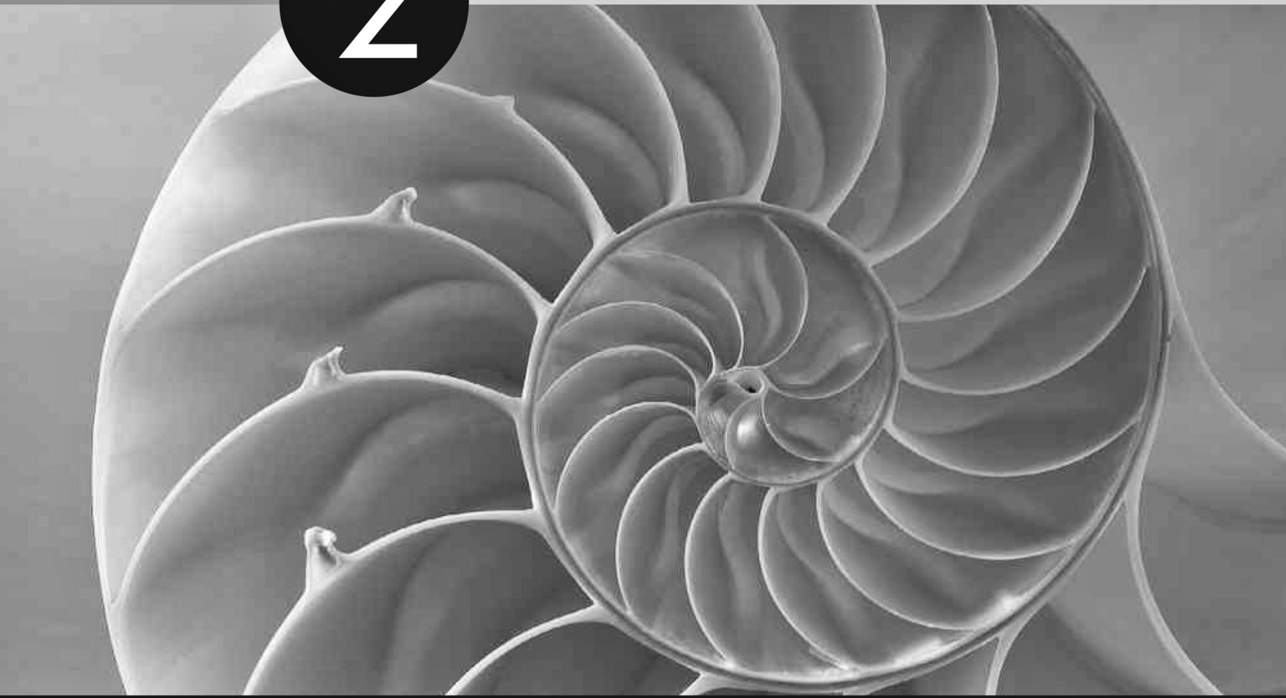
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

GELSON IEZZI
OSVALDO DOLCE
CARLOS MURAKAMI

Logaritmos

2



Atual Editora

RESOLUÇÕES

GELSON IEZZI
OSVALDO DOLCE
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Logaritmos

2

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

10ª edição | São Paulo – 2013

Atual Editora

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2013
Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros
05413-010 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268
SAC: 0800-0117875
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson

Fundamentos de matemática elementar, 2 : logaritmos / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Carlos Murakami. — 10. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1682-5 (aluno)
ISBN 978-85-357-1683-2 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) — Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Dolce, Osvaldo. II. Murakami, Carlos. III. Título. IV. Título: Logaritmos.

12-12851 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino Médio 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 2

Gerente editorial: Lauri Cericato
Editor: José Luiz Carvalho da Cruz
Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos/Juracy Vespucci/Guilherme Reghin Gaspar
Auxiliares de serviços editoriais: Daniella Haidar Pacifico/Rafael Rabaçallo Ramos/Margarete Aparecida de Lima/Vanderlei Aparecido Orso
Digitação e cotejo de originais: Guilherme Reghin Gaspar/Elillyane Kaori Kamimura
Pesquisa iconográfica: Cristina Akisino (coord.)/Enio Rodrigo Lopes
Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/Rhennan Santos/Felipe Toledo/Simone Garcia/Tatiana Malheiro/Fernanda Guerriero
Propostas de textos e atividades: Rosineide de Melo e Norberto Lourenço Nogueira Júnior
Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa
Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan
Projeto gráfico: Carlos Magno
Capa: Homem de Melo & Tróia Design
Imagem de capa: Vetta/Getty Images
Diagramação: TPG
Assessoria de arte: Maria Paulo Santo Siqueira
Encarregada de produção e arte: Grace Alves
Coordenadora de editoração eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacau Alves
Impressão e acabamento:

729.185.010.002

Editora Saraiva
SAC 0800-0117875
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30
www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 2, Logaritmos, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos a sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos aos professores David Mauro Degenszajn e Erileide de Souza a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

CAPÍTULO I — Potências e raízes

3. $A = (-1)^{2n} - (-1)^{2n} \cdot (-1)^3 + (-1)^{2n} \cdot (-1)^n - (-1)^n =$
$= 1 - 1 \cdot (-1) + (-1)^n - (-1)^n = 2$

7. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a \cdot b = 0$
$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

8. $(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2)x = M^3 \Rightarrow x = 2^{3-2} \cdot 3^{3-1} \cdot 5^{3-1} \cdot 7^{3-2} =$
$= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 3\,150$

9. Examinando os valores de 14^n, com $n \in \mathbb{N}^*$, vemos que:
se *n* é ímpar, 14^n tem como algarismo das unidades o 4
se *n* é par, 14^n tem como algarismo das unidades o 6.
Assim, 14^{14} termina em 6; portanto 14^{14} é par e daí $14^{14^{14}}$ termina em 6.

12. $$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}} = x + y$$

15. f) $$(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a + b)^{-1} = \left(\frac{a + b}{a \cdot b}\right)\left(\frac{1}{a + b}\right) = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

g) $$(a^{-2} - b^2)(a^{-1} - b^{-1})^{-1} = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 \cdot b^2}\right)\left(\frac{b - a}{ab}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{(b + a)(b - a)}{a^2 \cdot b^2} \cdot \frac{ab}{b - a} = \frac{a + b}{ab}$$

16. d) $$\frac{a^{n+4} - a^3 \cdot a^n}{a^4 \cdot a^n} = \frac{a^{n+4}}{a^{n+4}} - \frac{a^{3+n}}{a^{n+4}} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a}$$

18. a) $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2| = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (V)
b) $\sqrt{x^{10}} = \sqrt{(x^5)^2} = |x^5| \neq x^5, \forall x \in \mathbb{R}$ (F)
c) $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3| = x^3, \forall x \in \mathbb{R}_+$ (V)

d) $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x-1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $x \geqslant 1$ (V)

e) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = 3-x, \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $x \leqslant 3$ (V)

20. a) $\sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = \begin{cases} x+2, \text{ se } x > -2 \\ 0, \text{ se } x = -2 \\ -x-2, \text{ se } x < -2 \end{cases}$

b) $\sqrt{(2x+3)^2} = |2x-3| = \begin{cases} 2x-3, \text{ se } x > \dfrac{3}{2} \\ 0, \text{ se } x = \dfrac{3}{2} \\ 3-2x, \text{ se } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

c) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3, \text{ se } x > 3 \\ 0, \text{ se } x = 3 \\ 3-x, \text{ se } x < 3 \end{cases}$

d) $\sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1| = \begin{cases} 2x+1, \text{ se } x > -\dfrac{1}{2} \\ 0, \text{ se } x = -\dfrac{1}{2} \\ -2x-1, \text{ se } x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

30. b) $(\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125}) : 2\sqrt{5} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{20}{5}} - \sqrt{\dfrac{45}{5}} + 3\sqrt{\dfrac{125}{5}}\right) =$

$= \dfrac{2-3+15}{2} = 7$

k) $(1-\sqrt{2})^4 = [(1-\sqrt{2})^2]^2 = (3-2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}$

32. a) $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 1$

b) $\sqrt{7+\sqrt{24}} \cdot \sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{(7+\sqrt{24})\cdot(7-\sqrt{24})} = 5$

c) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} = 1$

d) $\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{2(2+\sqrt{2})\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} =$

$= \sqrt{(4+2\sqrt{2})(4-(2+\sqrt{2}))} = \sqrt{2(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2$

33. a) $\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a^2-b} = \sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})(a^2-b)} =$

$= \sqrt{(a^2-b)^2} = a^2 - b$

b) $\left(2\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right):\sqrt{xy}=2\cdot\sqrt{\dfrac{xy}{xy}}+\sqrt{\dfrac{x^2y}{xy}}+\sqrt{\dfrac{xy^2}{xy}}=2+\sqrt{x}+\sqrt{y}$

c) $\left(a\sqrt{\dfrac{a}{b}}+2\sqrt{ab}+b\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)\cdot\sqrt{ab}=\left(\sqrt{\dfrac{a^3}{b}}+2\sqrt{ab}+\sqrt{\dfrac{b^3}{a}}\right)\cdot\sqrt{ab}=$

$=\sqrt{\dfrac{a^4b}{b}}+2\sqrt{(ab)^2}+\sqrt{\dfrac{b^3ab}{a}}=a^2+2|ab|+b^2=(a+b)^2$

d) $\sqrt{p+\sqrt{p^2-1}}\cdot\sqrt{p-\sqrt{p^2-1}}=\sqrt{p^2-(\sqrt{p^2-1})^2}=\sqrt{p^2-p^2+1}=1$

e) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-y^3}}\cdot\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-y^3}}=\sqrt[3]{x^2-(x^2-y^3)}=y$

36. o) $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{3})-\sqrt{5}}=\dfrac{(2+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{7+4\sqrt{3}-5}=$

$=\dfrac{(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})(2-4\sqrt{3})}{(2+4\sqrt{3})(2-4\sqrt{3})}=\dfrac{4+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{22}$

p) $\dfrac{5}{(2-\sqrt{5})+\sqrt{2}}=\dfrac{5}{(2-\sqrt{5})+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{(2-\sqrt{5})-\sqrt{2}}{(2-\sqrt{5})-\sqrt{2}}=\dfrac{10-5\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{9-4\sqrt{5}-2}=$

$=\dfrac{(10-5\sqrt{5}-5\sqrt{2})(7+4\sqrt{5})}{(7-4\sqrt{5})(7+4\sqrt{5})}=\dfrac{30-5\sqrt{5}+35\sqrt{2}+20\sqrt{10}}{31}$

q) $\dfrac{3}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})+1}=\dfrac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+1][(\sqrt{3}-\sqrt{2})-1]}=\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}-3}{5-2\sqrt{6}-1}=$

$=\dfrac{(3\sqrt{3}-3\sqrt{2}-3)(4+2\sqrt{6})}{(4-2\sqrt{6})(4+2\sqrt{6})}=\dfrac{6-3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{4}$

r) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-1}{\sqrt[3]{3}-1}=\dfrac{(\sqrt[3]{3})^2-1}{\sqrt[3]{3}-1}=\dfrac{(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{3}-1)}{(\sqrt[3]{3}-1)}=\sqrt[3]{3}+1$

37. $\dfrac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{2}-1}=\dfrac{(\sqrt[3]{2})^2-1}{\sqrt[3]{2}-1}=\dfrac{(\sqrt[3]{2}+1)\cancel{(\sqrt[3]{2}-1)}}{\cancel{(\sqrt[3]{2}-1)}}=1+\sqrt[3]{2}$

38. a) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\dfrac{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}=4$

b) Notemos inicialmente que

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=6\Rightarrow\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

e

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2\Rightarrow\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}$.

Vamos agora fazer a simplificação pedida:

$\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}})}{(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}})} + \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{6} + 2(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}) + \sqrt{3}(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

c) $\dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{27}-\sqrt{125}}{\sqrt{12}+\sqrt{108}-\sqrt{180}} = \dfrac{7\sqrt{3}-5\sqrt{5}}{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}} = \dfrac{(7\sqrt{3}-5\sqrt{5})}{(8\sqrt{3}-6\sqrt{5})}\cdot\dfrac{(8\sqrt{3}+6\sqrt{5})}{(8\sqrt{3}+6\sqrt{5})} =$

$$= \frac{9+\sqrt{15}}{6}$$

d) $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}} =$

$$= \sqrt{\frac{(3-2\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}{(17-12\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}} - \sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}} =$$

$$= \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

Notamos que $1-\sqrt{2} < 0$, temos: $\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$.
Daí, o valor da expressão é: $1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1) = 2$.

39. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})} =$

$$= 4x\sqrt{x^2-1}$$

40. $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}{\sqrt{ab}}\right) = \dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ (A)

$1+x^2 = 1+\left(\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)^2 = \dfrac{(a+b)^2}{4ab}$ (B)

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{(2a\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})} =$$

$$= 2a(1+x^2) - 2ax\sqrt{1+x^2} \overset{(A)\text{ e }(B)}{=}$$

$$= 2a\cdot\frac{(a+b)^2}{4ab} - 2a\cdot\frac{(a-b)}{2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}} = \frac{(a+b)^2}{2b} - \frac{a^2-b^2}{2b} = a+b$$

41. Fazendo $X = \sqrt[3]{9(\sqrt[3]{2} - 1)}$ e $Y = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ e lembrando as identidades:

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

temos:

$$X^3 = 9(\sqrt[3]{2} - 1) = \frac{9(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{9 \cdot [(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3]}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \text{ e } Y^3 = \left[\frac{(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(1 + \sqrt[3]{2})}{1 + \sqrt[3]{2}}\right]^3 = \left(\frac{1^3 + (\sqrt[3]{2})^3}{1 + \sqrt[3]{2}}\right)^3 =$$

$$= \frac{27}{1 + 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} + 2} = \frac{9}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$$

então, $X^3 = Y^3$ e daí $X = Y$.

42. $$\frac{3}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\,\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}} = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{5} \quad (A)$$

$$\frac{4}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}\,\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} =$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{2} \quad (B)$$

$$\frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}} = \frac{\sqrt{11 + 2\sqrt{30}}}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}\,\sqrt{11 + 2\sqrt{30}}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{30}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{5} \quad (C)$$

$(A) + (B) = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{5} = (C)$

43. $$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} \Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ (pois } x > 0)$$

44. $$\frac{12}{\sqrt{7} + 3} - \frac{5}{8 - 3\sqrt{7}} = \frac{12(8 - 3\sqrt{7}) - 5(\sqrt{7} + 3)}{(\sqrt{7} + 3)(8 - 3\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{81 - 41\sqrt{7}}{(3 - \sqrt{7})} \cdot \frac{(3 + \sqrt{7})}{(3 + \sqrt{7})} = -22 - 21\sqrt{7}$$

49. f) $$\left(27^{\frac{2}{3}} - 27^{-\frac{2}{3}}\right)\left(16^{\frac{3}{4}} - 16^{-\frac{3}{4}}\right) = (3^2 - 3^{-2})(2^3 - 2^{-3}) = \left(9 - \frac{1}{9}\right)\left(8 - \frac{1}{8}\right) = 70$$

g) $$\left(125^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 343^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5^2 + 2^2 + 7\right)^{\frac{1}{2}} = 6$$

50. $$\left(0{,}064^{\frac{1}{3}}\right)\left(0{,}0625^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{64}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{625}{10000}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

53. a) $$\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2}\cdot\sqrt[n+1]{a^{-1}}}\right)^{n^2-1} = \left(a^{\frac{2}{n-1}}\cdot a^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+3}\cdot n^2-1} = a^{\frac{n+3}{n^2-1}\cdot\frac{n^2-1}{n+3}} = a$$

b) $$a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-1}}\cdot\sqrt{a^{-1}\cdot b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(a^{-1}\cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}}$$

c) $$\left(a^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(a\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2a^2}+\sqrt[3]{4}\right) = \left(a^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\right) =$$
$$= a^2 - 2^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}} + 2 = a^2+2$$

d) $$\frac{b-a}{a+b}\left[a^{\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} - \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right] = \frac{b-a}{a+b}\left[\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right] =$$
$$= \frac{b-a}{a+b}\left[\frac{a+(ab)^{\frac{1}{2}}-(ab)^{\frac{1}{2}}+b}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}\right] = -1$$

e) $$\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}+1} = \sqrt{\left[\frac{b^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}+1} =$$
$$\sqrt{\left[\frac{b-a}{2(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}+1} = \sqrt{\left[\frac{2(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}}{b-a}\right]^{2}+1} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(b-a)^2}} = \frac{a+b}{|a-b|}$$

f) $$\left[(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}+3\sqrt{ab}\,\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)+3a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left[\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+3ab^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Lembrando que $(x+y)^3 = x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$, temos que a expressão pedida se reduz a:

$$\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

54. $$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{a}+1} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{a}+1} - \frac{2(\sqrt[4]{a}-1)}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1} =$$
$$= \frac{(\sqrt[4]{a}+1-\sqrt[8]{a}+\sqrt[4]{a}+1+\sqrt[8]{a})}{(\sqrt[4]{a}+1+\sqrt[8]{a})(\sqrt[4]{a}+1-\sqrt[8]{a})} - \frac{2(\sqrt[4]{a}-1)}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1} =$$

$$= \frac{2(\sqrt[4]{a} + 1)}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + 1} - \frac{2(\sqrt[4]{a} - 1)}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1} =$$

$$= \frac{(2\sqrt[4]{a} + 2)(\sqrt{a} + 1 - \sqrt[4]{a}) - (2\sqrt[4]{a} - 1)(\sqrt{a} + 1 + \sqrt[4]{a})}{(\sqrt{a} + 1 + \sqrt[4]{a})(\sqrt{a} + 1 - \sqrt[4]{a})} = \frac{4}{a + \sqrt{a} + 1}$$

56. $$\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}} = \frac{2^n \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n \cdot 2^3} = \frac{2^n(2^4 - 2)}{2 \cdot 2^n \cdot 2^3} = \frac{7}{8}$$

57. $$(2^n + 2^{n-1})(3^n - 3^{n-1}) = \left(2^n + \frac{2^n}{2}\right)\left(3^n - \frac{3^n}{3}\right) = \frac{2^n(2+1)}{2} = \frac{3^n(3-1)}{6} = 6^n$$

58. $$(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})}{4} = \frac{2 \cdot e^0 + 2 \cdot e^0}{4} = 1$$

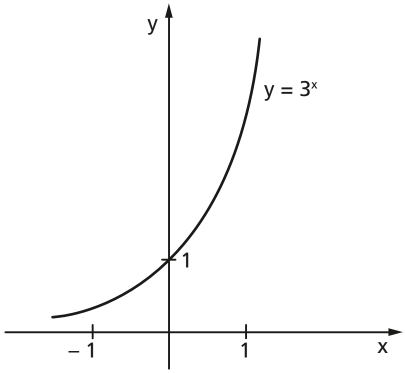
CAPÍTULO II — Função exponencial

59. A expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^y$ é decrescente com y. Seu menor valor é o que se obtém para o máximo valor de $y = 4x - x^2$. O valor de x que acarreta o máximo de y é $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$ e $y_{máx} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$.

