_2} \right) \end{array} \right. \quad (3.202)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{1,7} = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \left(\frac{\vec{r}_1}{a_1} \right) - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \left(\frac{\dot{\vec{r}}_1}{n_1} \right) \left(-\frac{3n_1}{2a_1} \Delta t \right) \\ B_{1,8} = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) (H_1 \vec{r}_1 + K_1 \dot{\vec{r}}_1) \\ B_{1,9} = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \left(\frac{z_1}{\sin i_1} \hat{R}_1 \right) \\ B_{1,10} = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \vec{\Omega}_1 \\ B_{1,11} = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) (\hat{R}_1 \times \vec{r}_1) \\ B_{1,12} = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \left(\frac{\dot{\vec{r}}_1}{n_1} \right) \end{array} \right. \quad (3.203)$$

以上 $B_{1,4}$ 和 $B_{1,10}$ 两项, 根据 $\vec{\Omega}_2$ 和 $\vec{\Omega}_1$ 的表达式 (3.200) 即可分别写为下列形式

$$\begin{cases} B_{1,4} &= x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ B_{1,10} &= -(x_1 y_2 - y_1 x_2) = -B_{1,4} \end{cases} \quad (3.204)$$

由此可知, B 矩阵中关于根数 Ω_2 和 Ω_1 的两列元素的绝对值是严格相等的, 即该矩阵是亏秩的, 故在上述自主定轨中相应的 (12×12) 阶方阵 $B^T B$ 的行列式将满足 $|B^T B| = 0$, 无法定轨, 此即亏秩问题及其对应的轨道几何特征 — 两星轨道的整体漂移。

关于这一问题, 参考文献 [20] 有过一些初步探讨。

第十六章 协方差分析

§16.1 协方差分析的提出

在精密定轨（包括轨道确定和参数确定）及导航中引用的估计算法的构成设计及其性能都依赖于相应的动力系统模型和观测模型的精度。尤其在精密轨道确定的算法设计中，通常是从确定重要误差源及其统计描述入手，而如下几个方面是必须要考虑的：

- (1) 力模型和测量模型的精度，
- (2) 随机误差的统计特性，
- (3) 非估值的测量模型和力模型参数的取值精度，
- (4) 计算过程的舍入误差和截断误差等诸方面，

这些都会使得估值精度降低甚至导致过程发散。

估值精度对这些误差源的敏感性通常是在协方差分析 (Consider Covariance analysis) 这个框架下考虑的。首先要考虑非估值常数、动力学模型和测量模型参数的影响，这方面的误差会引起系统误差（导致有偏估计）；还要考虑统计误差的影响，包括数据噪声方差和先验值误差方差等。

考察协方差分析是用于评估某些参数不参予估计对估值精度影响的一种手段。那些参数不参予估值的原因是：

- (1) 使用尽量少的估值参数组合以使得计算机占用内存和计算时间等方面的付出更有效；
- (2) 高维数的参数组合不一定都能从短时间内获得的测量数据中解算出来。

考察协方差分析是一种工具，它可用来对给出的估值问题进行敏感性分析以及确定最佳参数组合，或者在存在动力学或测量模型参数误差的情况下构建一种具有稳健性能的估值算法。可以说协方差分析是分析误差对一个动力学系统状态估值精度影响的产物。这些误差表现在如下几个方面：

- (1) 一种估值算法计算结果给出的残差较大；
- (2) 序贯处理算法的递推发散；
- (3) 基于乐观的状态误差协方差阵而作出的非精确的导航结论。

综上所述，一般情况下，考查协方差分析将对以下几个方面进行考察：

- (1) 非估值常参数 C （即各种物理或几何参数）在估计中被忽略的不准确性；
- (2) 对于估值 x （前面几章中的状态量 X ，或状态量的改正值 x ）的不正确的先验协方差；
- (3) 对于测量噪声 V 的不正确的先验协方差。

在各种影响中，非估值模型参数的误差引起的系统误差（Bias）的影响是最重要的，下面的内容将予以重点讨论。

出现于动力学模型或测量模型中的常数参数的误差可能具有一定的先验随机分布。然而，在任何一个估值过程中，这些误差都是未知的常数，因此，必须作为系统差加以处理。在估值过程中，对系统误差的处理有以下三种方式：

- (1) 忽略：在系统状态量的估计中忽略动力学模型和测量模型中非待估参数的误差，
- (2) 估计：将含有误差的动力学模型参数和测量模型参数与系统状态量同时进行估计，
- (3) 考察：在非估值参数是常数且它们的先验值和先验误差方差阵已知的前提下，只对系统状态量进行估计，但将非估值参数的不准确性包含到估计误差方差阵中加以考察。

§16.2 考察协方差矩阵及其计算公式

考察如下一个可分开的状态向量 z 和测量矩阵 H

$$z = \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}, \quad H = (H_x \quad H_c) \quad (3.205)$$

这里 x 是 n 维待估状态向量 (即前面几章中的状态量 X , 或状态量的改正值 x), c 是 q 维动力学模型参数和测量模型参数向量, 这些参数的值是有误差的, 但却不予估值。考虑到精密定轨中的线性化处理过程, 与状态量处理类似, 这里 c 亦表示考察参数 (Consider paremeters) 的真值 C 与先验值 C^* 之差, 即

$$c = C - C^* \quad (3.206)$$

在此前提下测量模型可写为

$$y = H_x x + H_c c + V \quad (3.207)$$

参照前面第 14 章所述精密定轨常用的估计算法给出的过程, 同样可给出考察估计算法的有关公式, 表述如下。

考虑下列线性系统:

$$\begin{cases} x_l = \Phi_{l,0} x_0 \\ y_l = H_x x_l + H_c c_l + V_l \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots, k \quad (3.208)$$

其中根据观测序列得到的残差 (即观测量的测量值与理论值之差, 见 (3.2) 式) 序列 y_1, y_2, \dots, y_k 对应时间序列 t_1, t_2, \dots, t_k , x_0 是 n 维待估状态向量, 对应时刻 $t_0, (t_0 \in [t_0, t_k])$, x 是系统状态量 (n 维), $\Phi_{l,0}$ 是 $n \times n$ 维状态转移矩阵。观测残差 y 是 m 维随机向量, H_x 是系统状态量 x 的 $m \times n$ 维系数矩阵, H_c 是考察参数 c 的 $m \times q$ 维系数矩阵, H_x 和 H_c 统称为测量矩阵。 V_l 为测量噪声, 假定均值为零, 且有方差矩阵:

$$\begin{cases} EV_l V_l^T = R_l \quad (R_l > 0) \\ EV_l V_s^T = 0 \quad (l \neq s) \end{cases} \quad (3.209)$$

假定已知上述线性系统 (3.208) 式中待估状态量 x_0 的先验值 \bar{x}_0 和相应的先验误差方差阵 \bar{P}_{x_0} 以及考察参数 c 的先验值 \bar{c} , 于是有

$$\bar{x}_0 = x_0 + \eta, \quad \bar{c} = c + \beta \quad (3.210)$$

误差 η 和 β 具有如下统计特性:

$$\begin{cases} E[\eta] = E[\beta] = 0 \\ E[\eta \eta^T] = \bar{P}_{x_0} \\ E[\beta \beta^T] = \bar{P}_{cc} \\ E[\eta \varepsilon^T] = E[\beta \varepsilon^T] = 0 \\ E[\eta \beta^T] = \bar{P}_{x_0 c} \end{cases} \quad (3.211)$$

综上所述, 由 (3.205)~(3.211) 式可得到类似于 (3.1) 式的基本方程:

$$\tilde{y} = \tilde{B}_z z + \tilde{V}; \quad \tilde{V} \sim (0, \tilde{R}) \quad (3.212)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y} = \begin{pmatrix} y \\ \bar{x}_0 \\ \bar{c} \end{pmatrix}; \quad \tilde{B}_z = \begin{pmatrix} \tilde{B}_x & H_c \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ z = \begin{pmatrix} x_0 \\ c \end{pmatrix}; \quad \tilde{B}_{xl} = H_{xl}\Phi_{l,0}, \quad l = 1, 2, \dots, k \\ \tilde{V} = \begin{pmatrix} V \\ \eta \\ \beta \end{pmatrix}; \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & \bar{P}_{x_0} & \bar{P}_{x_0c} \\ 0 & \bar{P}_{cx_0} & \bar{P}_{cc} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.213)$$

根据前面第 14 章所述加权最小二乘估计的有关结论,并指定权矩阵为先验协方差矩阵的逆 \tilde{R}^{-1} , 可直接给出线性系统 (3.212) 式中 z 的加权最小二乘估计 \hat{z} 为

$$\hat{z} = \left(\tilde{B}_z^T \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_z \right)^{-1} \left(\tilde{B}_z^T \tilde{R}^{-1} \tilde{y} \right) \quad (3.214)$$

相应的估计误差方差阵是

$$P_z = E[(\hat{z} - z)(\hat{z} - z)^T] = (\tilde{B}_z^T \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_z)^{-1} \quad (3.215)$$

(3.214) 和 (3.215) 式都可以写成分块形式, 以便分离出我们关心的部分。首先定义

$$\tilde{R}^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{x_0x_0} & \bar{M}_{x_0c} \\ 0 & \bar{M}_{cx_0} & \bar{M}_{cc} \end{pmatrix} \quad (3.216)$$