Portanto, o menor valor de $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x - x^2}$ é: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

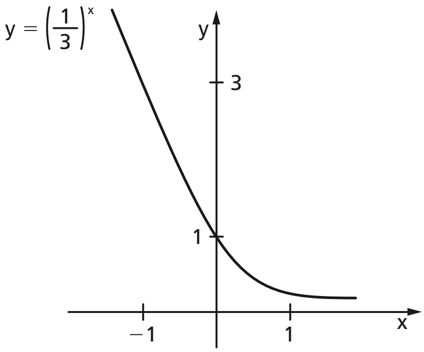
60. a)

x	$y = 3^x$
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



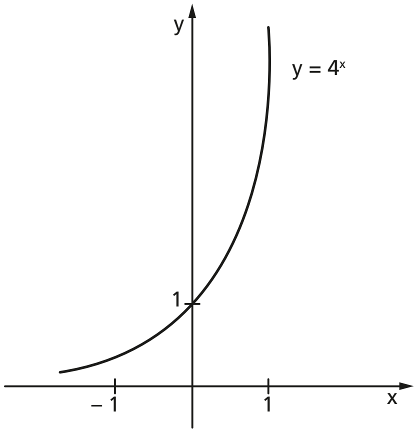
b)

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



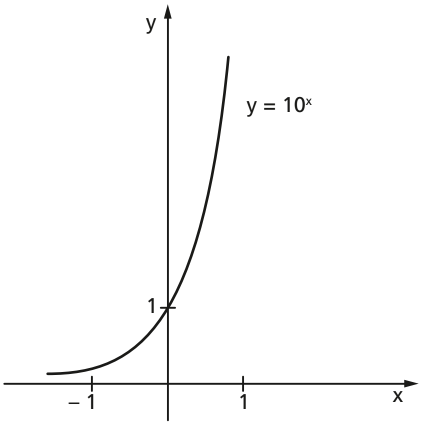
c)

x	$y = 4^x$
-2	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16



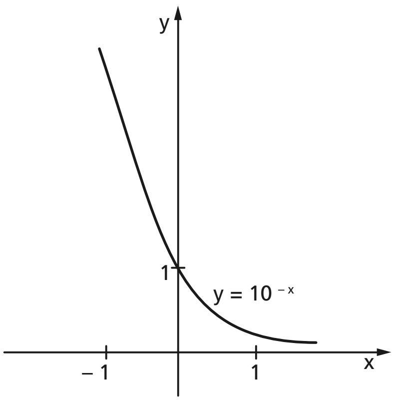
d)

x	$y = 10^x$
-2	$\frac{1}{100}$
-1	$\frac{1}{10}$
0	1
1	10
2	100



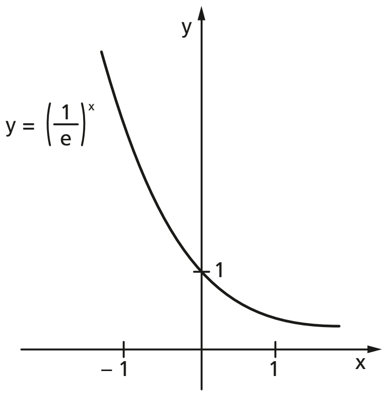
e)

x	$y = 10^{-x}$
−2	100
−1	10
0	1
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{100}$



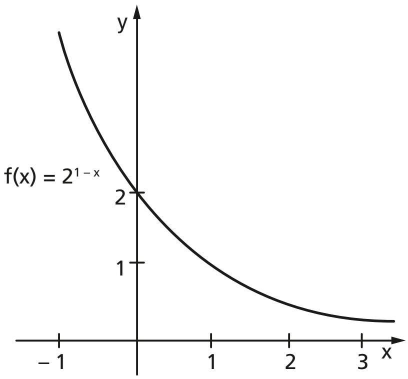
f)

x	$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$
−2	7,39
−1	2,72
0	1
1	0,36
2	0,14



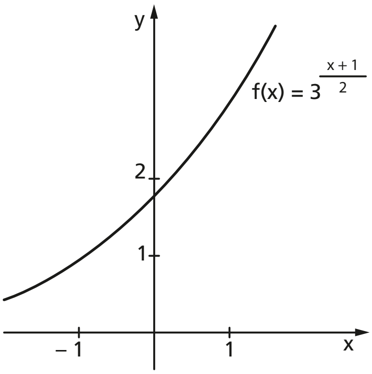
62. a)

x	1 − x	$f(x) = 2^{1-x}$
3	−2	$\frac{1}{4}$
2	−1	$\frac{1}{2}$
1	0	1
0	1	2
−1	2	4



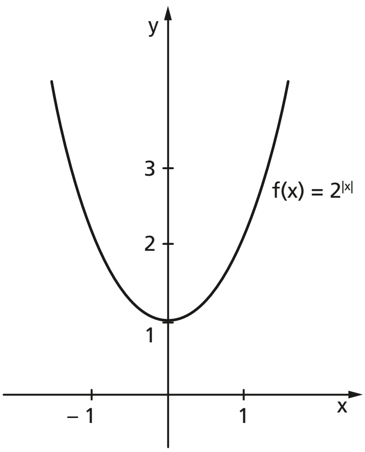
b)

x	$\frac{x+1}{2}$	$f(x) = 3^{\frac{x+1}{2}}$
-5	-2	$\frac{1}{9}$
-3	-1	$\frac{1}{3}$
-1	0	1
1	1	3
3	2	9



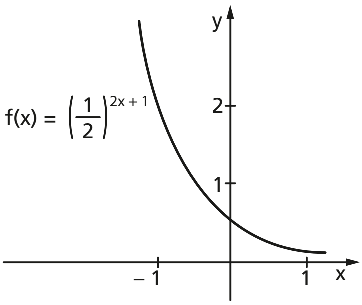
c)

x	$\|x\|$	$f(x) = 2^{\|x\|}$
-1	1	2
1	1	2
0	0	1
-2	2	4
2	2	4



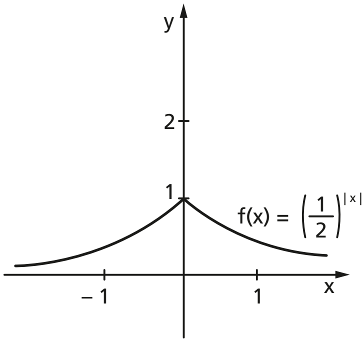
d)

x	$2x + 1$	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$
$-\frac{3}{2}$	-2	4
-1	-1	2
$-\frac{1}{2}$	0	1
0	1	$\frac{1}{2}$



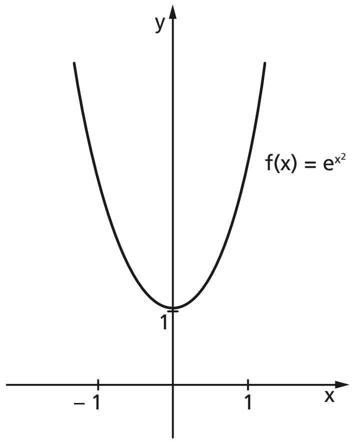
e)

x	$\lvert x\rvert$	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lvert x\rvert}$
-1	1	$\frac{1}{2}$
1	1	$\frac{1}{2}$
0	0	1
-2	2	$\frac{1}{4}$
2	2	$\frac{1}{4}$



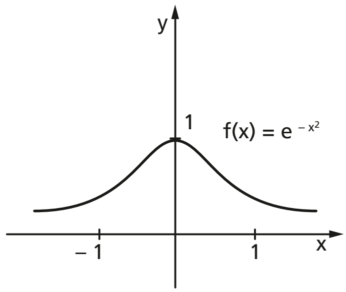
63.

x	x^2	$f(x) = e^{x^2}$
1	1	2,72
$\sqrt{2}$	2	7,39
$-\sqrt{2}$	2	7,39
0	0	1



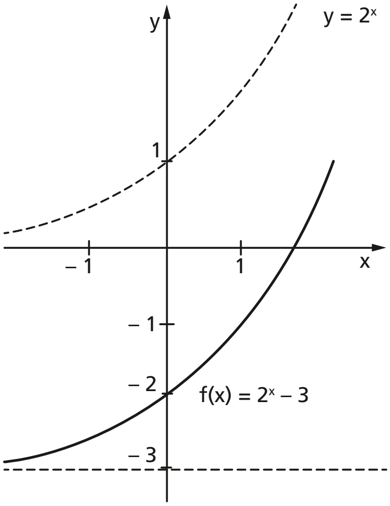
64.

x	x^2	$f(x) = e^{-x^2}$
-1	1	0,36
1	1	0,36
0	0	1
-2	4	0,018
2	4	0,018



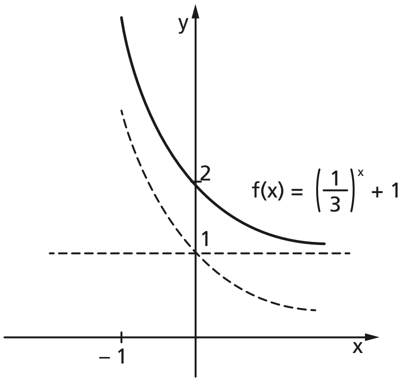
66. a)

x	2^x	$f(x) = 2^x - 3$
-2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$
0	1	-2
1	2	-1
2	4	1



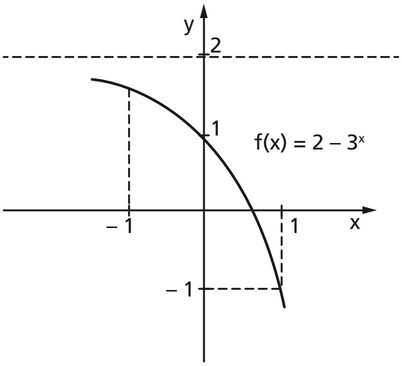
b)

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$
-2	9	10
-1	3	4
0	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{9}$



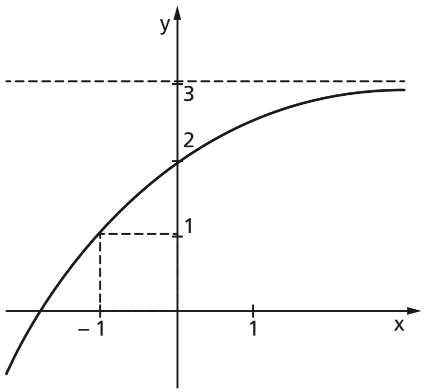
c)

x	3^x	$f(x) = 2 - 3^x$
0	1	1
1	3	-1
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{17}{9}$
2	9	-7



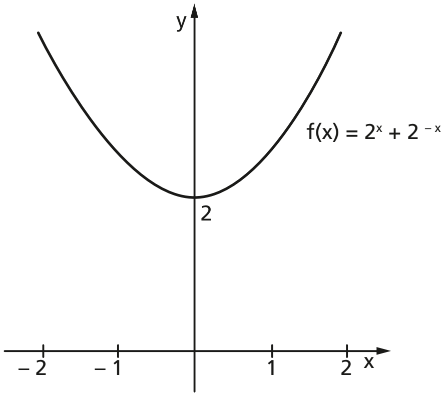
d)

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1	2
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
−1	2	1
−2	4	−1



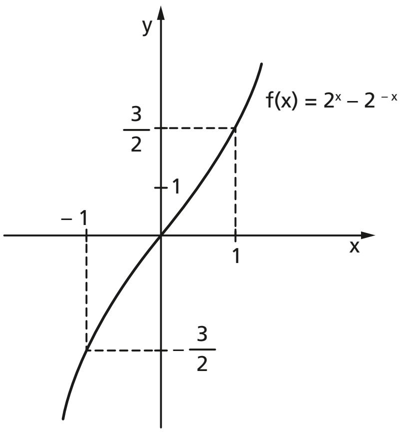
67. a)

x	2^x	2^{-x}	$f(x) = 2^x + 2^{-x}$
−2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{17}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
0	1	1	2
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{17}{4}$



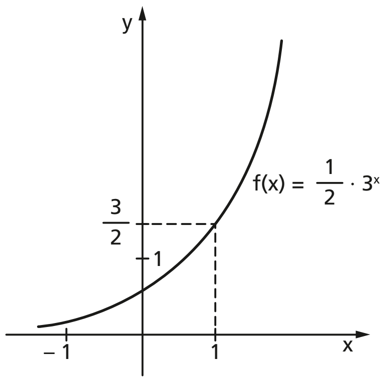
b)

x	2^x	2^{-x}	$2^x - 2^{-x}$
-2	$\frac{1}{4}$	4	$-\frac{15}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{3}{2}$
0	1	1	0
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$



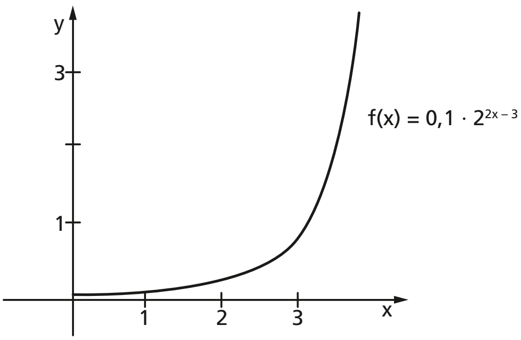
69. a)

x	3^x	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$
0	1	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	3	$\frac{3}{2}$
2	9	$\frac{9}{2}$



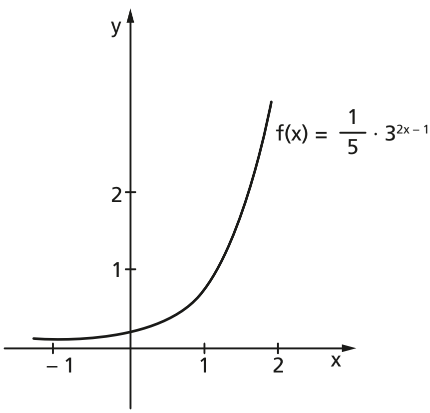
b)

x	$2x - 3$	$2^{2x - 3}$	$f(x) = 0{,}1 \cdot 2^{2x - 3}$
$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$	0,025
1	-1	$\frac{1}{2}$	0,05
$\frac{3}{2}$	0	1	0,1
2	1	2	0,2
$\frac{5}{2}$	2	4	0,4



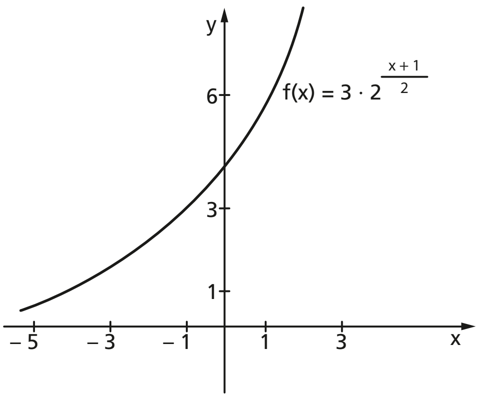
c)

x	$2x - 1$	3^{2x-1}	$f(x) = \frac{1}{5} \cdot 3^{2x-1}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{9}$	0,02
0	-1	$\frac{1}{3}$	0,07
$\frac{1}{2}$	0	1	0,2
1	1	3	0,6
$\frac{3}{2}$	2	9	1,8



d)

x	$\frac{x+1}{2}$	$2^{\frac{x+1}{2}}$	$3 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}}$
-5	-2	$\frac{1}{4}$	0,75
-3	-1	$\frac{1}{2}$	1,5
-1	0	1	3
1	1	2	6
3	2	4	12



71. e) $(\sqrt[3]{2})^x = 8 \iff 2^{\frac{x}{3}} = 2^3 \iff x = 9,\ S = \{9\}$

f) $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9} \iff 3^{\frac{x}{4}} = 3^{\frac{2}{3}} \iff x = \frac{8}{3},\ S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

j) $(\sqrt[5]{4})^x = \frac{1}{\sqrt{8}} \iff 2^{\frac{2x}{5}} = 2^{-\frac{3}{2}} \iff x = -\frac{15}{4},\ S = \left\{-\frac{15}{4}\right\}$

k) $100^x = 0{,}001 \iff 10^{2x} = 10^{-3} \iff x = -\frac{3}{2},\ S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

l) $8^x = 0{,}25 \iff 2^{3x} = 2^{-2} \iff x = -\frac{2}{3},\ S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

m) $125^x = 0{,}04 \iff 5^{3x} = 5^{-2} \iff x = -\frac{2}{3},\ S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

n) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2{,}25 \iff \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{225}{100} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \iff x = -2,\ S = \{-2\}$

72. i) $5^{3x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+3} \Leftrightarrow 5^{3x-1} = 5^{-4x-6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{7}, S = \left\{-\frac{5}{7}\right\}$

j) $(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{8x}{3}-\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}, S = \left\{\frac{5}{7}\right\}$

k) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x-1}} \Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{\frac{2x-2}{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{16}, S = \left\{-\frac{11}{16}\right\}$

l) $4^{x^2-1} = 8^x \Leftrightarrow 2^{2x^2-2} = 2^{3x} \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}\right), S = \left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$

m) $27^{x^2+1} = 9^{5x} \Leftrightarrow 3^{3x^2+3} = 3^{10x} \Leftrightarrow \left(x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{3}\right), S = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$

n) $8^{x^2-x} = 4^{x+1} \Leftrightarrow 2^{3x^2-3x} = 2^{2x+2} \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}\right),$

$S = \left\{2, -\frac{1}{3}\right\}$

73. $4^{x^2+4x} = 4^{12} \Leftrightarrow 2^{2x^2+8x} = 2^{24} \Leftrightarrow (x = -6 \text{ ou } x = 2), S = \{-6, 2\}$

74. $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5} \Leftrightarrow 10^{2+x} = 10^{\frac{15}{x}} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = -5 \text{ ou } x = 3), S = \{-5, 3\}$

76. a) $(2^x)^{x+4} = 32 \Leftrightarrow 2^{x^2+4x} = 2^5 \Leftrightarrow (x = -5 \text{ ou } x = 1), S = \{-5, 1\}$

b) $(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4} \Leftrightarrow (3^{2x+2})^{x-1} = 3^{x^2+x+4} \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -2), S = \{-2, 3\}$

c) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x} \Leftrightarrow 2^{3x-1} \cdot 2^{4x+6} = 2^{9-3x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}, S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

d) $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4 \Leftrightarrow 3^{4x-23} = 3^{12x-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{19}{8}, S = \left\{-\frac{19}{8}\right\}$

e) $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1} \Leftrightarrow 2^{-3x+23} = 2^{2x-2} \Leftrightarrow x = 5, S = \{5\}$

f) $\frac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \frac{81^{2x}}{27^{3-4x}} \Leftrightarrow \frac{3^{3x+2}}{3^{25x+5}} = \frac{3^{8x}}{3^{9-12x}} \Leftrightarrow 3^{-22x-3} = 3^{20x-9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}, S = \left\{\frac{1}{7}\right\}$

g) $\sqrt[x+4]{2^{3x-8}} = 2^{x-5} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x-8}{x+4}} = 2^{x-5} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 6 \text{ ou } x = -2), S = \{-2, 6\}$

h) $8^{3x} = \sqrt[3]{32^x} : 4^{x-1} \Leftrightarrow 2^{9x} = 2^{\frac{5x}{3}} : 2^{2x-2} \Leftrightarrow 2^{9x} = 2^{\frac{-x+6}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{14}, S = \left\{\frac{3}{14}\right\}$

i) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3x-3]{2^{3x-1}} = \sqrt[3x-7]{2^{3x-9}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{3x-1}{3x-3}} = 2^{\frac{3x-9}{3x-7}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ não serve, pois $x \in \mathbb{N}$ e $x > 2$. $S = \varnothing$

j) $\sqrt{8^{x-1}} \cdot \sqrt[x+1]{4^{2x-3}} = \sqrt[6]{2^{5x+3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x-3}{2}} \cdot 2^{\frac{4x-6}{x+1}} = 2^{\frac{5x+3}{6}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{2} + \frac{4x-6}{x+1} = \frac{5x+3}{6} \Leftrightarrow 4x^2 + 16x - 48 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = -6$ ou $x = 2)$

$x = -6$ não serve, pois $x \in \mathbb{N}$. $S = \{2\}$

77. $(4^{3-x})^{2-x} = 1 \Leftrightarrow (2^{6-2x})^{2-x} = 2^0 \Leftrightarrow (6-2x)(2-x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 3$ ou $x = 2)$, $S = \{2, 3\}$

79. a) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 306 \Leftrightarrow 3^{x-1}(1 - 3 + 9 + 27) = 306 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^2 \Leftrightarrow x = 3, S = \{3\}$

b) $5^{x-2} - 5^x + 5^{x+1} = 505 \Leftrightarrow 5^{x-2}(1 - 25 + 125) = 505 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^1 \Leftrightarrow x = 3, S = \{3\}$

c) $2^{3x} + 2^{3x+1} + 2^{3x+2} + 2^{3x+3} = 240 \Leftrightarrow 2^{3x}(1 + 2 + 4 + 8) = 240 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}, S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

d) $5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480 \Leftrightarrow 5^{4x-1}(1 - 5 - 25 + 125) = 480 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{4x-1} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

e) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+5} = 2 \Leftrightarrow 2^x(3 - 10 + 40 - 32) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1, S = \{1\}$

f) $2 \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 4^x = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x+5} - 5 \cdot 2^{2x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 2^{2x} = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x}(32 - 20 - 6 - 1) = 20 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^2 \Leftrightarrow x = 1, S = \{1\}$

81. a) $4^x - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 2 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y = 2$ ou $y = -1)$.

$y = -1$ não convém, pois $2^x > 0$.

De $y = 2$ vem: $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

$S = \{1\}$

b) $9^x + 3^x = 90 \iff 3^{2x} + 3^x - 90 = 0$
Fazendo $3^x = y$, temos:
$y^2 + y - 90 = 0 \iff (y = -10 \text{ ou } y = 9)$.
$y = -10$ não convém, pois $2^x > 0$.
De $y = 9$ vem: $3^x = 3^2 \iff x = 2$.
$S = \{2\}$

c) $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0 \iff 2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 + 20y + 64 = 0 \iff (y = 16 \text{ ou } y = 4)$.
De $y = 16$ vem: $2^x = 2^4 \iff x = 4$; de $y = 4$ vem: $2^x = 2 \iff x = 2$.
$S = \{2, 4\}$

d) $4^x + 4 = 5 \cdot 2^x \iff 2^{2x} + 4 - 5 \cdot 2^x = 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 - 5y + 4 = 0 \iff (y = 4 \text{ ou } y = 1)$.
De $y = 4$ vem: $2^x = 2^2 \iff x = 2$; de $y = 1$ vem: $2^x = 2^0 \iff x = 0$.
$S = \{0, 2\}$

e) $9^x + 3^{x+1} = 4 \iff 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 + 3y - 4 = 0 \iff (y = -4 \text{ ou } y = 1)$.
$y = -4$ não convém, pois $2^x > 0$.
De $y = 1$ vem: $2^x = 2^0$.
$S = \{0\}$

f) $5^{2x} + 5^x + 6 = 0$
Fazendo $5^x = y$, temos $y^2 + y + 6 = 0 \iff \nexists y \in \mathbb{R}$.
$S = \varnothing$

g) $2^{2x} + 2^{x+1} - 80 = 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 + 2y - 80 = 0 \iff (y = -10 \text{ ou } y = 8)$.
$y = -10$ não convém.
De $y = 8$ vem: $2^x = 2^3 \iff y = 3$.
$S = \{3\}$

h) $10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$
Fazendo $10^x = y$, temos:
$$\frac{y^2}{10} - \frac{11y}{10} + 1 = 0 \iff (y = 10 \text{ ou } y = 1).$$
De $y = 10$ vem: $10^x = 10 \iff x = 1$; de $y = 1$ vem: $10^x = 10^0 \iff x = 0$.
$S = \{0, 1\}$

i) $4^{x+1} + 4^{3-x} = 257$
Fazendo $4^x = y$, temos:

$4y + \frac{64}{4} - 257 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 64 - 257y = 0 \Leftrightarrow \left(y = 64 \text{ ou } y = \frac{1}{4}\right).$

De $y = 64$ vem: $4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$; de $y = \frac{1}{4}$ vem: $4x = 4^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$

$S = \{-1, 3\}.$

j) $5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x - \frac{1}{2}} - 8 = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{2x} - 4^{4x - 1} - 8 = 0$

Fazendo $y = 2^{2x}$, temos:

$5y - \frac{y^2}{2} - 8 = 0 \Leftrightarrow -y^2 + 10y - 16 = 0 \Leftrightarrow (y = 8 \text{ ou } y = 2).$

De $y = 8$ vem: $2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; de $y = 2$ vem: $2^{2x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

$S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

82. $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125 \Leftrightarrow 5^{2\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$
Fazendo $5^{\sqrt{x}} = y$, vem: $y^2 - 124y - 125 = 0 \Leftrightarrow (y = 125 \text{ ou } y = -1).$
$y = -1$ não convém.
De $y = 125$ vem: $5^{\sqrt{x}} = 5^3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$. $S = \{9\}.$

83. $4^{x^2 + 2} - 3 \cdot 2^{x^2 + 3} = 160 \Leftrightarrow 2^{2x^2 + 4} - 3 \cdot 2^{x^2 + 3} - 160 = 0$
Fazendo $2^{x^2} = y$, temos:

$16y^2 - 24y - 160 = 0 \Leftrightarrow \left(y = 4 \text{ ou } y = -\frac{5}{2}\right)$. $y = -\frac{5}{2}$ não convém.

De $y = 4$ vem: $2^{x^2} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}).$
O produto é $-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -2.$

84. a) $3^x - \frac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \frac{23}{3^{x-2}} \Leftrightarrow 3^x - \frac{15}{\frac{3^x}{3}} + \frac{3^x}{3^3} = \frac{23}{\frac{3^x}{3^2}}$

Seja $3^x = t$. Temos:

$t - \frac{45}{t} + \frac{t}{27} = \frac{207}{t} \Rightarrow t^2 = 243 \Rightarrow t = \pm 9\sqrt{3}$

Desprezando a raiz negativa, pois $t = 3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos $t = 9\sqrt{3}$,

isto é, $3^x = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$. $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

b) $2^{x+1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2^{x-1}} = \frac{30}{2^x} \Leftrightarrow 2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2^2} - \frac{3}{\frac{2^x}{2}} = \frac{30}{2^x}$

Fazendo $2^x = t$, temos:

$2t + \frac{t}{4} - \frac{6}{t} = \frac{30}{t} \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = -4$ (não convém) ou $t = 4$,

isto é, $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$. $S = \{2\}$

c) $16^{2x+3} - 16^{2x+1} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{8x+12} - 2^{8x+4} - 2^{8x+12} + 2^{6x+5} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{6x+5} = 2^{8x+4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

85. Seja $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Então, temos:

$$3^{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{81}{3^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}} \Leftrightarrow 3^{t^2-2} = \frac{81}{3^t} \Leftrightarrow 3^{t^2-2} = 3^{4-t} \Rightarrow t^2+t-6=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ($t = -3$ ou $t = 2$).

1ª possibilidade: $t = -3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

2ª possibilidade: $t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$S = \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 1\right\}$

86. $2^x - \frac{1}{2^x} = k \Leftrightarrow 2^{2x} - k \cdot 2^x - 1 = 0$

Pondo $2^x = y$, temos $y^2 - ky - 1 = 0$.

Examinando $\Delta = k^2 + 4$, notamos que $\Delta > 0, \forall k \in \mathbb{R}$.

Então essa equação tem, para todo k, duas raízes reais e de sinais contrários, pois seu produto é -1.

Conclusão: para qualquer k, a equação dada só admite uma única solução

$y = 2^x = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2} > 0.$

87. $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 2 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x(1-2) = -3^{-x}(1+2) \Leftrightarrow 3^{2x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

88. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x}\left(\frac{3}{2}\right) = 3^x\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{\sqrt{4^3}}{\sqrt{3^3}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

89. $3^{x-1} - \dfrac{5}{3^{x+1}} = 4 \cdot 3^{1-3x} \Leftrightarrow 3^{x-1} - 5 \cdot 3^{-x-1} - 4 \cdot 3^{1-3x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3^x}{3} - \dfrac{5}{3 \cdot 3^x} - \dfrac{4 \cdot 3}{3^{3x}} = 0$

Pondo $y = 3^x$, temos:

$\dfrac{y}{3} - \dfrac{5}{3y} - \dfrac{12}{y^3} = 0 \Leftrightarrow y^4 - 5y^2 - 36 = 0.$

Fazendo $y^2 = t$, temos: $t^2 - 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow (t = 9 \text{ ou } t = -4)$.

$t = -4$ não convém. De $t = 9$ vem: $y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$, pois $y = -3$ não convém.

De $y = 3$ vem: $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

$S = \{1\}$

90. $8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 2 + 8 = 0$

Fazendo $2^x = y$, vem:

$y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = 0$. Lembrando da identidade:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, temos:

$(y + 2)(y^2 - 2y + 4) - 3y(y + 2) = 0 \Rightarrow (y + 2) \cdot (y^2 - 5y + 4) = 0$ donde:

$y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$, não convém pois $y = 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

ou

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } y = 4) \Leftrightarrow (2^x = 1 \text{ ou } 2^x = 4) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 2)$

$S = \{0, 2\}$

92. a) $x^{2-3x} = 1$. Para $x = 0$, temos $0^2 = 1$ (falso); $x = 0$ não é solução; para $x = 1$, temos $1^{-1} = 1$ (verdadeiro); $x = 1$ é solução. Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^{2-3x} = x^0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

$S = \left\{1, \dfrac{2}{3}\right\}$

b) $x^{2x+5} = 1$. $x = 0$ não é solução, pois $0^5 = 1$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^7 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos:

$x^{2x+5} = x^0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$ não convém.

$S = \{1\}$

c) $x^{x^2-2} = 1$. $x = 0$ não é solução, pois $0^{-2} = 1$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^{-1} = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos:

$x^{x^2-2} = x^0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

$S = \{1, \sqrt{2}\}$

d) $x^{x^2-7x+12} = 1$. $x = 0$ não é solução, pois $0^{12} = 1$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^6 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos:

$x^{x^2-7x+12} = x^0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 3)$.

$S = \{1, 3, 4\}$

e) $x^{x^2 - 3x - 4} = 1$. $x = 0$ não é solução, pois $0^{-4} = 1$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^{-6} = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^{x^2 - 3x - 4} = x^0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -1)$, mas $x = -1$ não convém.
$S = \{1, 4\}$

93. a) $x^x = x$. $x = 0$ não é solução, pois $0^0 = 0$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^1 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^x = x^1 \Leftrightarrow x = 1$.
$S = \{1\}$

b) $x^{x+1} = x$. $x = 0$ é solução, pois $0^1 = 0$ (verdadeiro); $x = 1$ é solução, pois $1^2 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^{x+1} = x \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
$S = \{0, 1\}$. Como $U = \mathbb{R}_+ \Rightarrow S = \{1\}$.

c) $x^{4 - 2x} = x$. $x = 0$ é solução, pois $0^4 = 0$ (verdadeiro); $x = 1$ é solução, pois $1^2 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^{4-2x} = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. $S = \left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}$. Como $U = \mathbb{R}_+ \Rightarrow S = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$.

d) $x^{2x^2 - 5x + 3} = x$. $x = 0$ é solução, pois $0^3 = 0$ (verdadeiro); $x = 1$ é solução, pois $1^0 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^{2x^2 - 5x + 3} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}\right)$.
$S = \left\{0, 1, 2, \frac{1}{2}\right\}$. Como $U = \mathbb{R}_+ \Rightarrow S = \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$.

e) $x^{x^2 - 2x - 7} = x$. $x = 0$ não é solução, pois $0^{-7} = 0$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^{-8} = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^{x^2 - 2x - 7} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -2)$.
$S = \{1, 4\}$

94. $(x^2 - x + 1)^{(2x^2 - 3x - 2)} = 1$. $x = 0$ é solução, pois $1^{-2} = 1$ (verdadeiro); $x = 1$ é solução, pois $1^{-3} = 1$ (verdadeiro).

$$\text{Supondo } 0 < x^2 - x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 \text{ (é satisfeita para } \forall x \in \mathbb{R}) \\ \text{e} \\ x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$$

temos:

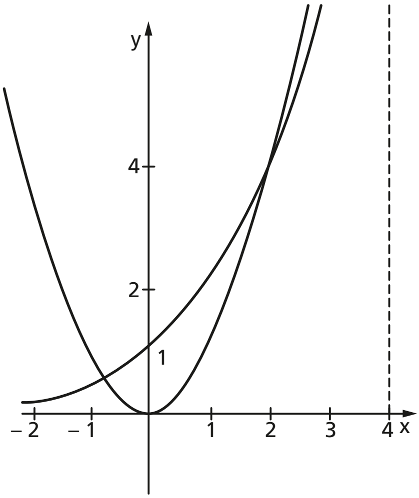
$(x^2 - x + 1)^{(2x^2 - 3x - 2)} = 1 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^{(2x^2 - 3x - 2)} = (x^2 - x + 1)^0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2\right)$. $S = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1, 2\right\}$

95. $x^{x^3 - 8} = 1$. $x = 0$ não é solução, pois $0^{-8} = 1$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^{-7} = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos:
$x^{x^3 - 8} = x^0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
$S = \{1, 2\}$

96.

x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

x	x^2
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



São duas soluções.

97. $x^{2x} - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$. $x = 0$ não é solução, pois $0^0 = 0$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1 - 2 + 1 = 0$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos $(x^x)^2 - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$; fazendo $x^x = y$, temos:

$y^2 - (x^2 + x)y + x^3 = 0 \iff (y = x^2 \text{ ou } y = x)$.

De $y = x^2$ vem $x^x = x^2 \iff x = 2$; de $y = x$ vem $x^x = x \iff x = 1$.

$S = \{1, 2\}$

99. a) $4^x + 2 \cdot 14^x = 3 \cdot 49^x \iff \dfrac{4^x}{49^x} + \dfrac{2 \cdot 14^x}{49^x} = \dfrac{3 \cdot 49^x}{49^x} \iff$

$$\iff \left(\frac{2}{7}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x - 3 = 0$$

Fazendo $\left(\frac{2}{7}\right)^x = y$, temos:

$y^2 + 2y - 3 = 0 \iff (y = -3 \text{ ou } y = 1)$.

$y = -3$ não serve.

De $y = 1$ vem:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x = 1 \iff \left(\frac{2}{7}\right)^x = \left(\frac{2}{7}\right)^0 \iff x = 0.$$

$S = \{0\}$

b) $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0 \iff 4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0 \iff$

$$\iff \frac{4 \cdot 2^{2x}}{2^x \cdot 3^x} - \frac{2^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 3^x} - \frac{18 \cdot 3^{2x}}{2^x \cdot 3^x} = 0 \iff 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} - 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = 0.$$

Fazendo $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$, vem:

$\frac{4}{y} - 18y - 1 = 0 \Leftrightarrow -18y^2 - y + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(y = -\frac{1}{2} \text{ ou } y = \frac{4}{9}\right).$

$y = -\frac{1}{2}$ não convém.

De $y = \frac{4}{9}$ vem $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = -2.$

$S = \{-2\}$

100. a) $\begin{cases} 4^x = 16y \Leftrightarrow 2^{2x} - 16y = 0 \\ 2^{x+1} = 4y \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - 4y = 0 \end{cases}$

Fazendo $2^x = z$, vem:

$\begin{cases} z^2 - 16y = 0 \quad (1) \\ 2z - 4y = 0 \Leftrightarrow z = 2y \quad (2) \end{cases}$

De (2) em (1) vem $4y^2 - 16y = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ ou } y = 4).$

Para $y = 0$, temos $z = 0$; portanto, $2^x = 0$ impossível.

Para $y = 4$, temos $z = 8$; portanto, $2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3.$

$S = \{(3, 4)\}$

b) $\begin{cases} 2^{2(x^2 - y)} = 100 \cdot 5^{2(y - x^2)} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2(x^2 - y)} = 2^2 \cdot 5^{-2(x^2 - y) + 2} \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x^2 - 2y - 2} = 5^{-2x^2 + 2y + 2} \quad (1) \\ y = 5 - x \quad (2) \end{cases}$

De (2) em (1) vem $2^{2x^2 + 2x - 12} = 5^{-2x^2 - 2x + 12}.$

Fazendo $2x^2 + 2x - 12 = z$, vem:

$2^z = 5^{-z} \Leftrightarrow 2^z \cdot 5^z = 1 \Leftrightarrow 10^z = 1 \Leftrightarrow z = 0.$

Sendo assim: $2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ou } x = 2).$

Para $x = -3$ temos $y = 8$; para $x = 2$, temos $y = 3$.

$S = \{(2, 3), (-3, 8)\}$

c) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24 \quad (1) \\ x + y = 8 \Leftrightarrow x = 8 - y \quad (2) \end{cases}$

De (2) em (1) vem:

$2^{8 - y} - 2^y = 24 \Leftrightarrow 2^8 - 2^{2y} - 24 \cdot 2^y = 0.$

Fazendo $2^y = z$, vem:

$-z^2 - 24z + 256 = 0 \Leftrightarrow (z = -32 \text{ ou } z = 8).$

$z = -32$ não convém.

De $z = 8$ vem $2^y = 2^3 \Leftrightarrow y = 3$.
Para $y = 3 \Rightarrow x = 5$.
$S = \{(5, 3)\}$

d) $\begin{cases} 3^x - 2^{(y^2)} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\left(\frac{y^2}{2}\right)} = 7 \end{cases}$

Fazendo $3^x = a$ e $2^{(y^2)} = b$, temos:

$\begin{cases} a - b = 77 \Leftrightarrow a = 77 + b \quad (1) \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = 7 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 = (7 + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a - b - 49 = 14\sqrt{b} \quad (2) \end{cases}$

De (1) em (2) vem $77 + b - b - 49 = 14\sqrt{b} \Leftrightarrow b = 4$ (3).
De (3) em (1) vem $a = 81$. Como $3^x = a \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$.
Como $2^{(y^2)} = b \Leftrightarrow 2^{(y^2)} = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$.
$S = \{(4, +\sqrt{2}), (4, -\sqrt{2})\}$

101. $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \quad (1) \\ x + 2y = 1 \quad (2) \end{cases}$

De (2) − (1) vem $y = 1$ e $x = -1$, então $x - y = -2$.

102. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y = 2^2 \cdot 3^3 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ e } y = 3) \\ 4^x \cdot 2^y = 128 \Leftrightarrow 2^{2x+y} = 2^7 \Leftrightarrow 2x + y = 7 \text{ (que aceita a solução } (2, 3)) \end{cases}$

O produto é $2 \cdot 3 = 6$.

103. $\begin{cases} x^{y^2 - 15y + 56} = 1 \\ y - x = 5 \Leftrightarrow y = 5 + x \end{cases}$

$x = 0$ não é solução, pois $0^{y^2 - 15y + 56} = 1$ (falso).
$x = 1$ é solução, pois $1^{y^2 - 15y + 56} = 1$ (verdadeiro).
Como $y = 5 + x \Rightarrow y = 6 \Rightarrow (1, 6)$. Supondo $0 < x \neq 1$, temos:
$x^{y^2 - 15y + 56} = x^0 \Leftrightarrow y^2 - 15y + 56 = 0 \Leftrightarrow (y = 8 \text{ ou } y = 7)$.
Para $y = 8$, temos $x = 3 \Rightarrow (3, 8)$.
Para $y = 7$, temos $x = 2 \Rightarrow (2, 7)$.
$S = \{(1, 6), (3, 8), (2, 7)\}$

104. a) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \quad (1) \\ x^2y = 1 \Leftrightarrow y = x^{-2} \quad (2) \end{cases}$

$x = 0$ não é solução, pois $0^y = y^{-y}$ e $y \neq 0$, pois $x^2 \cdot y = 1$.
$x = 1$ é solução, pois $1^2 \cdot y = 1 \Rightarrow y = 1$ e $1^2 = 1^0$ (verdadeiro).
De (2) em (1) vem:
$x^{x + x^{-2}} = (x^{-2})^{x - x^{-2}} \Leftrightarrow x + x^{-2} = -2x + 2x^{-2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ x + \frac{1}{x^2} = -2x + \frac{2}{x^2} \ \Leftrightarrow\ x = 3^{-\frac{1}{3}}.$$

Como $y = x^{-2} \ \Rightarrow\ y = \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2} \ \Leftrightarrow\ y = 3^{\frac{2}{3}}$.

$$S = \left\{(1, 1)\left(3^{-\frac{1}{3}}, 3^{\frac{2}{3}}\right)\right\}$$

b) $\begin{cases} x^y = y^x & (1) \\ x^3 = y^2 \ \Leftrightarrow\ y = x^{\frac{3}{2}} & (2) \end{cases}$

De (2) em (1) vem $x^{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{3x}{2}}$.

$x = 0$ é solução, pois $0^0 = 0^0$ (verdadeiro); então, $x = 0$ e $y = 0$ satisfazem.

$x = 1$ é solução, pois $1^1 = 1^{\frac{3}{2}}$ (verdadeiro); então, $x = 1$ e $y = 1$ satisfazem.

Supondo $0 < x \neq 1$, temos:

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{3x}{2} \ \Leftrightarrow\ x\left(2x^{\frac{1}{2}} - 3\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{9}{4}\right).$$

Como $y = \sqrt{x^3} \ \Rightarrow\ y = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} \ \Rightarrow\ y = \frac{27}{8}$.

$$S = \left\{(0, 0), (1, 1), \left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)\right\}. \text{ Como } U = \mathbb{R}_+ \Rightarrow S = \left\{(1, 1), \left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)\right\}.$$

105. $\begin{cases} x^y = y^x \ \Leftrightarrow\ x = y^{\frac{x}{y}} \\ x^m = y^n \ \Leftrightarrow\ x = y^{\frac{n}{m}} \ (2) \end{cases} \Rightarrow\ y^{\frac{x}{y}} = y^{\frac{n}{m}} \ \Rightarrow\ mx = ny \ \ (1)$

$x = 1$ é solução, pois $1^y = y^1 \ \Rightarrow\ y = 1$; então, $1^m = 1^n$ (verdade) $\therefore$ $\therefore$ (1, 1) é solução. De (2) em (1) vem:

$$m \cdot y^{\frac{n}{m}} = ny \ \Leftrightarrow\ y = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}.$$

Como $x = y^{\frac{n}{m}} \ \Rightarrow\ x = \left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\cancel{m}}{n-m}}\right]^{\frac{n}{\cancel{m}}} \ \Leftrightarrow\ x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}.$

$$S = \left\{(1, 1), \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}, \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}\right)\right\}$$

107. a) $3^{2x} - (2m + 3) \cdot 3^x + (m + 3) = 0$

Fazendo $y = 3^x$, temos $y^2 - (2m + 3)y + (m + 3) = 0$. Como $y > 0$, $f(y) = y^2 - (2m + 3)y + (m + 3)$ deve admitir pelo menos uma raiz real e positiva.