根据

$$\tilde{R}\tilde{R}^{-1} = I \quad (3.217)$$

可以证明下列各式是成立的,

$$\bar{M}_{x_0x_0} = \bar{P}_{x_0}^{-1} + \bar{P}_{x_0}^{-1} \bar{P}_{x_0c} \bar{M}_{cc} \bar{P}_{cx_0} \bar{P}_{x_0}^{-1} = (\bar{P}_{x_0} - \bar{P}_{x_0c} \bar{P}_{cc}^{-1} \bar{P}_{cx_0})^{-1} \quad (3.218)$$

$$\bar{M}_{x_0c} = -(\bar{P}_{x_0} - \bar{P}_{x_0c} \bar{P}_{cc}^{-1} \bar{P}_{cx_0})^{-1} \bar{P}_{x_0c} \bar{P}_{cc}^{-1} = -\bar{M}_{x_0x_0} \bar{P}_{x_0c} \bar{P}_{cc}^{-1} \quad (3.219)$$

$$\bar{M}_{cx_0} = -(\bar{P}_{cc} - \bar{P}_{cx_0} \bar{P}_{x_0}^{-1} \bar{P}_{x_0c})^{-1} \bar{P}_{cx_0} \bar{P}_{x_0}^{-1} = \bar{M}_{x_0c}^T \quad (3.220)$$

$$\bar{M}_{cc} = (\bar{P}_{cc} - \bar{P}_{cx_0} \bar{P}_{x_0}^{-1} \bar{P}_{x_0c})^{-1} \quad (3.221)$$

从 (3.214) 式可以得出下式:

$$(B_z^T \tilde{R}^{-1} B_z) \hat{z} = B_z^T \tilde{R}^{-1} \tilde{y} \quad (3.222)$$

或

$$\begin{pmatrix} (B_x^T R^{-1} B_x + \bar{M}_{x_0x_0}) & (B_x^T R^{-1} H_c + \bar{M}_{x_0c}) \\ (H_c^T R^{-1} B_x + \bar{M}_{cx_0}) & (H_c^T R^{-1} H_c + \bar{M}_{cc}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{0c} \\ \hat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x^T R^{-1} y + \bar{M}_{x_0x_0} \bar{x}_0 + \bar{M}_{x_0c} \bar{c} \\ H_c^T R^{-1} y + \bar{M}_{cx_0} \bar{x}_0 + \bar{M}_{cc} \bar{c} \end{pmatrix} \quad (3.223)$$

将上式改写成

$$\begin{pmatrix} M_{x_0x_0} & M_{x_0c} \\ M_{cx_0} & M_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{0c} \\ \hat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{x_0} \\ N_c \end{pmatrix} \quad (3.224)$$

即

$$\begin{cases} M_{x_0x_0} \hat{x}_{0c} + M_{x_0c} \hat{c} = N_{x_0} \\ M_{cx_0} \hat{x}_{0c} + M_{cc} \hat{c} = N_c \end{cases} \quad (3.225)$$

其中

$$\begin{cases} M_{x_0x_0} &= B_x^T R^{-1} B_x + \bar{M}_{x_0x_0} \\ M_{x_0c} &= B_x^T R^{-1} H_c + \bar{M}_{x_0c} \\ M_{cx_0} &= H_c^T R^{-1} B_x + \bar{M}_{cx_0} = M_{cx_0}^T \\ M_{cc} &= H_c^T R^{-1} H_c + \bar{M}_{cc} \\ N_{x_0} &= B_x^T R^{-1} y + \bar{M}_{x_0x_0} \bar{x}_0 + \bar{M}_{x_0c} \bar{c} \\ N_c &= H_c^T R^{-1} y + \bar{M}_{cx_0} \bar{x}_0 + \bar{M}_{cc} \bar{c} \end{cases} \quad (3.226)$$

由 (3.225) 式得到

$$\hat{x}_{0c} = M_{x_0x_0}^{-1} N_{x_0} - M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c} \hat{c} \quad (3.227)$$

将 (3.227) 式代入 (3.225) 式的第 2 式, 得出如下结论:

$$M_{cx_0} (M_{x_0x_0}^{-1} N_{x_0} - M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c} \hat{c}) + M_{cc} \hat{c} = N_c$$

或

$$(M_{cc} - M_{cx_0} M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c}) \hat{c} = N_c - M_{cx_0} M_{x_0x_0}^{-1} N_{x_0}$$

以及

$$\hat{c} = (M_{cc} - M_{cx_0} M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c})^{-1} (N_c - M_{cx_0} M_{x_0x_0}^{-1} N_{x_0}) \quad (3.228)$$

由 (3.228) 式可得到 \hat{c} , 再代入 (3.227) 式即得到 \hat{x}_{0c} 。

由 (3.215) 式给出的 \hat{x}_{0c} 和 \hat{c} 的误差方差阵可以写成分块形式:

$$\begin{pmatrix} P_{x_0x_0} & P_{x_0c} \\ P_{cx_0} & P_{cc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{x_0x_0} & M_{x_0c} \\ M_{cx_0} & M_{cc} \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.229)$$

其中 $M_{x_0x_0}, M_{cx_0}, M_{x_0c}, M_{cc}$ 由 (3.226) 式定义。由方程

$$\begin{pmatrix} M_{x_0x_0} & M_{x_0c} \\ M_{cx_0} & M_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{x_0x_0} & P_{x_0c} \\ P_{cx_0} & P_{cc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (3.230)$$

可以证明

$$P_{cx_0} = -M_{cc}^{-1} M_{cx_0} P_{x_0x_0} \quad (3.231)$$

$$P_{x_0c} = -M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c} P_{cc} \quad (3.232)$$

$$P_{x_0x_0} = (M_{x_0x_0} - M_{x_0c} M_{cc}^{-1} M_{cx_0})^{-1} \quad (3.233)$$

$$P_{cc} = (M_{cc} - M_{cx_0} M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c})^{-1} \quad (3.234)$$

证明中注意到

$$P_{x_0c} = P_{cx_0}^T \quad (3.235)$$

为了把 $P_{x_0x_0}$ 写成另外一种形式, 这里引入一个定理 (证明从略)。

定理: 如果 A 是正定矩阵, 秩为 n , 矩阵 B 和 C 是使得 BC 的秩为 n 的任意矩阵, 那么

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (I + CA^{-1} B)^{-1} CA^{-1}.$$

这里定义

$$\begin{aligned} A &= M_{x_0x_0} \\ B &= -M_{x_0c} M_{cc}^{-1} \\ C &= M_{cx_0} \end{aligned}$$

可以证明

$$P_{x_0x_0} = M_{x_0x_0}^{-1} + M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c} (M_{cc} - M_{cx_0} M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c})^{-1} M_{cx_0} M_{x_0x_0}^{-1} \quad (3.236)$$

如果定义

$$P_{x_0} = M_{x_0x_0}^{-1} = (B_x^T R^{-1} B_x + \bar{M}_{x_0x_0})^{-1} \quad (3.237)$$

和

$$S_{x_0c} = -M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c} \quad (3.238)$$

并利用 (3.234) 式, 可以将 (3.236) 改写成下列形式:

$$P_{x_0x_0} = P_{x_0} + S_{x_0c} P_{cc} S_{x_0c}^T \quad (3.239)$$

同样, 由 (3.232) 式和 (3.239) 式可得到

$$P_{x_0c} = S_{x_0c} P_{cc} = P_{cx_0}^T \quad (3.240)$$

利用 (3.234)、(3.237) 和 (3.239) 式可以将 (3.227) 和 (3.228) 式写成

$$\hat{x}_{0c} = P_{x_0} N_{x_0} + S_{x_0c} \hat{c} \quad (3.241)$$

$$\hat{c} = P_{cc} (N_c + S_{x_0c}^T N_{x_0}) \quad (3.242)$$

根据上述处理, 不需要直接计算 \hat{c} 和 P_{cc} , 而根据先验值 \bar{c} 和 \bar{P}_{cc} 加以修正即可得到考察估计。在这种情况下, 需要修改的方程有

$$P_{cc} = \bar{P}_{cc} \quad (3.243)$$

$$P_{x_0x_0} = P_{x_0} + S_{x_0c} \bar{P}_{cc} S_{x_0c}^T \quad (3.244)$$

$$P_{x_0c} = S_{x_0c} \bar{P}_{cc} \quad (3.245)$$

$$\hat{x}_{0c} = P_{x_0} N_{x_0} + S_{x_0c} \bar{c} \quad (3.246)$$

状态向量和考察参数的先验协方差矩阵 \bar{P}_{x_0c} 通常是未知的, 假定是空矩阵。这种情况下 $\bar{P}_{x_0c} = 0$, (3.226) 式退化成下列形式:

$$M_{x_0x_0} = B_x^T R^{-1} B_x + \bar{P}_{x_0}^{-1} \equiv P_{x_0}^{-1} \quad (3.247)$$

$$M_{x_0c} = B_x^T R^{-1} H_c \quad (3.248)$$

于是

$$S_{x_0c} = -M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c} \quad (3.249)$$

简化成

$$S_{x_0c} = -P_{x_0} B_x^T R^{-1} H_c \quad (3.250)$$

现将批处理考察估计算法的计算公式总结如下:

给定 $\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{P}_{x_0}, \bar{P}_{x_0c}, \bar{P}_{cc}, R_l, H_{x_0l}, H_{cl}$ 和 $y_l, (l = 1, 2, \dots, k)$ 并分别由 (3.218)、(3.219) 和 (3.221) 式给出 $\bar{M}_{x_0x_0}, \bar{M}_{x_0c}$ 和 \bar{M}_{cc} , 计算

$$\begin{aligned} M_{x_0x_0} &= B_x^T R^{-1} B_x + \bar{M}_{x_0x_0} \\ &= \sum_{l=1}^k H_{x_0l}^T R_l^{-1} H_{x_0l} + \bar{M}_{x_0x_0} \equiv P_{x_0}^{-1} \end{aligned} \quad (3.251)$$

$$\begin{aligned}
M_{x_0c} &= B_x R^{-1} H_c + \bar{M}_{x_0c} \\
&= \sum_{l=1}^k H_{x_0l}^T R_l^{-1} H_{cl} + \bar{M}_{x_0c}
\end{aligned} \tag{3.252}$$

$$M_{cx_0} = M_{x_0c}^T \tag{3.253}$$

$$M_{cc} = \sum_{l=1}^k H_{cl}^T R_l^{-1} H_{cl} + \bar{M}_{cc} \tag{3.254}$$

$$P_{x_0} = M_{x_0x_0}^{-1} \tag{3.255}$$

$$S_{x_0c} = -P_{x_0} M_{x_0c} \tag{3.256}$$

$$N_{x_0} = \sum_{l=1}^k H_{x_0l}^T R_l^{-1} y_l + \bar{P}_{x_0}^{-1} \bar{x}_0 \tag{3.257}$$

$$\hat{x}_{0c} = M_{x_0x_0}^{-1} N_{x_0} - M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c} \bar{c} \tag{3.258}$$

$$P_{x_0x_0} = P_{x_0} + S_{x_0c} \bar{P}_{cc} S_{x_0c}^T \tag{3.259}$$

$$P_{x_0c} = S_{x_0c} \bar{P}_{cc} = P_{cx_0}^T \tag{3.260}$$

方程 (3.259) 同样可以写成

$$P_{x_0x_0} = P_{x_0} + P_{x_0c} \bar{P}_{cc} P_{x_0c}^T \tag{3.261}$$

完整的考察协方差矩阵可以写成

$$P_c = E \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x}_{0c} - x_0 \\ \bar{c} - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{x}_{0c} - x_0)^T & (\bar{c} - c)^T \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} P_{x_0x_0} & P_{x_0c} \\ P_{cx_0} & \bar{P}_{cc} \end{pmatrix} \tag{3.262}$$