1) as duas raízes são positivas:
$y_1 \geqslant y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geqslant 0, S > 0$ e $a \cdot f(0) > 0$
$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m - 3 \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(m \leqslant \dfrac{-2-\sqrt{7}}{2} \text{ ou } m \geqslant \dfrac{-2+\sqrt{7}}{2}\right)$ I
$S > 0 \Rightarrow 2m + 3 > 0 \Rightarrow \left(m > -\dfrac{3}{2}\right)$ II
$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m + 3 > 0 \Rightarrow m > -3$ III
$S_1 =$ I $\cap$ II $\cap$ III $= \left\{m \in \mathbb{R} \mid m \geqslant \dfrac{-2+\sqrt{7}}{2}\right\}$

2) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geqslant y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m < -3, \\ S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -3\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \left(m > -\dfrac{3}{2} \text{ e } m = -3\right), S_3 = \varnothing \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -3 \text{ ou } m \geqslant \frac{-2+\sqrt{7}}{2}\right\}$$

b) $2^{2x+1} - (2m - 3) \cdot 2^{x+1} + (7 - 2m) = 0$
Fazendo $2^x = y$, temos: $2y^2 - (2m - 3) \cdot 2y + (7 - 2m) = 0$.
Como $y > 0$, temos:

1) as duas raízes são positivas: $y_1 \geqslant y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geqslant 0, S > 0$ e $a \cdot f(0) > 0$
$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 5 \geqslant 0 \Rightarrow \left(m \leqslant -\dfrac{1}{2} \text{ ou } m \geqslant \dfrac{5}{2}\right)$ I
$S > 0 \Rightarrow \dfrac{2(2m-3)}{2} > 0 \Rightarrow m > \dfrac{3}{2}$ II
$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow 2(7 - 2m) > 0 \Rightarrow m < \dfrac{7}{2}$ III
$S_1 =$ I $\cap$ II $\cap$ III $= \left\{m \in \mathbb{R} \mid \dfrac{5}{2} \leqslant m < \dfrac{7}{2}\right\}$

2) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geqslant y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow 14 - 4m < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m > \dfrac{7}{2}, S_2 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m > \dfrac{7}{2}\right\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow (2m - 3 > 0 \text{ e} \\ 7 - 2m = 0) \Rightarrow \left(m > \dfrac{3}{2} \text{ e } m = \dfrac{7}{2}\right), S_3 = \left\{\dfrac{7}{2}\right\} \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m \geqslant \frac{5}{2}\right\}$$

c) $m \cdot 9^x - (2m + 1) \cdot 3^x + (m - 1) = 0$

Fazendo $y = 3^x$, temos:

$my^2 - (2m + 1) \cdot y + (m - 1) = 0.$

Como $y > 0$, temos:

1) as duas raízes são positivas: $y_1 \geqslant y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geqslant 0, S > 0$ e $a \cdot f(0) > 0$

$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4m^2 + 4m \geqslant 0 \Rightarrow m \geqslant -\dfrac{1}{8}$ (I)

$S > 0 \Rightarrow \dfrac{2m + 1}{m} > 0 \Rightarrow \left(m < -\dfrac{1}{2} \text{ ou } m > 0\right)$ (II)

$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m(m - 1) > 0 \Rightarrow (m > 1 \text{ ou } m < 0)$ (III)

$S_1 =$ (I) $\cap$ (II) $\cap$ (III) $= \{m \in \mathbb{R} \mid m > 1\}$

2) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geqslant y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m(m - 1) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < m < 1, S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 1\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\dfrac{2m + 1}{m} > 0 \text{ e } m - 1 = 0\right) \Rightarrow \left(m < -\dfrac{1}{2} \text{ ou}\right. \\ \left. m > 0\right) \text{ e } (m = 1), S_3 = \{1\} \end{cases}$$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 0\}$

108. $m(2^x - 1)^2 - 2^x(2^x - 1) + 1 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos: $m(y - 1)^2 - y(y - 1) + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (m - 1)y^2 - (2m - 1)y + (m + 1) = 0$, mas $y > 0$, então:

As duas raízes são positivas:

$y_1 \geqslant y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geqslant 0, S > 0$ e $a \cdot f(0) > 0$

$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 4(m - 1)(m + 1) \geqslant 0 \Rightarrow m \leqslant \dfrac{5}{4}$ (I)

$S > 0 \Rightarrow \dfrac{2m - 1}{m - 1} > 0 \Rightarrow \left(m < \dfrac{1}{2} \text{ ou } m > 1\right)$ (II)

$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow (m < -1 \text{ ou } m > 1)$ (III)

$S_1 =$ (I) $\cap$ (II) $\cap$ (III) $= \left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -1 \text{ ou } 1 < m \leqslant \dfrac{5}{4}\right\}$

Somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geqslant y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m^2 - 1 < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 < m < 1, S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid -1 < m < 1\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(m < \dfrac{1}{2} \text{ ou } m > 1\right) \text{ e } (m = -1), S_3 = \{-1\} \end{cases}$$

Notemos que, para $m = 1$, a equação proposta se reduz a: $-2^x + 2 = 0$, que apresenta uma raiz real ($x = 1$). Assim,

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m \leqslant \dfrac{5}{4}\right\}.$

109. $2^x + 2^{-x} = m \Leftrightarrow 2^{2x} - m \cdot 2^x + 1 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos: $y^2 = - my + 1 = 0$, mas $y = 2^x > 0$, então:

As duas raízes são positivas:

$y_1 \geqslant y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geqslant 0$ e $S > 0$ e $a \cdot f(0) > 0$

$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow m^2 - 4 \geqslant 0 \Rightarrow (m \leqslant -2 \text{ ou } m \geqslant 2)$ (I)

$S > 0 \Rightarrow m > 0$ (II)

$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow 1 > 0$ (V)

$S_1 = \text{(I)} \cap \text{(II)} = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geqslant 2\}$

Somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geqslant y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) = 1 < 0 \text{ (F)}, S_2 = \varnothing \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow m > 0 \text{ e } f(0) = 1 \neq 0, S_3 = \varnothing \end{cases}$$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geqslant 2\}$

110. $\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = m \Leftrightarrow (m - 1)a^{2x} - m - 1 = 0$

Fazendo $y = a^x$, temos $(m - 1)y^2 - (m + 1) = 0$.

As duas raízes são positivas:

$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow 4(m - 1)(m + 1) \geqslant 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (m \leqslant -1 \text{ ou } \geqslant 1)$ (I)

$S > 0 \Rightarrow 0 > 0$ (F); $\nexists m \in \mathbb{R}$ que satisfaz (II)

$a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow (m - 1)(-m - 1) > 0 \Rightarrow m^2 - 1 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1 < m < 1)$ (III)

Tendo em vista (I), (II), (III), segue que $S_1 = \varnothing$.

Somente uma raiz é positiva:

$y_1 > 0 \geqslant y_2 \Rightarrow y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0$

$S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -1 \text{ ou } m > 1\}$

$y_1 > 0$ e $y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (0 > 0 \text{ (F) e } m - 1 = 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_3 = \varnothing$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -1 \text{ ou } m > 1\}$

111. $a^{2x} - (m + 1)a^x + (m - 1) = 0$

Fazendo $a^x = y$, temos:

$y^2 - (m + 1)y + (m - 1) = 0$

As duas raízes são positivas:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta \geqslant 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R} \ \text{(I)} \\ S > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \ \text{(II)} \\ a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \ \text{(III)}\end{array}\right\} \begin{array}{l} S_1 = \text{(I)} \cap \text{(II)} \cap \text{(III)} = \\ = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 1\}\end{array}$$

Somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geqslant y_2 \quad \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \\ S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < 1\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (m > -1 \text{ e } m = 1) \\ S_3 = \{1\} \end{cases}$$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{R}$

119. a) $8 < 2^x < 32 \Leftrightarrow 2^3 < 2^x < 2^5 \Leftrightarrow 3 < x < 5$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$

b) $0{,}0001 < (0{,}1)^x < 0{,}01 \Leftrightarrow 10^{-4} < 10^{-x} < 10^{-2} \Leftrightarrow 2 < x < 4$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

c) $\dfrac{1}{27} < 3^x < 81 \Leftrightarrow 3^{-3} < 3^x < 3^4 \Leftrightarrow -3 < x < 4$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$

d) $\dfrac{1}{8} \leqslant 4^x \leqslant 32 \Leftrightarrow 2^{-3} \leqslant 2^{2x} \leqslant 2^5 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}\right\}$

e) $\dfrac{8}{27} < \left(\dfrac{4}{9}\right)^x < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} < x < \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}\right\}$

f) $0{,}1 < 100^x < 1\,000 \Leftrightarrow 10^{-1} < 10^{2x} < 10^3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}\right\}$

g) $4 < 8^{|x|} < 32 \Leftrightarrow 2^2 < 2^{3\,|x|} < 2^5 \Leftrightarrow 2 < 3\,|x| < 5$

se $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, então: $2 < 3x < 5 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < x < \dfrac{5}{3}$ ou

se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, então: $2 < -3x < 5 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} < x < -\dfrac{2}{3}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{3} < x < -\dfrac{2}{3} \text{ ou } \dfrac{2}{3} < x < -\dfrac{5}{3}\right\}$

h) $25 < 125^{2x-1} < 125 \Leftrightarrow 5^2 < 5^{6x-3} < 5^3 \Leftrightarrow \frac{5}{6} < x < 1$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{6} < x < 1\right\}$

i) $(0{,}3)^{x-5} \leqslant (0{,}09)^{2x+3} \leqslant (0{,}3)^{x+6} \Leftrightarrow$

$(0{,}3)^{x-5} \leqslant (0{,}3)^{4x+6} \leqslant (0{,}3)^{x+6} \Leftrightarrow$

$(x - 5 \geqslant 4x + 6 \text{ e } 4x + 6 \geqslant x + 6) \Leftrightarrow \left(x \leqslant -\frac{11}{3} \text{ e } x \geqslant 0\right)$

$S = \varnothing$

j) $1 \leqslant 7^{x^2-4x+3} \leqslant 343 \Leftrightarrow 7^0 \leqslant 7^{x^2-4x+3} \leqslant 7^3 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 - 4x + 3 \leqslant 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \text{ e } x^2 - 4x + 3 \leqslant 3)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 4\}$

k) $3^{x^2-3} < 3^{x^2-5x+6} < 9 \Leftrightarrow 3^{x^2-3} < 3^{x^2-5x+6} < 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6 > x^2 - 3 \text{ e } x^2 - 5x + 6 < 2) \Leftrightarrow \left(x < \frac{9}{5} \text{ e } 1 < x < 4\right)$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{9}{5}\right\}$

121. a) $(2^{x+1})^{2x-3} < 128 \Leftrightarrow 2^{2x^2-3x+2x-3} < 2^7 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 10 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < x < \frac{5}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{5}{2}\right\}$

b) $(27^{x-2})^{x+1} \geqslant (9^{x+1})^{x-3} \Leftrightarrow (3^{3x-6})^{x+1} \geqslant (3^{2x+2})^{x-3} \Leftrightarrow x^2 + x \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 0)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 0\}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leqslant \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4x+2} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{9}{4}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{9}{4}\right\}$

d) $25^{3-4x} : 125^{2-x} > 5^{3x+1} \Leftrightarrow 5^{-5x} > 5^{3x+1} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{8}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{8}\right\}$

e) $\frac{0{,}04^{3x+2} \cdot 25^{1-4x}}{0{,}008^{3-x} \cdot 125^{4-3x}} > 1 \Leftrightarrow \frac{(5^{-2})^{3x+2} \cdot (5^2)^{1-4x}}{(5^{-3})^{3-x} \cdot (5^3)^{4-3x}} > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5^{-14x-2}}{5^{-6x+3}} > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{-8x-5} > 5^0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{5}{8}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{5}{8}\right\}$

f) $2^{\frac{2x-3}{x-1}} : 32^{\frac{1}{x+1}} > 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{2x-3}{x-1}} : 2^{\frac{5}{x+1}} > 2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x-1} - \dfrac{5}{x+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-6x+4}{(x-1)(x+1)} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x < -1 \text{ ou } \dfrac{2}{3} < x < 1\right)$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } \dfrac{2}{3} < x < 1\right\}$

g) $(0{,}1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot (0{,}01)^{\frac{1}{x+3}} < (0{,}001)^{\frac{1}{x+2}} \Leftrightarrow (0{,}1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot (0{,}1)^{\frac{2}{x+3}} < (0{,}1)^{\frac{3}{x+2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} > \dfrac{3}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{-x+1}{(x+1)(x+3)\,(x+2)} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3 < x < -2 \text{ ou } -1 < x < 1)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } -1 < x < 1\}$

h) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} : \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x+2}} \leqslant \left[\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x+3}}\right]^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}} \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{x^2-3x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} \leqslant \dfrac{3}{x^2+3x} \Leftrightarrow \dfrac{6x+6}{(x^2+3x)(x-1)\,(x+2)} \leqslant 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x < 1\}$

123. a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x\left(\dfrac{1}{2} + 1 + 2 - 4 + 8\right) > 240 \Leftrightarrow 2^x > 2^5 \Leftrightarrow x > 5$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $3^{x+5} - 3^{x+4} + 3^{x+3} - 3^{x+2} < 540 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x(243 - 81 + 27 - 9) < 540 \Leftrightarrow 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

c) $4^{x+1} - 2^{2x+1} + 4^x - 2^{2x-1} - 4^{x-1} \geqslant 144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x}\left(4 - 2 + 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) \geqslant 144 \Leftrightarrow 2^{2x} \geqslant 2^6 \Leftrightarrow x \geqslant 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

d) $3^{2x+1} - 9^x - 3^{2x-1} - 9^{x-1} \leqslant 42 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2x}\left(3 - 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}\right) \leqslant 42 \Leftrightarrow 3^{2x} \leqslant 3^3 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{3}{2}\right\}$

e) $3 \cdot 2^{2x+5} - 9 \cdot 2^{2x+3} - 5 \cdot 4^{x+1} + 7 \cdot 2^{2x+1} - 3 \cdot 4^{x} < 60 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{2x}(3 \cdot 2^5 - 9 \cdot 2^3 - 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 - 3) < 60 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{2x} < 2^2 \Leftrightarrow x < 1$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

f) $3^{(x2)} + 5 \cdot 3^{(x2+1)} + 2 \cdot 3^{(x2+2)} - 4 \cdot 3^{(x2+3)} + 3^{(x2+4)} < 63 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^{(x2)} \cdot (1 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^3 + 3^4) < 63 \Leftrightarrow 3^{(x2)} \cdot 7 < 63 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^{(x2)} < 9 \Leftrightarrow x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2})$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

125. a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 - 6y + 8 < 0 \Leftrightarrow 2 < y < 4 \Leftrightarrow 2 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

b) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 > 0$
Fazendo $3^x = y$, temos:
$y^2 - 12y + 27 > 0 \Rightarrow (y < 3 \text{ ou } y > 9) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3^x < 3 \text{ ou } 3^x > 9) \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ou } x > 2).$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

c) $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 \leqslant 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 5 \leqslant 0$
Fazendo $5^x = y$, temos:
$5y^2 - 26y + 5 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leqslant y \leqslant 5 \Rightarrow 5^{-1} \leqslant 5^x \leqslant 5 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1.$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

d) $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 \leqslant 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 \leqslant 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 - 2y - 8 \leqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant y \leqslant 4 \Rightarrow -2 \leqslant 2^x \leqslant 2^2 \Leftrightarrow x \leqslant 2$, pois
$2^x \geqslant -2, \forall x \in \mathbb{R}.$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

e) $3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 3^x + 3 > 0$
Fazendo $3^x = y$, temos:
$y^2 - 3y - y + 3 > 0 \Leftrightarrow (y < 1 \text{ ou } y > 3) \Rightarrow (3^x < 1 \text{ ou } 3^x > 3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } x > 1)$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

f) $2^x(2^x + 1) < 2 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x - 2 < 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 + y - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < y < 1 \Rightarrow -2 < 2^x < 2^0 \Leftrightarrow x < 0$, pois
$2^x > -2, \forall x \in \mathbb{R}$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

g) $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 > 0 \Leftrightarrow 5^{2x} + 6 \cdot 5^x + 5 > 0$
Fazendo $5^x = y$, temos:
$y^2 + 6y + 5 > 0 \Leftrightarrow (y < -5 \text{ ou } y > -1) \Rightarrow (5^x < -5 \text{ ou } 5^x > -1)$,
$5^x < -5$ impossível e $5^x > -1, \forall x \in \mathbb{R}$.
$S = \mathbb{R}$

h) $3^x(3^x + 6) < 3(2 \cdot 3^{x-1} - 3) \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 9 < 0$
Fazendo $3^x = y$, temos:
$y^2 - 4y + 9 < 0$; $\forall y \in \mathbb{R}\ y^2 - 4y + 9 > 0$.
$S = \varnothing$

i) $2^{x+3} + 2^{-x} < 6 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 < 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$8y^2 - 6y + 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-2} < 2^x < 2^{-1} \Leftrightarrow -2 < x < -1$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1\}$

j) $3(3^x - 1) \geqslant 1 - 3^{-x} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 \geqslant 0$
Fazendo $3^x = y$, temos:
$3y^2 - 4y + 1 \geqslant 0 \Rightarrow \left(y \leqslant \frac{1}{3} \text{ ou } y \geqslant 1\right) \Rightarrow \left(3^x \leqslant \frac{1}{3} \text{ ou } 3^x \geqslant 1\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 0)$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 0\}$.

k) $4^{x+\frac{3}{2}} - 2^{x+2} \geqslant 2^{x+1} - 1 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 1 \geqslant 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$8y^2 - 6y + 1 \geqslant 0 \Rightarrow \left(y \leqslant \frac{1}{4} \text{ ou } y \geqslant \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(2^x \leqslant 2^{-2} \text{ ou } 2^x \geqslant 2^{-1}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant -1)$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant -1\}$

l) $e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e < 0 \Leftrightarrow e^{2x} - (e + 1)e^x + e < 0$
Fazendo $e^x = y$, temos:
$y^2 - (e + 1)y + e < 0 \Rightarrow 1 < y < e \Rightarrow e^0 < e^x < e \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

126. $2^{2x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} < 1 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 < 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$4y^2 - 3y - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} < y < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < 2^x < 1 \Rightarrow x < 0$, pois
$2^x > -\frac{1}{4}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

127. $2^{x+5} + 3^x < 3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x \Leftrightarrow 2^x(2^5 - 2^2 - 1) - 3^x(-1 + 3^2) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x < \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x > 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

128. $\dfrac{e^x + 1}{1 - x^2} < 0$

Como $e^x + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, devemos ter: $1 - x^2 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x < -1 \text{ ou } x > 1)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

130. a) $x^{5x-2} > 1$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-2} > 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^3 > 1 \text{ (falso)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{5x-2} > x^0 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{5}$ (II)

(I) $\cap$ (II) $\Rightarrow x > 1$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^{5x-2} > x^0 \Leftrightarrow 5x - 2 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{2}{5}$ (IV)

(III) $\cap$ (IV) $\Rightarrow 0 < x < \dfrac{2}{5}$

$S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{2}{5}\right\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{2}{5} \text{ ou } x > 1\right\}$

b) $x^{4x-3} < 1$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-3} < 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^1 < 1 \text{ (falso)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{4x-3} < x^0 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{4}$ (II)

(I) $\cap$ (II) $\Rightarrow S_2 = \varnothing$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^{4x-3} < x^0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{4}$ (IV)

$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow \frac{3}{4} < x < 1$

$S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} < x < 1\right\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} < x < 1\right\}$

c) $x^{2x^2 + x - 1} < 1$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-1} < 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^2 < 1 \text{ (falso)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{2x^2 + x - 1} < x^0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \varnothing$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^{2x^2 + x - 1} < x^0 \Leftrightarrow \left(x < -1 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right)$ (IV)

$\text{II} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

d) $x^{2x^2 - 5x - 3} > 1$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-3} > 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-6} > 1 \text{ (falso)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{2x^2 - 5x - 3} > x^0 \Leftrightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right)$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^{2x^2 - 5x - 3} > x^0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 3$ (IV)

$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

e) $x^{3x^2 - 7x + 2} \leqslant 1$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^2 \leqslant 1 \text{ (verdadeiro)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-2} \leqslant 1 \text{ (verdadeiro)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \{0, 1\}$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{3x^2 - 7x + 2} \leqslant x^0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^{3x^2 - 7x + 2} \leqslant x^0 \Leftrightarrow \left(x \leqslant \dfrac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant 2\right)$ (IV)

$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}\right\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3} \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2\right\}$

f) $x^{4x^2 - 11x + 6} \geqslant 1$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^6 \geqslant 1 \text{ (falso)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-1} \geqslant 1 \text{ (verdadeiro)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \{1\}$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{4x^2 - 11x + 6} \geqslant x^0 \Leftrightarrow \left(x \leqslant \dfrac{3}{4} \text{ ou } x \geqslant 2\right)$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^{4x^2 - 11x + 6} \geqslant x^0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant 2$ (IV)

$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3}{4} \leqslant x < 1\right\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

131. $|x|^{3x^2 - 4x - 4} > 1$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-4} > 1 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-5} > 1 \text{ (F)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: $|x| > 1$, ou seja, $x < -1$ ou $x > 1$ (I)

Temos:

$|x|^{3x^2 - 4x - 4} > 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow \left(x < -\dfrac{2}{3} \text{ ou } x > 2\right)$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$

3º caso: $0 < |x| < 1$, ou seja, $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$ (III)

Temos:

$|x|^{3x^2 - 4x - 4} > 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{2}{3} < x < 2\right)$ (IV)

$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{2}{3} < x < 1 \text{ e } x \neq 0\right\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou} \left(-\dfrac{2}{3} < x < 1 \text{ e } x \neq 0\right) \text{ou } x > 2\right\}$

132. a) $x^{2x+4} < x$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^4 < 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^6 < 1 \text{ (F)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{2x+4} < x^1 \Leftrightarrow x < -\dfrac{3}{2}$ (II)

(I) $\cap$ (II) $\Rightarrow S_2 = \varnothing$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^{2x-4} < x^1 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{2}$ (IV)

(III) $\cap$ (IV) $\Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$

b) $x^{4x-1} \geqslant x$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-1} \geqslant 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^3 \geqslant 1 \text{ (V)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \{1\}$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{4x-1} \geqslant x^1 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$ (II)

(I) $\cap$ (II) $\Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 1\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^{4x-1} \geqslant x^1 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2}$ (IV)

(III) $\cap$ (IV) $\Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$

c) $x^{4x^2 - 17x + 5} < x$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^5 < 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-8} < 1 \text{ (F)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{4x^2 - 17x + 5} < x^1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < x < 4$ (II)