其中 $P_{x_0x_0}$ 是估值状态参量 x_0 对应的考察协方差。

注意到 \hat{x}_{0c} 的表达式同样可以写成

$$\hat{x}_{0c} = P_{x_0} N_{x_0} - P_{x_0} M_{x_0c} \bar{c} \tag{3.263}$$

$$\hat{x}_{0c} = \hat{x}_0 - P_{x_0} M_{x_0c} \bar{c} \tag{3.264}$$

或由 (3.248) 式得到

$$\hat{x}_{0c} = \hat{x}_0 - P_{x_0} B_x^T R^{-1} H_c \bar{c} \tag{3.265}$$

其中 \hat{x}_{0c} 和 P_{x_0} 是由批处理过程得到的, 此批处理过程假定考察参数是没有误差的 (即 $C^* = C$, 且 $P_{x_0c}, \bar{P}_{cc}, c$ 和 \bar{c} 均为零值)。

§16.3 敏感矩阵和扰动矩阵

与考察协方差分析相联系的还有两个矩阵, 敏感矩阵 (sensitivity matrix) 和扰动矩阵 (perurbation matrix)。敏感矩阵定义为

$$S_{x_0c} = \partial \hat{x}_{0c} / \partial c \tag{3.266}$$

根据 (3.227) 式有

$$S_{x_0c} = -M_{x_0x_0}^{-1} M_{x_0c} \tag{3.267}$$

从 (3.247) 式得到

$$S_{x_0c} = -P M_{x_0c} \tag{3.268}$$

利用 (3.248) 式, S_{x_0c} 可写成

$$S_{x_0c} = -PB_x^T R^{-1} H_c \quad (3.269)$$

因此, (3.264) 式可写成

$$\hat{x}_{0c} = \hat{x}_0 + S_{x_0c} \bar{c} \quad (3.270)$$

回顾 (3.259) 式, 考察协方差 $P_{x_0x_0}$ 可用敏感矩阵表达为

$$P_{x_0x_0} = P_{x_0} + S_{x_0c} \bar{P}_{cc} S_{x_0c}^T \quad (3.271)$$

同样, 利用 (3.260) 式, 协方差 P_{x_0c} 可写成

$$P_{x_0c} = S_{x_0c} \bar{P}_{cc} \quad (3.272)$$

敏感矩阵描述了 \hat{x}_{0c} 是如何随考察参数 c 的变化而变化的。另一个常用的矩阵是扰动矩阵, 定义为

$$\Gamma = S_{x_0c} \cdot (\text{diagonal}(\sigma_c)) \quad (3.273)$$

这里对角阵的元素是考察参数的标准差。每个元素 Γ_{ij} 给出了由于考察参数 c_j 的 1σ 误差而导致 x_{0i} 的估值的误差状况。

§16.4 观测噪声和先验状态方差误差对批处理的影响

数据噪声和先验状态方差矩阵中的误差对批处理产生的影响可以按照如下方法进行计算。假定在批处理算法中这些矩阵的值与真值 (以符号 $()^*$ 注明) 的差别用矩阵 δ 表示:

$$R^* = R + \delta R \quad (3.274)$$

$$\bar{P}_0^* = \bar{P}_0 + \delta \bar{P}_0 \quad (3.275)$$

根据 (3.159) 式,

$$\hat{x}_0 = (B^T R^{-1} B + \bar{P}_0^{-1})^{-1} (B^T R^{-1} y + \bar{P}_0^{-1} \bar{x}) \quad (3.276)$$

其中

$$\bar{x}_0 = x_0 + \eta \quad (3.277)$$

$$y = Bx_0 + \varepsilon \quad (3.278)$$

和

$$\begin{cases} E[\eta\eta^T] = \bar{P}_0^* \\ E[\varepsilon\varepsilon^T] = R^* \end{cases} \quad (3.279)$$

利用先验值 R 和 \bar{P}_0 计算估计误差协方差的过程如下

$$\hat{x}_0 = [B^T R^{-1} B + \bar{P}_0^{-1}]^{-1} [B^T R^{-1} (Bx_0 + \varepsilon) + \bar{P}_0^{-1} (x_0 + \eta)] \quad (3.280)$$

或

$$\hat{x}_0 - x_0 = [B^T R^{-1} B + \bar{P}_0^{-1}]^{-1} [B^T R^{-1} \varepsilon + \bar{P}_0^{-1} \eta] \quad (3.281)$$

假定 $E[\varepsilon\eta^T] = 0$, 得到

$$\begin{aligned} P_c &= E[(\hat{x}_0 - x_0)(\hat{x}_0 - x_0)^T] \\ &= [B^T R^{-1} B + \bar{P}_0^{-1}]^{-1} [B^T R^{-1} E[\varepsilon\varepsilon^T] R^{-1} B \\ &\quad + [\bar{P}_0^{-1} E[\eta\eta^T] \bar{P}_0^{-1}] [B^T R^{-1} B + \bar{P}_0^{-1}]^{-1} \\ &= P [B^T R^{-1} R^* R^{-1} B + \bar{P}_0^{-1} \bar{P}_0^* \bar{P}_0^{-1}] P \end{aligned} \quad (3.282)$$

代入 R^* 和 \bar{P}_0^* 的表达式 (3.274) 式和 (3.275) 式有

$$P_c = P + P[B^T R^{-1} \delta R R^{-1} B + \bar{P}_0^{-1} \delta \bar{P}_0 \bar{P}_0^{-1}]P \tag{3.283}$$

上式第二项是数据噪声误差和先验状态方差误差对考察协方差的贡献。

本章内容主要取材于参考文献 [18] 的第 6 章。

附录一 后牛顿效应

附录一、二、三尽管不完全为数值法定轨而写，但对卫星精密定轨而言还是有参考价值，作为卫星精密定轨教材，有必要列入。

对于高速运动问题，需要考虑一般引力理论对牛顿力学的修正，该修正通常称为后牛顿 (Post-Newtonian) 改正。对于人造地球卫星的运动，源于地球的一体引力效应，在历元地心天球坐标系中（轨道坐标系亦适用），相应的卫星运动方程中增加一项后牛顿改正，准到一阶后牛顿效应时，有

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{A}_{PN} \quad (4.1)$$

\vec{A}_{PN} 即后牛顿加速度，其表达式如下：

$$\begin{cases} \vec{A}_{PN} = \frac{\mu}{c^2 r^3} \left[(4\frac{\mu}{r} - v^2)\vec{r} + (4r\dot{r})\vec{v} \right] \\ r\dot{r} = \vec{r} \cdot \vec{v} \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $\mu = GM_e$ 是地心引力常数， c 是光速。

运动方程 (4.1) 右端的 \vec{F} 即牛顿力学框架下的右函数，其所包含的内容均已在本书的正文中作过详细介绍。这里增加了后牛顿改正项，其量级为

$$\varepsilon = |\vec{A}_{PN}|/|\vec{F}_0| = O(10^{-9})$$

实为三阶小量，即 $\varepsilon = O(J_2^3)$ 。当定轨弧段 $S = 10^3$ 时，其影响有可能（如果其摄动影响有长期效应）达到 10^{-6} 的量级，因此在米级定轨精度要求下，应考虑这一改正。

对于数值方法而言，改正很简单。而对于分析法定轨，需要将卫星轨道的后牛顿摄动效应中的三阶长期项和二阶长周期项给出，分别记作 $\sigma_3(t - t_0)$ 和 $\sigma_l^{(2)}(t)$ 。但实际上 $\sigma_l^{(2)}(t) = 0$ ，这从 \vec{A}_{PN} 的形式（只有 S, T 分量）和以摄动加速度分量 (S, T, W) 表达的摄动运动方程就可以看出。

三阶长期项 $\sigma_3(t - t_0)$ 的变率 σ_3 由下列各式表达：

$$a_3 = 0 \quad e_3 = 0 \quad i_3 = 0 \quad (4.3)$$

$$\Omega_3 = 0 \quad (4.4)$$

$$\omega_3 = \frac{3\mu}{c^2 p} n \quad (4.5)$$

$$M_3 = -\frac{3\mu}{c^2 p} n \left(3 + \frac{7}{2}e^2 + e^4 \right) (1 - e^2)^{-1} \quad (4.6)$$

右端根数 a, e, i 及 n 均为 $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ 和相应的 $\bar{n}_0 = \sqrt{\mu \bar{a}_0}^{(-3/2)}$ 。

附录二 在持续小喷气动力作用下的轨道变化

人造地球卫星在轨段运行过程中,为了进行轨控和姿控,有持续喷气的过程,相应加速度的量级能达到地球非球形引力 J_2 项加速的量级,但持续时间较短,如 1 分钟(或几分钟)甚至更短。因此,在定轨中往往避开这一人为的变轨过程,但同样需要了解其变化规律。

不妨假定喷气过程达到稳定状态,即处理成均匀加速过程,并分两种情况给出均匀喷气过程中卫星轨道的变化规律:一是径向,横向和轨道面法向均有加速过程,另一种是仅在卫星运动方向上有加速过程。前者有

$$S = \text{const} \quad T = \text{const} \quad W = \text{const} \quad (4.7)$$

而后者只有 U 分量(即切向分量),且

$$U = \text{const} \quad (4.8)$$

1. 喷气加速度 (S, T, W) 三分量导致的卫星轨道变化

长期项 $\sigma_c(t - t_0)$ 的变率 σ_c 的表达式如下:

$$a_c = 2\sqrt{1 - e^2}(T/n) \quad (4.9)$$

$$e_c = -\frac{3\sqrt{1 - e^2}}{2a}e(T/n) \quad (4.10)$$

$$i_c = 0 \quad (4.11)$$

$$\Omega_c = 0 \quad (4.12)$$

$$\omega_c = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{a}(S/n) \quad (4.13)$$

$$M_c = -\left(\frac{3}{a}\right)(S/n) - \frac{3n}{4a}a_c(t - t_0) \quad (4.14)$$

右端出现的根数 a, e 及 n 均为 \bar{a}_0, \bar{e}_0 和 $\bar{n}_0 = \sqrt{\mu\bar{a}_0}^{(-3/2)}$ 。

长周期变化 $\Delta\sigma_l^{(t)} = \sigma_l(t) - \sigma_l(t_0)$ 的表达式为

$$\Delta a_l(t) = 0 \quad (4.15)$$

$$\Delta e_l(t) = 0 \quad (4.16)$$

$$\Delta i_l(t) = -\frac{3}{2a\sqrt{1 - e^2}}e \cos \bar{\omega}_0(W/n)(t - t_0) \quad (4.17)$$

$$\Delta \Omega_l(t) = -\frac{3}{2a\sqrt{1 - e^2} \sin i}e \sin \bar{\omega}_0(W/n)(t - t_0) \quad (4.18)$$

$$\Delta \omega_l(t) = -\cos i \Delta \Omega_l(t) \quad (4.19)$$

$$\Delta M_l(t) = 0 \quad (4.20)$$

各式右端出现的根数 a, e, i 和 n , 其定义同前。

短周期项 $\sigma_s(t)$ 如下:

$$a_s(t) = \frac{2}{n^2} \left[-Se(\cos E + \frac{e}{2}) + T\sqrt{1 - e^2}e \sin E \right] \quad (4.21)$$

$$e_s(t) = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n^2 a} \left\{ -S\sqrt{1 - e^2}(\cos E + \frac{e}{2}) + T \left[(2 - \frac{3}{2}e^2) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right] \right\} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} i_s(t) = & \frac{W}{n^2 a \sqrt{1 - e^2}} \left\{ \left[(1 - \frac{e^2}{2}) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right] \cos \omega \right. \\ & \left. + \sqrt{1 - e^2} \left[\cos E - \frac{e}{4} \cos 2E \right] \sin \omega \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\Omega_s(t) = \frac{W}{n^2 a \sqrt{1-e^2} \sin i} \left\{ \left[\left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right] \sin \omega - \sqrt{1-e^2} \left[\cos E - \frac{e}{4} \cos 2E \right] \cos \omega \right\} \quad (4.24)$$

$$\omega_s(t) = -\cos i \Omega_s(t) - \frac{1}{n^2 a e} \left\{ S(1-e^2)^{3/2} \sin E + T \left[(2-e^2) \cos E - \frac{e}{4} \cos 2E \right] \right\} \quad (4.25)$$

$$M_s(t) = \frac{1}{n^2 a e} \left\{ S \left[\left(1 + 3e^2 - \frac{3}{2}e^4\right) \sin E - \frac{5}{4}e^3 \sin 2E \right] + T \sqrt{1-e^2} \left[2(1+e^2) \cos E - \frac{e}{4}(1+3e^2) \cos 2E \right] \right\} \quad (4.26)$$

各式右端出现的根数 σ 均为平均根数 $\bar{\sigma}$ ， E 是偏近点角。

2. 喷气加速度 U 分量导致的卫星轨道变化

对于这一加速分量， $\dot{\sigma}$ 的右函数中出现 $(1 + 2e \cos f + e^2)^{\pm 1/2}$ 的因子，求解时就会涉及相应的级数展开问题，无法构造对 e 封闭形式的摄动解，既然如此，就将右函数展成 M 的三角级数，取到 e^2 项的结果如下：

长期项 $\sigma_c(t - t_0)$ 的变率为

$$a_c = 2\left(1 - \frac{1}{4}e^2\right)(U/n) \quad (4.27)$$

$$e_c = -\frac{e}{a}(U/n) \quad (4.28)$$

$$i_c = 0 \quad (4.29)$$

$$\Omega_c = 0 \quad (4.30)$$

$$\omega_c = 0 \quad (4.31)$$

$$M_c = -\frac{3}{2a}\left(1 - \frac{1}{4}e^2\right)U(t - t_0) \quad (4.32)$$

短周期项 $\sigma_s(t)$ 为

$$a_s(t) = \frac{2}{n^2} \left[e \sin M + \frac{3}{8}e^2 \sin 2M \right] U \quad (4.33)$$

$$e_s(t) = \frac{2}{n^2 a} \left[(1 - e^2) \sin M + \frac{e}{4} \sin 2M + \frac{e^2}{6} \sin 3M \right] U \quad (4.34)$$

$$i_s(t) = 0 \quad (4.35)$$

$$\Omega_s(t) = 0 \quad (4.36)$$

$$\omega_s(t) = -\frac{2}{n^2 a e} \left[\left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \cos M + \frac{e}{4} \cos 2M + \frac{e^2}{6} \cos 3M \right] U \quad (4.37)$$

$$M_s(t) = \frac{2}{n^2 a e} \left[\cos M + \frac{e}{4} \cos 2M + \frac{e^2}{6} \cos 3M \right] U + \left(\frac{3}{2a}\right) \frac{2}{n^2} \left[e \cos M + \frac{3}{16}e^2 \cos 2M \right] U \quad (4.38)$$

上述各式右端出现的 a, e 及 n 均为平均根数 \bar{a}_0, \bar{e}_0 和 $\bar{n}_0 = \sqrt{\mu \bar{a}_0}^{(-3/2)}$ 。

最后说明一点，当 e 较大时不宜展成 M 的三角级数，特别当 e 值越过 Laplace 极限 (0.6627) 时，展开式无效。如果不展成 M 的三角级数，上述长期项 $\sigma_c(t - t_0)$ 的结果仍相同。

附录三 Hansen 系数的简明表达式

在人造地球卫星的受摄运动中, 对于诸如中心天体 (地球) 非球形引力摄动和第三体引力摄动之类的问题, 由于相应的摄动运动方程显含 t , 在构造运动天体轨道变化的摄动解时, 要将有关量展成平近点角 M 的三角级数, 如下列函数:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mf \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mf \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中 r 是卫星到地心的距离, a 是轨道半长径, f 是真近点角。展成平近点角 M 的三角级数有如下形式 [2]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mf &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^{n,m}(e) \cos pM \\ &= X_0^{n,m}(e) + \sum_{p=1}^{\infty} (X_p^{n,m}(e) + X_{-p}^{n,m}(e)) \cos pM \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mf &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^{n,m}(e) \sin pM \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (X_p^{n,m}(e) - X_{-p}^{n,m}(e)) \sin pM \end{aligned} \quad (4.40)$$

该展开的系数 $X_p^{n,m}(e)$ 即 Hansen 系数, 它是偏心率 e 的无穷级数, 其表达式如下:

$$X_p^{n,m}(e) = (1 + \beta^2)^{-(n+1)} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(pe) X_{p,q}^{n,m}(e) \quad (4.41)$$

$$\beta = \frac{1}{e}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \quad (4.42)$$

$$J_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(q+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{q+2k} \quad (4.43)$$

$$X_{p,q}^{n,m}(e) = \begin{cases} (-\beta)^{(p-m)-q} \binom{n-m+1}{p-m-q} F(p-q-n-1, -m-n-1, p-q-m+1; \beta^2) & q \leq p-m \\ (-\beta)^{q-(p-m)} \binom{n+m+1}{q-p+m} F(q-p-n-1, m-n-1, q-p+m+1; \beta^2) & q \geq p-m \end{cases} \quad (4.44)$$

$$F(a, b, c; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+k-1) \cdot b(b+1) \cdots (b+k-1)}{c(c+1) \cdots (c+k-1)} \left(\frac{x^k}{k!}\right) \quad (4.45)$$

$$\begin{cases} \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} & \binom{-n}{m} = (-1)^m \binom{n+m-1}{m} \\ \binom{n}{-m} = \binom{-n}{-m} = 0 & \binom{n}{0} = \binom{-n}{0} = 1 \end{cases} \quad (4.46)$$

这里的 $J_q(x)$ 和 $F(a, b, c; x)$ 即 Bessel 函数和超几何函数。

根据上述 Hansen 系数的表达式, 要给出展开式 (4.39) 和 (4.40) 的具体形式, 显然涉及到一个比较复杂的过程, 既不利于讨论和分析有关问题, 亦不便于实际计算。因此, 有必要在一定精度意义下给出 Hansen 系数的简明表达式。

首先注意到, $X_p^{m,n}(e)$ 有一个重要性质:

$$X_p^{n,m}(e) = O(e^{|m-p|}) \quad (4.47)$$

因此, 给定 n, m 值后, 根据性质 (4.47) 就可决定展开式 (4.39) 和 (4.40) 求和中 p 取值的范围。对于人造地球卫星 (甚至太阳系中大部分自然天体) 的运动状况, 绝大部分的轨道偏心率都是比较小的, 过去在我们的书中 (见参考文献 [2] 和 [3]) 给出了取到 e^2 项的 $X_p^{n,m}(e)$ 的表达式, 由于展开式 (4.39) 和 (4.40) 的收敛性能不太好, 取到 e^4 项更具有实用价值。为此, 由性质 (4.47) 可知, 展开式 (4.39) 和 (4.40) 的求和中, p 的取值如下:

$$\begin{cases} p = m - 5 + j & j = 1, 2, \dots, 9 \\ |m - p| \leq 4 \end{cases} \quad (4.48)$$