(I) $\cap$ (II) $\Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 1 < x < 4\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$4x^2 - 17x + 4 > 0 \Leftrightarrow \left(x < \dfrac{1}{4} \text{ ou } x > 4\right)$ (IV)

$$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < \frac{1}{4}\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < \frac{1}{4} \text{ ou } 1 < x < 4\right\}$$

d) $x^{5x^2 - 11x + 3} > x$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^3 > 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-3} > 1 \text{ (F)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{5x^2 - 11x + 3} > x^1 \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{5} \text{ ou } x > 2\right)$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 2\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$5x^2 - 11x + 2 < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5} < x < 2\right)$ (IV)

$$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \frac{1}{5} < x < 1\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \frac{1}{5} < x < 1 \text{ ou } x > 2\right\}$$

e) $x^{x^2 - 5x + 7} \leqslant x$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^7 \leqslant 0 \text{ (V)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^3 \leqslant 1 \text{ (V)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \{0,1\}$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{x^2 - 5x + 7} \leqslant x^1 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 3)$ (IV)

$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

133. a) $x^{(x^2)} > x^{2x}$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^0 > 0^0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^1 > 1^1 \text{ (F)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{x^2} > x^{2x} \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } x > 2)$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 2\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^{x^2} > x^{2x} \Leftrightarrow 0 < x < 2$ (IV)

$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $x^2 < x^{x^2 - 7x + 8}$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^2 < 0^8 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^2 < 1^2 \text{ (F)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \varnothing$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^2 < x^{x^2 - 7x + 8} \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ou } x > 6)$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 6\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^2 < x^{x^2 - 7x + 8} \Leftrightarrow 1 < x < 6$ (IV)

$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \varnothing$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 6\}$

c) $x^{x^2 - x - 2} \geqslant x^4$

1º caso: $\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-2} \geqslant 0^4 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1 \geqslant 1 \text{ (V)} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_1 = \{1\}$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$x^{x^2 - x - 2} \geqslant x^4 \Leftrightarrow (x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 3)$ (II)

$\text{I} \cap \text{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x \geqslant 3\}$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$x^2 - x - 6 \leqslant 0 \Leftrightarrow (-2 \leqslant x \leqslant 3)$ (IV)

$\text{III} \cap \text{IV} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

CAPÍTULO III — Logaritmos

135. a) $\log_4 16 = x \Leftrightarrow 4^x = 16 \Leftrightarrow 4^x = 4^2 \Leftrightarrow x = 2$

b) $\log_3 \dfrac{1}{9} = x \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

c) $\log_{81} 3 = x \Leftrightarrow 81^x = 3 \Leftrightarrow 3^{4x} = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 8 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^3 \Leftrightarrow x = -3$

e) $\log_7 \dfrac{1}{7} = x \Leftrightarrow 7^x = \dfrac{1}{7} \Leftrightarrow 7^x = 7^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

f) $\log_{27} 81 = x \Leftrightarrow 27^x = 81 \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$

g) $\log_{125} 25 = x \Leftrightarrow 125^x = 25 \Leftrightarrow 5^{3x} = 5^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

h) $\log_{\frac{1}{4}} 32 = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 32 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Leftrightarrow = x = -\dfrac{5}{2}$

i) $\log_9 \dfrac{1}{27} = x \Leftrightarrow 9^x = \dfrac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

j) $\log_{0,25} 8 = x \Leftrightarrow (0,25)^x = 8 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 8 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

k) $\log_{25} 0,008 = x \Leftrightarrow 25^x = 0,008 \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{-3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

l) $\log_{0,01} 0,001 = x \Leftrightarrow (0,01)^x = 0,001 \Leftrightarrow 10^{-2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

136. $\log_{10} \dfrac{M_1}{M_2} = R_1 - R_2 = 8 - 6 = 2 \Rightarrow \dfrac{M_1}{M_2} = 10^2 = 100$

137. a) $\log_2 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_{\sqrt[3]{7}} 49 = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{7})^x = 7^2 \Leftrightarrow x = 6$

c) $\log_{100} \sqrt[3]{10} = x \Leftrightarrow 100^x = \sqrt[3]{10} \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$

d) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} = x \Leftrightarrow (\sqrt{8})^x = \sqrt{32} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$

e) $\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt[4]{5} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{5})^x = \sqrt[4]{5} \Leftrightarrow 5^{\frac{x}{3}} = 5^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$

f) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} = x \Leftrightarrow (\sqrt{27})^x = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x}{2}} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{9}$

g) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{27} = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x = \sqrt{27} = \Leftrightarrow 3^{-\frac{x}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -3$

h) $\log_{\sqrt[3]{4}} \dfrac{1}{\sqrt{8}} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{4})^x = \dfrac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x}{3}} = 2^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{4}$

i) $\log_{\sqrt[4]{3}} \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}} = x \Leftrightarrow (\sqrt[4]{3})^x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{4}} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$

138. $\log_{\frac{3}{5}} \sqrt[3]{\dfrac{25}{9}} = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \sqrt[3]{\dfrac{25}{9}} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

$V = \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$

139. a) $\log_{100} 0{,}001 = x \Leftrightarrow 100^x = 0{,}001 \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

$\log_{1,5} \dfrac{4}{9} = y \Leftrightarrow (1{,}5)^y = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow y = -2$

$\log_{1,25} 0{,}64 = z \Leftrightarrow (1{,}25)^z = 0{,}64 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{4}\right)^z = \dfrac{16}{25} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow z = -2$

$S = x + y - z = -\dfrac{3}{2} - 2 + 2 = -\dfrac{3}{2}$

b) $\log_8 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 8^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$

$\log_{\sqrt{2}} 8 = y \Leftrightarrow (\sqrt{2})^y = 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{y}{2}} = 2^3 \Leftrightarrow y = 6$

$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8} = z \Leftrightarrow (\sqrt{2})^z = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2^{\frac{z}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow z = 3$

$S = x + y - z = \dfrac{1}{6} + 6 - 3 = \dfrac{19}{6}$

c) $\log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt{\dfrac{1}{27}} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{9})^x = \sqrt{\dfrac{1}{27}} \Leftrightarrow 3^{\frac{2x}{3}} = 2^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{4}$

$\log_{\sqrt[3]{0,5}} \sqrt{8} = y \Leftrightarrow (\sqrt[3]{0{,}5})^y = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2^{-\frac{y}{3}} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y = -\dfrac{9}{2}$

$\log_{\sqrt[3]{100}} \sqrt[6]{0{,}1} = z \Leftrightarrow (\sqrt[3]{100})^z = \sqrt[6]{0{,}1} \Leftrightarrow 10^{\frac{2z}{3}} = 10^{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{4}$

$S = x - y + z = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{4} = 2$

140. $\log_4 (\log_3 9) = \log_4 2 = \dfrac{1}{2}$

$\log_2 (\log_{81} 3) = \log_2 = \dfrac{1}{4} = -2$

$$\log_{0,8}(\log_{16}32) = \log_{0,8}\frac{5}{4} = x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = -1$$

$$S = \frac{1}{2} - 2 - 1 = -\frac{5}{2}$$

141. a) $\text{antilog}_3 4 = x \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81$

b) $\text{antilog}_{16}\frac{1}{2} = x \Leftrightarrow \log_{16}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 16^{\frac{1}{2}} = 4$

c) $\text{antilog}_3(-2) = x \Leftrightarrow \log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

d) $\text{antilog}_{\frac{1}{2}}(-4) = x \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = -4 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

142. $2^{\log_3(x+4)} = 8 = 2^3 \Leftrightarrow \log_3(x+4) = 3 \Leftrightarrow x + 4 = 3^3 \Leftrightarrow x = 23$

144. a) $3^{\log_3 2} = 2$

b) $5^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$

c) $5^{\log_{25} 2} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 2} = (25^{\log_{25} 2})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

d) $8^{\log_4 5} = \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{\log_4 5} = (4^{\log_4 5})^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{5}$

e) $2^{1+\log_2 5} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 5} = 2 \cdot 5 = 10$

f) $3^{2-\log_3 6} = 3^2 \cdot 3^{-\log_3 6} = 3^2 \cdot (3^{\log_3 6})^{-1} = 3^2 \cdot 6^{-1} = \frac{3}{2}$

g) $8^{1+\log_2 3} = 8^1 \cdot 8^{\log_2 3} = 8^1 \cdot (2^{\log_2 3})^3 = 8 \cdot 3^3 = 216$

h) $9^{2-\log_3\sqrt{2}} = 9^2 \cdot 9^{-\log_3\sqrt{2}} = 9^2 \cdot \left(3^{\log_3\sqrt{2}}\right)^{-2} = 9^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{81}{2}$

145. a) $\text{antilog}_2(\log_2 3) = x \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 3 \Leftrightarrow x = 3$

b) $\text{antilog}_3(\log_3 5) = x \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$

146. $A = 5^{\log_{25} 2} = (\sqrt{25})^{\log_{25} 2} = (25^{\log_{25} 2})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

$A^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

147. $4^{\log_2 A} = (2^2)^{\log_2 A} = (2^{\log_2 A})^2 = A^2$

então

$A^2 + 2A - 2 = 0 \Rightarrow A = -1 \pm \sqrt{3}$

mas $A > 0$, então $A = -1 + \sqrt{3}$.

148. $\log_{\sqrt[3]{9}} x = 0{,}75 \Leftrightarrow x = (\sqrt[3]{9})^{0{,}75} = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$

$x^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

149. $\log_{16} x = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = (16)^{\frac{2}{3}} = (2^4)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{8}{3}}$

$\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{\frac{1}{4}} 2^{\frac{8}{3}} = y \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^y = 2^{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow 2^{-2y} = 2^{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow y = -\dfrac{4}{3}$

150. $\log_a x = 4 \Leftrightarrow a^4 = x$ (1)

$\log_{\frac{a}{3}} x = 8 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{3}\right)^8 = x \Leftrightarrow a^8 = 3^8 x$ (2)

Substituindo (1) em (2), vem:

$x^2 = 3^8 x \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 3^8)$

Como $x = 0$ não convém, $x = 3^8 = 6\,561$.

151. $\log_{2\sqrt{3}} 144 = x \Leftrightarrow (2\sqrt{3})^x = 144 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^{\frac{x}{2}} = 2^4 \cdot 3^2 \Leftrightarrow x = 4$

152. $\log_x \sqrt{2} = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

154. a) $\log_5 \left(\dfrac{5a}{bc}\right) = \log_5 (5a) - \log_5 (bc) = 1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$

b) $\log_3 \left(\dfrac{ab^2}{c}\right) = \log_3 (ab^2) - \log_3 c = \log_3 a + 2 \cdot \log_3 b - \log_3 c$

c) $\log_2 \left(\dfrac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}\right) = \log_2 (a^2\sqrt{b}) - \log_2 \sqrt[3]{c} =$

$= 2 \cdot \log_2 a + \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 b - \dfrac{1}{3} \cdot \log_2 c$

d) $\log_3 \left(\dfrac{ab^3}{c \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right) = \log_3 (ab^3) - \log_3 (c\sqrt[3]{a^2}) =$

$= \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - \log_3 c - \dfrac{2}{3} \cdot \log_3 a =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - \log_3 c$

e) $\log \dfrac{\sqrt{ab^3}}{c^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \log \left(\dfrac{ab^3}{c^2}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \log (ab^3) - \dfrac{1}{2} \cdot \log c^2 =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \log a + \dfrac{3}{2} \cdot \log b - \log c$

f) $\log \sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2\sqrt{c}}} = \dfrac{1}{3} \cdot \log\left(\dfrac{a}{b^2\sqrt{c}}\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \log a - \dfrac{1}{3} \cdot \log (b^2\sqrt{c}) =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \log a - \dfrac{2}{3} \cdot \log b - \dfrac{1}{6} \cdot \log c$

g) $\log_2 \sqrt{\dfrac{4a\sqrt{ab}}{b\sqrt[3]{a^2b}}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 \dfrac{4a\sqrt{ab}}{b\sqrt[3]{a^2b}} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 (4a\sqrt{ab}) - \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 (b\sqrt[3]{a^2b}) =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 4 + \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 a + \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 \sqrt{ab} - \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 b - \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 \sqrt[3]{a^2b} =$

$= 1 + \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 a + \dfrac{1}{4} \cdot \log_2 a + \dfrac{1}{4} \cdot \log_2 b - \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 b - \dfrac{2}{6} \cdot \log_2 a -$

$- \dfrac{1}{6} \cdot \log_2 b = 1 + \dfrac{5}{12} \cdot \log_2 a - \dfrac{5}{12} \cdot \log_2 b$

h) $\log\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^4\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{bc}}}\right)^2 = \dfrac{2}{3} \cdot \log\left(\dfrac{a^4\sqrt{ab}}{b^2\sqrt[3]{bc}}\right) =$

$\dfrac{2}{3} \cdot \log (a^4\sqrt{ab}) - \dfrac{2}{3} \cdot \log (b^2\sqrt[3]{bc}) =$

$= \dfrac{2}{3} \cdot \log a^4 + \dfrac{2}{3} \cdot \log \sqrt{ab} - \dfrac{2}{3} \cdot \log b^2 - \dfrac{2}{3} \cdot \log \sqrt[3]{bc} =$

$= \dfrac{8}{3} \cdot \log a + \dfrac{2}{6} \cdot \log a + \dfrac{2}{6} \cdot \log b - \dfrac{4}{3} \cdot \log b - \dfrac{2}{9} \cdot \log b - \dfrac{2}{9} \cdot \log c =$

$= 3 \cdot \log a - \dfrac{11}{9} \cdot \log b - \dfrac{2}{9} \cdot \log c$

155. $\log m = \log\left(\dfrac{bc}{d^2}\right) =$

$= \log (bc) - \log d^2 = \log b + \log c - 2 \cdot \log d$

156. $\log x = \log\left(\dfrac{\sqrt{a}}{bc}\right) = \log \sqrt{a} - \log (bc) = \dfrac{1}{2} \cdot \log a - \log b - \log c$

157. a) $\log_2 \dfrac{2a}{(a + b)(a - b)} = \log_2 (2a) - \log_2 [(a + b)(a - b)] =$

$= 1 + \log_2 a - \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b)$

b) $\log_3 \dfrac{a^2\sqrt{ab}}{\sqrt[5]{(a + b)^3}} = \log_3 (a^2\sqrt{bc}) - \log_3 \sqrt[5]{(a + b)^3} =$

$= \log_3 a^2 + \log_3 \sqrt{bc} - \dfrac{3}{5} \cdot \log_3 (a + b) =$

$= 2 \cdot \log_3 a + \dfrac{1}{2} \cdot \log_3 b + \dfrac{1}{2} \cdot \log_3 c - \dfrac{3}{5} \cdot \log_3 (a + b)$

c) $\log\left(c \cdot \sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}}\right) = \log c + \log \sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}} =$

$= \log c + \frac{1}{3} \cdot \log \frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}} =$

$= \log c + \frac{1}{3} \cdot \log [a(a+b)^2] - \frac{1}{3} \cdot \log \sqrt{b} =$

$= \log c + \frac{1}{3} \cdot \log a + \frac{2}{3} \cdot \log (a+b) - \frac{1}{6} \cdot \log b$

d) $\log \frac{\sqrt[5]{a(a-b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \log \sqrt[5]{a(a-b)^2} - \log \sqrt{a^2+b^2} =$

$= \frac{1}{5} \cdot \log (a(a-b)^2) - \frac{1}{2} \cdot \log (a^2+b^2) =$

$= \frac{1}{5} \cdot \log a + \frac{2}{5} \cdot \log (a-b) - \frac{1}{2} \cdot \log (a^2+b^2)$

159. a) $\log_2 a + \log_2 b - \log_2 c = \log_2 (ab) - \log_2 c =$

$= \log_2 \frac{ab}{c}$, então $E = \frac{ab}{c}$.

b) $2 \cdot \log a - \log b - 3 \cdot \log c = \log a^2 - \log b - \log c^3 =$

$= \log a^2 - \log (bc^3) = \log \frac{a^2}{bc^3}$, então $E = \frac{a^2}{bc^3}$.

c) $2 - \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - 2 \cdot \log_3 c =$

$= \log_3 3^2 - \log_3 a + \log_3 b^3 - \log_3 c^2 =$

$= \log_3 (3^2 \cdot b^3) - \log_3 (ac^2) = \log_3 \frac{9b^3}{ac^2}$, então $E = \frac{9b^3}{ac^2}$.

d) $\frac{1}{2} \cdot \log a - 2 \cdot \log b - \frac{1}{3} \cdot \log c =$

$= \log \sqrt{a} - \log b^2 - \log \sqrt[3]{c} =$

$= \log \sqrt{a} - \log (b^2 \sqrt[3]{c}) = \log \frac{\sqrt{a}}{b^2 \sqrt[3]{c}}$,

então $E = \frac{\sqrt{a}}{b^2 \sqrt[3]{c}}$.

e) $\frac{1}{3} \cdot \log a - \frac{1}{2} \cdot \log c - \frac{3}{2} \cdot \log b =$

$= \log \sqrt[3]{a} - \log \sqrt{c} - \log \sqrt{b^3} =$

$= \log \sqrt[3]{a} - \log \sqrt{cb^3} = \log \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3 c}}$, então $E = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3c}}$.

f) $2 + \dfrac{1}{3} \cdot \log_2 a + \dfrac{1}{6} \cdot \log_2 b - \log_2 c =$

$= \log_2 4 + \log_2 \sqrt[3]{a} + \log_2 \sqrt[6]{b} - \log_2 c =$

$= \log_2 (4 \sqrt[3]{a} \sqrt[6]{b}) - \log_2 c = \log_2 \dfrac{4 \sqrt[3]{a\sqrt{b}}}{c}$, então $E = \dfrac{4 \sqrt[3]{a\sqrt{b}}}{c}$.

g) $\dfrac{1}{4}(\log a - 3 \cdot \log b - 2 \cdot \log c) = \dfrac{1}{4}(\log a - \log b^3 - \log c^2) =$

$= \dfrac{1}{4}[\log a - \log (b^3 c^2)] = \dfrac{1}{4} \cdot \log \dfrac{a}{b^3 c^2} = \log \sqrt[4]{\dfrac{a}{b^3 c^2}}$,

então $E = \sqrt[4]{\dfrac{a}{b^3 c^2}}$.

160. a) $1 + \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b) =$

$= \log_2 2 + \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b) = \log_2 \dfrac{2(a + b)}{a - b}$,

então $E = \dfrac{2(a + b)}{a - b}$.

b) $2 \cdot \log (a + b) - 3 \cdot \log a - \log (a - b) =$

$= \log (a + b)^2 - \log a^3 - \log (a - b) =$

$= \log \dfrac{(a + b)^2}{a^3(a - b)}$, então $E = \dfrac{(a + b)^2}{a^3(a - b)}$.

c) $\dfrac{1}{2} \cdot \log (a - b) + \log a - \log (a + b) =$

$= \log \sqrt{a - b} + \log a - \log (a + b) = \log \dfrac{a\sqrt{a - b}}{a + b}$,

então $E = \dfrac{a\sqrt{a - b}}{a + b}$.

d) $\dfrac{1}{2} \cdot \log (a^2 + b^2) - \dfrac{1}{3} \cdot \log (a + b) + \log (a - b) =$

$= \log \sqrt{a^2 + b^2} - \log \sqrt[3]{a + b} + \log (a - b) =$

$= \log \dfrac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt[3]{a + b}}$, então $E = \dfrac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt[3]{a + b}}$.

e) $\dfrac{3 \log (a - b) - 2 \log (a + b) + 4 \log b}{5} =$

$= \log (a - b)^{\frac{3}{5}} - \log (a + b)^{\frac{2}{5}} + \log b^{\frac{4}{5}} =$

$= \log\left[\dfrac{(a - b)^{\frac{3}{5}} \cdot b^{\frac{4}{5}}}{(a + b)^{\frac{2}{5}}}\right] = \log\left[\dfrac{\sqrt[5]{(a - b)^3} \cdot \sqrt[5]{b^4}}{\sqrt[5]{(a + b)^2}}\right] = \log\left(\sqrt[5]{\dfrac{(a - b)^3 \cdot b^4}{(a + b)^2}}\right)$

161. $\log x = \log b + \log c^2 - \log \sqrt[3]{a} = \log\left(\dfrac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}\right)$,
então, $x = \dfrac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}$.

162. a) $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$
b) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot \log 2 = 2a$
c) $\log 12 = \log (4 \cdot 3) = \log 4 + \log 3 = 2a + b$
d) $\log \sqrt{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \log 2 = \dfrac{a}{2}$.
e) $\log 0{,}5 = \log \dfrac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 = -a$
f) $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = a + 1$
g) $\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$
h) $\log 15 = \log \dfrac{3 \cdot 10}{2} = \log 3 + \log 10 - \log 2 = b + 1 - a$

163. $pH = \log \dfrac{1}{H^+} = \log \dfrac{1}{10^{-8}} = \log 10^8 = 8$

164. $\log \dfrac{125}{\sqrt[5]{2}} = \log \dfrac{5^3}{\sqrt[5]{2}} = 3 \cdot \log 5 - \dfrac{1}{5} \cdot \log 2 =$
$= 3 \cdot \log \dfrac{10}{2} - \dfrac{1}{5} \cdot \log 2 = 3 - 3 \cdot \log 2 - \dfrac{1}{5} \cdot \log 2 =$
$= 3 - \dfrac{16}{5} \cdot \log 2 = 3 - \dfrac{16}{5} \cdot (0{,}3010) = 3 - 0{,}9632 = 2{,}0368$

165. $\log 20 + \log 40 + \log 800 = \log (2 \cdot 10) + \log (4 \cdot 10) + \log (8 \cdot 100) =$
$= \log (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 100) = \log (2^6 \cdot 10^4) = 6 \cdot \log 2 + 4 =$
$= 5{,}806$

166. Fazendo $\log_a 16 = x$, vem:
$a^x = 16 \Rightarrow \log_2 a^x = \log_2 16 \Rightarrow x \cdot \log_2 a = 4$ (1)
Fazendo $\log_a 4 = y$, vem:
$a^y = 4 \Rightarrow \log_2 a^y = \log_2 4 \Rightarrow y \cdot \log_2 a = 2$ (2)
Dividindo (1) por (2), vem:
$\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{2} = 2$.