根据上面的分析, 取到 e^4 项, 只涉及 9 个 Hansen 系数, 它们的简明表达式 (e 的多项式) 如下:

$$\begin{aligned} X_{m-4}^{n,m}(e) &= \frac{e^4}{384} \left[n^4 - (18 - 8m)n^3 + (95 - 102m + 24m^2)n^2 \right. \\ &\quad \left. - (142 - 330m + 192m^2 - 32m^3)n + (16m^4 - 120m^3 + 283m^2 - 206m) \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$X_{m-3}^{n,m}(e) = -\frac{e^3}{48} \left[n^3 - (9 - 6m)n^2 + (17 - 33m + 12m^2)n + m(26 - 30m + 8m^2) \right] \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} X_{m-2}^{n,m}(e) &= \frac{e^2}{8} \left[n^2 - (3 - 4m)n + m(4m - 5) \right] \\ &\quad + \frac{e^4}{96} \left[n^4 - (6 - 4m)n^3 - (1 + 3m)n^2 + (22 - 47m + 48m^2 - 16m^3)n \right. \\ &\quad \left. + m(22 - 64m + 60m^2 - 16m^3) \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} X_{m-1}^{n,m}(e) &= -\frac{e}{2}(n + 2m) \\ &\quad - \frac{e^3}{16} \left[n^3 - (1 - 2m)n^2 - (3 - 5m + 4m^2)n - m(2 - 10m + 8m^2) \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$X_m^{n,m}(e) = 1 + \frac{e^2}{4}(n^2 + n - 4m^2) + \frac{e^4}{64} \left[n^4 - 2n^3 - (1 + 8m^2)n^2 + 2n - m^2(9 - 16m^2) \right] \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} X_{m+1}^{n,m} &= -\frac{e}{2}(n - 2m) \\ &\quad - \frac{e^3}{16} \left[n^3 - (1 + 2m)n^2 - (3 + 5m + 4m^2)n + m(2 + 10m + 8m^2) \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} X_{m+2}^{n,m}(e) &= \frac{e^2}{8} \left[n^2 - (3 + 4m)n + m(4m + 5) \right] \\ &\quad + \frac{e^4}{96} \left[n^4 - (6 + 4m)n^3 - (1 - 3m)n^2 + (22 + 47m + 48m^2 + 16m^3)n \right. \\ &\quad \left. - m(22 + 64m + 60m^2 + 16m^3) \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$X_{m+3}^{n,m}(e) = -\frac{e^3}{48} \left[n^3 - (9 + 6m)n^2 + (17 + 33m + 12m^2)n - m(26 + 30m + 8m^2) \right] \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} X_{m+4}^{n,m}(e) &= \frac{e^4}{384} \left[n^4 - (18 + 8m)n^3 + (95 + 102m + 24m^2)n^2 \right. \\ &\quad \left. - (142 + 330m + 192m^2 + 32m^3)n + (16m^4 + 120m^3 + 283m^2 + 206m) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

事实上, 上述 Hansen 系数 $X_{m-k}^{n,m}(e)$ 与 $X_{m+k}^{n,m}(e)$ 还存在如下关系:

$$X_{m-k}^{n,m}(e) = X_{(-m)+k}^{n,(-m)}(e) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.58)$$

因此, 展开式 (4.39) 和 (4.40) 取到 e^4 项时, 实际上只要给出 5 个 Hansen 系数 $X_{m+k}^{n,m}(e)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

利用 (4.49)-(4.57) 式, 很容易给出地球非球形引力主要项摄动和第三体引力摄动中涉及到的如下

六个函数的展开式:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 &= \left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4\right) + \left(3 + \frac{27}{8}e^2\right)e \cos M + \left(\frac{9}{2} + \frac{7}{2}e^2\right)e^2 \cos 2M \\ &\quad + \frac{53}{8}e^3 \cos 3M + \frac{77}{8}e^4 \cos 4M \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{12}e^2\right)e \cos M + \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{41}{48}e^4\right) \cos 2M + \left(\frac{7}{2} - \frac{123}{16}e^2\right)e \cos 3M \\ &\quad + \left(\frac{17}{2} - \frac{115}{6}e^2\right)e^2 \cos 4M + \frac{845}{48}e^3 \cos 5M + \frac{533}{16}e^4 \cos 6M \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2f &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}e^2\right)e \sin M + \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{37}{48}e^4\right) \sin 2M + \left(\frac{7}{2} - \frac{123}{16}e^2\right)e \sin 3M \\ &\quad + \left(\frac{17}{2} - \frac{115}{6}e^2\right)e^2 \sin 4M + \frac{845}{48}e^3 \sin 5M + \frac{533}{16}e^4 \sin 6M \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^2 &= \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) + \left(-2e + \frac{1}{4}e^3\right) \cos M + \left(-\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}e^4\right) \cos 2M \\ &\quad - \frac{1}{4}e^3 \cos 3M - \frac{1}{6}e^4 \cos 4M \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f &= \frac{5}{2}e^2 + \left(-3e + \frac{4}{3}e^3\right) \cos M + \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{11}{8}e^4\right) \cos 2M + \left(e - \frac{19}{8}e^3\right) \cos 3M \\ &\quad + \left(e^2 - \frac{5}{2}e^4\right) \cos 4M + \frac{25}{24}e^3 \cos 5M + \frac{9}{8}e^4 \cos 6M \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2f &= \left(-3e + \frac{23}{12}e^3\right) \sin M + \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{3}{2}e^4\right) \sin 2M + \left(e - \frac{19}{8}e^3\right) \sin 3M \\ &\quad + \left(e^2 - \frac{5}{2}e^4\right) \sin 4M + \frac{25}{24}e^3 \sin 5M + \frac{9}{8}e^4 \sin 6M \end{aligned} \quad (4.64)$$

这里要说明一点, 展开式 (4.39) 和 (4.40) 式的收敛性能并不好, 首先当 $e > e_c = 0.6627 \dots$ 时, 展开式发散, 临界值 e_c 称为 Laplace 极限。因此对展开式截断误差的估计就不像一般二项式 $(1+e)^n$ 展开那么简单, 特别当 $e > 0.2$ 时, 而在 $e < 0.2$ 时, 勉强可用估计式 $O(\varepsilon^{k+1})$ 来表达展开式取到 e^k 项的截断误差, $\varepsilon = \frac{e}{e_c}$ 。

附录四 天文常数

IAU(1976) 天文常数系统

单位：米 (m)、公斤 (Kg) 和秒 (s) 分别为国际单位系统 (SI) 中的长度、质量和时间单位。

定义常数 (Defining constants)

1. 高斯引力常数 (Gaussian gravitational constant)
2. 光速 (Speed of light)
- $k=0.017\ 202\ 098\ 95$
 $c=299\ 792\ 458ms^{-1}$

初始常数 (Primary constants)

3. 一天文单位的光行时间 (Light-time for unit distance)
4. 地球赤道半径 (Equatorial radius for Earth)
5. 地球形状力学因子 (Dynamical form-factor for Earth)
6. 地心引力常数 (Geocentric gravitational constant)
7. 引力常数 (Constant of gravitation)
8. 月球与地球质量比 (Ratio of mass of Moon to that of Earth)
9. 黄经总岁差 (General precession in longitude,per Julian century, at standard epoch 2000)
- $\tau_A=499.004\ 782s$
 $a_e=6378\ 140m$
 $J_2=0.001\ 082\ 63$
 $GE=3.986\ 005\times10^{14}m^3s^{-2}$
 $G=6.672\times10^{-11}m^3Kg^{-1}s^{-2}$
 $\mu=0.012\ 300\ 02$
 $\rho=5029''.0966$
10. 黄赤交角 (Obliquity of the ecliptic,at standard epoch 2000)
- $\varepsilon=23^{\circ}26'21''.448$

推导常数 (Derived constants)

11. 章动常数 (Constant of nutation,at standard epoch 2000)
12. 一天文单位的长度 (Unit distance)
13. 太阳视差 (Solar parallax)
14. 光行差常数 (Constant of aberration,for standard epoch 2000)
- $N=9''.2025$
 $c\tau_A=1.495\ 978\ 70\times10^{11}m$
 $\arcsin(\alpha_c/A)=\pi_{\odot}=8''.794\ 148$
 $\kappa=20''.49\ 552$
15. 地球扁率 (Flattening factor for the Earth)
16. 日心引力常数 (heliocentric gravitational constant)
- $f=0.003\ 352\ 81=1/298.257$
 $A^3k^2/D^2=GS=1.327\ 124\ 38\times10^{20}m^3s^{-2}$
17. 太阳与地球质量比 (Ratio of mass of Sun to that of the Earth)
- $(GS)/(GE)=S/E=332\ 946.0$
18. 太阳与地月系质量比 (Ratio of mass of Sun to that of the Earth+Moon)
- $(S/E)/(1+\mu)=328\ 900.5$
19. 太阳质量 (Mass of the Sun)
- $(GS)/G=S=1.9891\times10^{30}Kg$
20. 行星质量系统 (System of planetary masses)
- $(\text{太阳质量}=1)$

Mercury	6 023 600	Jupiter	1 047.355
Venus	408 523.5	Saturn	3 498.5
Earth+Moon	328 900.5	Uranus	22 869
Mars	3 098 710	Neptune	19 314
		Pluto	3 000 000

附录五 地球引力场模型

通常一个地球引力场模型包括如下内容:

GE — 地心引力常数, a_e — 地球参考椭球体赤道半径

$\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}$ — 地球引力位球谐展开式的归一化谐系数

当引用某一地球引力场模型时, 严格而言, 地固坐标系中的测站坐标 \vec{R}_e 应与该引力场模型所对应的地球参考椭球体相吻合, 这在人卫精密定轨中 (特别是定轨精度要求较高的问题) 应加以考虑, 因为它涉及到地心坐标系的严格定义。