167. $\log \dfrac{1}{a} + \log \dfrac{1}{b} = -\log a - \log b = -p$

168. $\log_2 (a^2 - b^2) = \log_2 [(a + b)(a - b)] = \log_2 (a + b) + \log_2 (a - b) =$
$= \log_2 8 + \log_2 (a - b) = 3 + m$

169. $\log_9 x + \log_9 y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \log_9 (xy) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow xy = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

170. $\log_a \sqrt[3]{x^2 y} = \dfrac{1}{3} \cdot \log_a (x^2 y) = \dfrac{1}{3} \cdot \log_a x^2 + \dfrac{1}{3} \cdot \log_a y =$

$= \dfrac{2}{3} \cdot \log_a x + \dfrac{1}{3} \cdot \log_a y = \dfrac{2n}{3} + \dfrac{6n}{3} = \dfrac{8n}{3}$

171. $\log_m \dfrac{64}{2{,}7} - \log_m 60 = \log_m 64 - \log_m 2{,}7 - \log_m 60 =$

$= \log_m 2^6 - \log_m \left(\dfrac{3^3}{10}\right) - \log_m (2 \cdot 3 \cdot 10) =$

$= 6 \cdot \log_m 2 - 3 \log_m 3 + \cancel{\log_m 10} - \log_m 2 - \log_m 3 - \cancel{\log_m 10} =$

$= 6a - 3b - a - b = 5a - 4b$

172. $\operatorname{colog}_2 \dfrac{1}{32} = x \Rightarrow \log_2 \dfrac{1}{32} = -x \Rightarrow 2^{-x} = \dfrac{1}{32} \Rightarrow x = 5$

$\log_y 256 = 4 \Rightarrow y^4 = 256 = 2^8 \Rightarrow y = 2^2 = 4$, então $x + y = 9$.

173. $\log 2^{20} = 20 \cdot \log 2 = 20 \cdot 0{,}3010300 = 6{,}0206$

174. $2^n > 10^4 \Rightarrow \log 2^n > \log 10^4 \Rightarrow n \cdot \log 2 > 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \dfrac{4}{\log 2} = \dfrac{40}{3} \Rightarrow n = 14$

176. $\log_6 5 = \dfrac{\log_{20} 5}{\log_{20} 6} = \dfrac{\log_{20} \dfrac{20}{4}}{\log_{20} (2 \cdot 3)} = \dfrac{\log_{20} 20 - \log_{20} 4}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3} = \dfrac{1 - 2a}{a + b}$

177. $\log_{ab} a = 4 \Rightarrow \log_a (ab) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 + \log_a b = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \log_a b = -\dfrac{3}{4}$

$\log_{ab} \left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) = \dfrac{\log_a \left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)}{\log_a (ab)} = \left(\dfrac{1}{3} \cdot \log_a a - \dfrac{1}{2} \cdot \log_a b\right) \cdot 4 =$

$= \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4}\right) \cdot 4 = \dfrac{17}{6}$

178. $\log_{12} 27 = a \Rightarrow 3 \cdot \log_{12} 3 = a \Rightarrow \log_{12} 3 = \dfrac{a}{3} \Rightarrow \log_3 12 = \dfrac{3}{a}$

$\Rightarrow 2 \cdot \log_3 2 + \log_3 3 = \dfrac{3}{a} \Rightarrow \log_3 2 = \dfrac{3 - a}{2a}$

$\log_6 16 = 4 \cdot \log_6 2 = \dfrac{4 \cdot \log_3 2}{\log_3 6} = \dfrac{4 \cdot \log_3 2}{\log_3 2 + 1} = \dfrac{4\,(3 - a)}{a + 3}$

179. $\log_{0{,}04} 125 = \log_{5^{-2}} 5^3 = x \Leftrightarrow 5^{-2x} = 5^3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

180. $\log_8 m = \dfrac{\log_2 m}{\log_2 8} = \dfrac{k}{3}$

181. $\log_9 20 = \dfrac{\log 20}{\log 9} = \dfrac{\log 2 + \log 10}{2 \cdot \log 3} = \dfrac{a + 1}{2b}$

182. $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27 = \log_3 5 \cdot \dfrac{\log_3 27}{\log_3 25} = \log_3 5 \cdot \dfrac{3}{2 \cdot \log_3 5} = \dfrac{3}{2}$

183. $\log_{\frac{1}{2}} b^2 = \dfrac{\log_b b^2}{\log_b \dfrac{1}{a}} = \dfrac{2}{-\log_b a} = -\dfrac{2}{m}$

184. $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9 =$
$= \dfrac{\log 2}{\log 3} \cdot \dfrac{\log 3}{\log 4} \cdot \dfrac{\log 4}{\log 5} \cdot \dfrac{\log 5}{\log 6} \cdot \dfrac{\log 6}{\log 7} \cdot \dfrac{\log 7}{\log 8} \cdot \dfrac{\log 8}{\log 9} \cdot \log 9 =$
$= \log 2$

185. $\log_b \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} = \cdot \log_b a = \dfrac{1}{2} \cdot \log_b \dfrac{1}{b} = -\dfrac{1}{2}$

186. $\log_{35} 28 = \dfrac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \dfrac{\log_{14}\left(\dfrac{14^2}{7}\right)}{\log_{14}(7 \cdot 5)} = \dfrac{2 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} =$

$= \dfrac{2 - a}{a + b}$

187. $A = \dfrac{\log 5}{\log 3} \cdot \dfrac{\log 27}{\log 4} \cdot \dfrac{\log \sqrt{2}}{\log 25} = \dfrac{(\log 5) \cdot (3 \cdot \log 3) \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot \log 2\right)}{(\log 3) \cdot (2 \cdot \log 2) \cdot (2 \cdot \log 5)} = \dfrac{3}{8}$

188. $A = (a^{\log_a b})^{\log_b c \cdot \log_c d} = (b^{\log_b c})^{\log_c d} = c^{\log_c d} = d$

189. Fazendo $x = a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$, vem:

$\log x = \log a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}} = \dfrac{\log(\log a)}{\log a} \cdot \log a = \log(\log a)$,

então $x = \log a$.

190. Sejam *x* e *y* dois números positivos e diferentes de 1 e seja *a* a base do sistema de logaritmos. Temos:

$\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x$ para todo *a* com $0 < a$ e $\neq 1$.

191. $(\log_{ac} b)(1 + \log_a c) = (\log_{ac} b)(\log_a ac)\dfrac{\log_{ac} b}{\log_{ac} a} = \log_a b$

192. $a = b \cdot c \Rightarrow \log_c a = \log_c (b \cdot c) \Rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c c \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\log_a c} = \dfrac{1}{\log_b c} + 1$

193. Escrevendo os logaritmos em base *a* temos:

$$\frac{\log_a c \cdot \log_b c}{(\log_{ab} c)^2} = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_{ab} c \cdot \log_{ab} c} = \frac{\log_a c \cdot \dfrac{\log_a c}{\log_a b}}{\dfrac{\log_a c}{\log_a (ab)} \cdot \dfrac{\log_a c}{\log_a (ab)}} =$$

$= \dfrac{(\log_a (ab))^2}{\log_a b} = \dfrac{(1 + \log_a b)^2}{\log_a b}$, que é o que queríamos demonstrar.

194. $\log_a d \cdot \log_b d + \log_b d \cdot \log_c d + \log_c d \cdot \log_a d =$

$$= \frac{1}{\log_d a} \cdot \frac{1}{\log_d b} + \frac{1}{\log_d b} \cdot \frac{1}{\log_d c} + \frac{1}{\log_d c} \cdot \frac{1}{\log_d a} =$$

$$= \frac{\log_d c + \log_d a + \log_d b}{\log_d a \cdot \log_d b \cdot \log_d c} = \frac{\log_d (abc)}{\log_d a \cdot \log_d b \cdot \log_d c} =$$

$$= \frac{\log_a d \cdot \log_b d \cdot \log_c d}{\log_{abc} d}$$

195. $a^{\log b} = a^{\frac{\log b}{\log a} \cdot \log a} = a^{\log_a b \cdot \log a} = (a^{\log_a b})^{\log a} = b^{\log a}$

196. $\log_a b^{(\log_c d)} = (\log_c d)(\log_a b) = (\log_a b)(\log_c d) = \log_c d^{(\log_a b)}$

197. $$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1 + \log_c (ab)} + \frac{1}{1 + \log_b (ac)} + \frac{1}{1 + \log_a (bc)} =$$

$$= \frac{1}{\log_c c + \log_c (ab)} + \frac{1}{\log_b b + \log_b (ac)} + \frac{1}{\log_a a + \log_a (bc)} =$$

$$= \frac{1}{\log_c (abc)} + \frac{1}{\log_b (abc)} + \frac{1}{\log_a (abc)} = \log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c =$$

$$= \log_{abc} (abc) = 1$$

198. $$\frac{\log_a d}{\log_c d} = \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} \Leftrightarrow \log_a c = \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \log_a c \cdot \log_b d - \log_a c \cdot \log_c d = \log_a d - \log_b d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a c \cdot \log_b d + \log_b d = \log_a c \cdot \log_c d + \log_a d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_b d)(1 + \log_a c) = 2 \cdot \log_a d \Leftrightarrow \dfrac{\log_b d}{\log_a d} \cdot (1 + \log_a c) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_b a)(\log_a ac) = 2 \Leftrightarrow \log_a ac = 2 \cdot \log_a b \Leftrightarrow ac = b^2$

199. $\log_q a^a + \log_q b^b + \log_q a^b + \log_q b^a =$
$= a \cdot \log_q a + b \cdot \log_q b + b \cdot \log_q a + a \cdot \log_q b =$
$= (a + b)(\log_q a + \log_q b) = (a + b) \cdot \log_q (ab) = p \cdot \log_q q = p$

200. De fato,

$$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = \frac{1}{\log_c (a+b)} + \frac{1}{\log_c (a-b)} =$$

$$= \frac{\log_c (a-b) + \log_c (a+b)}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} = \frac{\log_c [(a-b)(a+b)]}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} =$$

$$= \frac{\log_c (a^2 - b^2)}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} \overset{\text{Pitágoras}}{=} \frac{\log_c c^2}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} =$$

$$= \frac{2}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} = 2 \log_{a+b} c \cdot \log_{a-b} c,$$ que é o que queríamos demonstrar.

201. De acordo com o exercício 195, sabemos que $x^{\log y} = y^{\log x}$, para quaisquer $x > 0$, e $y > 0$. Temos, então:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b} = \frac{a^{\log c}}{b^{\log c}} \cdot \frac{b^{\log a}}{c^{\log a}} \cdot \frac{c^{\log b}}{a^{\log b}} = 1,$$

pois $a^{\log c} = c^{\log a}$, $b^{\log a} = a^{\log b}$ e $c^{\log b} = b^{\log c}$.

202. $x = 10^{\frac{1}{1 - \log z}} \Leftrightarrow \log x = \dfrac{1}{1 - \log z}$ (1)

$y = 10^{\frac{1}{1 - \log x}} \Leftrightarrow \log y = \dfrac{1}{1 - \log x}$ (2)

Substituindo (1) em (2), vem:

$$\log y = \frac{1 - \log z}{-\log z} \Leftrightarrow \log z = \frac{1}{1 - \log y} \Leftrightarrow z = 10^{\frac{1}{1 - \log y}}.$$

203. De $a^b \cdot b^a = b^c \cdot c^b$ resulta:

$$\frac{a^b}{c^b} = \frac{b^c}{b^a} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^b = b^{c-a} \Rightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^b = b^{b+c-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \cdot \log \frac{ab}{c} = (b + c - a) \cdot \log b \Rightarrow \log \frac{ab}{c} = \frac{(b + c - a) \cdot \log b}{b} \text{ (I)}.$$

Analogamente, de $a^b \cdot b^a = a^c \cdot c^a$ resulta:

$$\log \frac{ab}{c} = \frac{(a + c - b) \cdot \log a}{b} \text{ (II)}.$$

Comparando (I) e (II), resulta:

$$\frac{(b + c - a) \cdot \log b}{b} = \frac{(a + c - b) \cdot \log a}{a}$$

e daí vem a tese:
$$\frac{a(b + c - a)}{\log a} = \frac{b(a + c - b)}{\log b}.$$

204. Notemos que cada parcela do 1º membro é da forma

$\dfrac{1}{\log_x 2^{p-1} \cdot \log_x 2^p} = \dfrac{1}{p(p-1)} \cdot \dfrac{1}{(\log_x 2)^2}$, em que *p* varia de 2 até *n*.

Temos, usando a sugestão dada:

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} = \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$\frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} = \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$\frac{1}{\log_x 8 \cdot \log_x 16} = \frac{1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

etc.

$$\frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

Somando essas igualdades membro a membro, temos:

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \frac{1}{\log_x 8 \cdot \log_x 16} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right] \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

CAPÍTULO IV — Função logarítmica

206. Permutando as variáveis $x = e^y$, então $y = \log_e x$, em que $x \in \mathbb{R}_+^*$.

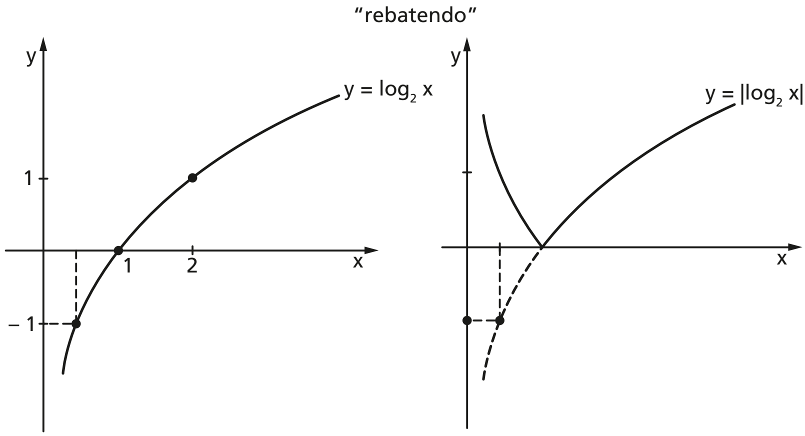
207. $f(e^3) = \log_e \dfrac{1}{e^3} = \log_e e^{-3} = -3.$

208. A função *f* é definida pela lei $f(x^2) = \log_2 x^2$.
Se $f(x^2) = 2$, então $\log_2 x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

209. O domínio de cada uma das funções dadas é $x > 0$ (pois para que o logaritmo seja real devemos ter logaritmando positivo). Assim, em cada uma das funções propostas, basta construir uma tabela de valores de *x* e $y = f(x)$, atribuindo valores convenientes de *x* e tais que $x > 0$.

210. a) Basta construir a tabela de valores de x e y, lembrando que o domínio de $y = \log_2 |x|$ é: $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

b) Construímos inicialmente o gráfico de $y = \log_2 x$; $x > 0$.
Como queremos o gráfico de $y = |\log_2 x\,|$, basta "rebater" a parte do gráfico $y = \log_2 x$ em que $y < 0$. Vejamos:



Notemos que "rebater a parte do gráfico em que $y < 0$" equivale a fazer uma nova construção simétrica à anterior em relação ao eixo das abscissas.

c) Construímos inicialmente o gráfico da função $g(x) = \log_2 |x|$ (item *a*) e a partir dele "rebatemos" a parte do gráfico em que $y < 0$, obtendo o gráfico de $y = |\log_2 |x|\,|$.

211. Análogo ao item *a* do exercício anterior.

212. a) Como o domínio dessa função é: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, devemos construir a tabela atribuindo valores convenientes para *x* e tais que $x > 1$.

b) O domínio da função é: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$. A partir dessa condição, construímos a tabela.

c) Notemos que $f(x) = \log_2 x^2 = 2 \log_2 x^2$. O gráfico de *f* é obtido diretamente do gráfico $g(x) = \log_2 x$, notando que, se, por exemplo, o ponto (4, 2) pertence ao gráfico de *g*, então o ponto (4, 4) pertence ao gráfico de *f* (isto é, a ordenada de cada ponto do gráfico de *g* fica multiplicada por 2).

d) Notemos que $f(x) = \log_2 \sqrt{x} = \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 x$. Procede-se de forma análoga ao anterior.

213. a) Construímos inicialmente o gráfico de $g(x) = \log_2 x$.
Para obtermos o gráfico de $f(x) = 2 + g(x)$, deslocamos cada ponto do gráfico da função *g* duas unidades "para cima".
Por exemplo, se (2, 1) pertence ao gráfico de *g*, então (2, 3) pertence ao gráfico de *f*.

b) Análogo ao anterior.

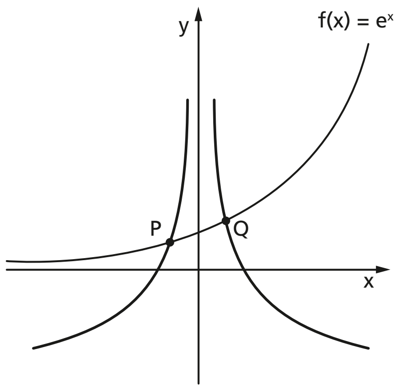
214. A função *f* está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } -1 < x < 1 \\ \sqrt{\log_a |x|} \text{ se } x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \text{ (com } a > 1) \end{cases}$$

O gráfico de $\log_a |x|$, com $a > 1$, é semelhante ao exercício 210.
O gráfico de $\sqrt{\log_a |x|}$ é tal que as ordenadas de seus pontos são as raízes quadradas das ordenadas dos pontos do anterior.

215. Construímos inicialmente o gráfico de $g(x) = \log_2 |x - 2|$, notando que o domínio dessa função é: $|x - 2| > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.
Para obtermos o gráfico de $f(x) = |g(x)|$, basta "rebater" a parte em que $y < 0$ do gráfico de $g(x)$.

216. Vamos construir o gráfico das duas funções num mesmo plano cartesiano.



Assim, há 2 pontos comuns (P e Q) aos gráficos das funções dadas.

218. a) Devemos ter: $1 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$.

b) Devemos ter: $(4x - 3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}$, $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

c) Devemos ter: $\frac{x + 1}{1 - x} > 0$. Fazendo o quadro-quociente, temos:

$f(x) = x + 1$	$-$	$+$	$+$
$g(x) = 1 - x$	$+$	$+$	$-$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$-$	$+$	$-$
x		-1	1

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

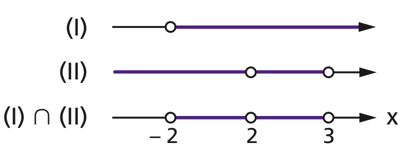
d) Devemos ter: $x^2 + x - 12 > 0 \Rightarrow x < -4$ ou $x > 3$,
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 3\}$.

219. Devemos ter: $x^2 - 6x + 9 > 0 \Rightarrow (x - 3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 3$,
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

220. Como queremos que o domínio da função *f* seja $\mathbb{R}$, devemos ter:
$x^2 + Kx + K > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 1 > 0$ e $\Delta < 0$, isto é:
$K^2 - 4 \cdot 1 \cdot K < 0 \Rightarrow K^2 - 4K < 0 \Rightarrow 0 < K < 4$.

222. a) Devemos ter: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ \text{e} \\ 0 < 3 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ x < 3 \text{ e } x \neq 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$

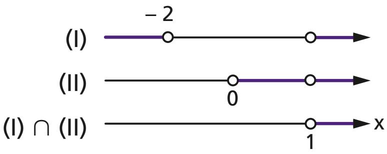
Fazendo a interseção, vem:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$.

b) Devemos ter: $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ \text{e} \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ 0 < x \neq 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$

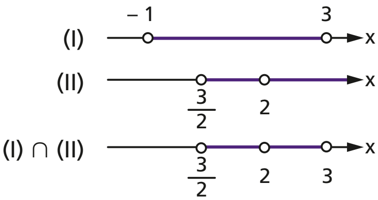
Fazendo a interseção, vem:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

c) Devemos ter: $\begin{cases} 3 + 2x - x^2 > 0 \\ \text{e} \\ 0 < 2x - 3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 & \text{(I)} \\ \text{e} \\ \dfrac{3}{2} < x \neq 2 & \text{(II)} \end{cases}$

Fazendo a interseção, vem:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3$ e $x \neq 2\}$.

CAPÍTULO V — Equações exponenciais e logarítmicas

224. a) $5^x = 4 \Rightarrow x = \log_5 4$, $S = \{\log_5 4\}$

b) $3^x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \log_3 \dfrac{1}{2}$, $S = \left\{\log_3 \dfrac{1}{2}\right\}$

c) $7^{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \log_7 2 \Rightarrow \sqrt{x} \Rightarrow x = (\log_7 2)^2$, $S = \{(\log_7 2)^2\}$

d) $3^{(x^2)} = 5 \Rightarrow \log_3 5 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\log_3 5}$

$S = \left\{-\sqrt{\log_3 5}\,;\, +\sqrt{\log_3 5}\right\}$

e) $5^{4x-3} = 0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{5^{4x}}{5^3} = 0{,}5 \Leftrightarrow (5^4)^x = 62{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \log_{625} 62{,}5$, $S = \left\{\log_{625} 62{,}5\right\}$

f) $3^{2x+1} = 2 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^1 = 2 \Leftrightarrow (3^2)^x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \log_9 \dfrac{2}{3}$, $S = \left\{\log_9 \dfrac{2}{3}\right\}$

g) $7^{2-3x} = 5 \Leftrightarrow \dfrac{7^2}{7^{3x}} = 5 \Leftrightarrow (7^3)^x = \dfrac{49}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \log_{343} \dfrac{49}{5}$, $S = \left\{\log_{343} \dfrac{49}{5}\right\}$

225. Aplicando o logaritmo decimal a ambos os membros, vem:

$\log a^x = \log b \Leftrightarrow x \cdot \log a = \log b \Rightarrow x = \dfrac{\log b}{\log a}$

$S = \left\{\dfrac{\log b}{\log a}\right\}$

227. Devemos ter: $A(t) = \dfrac{A(0)}{2}$.

Daí, $\dfrac{A(0)}{2} = A(0) \cdot e^{-3t} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(e^t)^3} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^t = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \log_e \sqrt[3]{2} = \ell n \sqrt[3]{2}$.

228. A quantidade inicial de rádium é:

$M(0) = C \cdot e^0 = C$.

Do enunciado, após 1600 a quantidade de rádium é $\dfrac{C}{2}$, isto é,

$\dfrac{C}{2} = C\ e^{-K \cdot 1\,600} \Rightarrow K = \ell n\ 2^{\frac{1}{1\,600}}$

Após 100 anos, a quantidade de rádium é:

$M(100) = C \cdot e^{-100 \cdot \ell n\ 2^{\frac{1}{1\,600}}} = C \cdot \left(e^{\ell n\ 2^{\frac{1}{1\,600}}}\right)^{-100} =$

$= C \cdot \left(2^{\frac{1}{1\,600}}\right)^{-100} = C \cdot 2^{-\frac{1}{16}}$

Assim, a quantidade perdida em 100 anos é dada pela diferença.

$M(0) - M(100) = C - C \cdot 2^{-\frac{1}{16}} = C \cdot \left(1 - 2^{-\frac{1}{16}}\right)$, isto é, $1 - 2^{-\frac{1}{16}}$ da quantidade inicial.

230. a) $2^x = 3^{x+2} \Rightarrow 2^x = 3^x \cdot 3^2 \Rightarrow \dfrac{2^x}{3^x} = 3^2 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 9 \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 9$

$S = \left\{\log_{\frac{2}{3}} 9\right\}$

b) $7^{2x-1} = 3^{3x+4} \Rightarrow \dfrac{7^{2x}}{7} = 3^{3x} \cdot 3^4 \Rightarrow \dfrac{(7^2)^x}{(3^3)^x} = 567 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{49}{27}\right)^x = 567 \Rightarrow x = \log_{\frac{49}{27}} 567$

$S = \left\{\log_{\frac{49}{27}} 567\right\}$

c) $5^{x-1} = 3^{4-2x} \Rightarrow \dfrac{5^x}{5} = \dfrac{3^4}{3^{2x}} \Rightarrow 5^x \cdot 9^x = 405 \Rightarrow$

$\Rightarrow 45^x = 405 \Rightarrow x = \log_{45} 405$

$S = \{\log_{45} 405\}$

231. a) $3^x = 2^x + 2^{x+1} \Rightarrow 3^x = 2^x + 2^x \cdot 2 \Rightarrow 3^x = 2^x(1 + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 3 \Rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 3$

$S = \left\{\log_{\frac{3}{2}} 3\right\}$

b) $5^x + 5^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^x + 5^x \cdot 5 = 3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^x(1 + 5) = 3^x(1 + 3 + 9) \Rightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^x = \dfrac{13}{6} \Rightarrow x = \log_{\frac{5}{3}} \dfrac{13}{6}$

$S = \left\{\log_{\frac{5}{3}} \dfrac{13}{6}\right\}$

c) $2^{x+1} - 2^x = 3^{x+2} - 3^x \Rightarrow 2^x \cdot 2 - 2^x = 3^x \cdot 3^2 - 3^x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x(2 - 1) = 3^x(9 - 1) \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 8 \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 8$

$S = \left\{\log_{\frac{2}{3}} 8\right\}$

232. $2^{3x+2} \cdot 3^{2x-1} = 8 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2^2 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-1} = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8^x \cdot 9^x = 6 \Rightarrow 72^x = 6 \Rightarrow x = \log_{72} 6$

$S = \{\log_{72} 6\}$

233. a) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$. Seja $2^x = t$. Temos:

$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3) \Leftrightarrow (2^x = 2 \text{ ou } 2^x = 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = \log_2 3)$.

$S = \{1, \log_2 3\}$

b) $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 5 = 0$. Seja $2^x = t$. Temos:

$t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 5) \Rightarrow (2^x = 1 \text{ ou } 2^x = 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = \log_2 5)$.
$S = \{0, \log_2 5\}$

c) $(3^x)^2 - 3^x \cdot 3 - 4 = 0$. Seja $3^x = t$, vem:
$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t = 4 \text{ ou } t = -1)$.
Como $3^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vem que $3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3 4$.
$S = \{\log_3 4\}$

d) $3^{2x} \cdot 3 - 3^x \cdot 3 + 2 = 0$. Seja $3^x = t$. Temos: $3 \cdot t^2 - 3t + 2 = 0$.
Como essa equação não tem raízes reais, resulta que não existe *x* que a satisfaz. Logo, $S = \varnothing$.

e) $(2^x)^2 \cdot 4 - 2^x \cdot 2^4 + 15 = 0$. Fazendo $2^x = t$, vem:

$$4t^2 - 16t + 15 = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{5}{2} \text{ ou } t = \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x = \frac{5}{2} \text{ ou } 2^x = \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \left(x = \log_2 \frac{5}{2} \text{ ou } x = \log_2 \frac{3}{2}\right).$$

$$S = \left\{\log_2 \frac{5}{2}, \log_2 \frac{3}{2}\right\}$$

f) $3^{x+1} + \dfrac{18}{3^x} = 29 \Rightarrow 3^x \cdot 3 + \dfrac{18}{3^x} = 29$
Seja $3^x = t$. Temos:

$$3t + \frac{18}{t} = 29 \Leftrightarrow 3t^2 - 29t + 18 = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{2}{3} \text{ ou } t = 9\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x = \frac{2}{3} \text{ ou } 3^x = 9\right) \Rightarrow \left(x = \log_3 \frac{2}{3} \text{ ou } x = 2\right).$$

$$S = \left\{\log_3 \frac{2}{3}, 2\right\}$$

234. Como $9^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, podemos dividir ambos os membros por 9^x. Temos:

$$\frac{4^x}{9^x} + \frac{6^x}{9^x} = \frac{9^x}{9^x} \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.$$

Fazendo $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = t$, temos:

$$t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Desprezando a raiz negativa (pois $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$), temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

$$S = \left\{\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

235. Dividindo ambos os membros por 49^x, temos:

$$\left(\frac{4}{49}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{14}{49}\right)^x + 3 \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{7}\right)^x\right]^2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x + 3.$$

Seja $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t$. Temos:

$t^2 = 2t + 3 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 3)$, donde $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 3 \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{7}} 3$.

$S = \left\{\log_{\frac{2}{7}} 3\right\}$

236. Fazendo $a^{2x} = t$, vem:

$t^2 + t = 1 \Rightarrow t = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ (não convém) ou $t = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Daí, $a^{2x} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Aplicando logaritmo de base *a* a ambos os membros, vem: $2x = \log_a\left(\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \cdot \log_a\left(\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

$S = \left\{\dfrac{1}{2} \cdot \log_a\left(\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

237. $\begin{cases} (64^x)^2 + (64^y)^2 = 40 \\ 64^x \cdot 64^y = 12 \end{cases}$

Fazendo $64^x = a$ e $64^y = b$, temos: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 40 \\ ab = 12 \Rightarrow a = \dfrac{12}{b} \end{cases}$

Substituindo na 1ª equação, temos:
$b^4 - 40b^2 + 144 = 0 \Rightarrow b = \pm 6$ ou $b = \pm 2$.
Lembrando que *b* deve ser estritamente positivo, temos 2 possibilidades:

(I) $(b = 6 \text{ e } a = 2) \Rightarrow (64^y = 6 \text{ e } 64^x = 2) \Rightarrow \left(y = \log_{64} 6 \text{ e } x = \dfrac{1}{6}\right)$

(II) $(b = 2 \text{ e } a = 6) \Rightarrow (64^y = 2 \text{ e } 64^x = 6) \Rightarrow \left(y = \dfrac{1}{6} \text{ e } x = \log_{64} 6\right)$

Assim, $S = \left\{\left(\dfrac{1}{6}, \log_{64} 6\right); \left(\log_{64} 6, \dfrac{1}{6}\right)\right\}$

238. a) $\log_4 (3x + 2) = \log_4 (2x + 5) \Rightarrow 3x + 2 = 2x + 5 > 0$
Resolvendo $3x + 2 = 2x + 5$, vem $x = 3$, que convém, pois $3 \cdot 3 + 2 > 0$.
$S = \{3\}$.

b) Devemos ter: $5x - 6 = 3x - 5 > 0$.

De $5x - 6 = 3x - 5$ segue que $x = \frac{1}{2}$.

$x = \frac{1}{2}$ não é solução, pois $5 \cdot \frac{1}{2} - 6 < 0$. Daí, $S = \varnothing$.

c) Devemos ter: $5x^2 - 14x + 1 = 4x^2 - 4x - 20 > 0$.
De $5x^2 - 14x + 1 = 4x^2 - 4x - 20 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x = 7 \text{ ou } x = 3)$.
$x = 7$ é solução, pois $5 \cdot 7^2 - 14 \cdot 7 + 1 = 148 > 0$.
$x = 3$ é solução, pois $5 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 + 1 = 4 > 0$.
$S = \{3, 7\}$

d) Devemos ter: $3x^2 - 4x - 17 = 2x^2 - 5x + 3 > 0$.
$3x^2 - 4x - 17 = 2x^2 - 5x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -5)$.
$x = 4$ é solução, pois $3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 17 = 15 > 0$.
$x = -5$ é solução, pois $3 \cdot (-5)^2 - 4 \cdot (-5) - 17 = 78 > 0$.
$S = \{-5, 4\}$

e) Devemos ter: $4x^2 + 13x + 2 = 2x + 5 > 0$.
$4x^2 + 13x + 2 = 2x + 5 \Leftrightarrow 4x^2 + 11x - 3 = 0 \Rightarrow$
$\left(x = -3 \text{ ou } x = \frac{1}{4}\right)$
$x = -3$ não é solução, pois $4 \cdot (-3)^2 + 13 \cdot (-3) + 2 = -1 < 0$.
$x = \frac{1}{4}$ é solução, pois $4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 13 \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{11}{2} > 0$.
$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

f) Devemos ter: $5x^2 - 3x - 11 = 3x^2 - 2x - 8 > 0$.
$5x^2 - 3x - 11 = 3x^2 - 2x - 8 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x = -1 \text{ ou } x = \frac{3}{2}\right)$.
$x = -1$ não é solução, pois $5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 11 = -3 < 0$.
$x = \frac{3}{2}$ não é solução, pois $5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 11 = -\frac{17}{4} < 0$.
Daí, $S = \varnothing$.

239. a) $\log_5 (4x - 3) = 1 \Rightarrow 5^1 = 4x - 3 \Rightarrow x = 2$
$S = \{2\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (3 + 5x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3 + 5x \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$
$S = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$

c) $\log_{\sqrt{2}} (3x^2 + 7x + 3) = 0 \Rightarrow (\sqrt{2})^0 = 3x^2 + 7x + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x = -2 \text{ ou } x = -\dfrac{1}{3}\right)$

$S = \left\{-2, -\dfrac{1}{3}\right\}$

d) $\log_4 (2x^2 + 5x + 4) = 2 \Rightarrow 4^2 = 2x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 12 = 0 \Rightarrow \left(x = -4 \text{ ou } x = \dfrac{3}{2}\right)$

$S = \left\{-4, \dfrac{3}{2}\right\}$

e) $\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 9x + 4) = -2 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 2x^2 - 9x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 = 0 \Rightarrow \left(x = -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x = 5\right)$

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 5\right\}$

f) $\log_3 (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow 3^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow (x - 1 = -3 \text{ ou } x - 1 = 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 4)$

$S = \{-2, 4\}$

g) $\log_4 (x^2 - 4x + 3) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 4^{\frac{1}{2}} = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{3})$

$S = \{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$

240. Temos: $\log_3 x = y$ (1).

Do enunciado: $\log_3 (x + 16) = y + 2$ (2).

De (1) vem que $3^y = x$ e de (2) vem que:

$3^{y+2} = x + 16 \Rightarrow 3^y \cdot 3^2 = x + 16 \Rightarrow 9x = x + 16 \Rightarrow x = 2.$

241. Notemos inicialmente que:

$\log_{\frac{1}{8}} \dfrac{1}{32} = y \Rightarrow \left(\dfrac{1}{8}\right)^y = \dfrac{1}{32} \Rightarrow y = \dfrac{5}{3}.$

Então, podemos escrever:

$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}.$

242. a) $\log_3(\log_2 x) = 1 \Rightarrow 3^1 = \log_2 x \Rightarrow 2^3 = x \Rightarrow x = 8$

b) $\log_{\frac{1}{2}}[\log_3(\log_4 x)] = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \log_3(\log_4 x) \Rightarrow 3^1 = \log_4 x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 4^3 = 64$
$S = \{64\}$

c) $\log_{\frac{1}{4}}\{\log_3[\log_2(3x-1)]\} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \log_3[\log_2(3x-1)] \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^1 = \log_2(3x-1) \Rightarrow 8 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = 3$
$S = \{3\}$

d) $\log_2[1 + \log_3(1 + \log_4 x)] = 0 \Rightarrow 2^0 = 1 + \log_3(1 + \log_4 x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^0 = 1 + \log_4 x \Rightarrow 4^0 = x \Leftrightarrow x = 1$
$S = \{1\}$

e) $\log_{\sqrt{2}}\{2 \cdot \log_3[1 + \log_4(x+3)]\} = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_3[1 + \log_4(x+3)] \Rightarrow \log_3[1 + \log_4(x+3)] = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^1 = 1 + \log_4(x+3) \Rightarrow 4^2 = x + 3 \Rightarrow x = 13$
$S = \{13\}$

f) $\log_3[1 + 2 \cdot \log_2(3 - \log_4 x^2)] = 1 \Rightarrow 3^1 = 1 + 2 \cdot \log_2(3 - \log_4 x^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = \log_2(3 - \log_4 x^2) \Rightarrow 2^1 = 3 - \log_4 x^2 \Leftrightarrow \log_4 x^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4^1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$
$S = \{-2, 2\}$

g) $\log_2\{2 + 3 \cdot \log_3[1 + 4 \cdot \log_4(5x+1)]\} = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^3 = 2 + 3 \cdot \log_3[1 + 4 \cdot \log_4(5x+1)] \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 = \log_3[1 + 4 \cdot \log_4(5x+1)] \Rightarrow 3^2 = 1 + 4 \cdot \log_4(5x+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 = \log_4(5x+1) \Rightarrow 4^2 = 5x + 1 \Rightarrow x = 3$
$S = \{3\}$

243. $\log_3[\log_2(3x^2 - 5x + 2)] = \log_3 2 \Rightarrow \log_2(3x^2 - 5x + 2) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^2 = 3x^2 - 5x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \left(x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 2\right),$
que satisfazem a condição de existência.
$S = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$

244. a) $x^{\log_x(x+3)} = 7 \Rightarrow \log_x 7 = \log_x(x+3) \Rightarrow 7 = x + 3 > 0; x > 0 \text{ e } x \neq 1.$
Daí, $x = 4$, que satisfaz as condições de existência.
$S = \{4\}$

b) $x^{\log_x(x-5)^2} = 9 \Rightarrow \log_x 9 = \log_x(x-5)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 = (x-5)^2 > 0, x \neq 1 \text{ e } x > 0.$
De $9 = (x-5)^2$, segue que $x = 2$ ou $x = 8$.
$S = \{2, 8\}$

c) $x^{\log_x (x+3)^2} = 16 \Rightarrow \log_x 16 = \log_x (x+3)^2 \Rightarrow 16 = (x+3)^2 > 0$, $x > 0$ e $x \neq 1$. De $16 = (x+3)^2$, segue que $x = 1$ (não convém) ou $x = -7$ (não convém).
Daí, $S = \varnothing$.

d) Notemos que $\log_3 \sqrt{27} = y \Rightarrow 3^y = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$.
Então, podemos reescrever a equação na forma:
$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_x (x^2+2)} = 2 \cdot \dfrac{3}{2} \Rightarrow x^{\log_x (x^2+2)} = 3^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_x 3^3 = \log_x (x^2+2) \Rightarrow x^2 + 2 = 3^3$, $x > 0$ e $x \neq 1$.
De $x^2 + 2 = 27$ vem que $x = \pm 5$. Desprezando a raiz negativa, segue que $x = 5$.
$S = \{5\}$

245. Da 2ª equação, temos:
$\log_2 y = \sqrt{x} \Rightarrow (\log_2 y)^2 = x$ para $x > 0$ e $y > 0$ (1).
Substituindo esse valor de *x* na 1ª equação, temos:
$2 \cdot [(\log_2 y)^2]^y - \dfrac{1}{[(\log_2 y)^2]^y} = 1.$
Fazendo $(\log_2 y)^{2y} = t$, vem:
$2t - \dfrac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = 1 \text{ ou } t = -\dfrac{1}{2}\right)$.
Como $t > 0$, segue que:
$t = 1 \Leftrightarrow (\log_2 y)^{2y} = 1 \overset{2y \neq 0}{\Leftrightarrow} \log_2 y = 1 \Rightarrow y = 2.$
Em (1) temos:
$x = (\log_2 y)^2 = (\log_2 2)^2 = 1.$
$S = \{(1, 2)\}$

246. a) $\log_4^2 x - 2 \log_4 x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\log_4 x)^2 - 2 \log_4 x - 3 = 0$
Fazendo $\log_4 x = t$, vem:
$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\log_4 x = -1 \text{ ou } \log_4 x = 3) \Rightarrow (4^{-1} = x \text{ ou } 4^3 = x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x = \dfrac{1}{4} \text{ ou } x = 64\right)$, que satisfazem a condição de existência.
$S = \left\{\dfrac{1}{4}, 64\right\}$

b) $6 \log_2^2 x - 7 \log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow 6 (\log_2 x)^2 - 7 \log_2 x + 2 = 0$
Fazendo $\log_2 x = t$, vem:
$6t^2 - 7t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = \dfrac{1}{2} \text{ ou } t = \dfrac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\log_2 x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } \log_2 x = \dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow \left(x = 2^{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = 2^{\frac{2}{3}}\right)$, isto é,

$x = \sqrt{2}$ ou $x = \sqrt[3]{4}$.

Como $x > 0$, vem:

$S = \{\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}\}$

c) $\log x(\log x - 1) = 6$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$t(t - 1) = 6 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log x = -2 \text{ ou } \log x = 3) \Rightarrow (x = 10^{-2} \text{ ou } x = 10^3)$, que são raízes da equação proposta, pois $x > 0$.

$S = \left\{\frac{1}{100}, 1\,000\right\}$

d) $\log_2 x \cdot (2 \log_2 x - 3) = 2$

Fazendo $\log_2 x = t$, temos:

$t(2t - 3) = 2 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\log_2 x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_2 x = 2\right) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = 4\right)$, que satisfazem a condição $x > 0$.

$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right\}$

e) $2 \log_4^2 x + 2 = 5 \log_4 x \Leftrightarrow 2 (\log_4 x)^2 + 2 = 5 \log_4 x$

Fazendo $\log_4 x = t$, vem:

$2t^2 + 2 = 5t \Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2\right) \Leftrightarrow \left(\log_4 x = \frac{1}{2} \text{ ou } \log_4 x = 2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 16)$, que satisfazem a condição $x > 0$.

$S = \{2, 16\}$

f) $\log^3 x = 4 \log x \Leftrightarrow (\log x)^3 = 4 \log x$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$t^3 = 4t \Leftrightarrow t(t^2 - 4) = 0 \Rightarrow (t = 0 \text{ ou } t = -2 \text{ ou } t = 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log x = 0 \text{ ou } \log x = -2 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{100} \text{ ou } x = 100\right)$, que satisfazem a condição $x > 0$.