为了实际应用的需要, 这里介绍当今被广泛引用的 JGM-3 模型和 WGS84 模型, 供读者参考。原 JGM-3 模型为 70×70 阶次, WGS84 模型为 180×180 阶次, 这里分别只给到 20×20 阶次, 读者可以在网上调用完整模型。

$$\text{JGM-3} \quad GE = 398600.44150 km^3/s^2 \quad a_e = 6378.13630 km$$

l	m	\bar{C}_{lm}	\bar{S}_{lm}
2	0	-.48416954845647D-03	.00000000000000D+00
3	0	.95717059088800D-06	.00000000000000D+00
4	0	.53977706835730D-06	.00000000000000D+00
5	0	.68658987986543D-07	.00000000000000D+00
6	0	-.14967156178604D-06	.00000000000000D+00
7	0	.90722941643232D-07	.00000000000000D+00
8	0	.49118003174734D-07	.00000000000000D+00
9	0	.27385060950085D-07	.00000000000000D+00
10	0	.54130445738812D-07	.00000000000000D+00
11	0	-.50161314595688D-07	.00000000000000D+00
12	0	.36382340623690D-07	.00000000000000D+00
13	0	.39946428731683D-07	.00000000000000D+00
14	0	-.21803861547203D-07	.00000000000000D+00
15	0	.31659510926189D-08	.00000000000000D+00
16	0	-.54302320884432D-08	.00000000000000D+00
17	0	.18108375059805D-07	.00000000000000D+00
18	0	.72691846007246D-08	.00000000000000D+00
19	0	-.35185503098098D-08	.00000000000000D+00
20	0	.18789986549777D-07	.00000000000000D+00
2	1	-.18698764000000D-09	.11952801000000D-08
3	1	.20301372055530D-05	.24813079825561D-06
4	1	-.53624355429851D-06	-.47377237061597D-06
5	1	-.62727369697705D-07	-.94194632134383D-07
6	1	-.76103580407274D-07	.26899818932629D-07
7	1	.28028652203689D-06	.94777317813313D-07
8	1	.23333751687204D-07	.58499274939368D-07
9	1	.14223025892714D-06	.21909618349376D-07
10	1	.83758832332671D-07	-.13155406539843D-06
11	1	.16107077738720D-07	-.27892152840701D-07

12	1	-.54191701336309D-07	-.42011775767675D-07
13	1	-.52966868261361D-07	.39876816447422D-07
14	1	-.19023751941501D-07	.27471826062722D-07
15	1	.12019048467803D-07	.81732671079927D-08
16	1	.27533499349817D-07	.33708199043727D-07
17	1	-.26388862396409D-07	-.29852855753504D-07
18	1	.42100167037216D-08	-.39075893145582D-07
19	1	-.69675014448630D-08	.15804850737353D-09
20	1	.83477675011261D-08	.62445294169285D-08
2	2	.24392607486563D-05	-.14002663975880D-05
3	2	.90470634127291D-06	-.61892284647849D-06
4	2	.35067015645938D-06	.66257134594268D-06
5	2	.65245910276353D-06	-.32333435244435D-06
6	2	.48327472124892D-07	-.37381591944355D-06
7	2	.32976022742410D-06	.93193696831045D-07
8	2	.80070663931587D-07	.65518559097464D-07
9	2	.22620642355843D-07	-.32174984962166D-07
10	2	-.93557925682843D-07	-.51415890584901D-07
11	2	.18429795461053D-07	-.98452117204370D-07
12	2	.13985738460573D-07	.31047769644313D-07
13	2	.56039125275397D-07	-.62699341300935D-07
14	2	-.36978966062445D-07	-.29891074898391D-08
15	2	-.21746272853228D-07	-.31733039621956D-07
16	2	-.22395294006315D-07	.26206613354644D-07
17	2	-.17378596994668D-07	.91967492974033D-08
18	2	.12828248866347D-07	.13586359979031D-07
19	2	.31435051572210D-07	-.43295479774308D-08
20	2	.20030448029487D-07	.14884470088576D-07
3	3	.72114493982309D-06	.14142039847354D-05
4	3	.99086890577441D-06	-.20098735484731D-06
5	3	-.45183704808780D-06	-.21495419346421D-06
6	3	.57020965757974D-07	.88894738008251D-08
7	3	.25050152675038D-06	-.21732010845254D-06
8	3	-.19251764331400D-07	-.86285836534248D-07
9	3	-.16106427897243D-06	-.74545464061438D-07
10	3	-.71967367073644D-08	-.15417988118535D-06
11	3	-.30560698007455D-07	-.14880309051227D-06
12	3	.38978520777770D-07	.24576580959940D-07
13	3	-.21817131948590D-07	.98208999077455D-07
14	3	.36809435839364D-07	.20313404379978D-07
15	3	.52403064668802D-07	.15159862310361D-07
16	3	-.35100789004467D-07	-.23241519967982D-07
17	3	.74225615337830D-08	.81946523724251D-08
18	3	-.37596675909359D-08	-.31090562993624D-08

19	3	-.98999933204207D-08	-.98821208438535D-09
20	3	-.59349949066768D-08	.35571151171055D-07
4	4	-.18848136742527D-06	.30884803690355D-06
5	4	-.29512339302196D-06	.49741427230934D-07
6	4	-.86228032619800D-07	-.47140511232148D-06
7	4	-.27554096307403D-06	-.12414151248516D-06
8	4	-.24435806439297D-06	.69857074850431D-07
9	4	-.82017366877872D-08	.20068093286841D-07
10	4	-.84335352395338D-07	-.78485346171790D-07
11	4	-.40024107782339D-07	-.63596530213449D-07
12	4	-.68419698187080D-07	.29543256059344D-08
13	4	-.14709372441845D-08	-.12613848786464D-07
14	4	.17120660369001D-08	-.20688044000643D-07
15	4	-.42162691446070D-07	.78270996909884D-08
16	4	.41218976739860D-07	.46056696976601D-07
17	4	.75202561280798D-08	.23381994870984D-07
18	4	.53092291040775D-07	.14596998830727D-08
19	4	.15826786807335D-07	-.56619376893577D-08
20	4	.54571747234651D-08	-.22410101198270D-07
5	5	.17483157769990D-06	-.66939293724911D-06
6	5	-.26711227171966D-06	-.53641016466390D-06
7	5	.16440038146411D-08	.18075335233506D-07
8	5	-.25498410010257D-07	.89090297494640D-07
9	5	-.16325061515924D-07	-.54271473247992D-07
10	5	-.49519740818054D-07	-.50292693577921D-07
11	5	.37435874567708D-07	.49828631680041D-07
12	5	.31107075527266D-07	.76387883124312D-08
13	5	.58253125415417D-07	.65845648968111D-07
14	5	.29899462450133D-07	-.16857910838411D-07
15	5	.13450895846697D-07	.89823349629886D-08
16	5	-.13495263575727D-07	-.16788507060889D-08
17	5	-.17058052594159D-07	.53532065621805D-08
18	5	.73144220359351D-08	.24650351136750D-07
19	5	.12058223792869D-07	.27204444064611D-07
20	5	-.11452318388930D-07	-.69350775864877D-08
6	6	.95016518338557D-08	-.23726147889522D-06
7	6	-.35884263307918D-06	.15177808443426D-06
8	6	-.65859353864388D-07	.30892064157956D-06
9	6	.62833186922410D-07	.22267731094919D-06
10	6	-.37418833736693D-07	-.79464218274958D-07
11	6	-.14607814055515D-08	.34173161230373D-07
12	6	.33244194680361D-08	.39368833484484D-07
13	6	-.35311988740442D-07	-.60583315297552D-08
14	6	-.19400981730092D-07	.24129594129965D-08

15	6	.33463386220823D-07	-.37752532132562D-07
16	6	.14321054650520D-07	-.34445359251626D-07
17	6	-.13466610011002D-07	-.28274837436151D-07
18	6	.13377839989187D-07	-.15660996065894D-07
19	6	-.23850062007699D-08	.17951659591478D-07
20	6	.11565401097341D-07	-.42341732002092D-09
7	7	.13795170564076D-08	.24128594080773D-07
8	7	.67262701848734D-07	.74813196768710D-07
9	7	-.11815885217629D-06	-.96899385839989D-07
10	7	.82084062520783D-08	-.31491358401092D-08
11	7	.47061824740183D-08	-.89777235057051D-07
12	7	-.18603106541747D-07	.35570829249166D-07
13	7	.27063649200290D-08	-.77110578914500D-08
14	7	.36851132631493D-07	-.42223645889740D-08
15	7	.59912701354866D-07	.60561923271514D-08
16	7	-.78129662206869D-08	-.85101432520645D-08
17	7	.24011119637881D-07	-.58835543868363D-08
18	7	.65285877114871D-08	.62802630165493D-08
19	7	.73677859122170D-08	-.86648481719498D-08
20	7	-.20301510228149D-07	-.12995889226393D-09
8	8	-.12397061395498D-06	.12044100668766D-06
9	8	.18798426954722D-06	-.30154440657902D-08
10	8	.40467841871077D-07	-.91916682734371D-07
11	8	-.61406031069251D-08	.24572254505200D-07
12	8	-.25702477402668D-07	.16666794464624D-07
13	8	-.98871787586478D-08	-.97289371617499D-08
14	8	-.34866852918353D-07	-.14888414788683D-07
15	8	-.31989552416364D-07	.22270913883120D-07
16	8	-.21537842269728D-07	.52475750400288D-08
17	8	.37624561866834D-07	.37609560359427D-08
18	8	.31066116434825D-07	.24701340656902D-08
19	8	.31052189073581D-07	-.10462608847168D-07
20	8	.49222031305630D-08	.40671618436594D-08
9	9	-.47724821923178D-07	.96585577630797D-07
10	9	.12540250252277D-06	-.37736477753688D-07
11	9	-.31455516227675D-07	.42040713688155D-07
12	9	.41793077711655D-07	.25324579908954D-07
13	9	.24753630054781D-07	.45359257720667D-07
14	9	.32376638778215D-07	.28698212550741D-07
15	9	.13026722024257D-07	.37876413704166D-07
16	9	-.22776715289243D-07	-.38923887453334D-07
17	9	.32904899760425D-08	-.28585766401852D-07
18	9	-.19183123559344D-07	.36144387200323D-07
19	9	.30304661637596D-08	.64515566536913D-08

20	9	.18043912553397D-07	-.58648713867232D-08
10	10	.10038233131398D-06	-.23809404447193D-07
11	10	-.52129308588537D-07	-.18302278002235D-07
12	10	-.61693847120949D-08	.30986262918955D-07
13	10	.40892147458611D-07	-.37098943421354D-07
14	10	.38838489462067D-07	-.14646502936917D-08
15	10	.10311330752350D-07	.14956329195217D-07
16	10	-.12128710021123D-07	.12064635993103D-07
17	10	-.43040778296981D-08	.18038443987682D-07
18	10	.55661560255618D-08	-.45953868313856D-08
19	10	-.33377489589393D-07	-.70901793078301D-08
20	10	-.32549034672400D-07	-.57601831992074D-08
11	11	.46226945974065D-07	-.69592513786019D-07
12	11	.11320827288384D-07	-.63442255448454D-08
13	11	-.44739074565513D-07	-.48328920607274D-08
14	11	.15356539462914D-07	-.39038503109732D-07
15	11	-.95174491849600D-09	.18716336667474D-07
16	11	.19265835183290D-07	-.29747575202741D-08
17	11	-.15725519114554D-07	.11020868227887D-07
18	11	-.76424753587140D-08	.21171513660315D-08
19	11	.16080720197723D-07	.11000317328808D-07
20	11	.14562762720820D-07	-.18929751298295D-07
12	12	-.23492752269341D-08	-.10959426553406D-07
13	12	-.31410021346477D-07	.88106349374406D-07
14	12	.85046646166088D-08	-.30921727740280D-07
15	12	-.32728991604536D-07	.15719776528914D-07
16	12	.19697742559399D-07	.69145092797783D-08
17	12	.28689128789402D-07	.20744069700771D-07
18	12	-.29603019974536D-07	-.16192464661794D-07
19	12	-.29886557263191D-08	.93096798788415D-08
20	12	-.64092154083751D-08	.18154220942612D-07
13	13	-.61211341074230D-07	.68408785690868D-07
14	13	.32166747135071D-07	.45200081199389D-07
15	13	-.28288960926564D-07	-.42943958526004D-08
16	13	.13837330189163D-07	.99393104764339D-09
17	13	.16603066738893D-07	.20304808678395D-07
18	13	-.63799330347466D-08	-.34979730312351D-07
19	13	-.74465515090790D-08	-.28398303854051D-07
20	13	.27323490539213D-07	.70325129662091D-08
14	14	-.51783436366944D-07	-.50135706089731D-08
15	14	.53044811279796D-08	-.24442484622690D-07
16	14	-.19125929084628D-07	-.38860160731499D-07
17	14	-.14060794103232D-07	.11375705343040D-07
18	14	-.80028321553151D-08	-.13078375035713D-07

19	14	-.45294320737346D-08	-.13113452689000D-07
20	14	.11894377026580D-07	-.14472233857738D-07
15	15	-.19227532557760D-07	-.47043717740296D-08
16	15	-.14460511250623D-07	-.32699102984228D-07
17	15	.53318558273089D-08	.53871007251714D-08
18	15	-.40535566922307D-07	-.20249426822391D-07
19	15	-.17838458615368D-07	-.14105916172496D-07
20	15	-.25832737678316D-07	-.76580241490690D-09
16	16	-.37529424659874D-07	.35911038341162D-08
17	16	-.30061016811586D-07	.37240886096084D-08
18	16	.10670913840544D-07	.69654369110866D-08
19	16	-.21421212413032D-07	-.69574508679338D-08
20	16	-.12063704641516D-07	.33001883992357D-09
17	17	-.34064108542158D-07	-.19733214905988D-07
18	17	.36003191941618D-08	.45103760547938D-08
19	17	.29105753067619D-07	-.15152537147995D-07
20	17	.44347248372820D-08	-.13703405459961D-07
18	18	.26206060973410D-08	-.10810058406326D-07
19	18	.34714340290441D-07	-.94385774554964D-08
20	18	.14916632182652D-07	-.98369291535446D-09
19	19	-.23708581999978D-08	.47796091478955D-08
20	19	-.29626245297233D-08	.10959649647533D-07
20	20	.40445840955309D-08	-.12346618337924D-07

l	m	\bar{C}_{lm}	\bar{S}_{lm}
2	0	-0.48416685D-03	0.00000000D+00
3	0	0.95706390D-06	0.00000000D+00
4	0	0.53699587D-06	0.00000000D+00
5	0	0.71092048D-07	0.00000000D+00
6	0	-0.15064821D-06	0.00000000D+00
7	0	0.85819217D-07	0.00000000D+00
8	0	0.42979835D-07	0.00000000D+00
9	0	0.33173231D-07	0.00000000D+00
10	0	0.50931575D-07	0.00000000D+00
11	0	-0.58114696D-07	0.00000000D+00
12	0	0.34073235D-07	0.00000000D+00
13	0	0.48159534D-07	0.00000000D+00
14	0	-0.25559279D-07	0.00000000D+00
15	0	-0.55534001D-08	0.00000000D+00
16	0	0.96352958D-08	0.00000000D+00
17	0	0.27418160D-07	0.00000000D+00
18	0	0.10196218D-07	0.00000000D+00
19	0	-0.11009860D-07	0.00000000D+00
20	0	0.25008019D-07	0.00000000D+00
2	1	0.00000000D+00	0.00000000D+00
2	2	0.24395796D-05	-0.13979548D-05
3	1	0.20318729D-05	0.25085759D-06
3	2	0.90666113D-06	-0.62102428D-06
3	3	0.71770352D-06	0.14152388D-05
4	1	-0.53548044D-06	-0.47420394D-06
4	2	0.34797519D-06	0.65579158D-06
4	3	0.99172321D-06	-0.19912491D-06
4	4	-0.18686124D-06	0.30953114D-06
5	1	-0.64185265D-07	-0.92492959D-07
5	2	0.65184984D-06	-0.32007416D-06
5	3	-0.44903639D-06	-0.21328272D-06
5	4	-0.29719055D-06	0.53213480D-07
5	5	0.17523221D-06	-0.67059456D-06
6	1	-0.74180259D-07	0.32780040D-07
6	2	0.51824409D-07	-0.35866634D-06
6	3	0.53370577D-07	0.61334720D-08
6	4	-0.88694856D-07	-0.47260945D-06
6	5	-0.26818820D-06	-0.53491073D-06
6	6	0.10237832D-07	-0.23741002D-06
7	1	0.27905196D-06	0.94231346D-07
7	2	0.32873832D-06	0.88835092D-07

7	3	0.24940240D-06	-0.21223369D-06
7	4	-0.27123034D-06	-0.12696607D-06
7	5	0.10246290D-08	0.17321672D-07
7	6	-0.35843745D-06	0.15202633D-06
7	7	-0.20991457D-08	0.22805664D-07
8	1	0.18889342D-07	0.47856967D-07
8	2	0.73553952D-07	0.47867693D-07
8	3	-0.12132459D-07	-0.83461853D-07
8	4	-0.24208264D-06	0.71603924D-07
8	5	-0.24966587D-07	0.87751047D-07
8	6	-0.65093424D-07	0.30904202D-06
8	7	0.66323292D-07	0.74661766D-07
8	8	-0.12372281D-06	0.12210258D-06
9	1	0.14747969D-06	0.23894354D-07
9	2	0.22052093D-07	-0.26876665D-07
9	3	-0.16256047D-06	-0.85928431D-07
9	4	-0.17193827D-07	0.26077030D-07
9	5	-0.16902791D-07	-0.50337365D-07
9	6	0.65717910D-07	0.22275858D-06
9	7	-0.11648016D-06	-0.97298769D-07
9	8	0.18896045D-06	-0.31026222D-08
9	9	-0.48275744D-07	0.96381072D-07
10	1	0.88706517D-07	-0.12536457D-06
10	2	-0.82375203D-07	-0.38280049D-07
10	3	-0.13137371D-07	-0.15553732D-06
10	4	-0.87424319D-07	-0.79215732D-07
10	5	-0.53980821D-07	-0.46294947D-07
10	6	-0.42371448D-07	-0.79680607D-07
10	7	0.83736045D-08	-0.25636582D-08
10	8	0.41239589D-07	-0.92269095D-07
10	9	0.12539514D-06	-0.37687117D-07
10	10	0.10124370D-06	-0.24874984D-07
11	1	0.95375839D-08	-0.22094828D-07
11	2	0.21716225D-07	-0.10224810D-06
11	3	-0.30023695D-07	-0.13422019D-06
11	4	-0.30407161D-07	-0.69823333D-07
11	5	0.35104609D-07	0.49175170D-07
11	6	-0.37911105D-08	0.36848522D-07
11	7	0.25774039D-08	-0.88658395D-07
11	8	-0.71396627D-08	0.23243077D-07
11	9	-0.30246313D-07	0.41776400D-07
11	10	-0.53424279D-07	-0.18716766D-07
11	11	0.47514858D-07	-0.70415796D-07
12	1	-0.60609926D-07	-0.38189082D-07

12	2	0.74200188D-08	0.24640620D-07
12	3	0.42149817D-07	0.32189594D-07
12	4	-0.64346831D-07	-0.25364931D-08
12	5	0.33126200D-07	-0.40658586D-09
12	6	0.86981502D-08	0.36711094D-07
12	7	-0.16598048D-07	0.34475954D-07
12	8	-0.26843700D-07	0.17838309D-07
12	9	0.42293015D-07	0.27107811D-07
12	10	-0.44237357D-08	0.30823394D-07
12	11	0.96462514D-08	-0.60711291D-08
12	12	-0.30878714D-08	-0.10932316D-07
13	1	-0.47921675D-07	0.34957177D-07
13	2	0.48705121D-07	-0.63933232D-07
13	3	-0.17219549D-07	0.82465794D-07
13	4	-0.92616056D-08	-0.98249479D-09
13	5	0.58545255D-07	0.66075856D-07
13	6	-0.28548757D-07	-0.13018250D-07
13	7	0.10048687D-07	-0.12672050D-07
13	8	-0.12236037D-07	-0.11680475D-07
13	9	0.25798630D-07	0.46771958D-07
13	10	0.42112066D-07	-0.35203559D-07
13	11	-0.44423472D-07	-0.63137559D-08
13	12	-0.31610688D-07	0.86378230D-07
13	13	-0.61019573D-07	0.68712423D-07
14	1	-0.10581256D-07	0.22739082D-07
14	2	-0.32588467D-07	-0.45984585D-08
14	3	0.33411750D-07	0.72271094D-08
14	4	0.34163340D-08	-0.23062568D-07
14	5	0.21777499D-07	-0.44340974D-08
14	6	-0.23022045D-07	0.79137357D-08
14	7	0.39355808D-07	-0.52187212D-08
14	8	-0.31866053D-07	-0.16609601D-07
14	9	0.30182993D-07	0.23942248D-07
14	10	0.36008306D-07	-0.43924872D-09
14	11	0.16006347D-07	-0.40475033D-07
14	12	0.79810549D-08	-0.31068551D-07
14	13	0.33446421D-07	0.44622344D-07
14	14	-0.52174166D-07	-0.48789452D-08
15	1	0.77027909D-08	0.12667983D-07
15	2	-0.13310361D-07	-0.25570239D-07
15	3	0.53469109D-07	0.21540830D-07
15	4	-0.35485140D-07	-0.38325971D-08
15	5	0.80670670D-08	0.95367405D-08
15	6	0.28835774D-07	-0.29584853D-07

15	7	0.55297561D-07	0.12688881D-07
15	8	-0.26866012D-07	0.28508669D-07
15	9	0.15229368D-07	0.40242957D-07
15	10	0.78226264D-08	0.16482104D-07
15	11	-0.45323941D-08	0.16379211D-07
15	12	-0.34310516D-07	0.13248557D-07
15	13	-0.27865470D-07	-0.51124016D-08
15	14	0.58007239D-08	-0.24830947D-07
15	15	-0.18756974D-07	-0.53745848D-08
16	1	0.16657011D-07	0.32088971D-07
16	2	-0.22051986D-07	0.26286204D-07
16	3	-0.29514849D-07	-0.95827659D-08
16	4	0.37621131D-07	0.55477548D-07
16	5	-0.10479239D-07	-0.27382338D-08
16	6	0.97407454D-08	-0.43087957D-07
16	7	-0.12168169D-07	-0.56636996D-08
16	8	-0.25034024D-07	0.22895737D-08
16	9	-0.17908785D-07	-0.29938908D-07
16	10	-0.10129689D-07	0.12404473D-07
16	11	0.19053980D-07	-0.17354590D-08
16	12	0.18888013D-07	0.46949615D-08
16	13	0.15158142D-07	-0.17410596D-09
16	14	-0.19416172D-07	-0.38724225D-07
16	15	-0.14400649D-07	-0.33151819D-07
16	16	-0.40920912D-07	0.23449430D-08
17	1	-0.17492372D-07	-0.29004434D-07
17	2	-0.24972136D-07	0.52345300D-08
17	3	0.75958226D-08	0.13161951D-07
17	4	-0.35567936D-08	0.29108859D-07
17	5	-0.16440517D-07	0.15666155D-07
17	6	-0.29053420D-08	-0.41239945D-07
17	7	0.30327591D-07	-0.54652615D-08
17	8	0.26828952D-07	-0.69634040D-08
17	9	-0.74685923D-09	-0.31300568D-07
17	10	-0.10536220D-08	0.18628074D-07
17	11	-0.13049234D-07	0.13662390D-07
17	12	0.32820228D-07	0.17654374D-07
17	13	0.17049873D-07	0.19279770D-07
17	14	-0.14027974D-07	0.11214602D-07
17	15	0.56624501D-08	0.56527252D-08
17	16	-0.32153542D-07	0.33341657D-08
17	17	-0.37961677D-07	-0.17192537D-07
18	1	0.85717760D-08	-0.32887288D-07
18	2	0.11021506D-07	0.96877203D-08

18	3	-0.78128408D-08	-0.16263649D-07
18	4	0.50107239D-07	-0.35094534D-08
18	5	-0.35408518D-08	0.26790491D-07
18	6	0.12489735D-07	-0.12526195D-07
18	7	0.14813821D-07	-0.18829836D-08
18	8	0.35285229D-07	0.13368789D-08
18	9	-0.24544444D-07	0.25745394D-07
18	10	0.84106552D-09	-0.44929528D-08
18	11	-0.92784417D-08	0.11278314D-08
18	12	-0.29997564D-07	-0.13762992D-07
18	13	-0.61616779D-08	-0.34022737D-07
18	14	-0.77166667D-08	-0.13392253D-07
18	15	-0.38973604D-07	-0.20668220D-07
18	16	0.10273437D-07	0.69198054D-08
18	17	0.33491685D-08	0.54056479D-08
18	18	0.11121796D-08	-0.94806182D-08
19	1	-0.78038897D-08	-0.10955201D-07
19	2	0.32332353D-07	0.42071678D-08
19	3	-0.91228010D-08	-0.55932845D-08
19	4	0.19091610D-07	-0.12713298D-07
19	5	0.14937350D-07	0.13014332D-07
19	6	-0.80825838D-08	0.24601857D-07
19	7	0.93869167D-08	-0.65383900D-08
19	8	0.31905603D-07	-0.62494067D-08
19	9	0.54433641D-08	0.64645032D-08
19	10	-0.34557189D-07	-0.72672139D-08
19	11	0.92637732D-08	0.73094973D-08
19	12	-0.10667096D-07	0.12169099D-07
19	13	-0.81139968D-08	-0.30216212D-07
19	14	-0.54501014D-08	-0.13327961D-07
19	15	-0.18328337D-07	-0.13873813D-07
19	16	-0.23275873D-07	-0.66988140D-08
19	17	0.30387596D-07	-0.15039250D-07
19	18	0.34106265D-07	-0.76175619D-08
19	19	-0.17274425D-08	0.25989338D-08
20	1	0.59665339D-08	-0.79800572D-08
20	2	0.14911085D-07	0.16645861D-07
20	3	-0.16271296D-09	0.33562815D-07
20	4	0.94176628D-08	-0.23750287D-07
20	5	-0.11339236D-07	-0.14341921D-07
20	6	0.14119805D-07	-0.28530016D-08
20	7	-0.27298042D-07	-0.37844129D-08
20	8	0.38489401D-08	0.54767756D-08
20	9	0.20478593D-07	0.52391740D-10

20	10	-0.25203296D-07	-0.73475808D-09
20	11	0.18615023D-07	-0.20030349D-07
20	12	-0.47849719D-08	0.13733707D-07
20	13	0.26975872D-07	0.44620950D-08
20	14	0.10796764D-07	-0.12763697D-07
20	15	-0.26288771D-07	0.52729036D-09
20	16	-0.99274819D-08	-0.36128778D-09
20	17	0.43953910D-08	-0.11345533D-07
20	18	0.15890733D-07	-0.30863268D-08
20	19	-0.36173742D-08	0.10165417D-07
20	20	0.55214181D-08	-0.13903843D-07

参考文献

- [1] 刘林, 人造地球卫星轨道力学, 北京: 高等教育出版社, 1992
- [2] 刘林, 天体力学方法, 南京: 南京大学出版社, 1998
- [3] 刘林, 航天器轨道理论, 北京: 国防工业出版社, 2000
- [4] 南京大学数学系计算数学专业编, 常微分方程数值解法, 科学出版社, 1979
- [5] P. 亨利西著, 包雪松等译, 常微分方程离散变量方法, 科学出版社, 1985
- [6] Fehlberg,E., NASA TR R-287, 1968
- [7] Cowell, P.H., Crommelin, A.C.D., Appendix to Greenwich Observations for 1909, Edinburgh, 1910, 84
- [8] Shampine, L. and Gordon, M., computer Solution of Ordinary Differential Equations, The Initial Value Problem, W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1975
- [9] Lambert, J.D. and Watson, I.A., J. Inst. Maths Appics, 1976, 18:189
- [10] Quinlan, G.D. and Tramaine, S., Astron.J., 1990, 100:1694
- [11] Quinlan, G.D. and Tramaine, S., Astron.J., 1990, 99:1016
- [12] 夏一飞, 黄天衣, 球面天文学, 南京: 南京大学出版社, 1995
- [13] Montenbruck O. and Gill E., Satellite Orbits — Models, Methods and Applications, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Singapore, Tokyo, 2000
- [14] 中国科学院空间科学与应用研究中心编, 宇航空间环境手册, 北京: 中国科学技术出版社, 2000
- [15] 刘林, 张强, 廖新浩, 人卫精密定轨中的算法问题, 中国科学 (A 辑), 1998, 28(9):848 ~ 856
Liu Lin, Zhang Qiang, Liao Xinhao, Problem of algorithm in precision orbit determination, SCIENCE IN CHINA (Series A), 1999, 42(5):522 ~ 560
- [16] 贾沛璋, 朱征兆, 最优估计及其应用, 北京: 科学出版社, 1984
- [17] 贾沛璋, 误差分析与数据处理, 北京: 国防工业出版社, 1992
- [18] Tapley B. D., Schutz B.E., Born G.H., Statistical orbit determination, Elsevier Academic Press, Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo, 2004
- [19] 徐树方, 矩阵计算的理论与方法, 北京: 北京大学出版社, 1995
- [20] 刘林, 刘迎春, 关于星-星相对测量自主定轨中的亏秩问题, 飞行器测控学报, 2000, 19(3): 13~16