$S = \left\{\frac{1}{100}, 1,100\right\}$

247. $\sqrt[x]{3} - \sqrt[2x]{3} = 2 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x}} - 3^{\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{2}} = 2$

Fazendo $\frac{1}{x} = 2y$, temos:

$3^{2y} - 3^{2y \cdot \frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow (3y)^2 - 3^y - 2 = 0.$

Fazendo $3^y = t$, vem:
$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2)$.
Como $3^y > 0, \forall y \in \mathbb{R}$, segue que $t = -1$ não convém. Daí, $3^y = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 2 = y$.
Logo, $\dfrac{1}{x} = 2\log_3 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \log_3 2^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\log_3 4}$.
Transformando o logaritmo para a base 10, vem:
$x = \dfrac{1}{\dfrac{\log 4}{\log 3}} = \dfrac{\log 3}{\log 4}$, não convém pois $x \in \mathbb{N}^*$.
$S = \varnothing$

248. a) Fazendo $\log x = t$, temos:
$\dfrac{1}{5-t} + \dfrac{2}{1+t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log x = 2 \text{ ou } \log x = 3) \Rightarrow (x = 100 \text{ ou } x = 1\,000)$, que satisfazem a condição $x > 0$.
$S = \{100, 1\,000\}$

b) Fazendo $\log_2 x = t$, vem:
$\dfrac{3+t}{t} + \dfrac{2-t}{3-t} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow t^2 - 11t + 18 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 9) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_2 x = 2 \text{ ou } \log_2 x = 9) \Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 2^9 = 512)$, que satisfazem a condição $x > 0$.
$S = \{4, 512\}$

c) Fazendo $\log_3 x = t$, vem:
$\dfrac{t}{1+t} + \dfrac{t+2}{t+3} = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 7 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(t = 1 \text{ ou } t = -\dfrac{7}{3}\right) \Rightarrow \left(\log_3 x = 1 \text{ ou } \log_3 x = -\dfrac{7}{3}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x = 3 \text{ ou } x = 3^{-\frac{7}{3}}\right)$, que satisfazem a condição $x > 0$.
$S = \left\{3, 3^{-\frac{7}{3}}\right\}$

d) Fazendo $\log x = t$, temos:
$\dfrac{1-t}{2+t} - \dfrac{1+t}{2-t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 4) \Rightarrow (x = 10^{-1} \text{ ou } x = 10^4)$, que satisfazem a condição $x > 0$.
$S = \{10^{-1}, 10^4\}$

e) Fazendo $\log_2 x = t$, segue que:

$$\frac{1-t}{2-t} - \frac{2-t}{3-t} = \frac{4-t}{5-t} - \frac{5-t}{6-t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{-1}{30 - 11t + t^2} \Leftrightarrow t = 4.$$

Então, $\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$.
Como $x > 0$, $x = 16$ é solução.
$S = \{16\}$

250. a) Devemos ter:

$0 < x \neq 1$ (I) e $3x^2 - 13x + 15 = x^2$ (II).

De (II) temos que $x = 5$ ou $x = \frac{3}{2}$, que são soluções, pois satisfazem (I).

$S = \left\{\frac{3}{2}, 5\right\}$

b) Devemos ter:

$0 < x \neq 1$ (I) e $4 - 3x = x^2$ (II).
De (II) temos que $x = 1$ ou $x = -4$, que não satisfazem (I).
$S = \varnothing$

c) Devemos ter:

$0 < x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow 2 < x \neq 3$ (I) e $2x^2 - 11x + 16 = (x - 2)^2$ (II).
De (II) temos que $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 3$. Somente $x = 4$ satisfaz (I). Então, $S = \{4\}$.

d) Devemos ter:

$0 < \sqrt{x} \neq 1$ (I) e $(\sqrt{x})^4 = 2x^2 + 5x + 6$ (II).
De (II) temos que $x = -2$ ou $x = -3$, que não satisfazem (I).
Assim, $S = \varnothing$.

e) Devemos ter:

$0 < x - 1 \neq 1 \Leftrightarrow 1 < x \neq 2$ (I) e $x^3 - x^2 + x - 3 = (x - 1)^3$ (II).
De (II) temos que:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Somente $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é solução, pois satisfaz (I).

$S = \left\{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

f) Devemos ter:

$0 < x + 2 \neq 1 \Leftrightarrow -2 < x \neq -1$ (I) e $x^3 + 7x^2 + 8x + 11 = (x + 2)^3$ (II).
De (II) temos que $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x = 1$ ou $x = 3)$, que são soluções pois satisfazem (I).
$S = \{1, 3\}$

g) Devemos ter:

$0 < 2 - x \neq 1 \Leftrightarrow 2 > x \neq 1$ (I) e $2x^3 - x^2 - 18x + 8 = (2 - x)^3$ (II).

De (II) temos que:

$3x^3 - 7x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 - 7x - 6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -\dfrac{2}{3}\right).$

$x = 3$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$S = \left\{0, -\dfrac{2}{3}\right\}$

251. Devemos ter:

$0 < x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -1 < x \neq 0$ (I) e $x^2 + x + 6 = (x + 1)^3$ (II).

De (II) temos que $x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = 0$. As possíveis raízes racionais dessa equação pertencem ao conjunto $\{-1, 1, -5, 5\}$.

$x = 1$ é raiz da equação, pois $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 0$ (V).

Logo, o polinômio $x^3 + 2x^2 + 2x - 5$ é divisível por $x - 1$. Efetuando a divisão, podemos escrever:

$x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = (x - 1)(x^2 + 3x + 5)$

Como $x^2 + 3x + 5 = 0$ não admite raízes reais, segue que a única solução real de (II) é $x = 1$, que satisfaz (I).

$S = \{1\}$

253. a) Devemos ter:

$0 < x \neq 1$ (I) e $4x - 3 = 2x + 1 > 0$ (II).

De (II) temos que $x = 2$.

$x = 2$ é solução, pois satisfaz (I) e (II), pois $4 \cdot 2 - 3 > 0$.

$S = \{2\}$

b) Devemos ter:

$0 < x \neq 1$ (I) e $5x + 2 = 3x + 4 > 0$ (II).

Resolvendo (II), temos que $x = 1$, que não é solução, pois não satisfaz (I).

$S = \varnothing$

c) Devemos ter:

$0 < x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -1 < x \neq 0$ (I) e $3x + 14 = 2 - x > 0$ (II).

Resolvendo (II), temos que $x = -3$ que não é solução, pois não satisfaz (I).

$S = \varnothing$

d) Devemos ter:

$0 < x + 5 \neq 1 \Leftrightarrow -5 < x \neq -4$ (I) e $3x^2 - 5x - 8 = 2x^2 - 3x > 0$ (II).

Resolvendo (II), temos que $x = -2$ ou $x = 4$.

$x = -2$ satisfaz (II), pois $3 \cdot (-2)^2 - 5(-2) - 8 = 14 > 0$ e satisfaz (I).

Logo, $x = -2$ é solução.

$x = 4$ satisfaz (II), pois $3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 8 = 20 > 0$ e satisfaz (I).

Logo, $x = 4$ é solução.

$S = \{-2, 4\}$

e) Devemos ter:

$0 < 2x - 4 \neq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 < x \neq \dfrac{5}{2}$ (I) e $5x^2 - 15x + 7 = x^2 - 3x + 2 > 0$ (II).

Resolvendo (II), temos que $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{5}{2}$.

$x = \dfrac{1}{2}$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = \dfrac{5}{2}$ não é solução, pois não satisfaz (I).

Daí, $S = \varnothing$.

f) Devemos ter:

$0 < x + 2 \neq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < x \neq -1$ (I) e $3x^2 - 8x - 2 = 2x^2 - 5x + 2 > 0$ (II).

Resolvendo (II), temos que $x = -1$ ou $x = 4$.

$x = -1$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = 4$ satisfaz (II), pois $3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 2 = 14 > 0$ e satisfaz (I).

Assim, $x = 4$ é solução.

$S = \{4\}$

254. a) Fazendo $\log_x (5x - 6) = t$, vem:

$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t = 1$ ou $t = 2)$, isto é,

(1) $\log_x (5x - 6) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ 5x - 6 = x \text{ (II)} \end{cases}$

De (II), $x = \dfrac{3}{2}$, que é solução, pois satisfaz (I).

(2) $\log_x (5x - 6) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ 5x - 6 = x^2 \text{ (II)} \end{cases}$

De (II), segue que $x = 2$ ou $x = 3$, que são soluções, pois satisfazem (I).

Assim, de (1) e (2), temos que:

$S = \left\{\dfrac{3}{2}, 2, 3\right\}$

b) Fazendo $\log_x (x + 1) = t$, temos:

$t^2 = 2 + t \Rightarrow t = -1$ ou $t = 2$, isto é,

(1) $\log_x (x + 1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ x + 1 = x^{-1} > 0 \text{ (II)} \end{cases}$

Resolvendo (II), temos que $x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ é solução, pois satisfaz (I).

(2) $\log_x (x + 1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ x + 1 = x^2 \text{ (II)} \end{cases}$

Resolvendo (II), temos que: $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Somente $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é solução, pois deve satisfazer (I).

Assim, de (1) e (2) segue que:

$S = \left\{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

c) Fazendo $\log_{3x-2} (4 - x) = t$, vem:

$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = 2 \text{ ou } t = \dfrac{1}{2}\right)$, isto é:

(1) $\log_{3x-2} (4 - x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < x \neq 1 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ 4 - x = (3x - 2)^2 \text{ (II)} \end{cases}$

Resolvendo (II), temos que:

$9x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{11}{9}$.

$x = 0$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = \dfrac{11}{9}$ é solução, pois satisfaz (I).

(2) $\log_{3x-2} (4 - x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < x \neq 1 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ 4 - x = (3x - 2)^{\frac{1}{2}} \text{ (II)} \end{cases}$

Resolvendo a equação irracional em (II), vem que $x = 2$, que é solução, pois satisfaz (I).

De (1) e (2) vem:

$S = \left\{\dfrac{11}{9}, 2\right\}$

256. A condição de existência dos logaritmos é $x > \dfrac{1}{3}$ (I).

Para $x > \dfrac{1}{3}$, temos:

$\log\left(x+\frac{1}{3}\right)+\log\left(x-\frac{1}{3}\right)=\log\frac{24}{9}\Rightarrow\log\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]=\log\frac{24}{9}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log\left(x^2-\frac{1}{9}\right)=\log\frac{24}{9}\Rightarrow x^2-\frac{1}{9}=\frac{24}{9}\Leftrightarrow x^2=\frac{25}{9}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(x=-\frac{5}{3}\text{ ou } x=\frac{5}{3}\right).$

Como somente $x=\frac{5}{3}$ satisfaz (I), vem que: $S=\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

257. Notemos que as condições $2^x > 0$ e $1 + 2^x > 0$ são satisfeitas para $\forall x \in \mathbb{R}$. Temos:

$\log 2^x + \log(1+2^x) = \log 6 \Rightarrow \log[2^x \cdot (1+2^x)] = \log 6 \Rightarrow 2^x \cdot (1+2^x) = 6.$

Fazendo $2^x = t$, vem: $t(1+t) = 6 \Rightarrow t = -3$ ou $t = 2$.

Como $t > 0$, vem que $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

$S = \{1\}$

258. Notemos inicialmente que $1 + 2^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Temos:

$x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \log(1+2^x) = x \cdot \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \log(1+2^x) = x \cdot [\log 10 - \log 2] + \log 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \log(1+2^x) = x - x\log 2 + \log 6 \Leftrightarrow \log(1+2^x) = \log 6 - \log 2^x \Rightarrow$

$= \log(1+2^x) = \log\left(\frac{6}{2^x}\right) \Rightarrow 1 + 2^x = \frac{6}{2^x}.$

Fazendo $2^x = t$, vem:

$1 + t = \frac{6}{t} \Rightarrow (t = -3 \text{ ou } t = 2).$

Como $2^x > 0$, segue que $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

$S = \{1\}$

259. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > 3$ (I).

Para $x > 3$, temos:

$\log_2(x-3) + \log_2(x+3) = 4 \Rightarrow \log_2[(x-3)(x+3)] = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 9 = 2^4 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 5$.

Somente $x = 5$ é solução, pois deve satisfazer (I).

$S = \{5\}$

b) A condição de existência dos logaritmos é $x > 2$ (I).

Para $x > 2$, temos:

$\log_2(x+1) + \log_2(x-2) = 2 \Rightarrow \log_2[(x+1)\cdot(x-2)] = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 3$.

Somente $x = 3$ é solução, pois deve satisfazer (I).

$S = \{3\}$

c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 21$ (I).
Para $x > 21$, temos:
$\log x + \log (x - 21) = 2 \Rightarrow \log [x \cdot (x - 21)] = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x - 21) = 10^2 \Leftrightarrow x^2 - 21x - 100 = 0 \Rightarrow x = -4$ ou $x = 25$.
Como somente $x = 25$ satisfaz (I), $S = \{25\}$.

d) A condição de existência dos logaritmos é $x > 1$ (I).
Para $x > 1$, temos:
$\log_2 (5x - 2) - [\log_2 x + \log_2 (x - 1)] = 2 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \log_2 (5x - 2) - \log_2 [x \cdot (x - 1)] = 2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{5x - 2}{x(x - 1)}\right) = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{5x - 2}{x(x - 1)} = 2^2 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 2.$$
Somente $x = 2$ é solução, pois deve satisfazer (I).
$S = \{2\}$.

e) A condição de existência dos logaritmos é $x > 2$ (I).
Para $x > 2$, temos:
$\log_3 (5x + 4) - [\log_3 x + \log_3 (x - 2)] = 1 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \log_3 (5x + 4) - \log_3 [x \cdot (x - 2)] = 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{5x + 4}{x(x - 2)}\right) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{5x + 4}{x(x - 2)} = 3^1 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 4.$$
Somente $x = 4$ é solução, pois deve satisfazer (I).
$S = \{4\}$.

f) A condição de existência dos logaritmos é $x \neq -\frac{2}{3}$ e $x \neq \frac{3}{2}$ (I).
Para $x \neq -\frac{2}{3}$ e $x \neq \frac{3}{2}$, temos:
$$\log_{\frac{1}{2}} (3x + 2)^2 - \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3)^2 = -4 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{(3x + 2)^2}{(2x - 3)^2} = -4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{3x + 2}{2x - 3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow \left(\frac{3x + 2}{2x - 3}\right)^2 = 2^4 \Rightarrow \left|\frac{3x + 2}{2x - 3}\right| = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x + 2}{2x - 3} = 4 \Rightarrow x = \dfrac{14}{5} \\ \text{ou} \\ \dfrac{3x + 2}{2x - 3} = -4 \Rightarrow x = \dfrac{10}{11} \end{cases}$$
Os dois valores encontrados são soluções, pois satisfazem (I).
$$S = \left\{\frac{14}{5}, \frac{10}{11}\right\}$$

g) A condição de existência dos logaritmos é $x \neq -2$ e $x \neq 3$ (I).
Para $x \neq -2$ e $x \neq 3$, temos:
$\log_{36}(x+2)^2 + \log_{36}(x-3)^2 = 1 \Rightarrow \log_{36}[(x+2)^2(x-3)^2] = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+2)^2(x-3)^2 = 36 \Rightarrow (x^2 - x - 6) = \pm 6$
$x^2 - x - 6 = 6 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 4$
$x^2 - x - 6 = -6 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$
Esses quatro valores são soluções, pois satisfazem (I).
$S = \{-3, 0, 1, 4\}$

260. A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$.

$$(0{,}4)^{\log^2 x + 1} = (6{,}25)^{2 - \log x^3} \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{\log^2 x + 1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2 - 3\log x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x + 1} = \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{2 - 3\log x} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-\log^2 x - 1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4 - 6\log x} \Rightarrow$$
$\Rightarrow -\log^2 x - 1 = 4 - 6\log x \Rightarrow \log^2 x - 6\log x + 5 = 0.$
Fazendo $\log x = t$, vem:
$t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t = 1$ ou $t = 5) \Rightarrow (\log x = 1$ ou $\log x = 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x = 10^1$ ou $x = 10^5)$.
$S = \{10, 10^5\}$

261. Notemos que $9^{x-1} + 7 > 0$ e $3^{x-1} + 1 > 0$ são satisfeitas para todo *x* real. Temos:
$$\log_2(9^{x-1} + 7) - \log_2(3^{x-1} + 1) = 2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1}\right) = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1} = 2^2 \Rightarrow 9^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9^x}{9} = 4 \cdot \frac{3^x}{3} + 3 = 0.$$
Fazendo $3^x = t$, vem:
$$\frac{t^2}{9} - \frac{4t}{3} + 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow (t = 3 \text{ ou } t = 9) \Rightarrow$$
$\Rightarrow (3^x = 3$ ou $3^x = 9) \Rightarrow (x = 1$ ou $x = 2)$.
$S = \{1, 2\}$

262. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > \frac{15}{4}$ (I).
Temos:
$$\frac{\log_3(2x)}{\log_3(4x - 15)} = 2 \Rightarrow \log_3 2x = 2 \cdot \log_3(4x - 15) \Rightarrow$$
$\Rightarrow \log_3 2x = \log_3(4x - 15)^2 \Rightarrow 2x = (4x - 15)^2 \Rightarrow$
$$\Rightarrow 16x^2 - 122x + 225 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \text{ ou } x = \frac{25}{8}.$$

Como $x = \dfrac{25}{8}$ não satisfaz (I) e $x = \dfrac{9}{2}$ satisfaz, a única solução é $x = \dfrac{9}{2}$.

$S = \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$

b) $\dfrac{\log_2 (35 - x^3)}{\log_2 (5 - x)} = 3 \Rightarrow \log_2 (35 - x^3) = 3 \log_2 (5 - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (35 - x^3) = \log_2 (5 - x)^3 \Rightarrow 35 - x^3 = (5 - x)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$.

Verificando $x = 2$: $35 - 2^3 > 0$ e $5 - 2 > 0$.

Verificando $x = 3$: $35 - 3^3 > 0$ e $5 - 3 > 0$.

$S = \{2, 3\}$

c) $\dfrac{\log\left(\sqrt{x + 1} + 1\right)}{\log \sqrt[3]{x - 40}} = 3 \Rightarrow \log\left(\sqrt{x + 1} + 1\right) = 3 \log \sqrt[3]{x - 40} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\left(\sqrt{x + 1} + 1\right) = \log\left(\sqrt[3]{x - 40}\right)^3 \Rightarrow \sqrt{x + 1} + 1 = x - 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x + 1} = x - 41 \Rightarrow x^2 - 83x + 1\,680 = 0 \Rightarrow (x = 48$ ou $x = 35)$

($x = 35$ não convém, pois $\sqrt{35 + 1} \neq 35 - 41$).

Verificando $x = 48$: $\sqrt{48 + 1} + 1 > 0$ e $\sqrt[3]{48 - 40} > 0$.

$S = \{48\}$

263. A condição de existência dos logaritmos é $x > 16$ (I).

$\dfrac{1}{2} \log_3 (x - 16) - \log_3\left(\sqrt{x} - 4\right) = 1 \Rightarrow \log_3 (x - 16)^{\frac{1}{2}} - \log_3\left(\sqrt{x} - 4\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 \dfrac{(x - 16)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x} - 4} = 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x - 16}}{\sqrt{x} - 4} = 3^1 \Rightarrow 3\sqrt{x} - 12 = \sqrt{x - 16}$.

Resolvendo essa equação irracional, temos $x = 25$ ou $x = 16$.

$x = 25$ é solução dessa equação irracional, pois:

$3 \cdot \sqrt{25} - 12 = \sqrt{25 - 16}$ (V), mas não satisfaz (I).

$x = 16$ é solução da equação irracional, pois:

$3 \cdot \sqrt{16} - 12 = \sqrt{16 - 16}$ (V), mas não satisfaz (I).

Daí, $S = \{25\}$.

264. A condição de existência dos logaritmos é $2^{x + 2} - 3 > 0$, pois $4^x + 15 \cdot 2^x + 27 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (I).

Temos:

$\log_3 (4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = 2 \log_3 (2^{x + 2} - 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 (4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = \log_3 (2^{x + 2} - 3)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^x + 15 \cdot 2^x + 27 = (2^{x + 2})^2 - 6 \cdot 2^{x + 2} + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^x + 15 \cdot 2^x + 27 = 2^{2x} \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 9$.

Fazendo $2^x = t$, vem:

$t^2 + 15t + 27 = 16t^2 - 24t + 9 \Rightarrow 15t^2 - 39t - 18 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = -\dfrac{2}{5}$ (não convém, pois $t > 0$) ou $t = 3$.
Daí, $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$, que satisfaz (I), pois:
$2^{\log_2 3 + 2} - 3 = 2^{\log_2 3} \cdot 2^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 > 0$.
$S = \{\log_2 3\}$

266. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > 3$ (I).
Temos:
$\log_2 (x + 4) + \log_2 (x - 3) = \log_2 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 [(x + 4)(x - 3)] = \log_2 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 18 \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -6$.
Somente $x = 5$ satisfaz (I).
$S = \{5\}$

b) A condição de existência dos logaritmos é $x < 1$ (I).
Temos:
$\log_5 (1 - x) + \log_5 (2 - x) = \log_5 (8 - 2x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_5 [(1 - x)(2 - x)] = \log_5 (8 - 2x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 - x)(2 - x) = 8 - 2x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 3$.
Somente $x = -2$ é solução, pois satisfaz (I).
$S = \{-2\}$

c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 5$ (I).
Temos:
$\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x - 5) = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} [(x + 1)(x - 5)] = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)(x - 5) = 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 6x - 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 3 - \sqrt{11}$ ou $x = 3 + \sqrt{11}$.
Somente $x = 3 + \sqrt{11}$ satisfaz (I).
$S = \{3 + \sqrt{11}\}$

d) A condição de existência dos logaritmos é $x > \dfrac{1 + \sqrt{17}}{4}$ (I).
Temos:
$\log (2x + 1) + \log (4x - 3) = \log (2x^2 - x - 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log [(2x + 1)(4x - 3)] = \log (2x^2 - x - 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow (2x + 1)(4x - 3) = 2x^2 - x - 2 \Rightarrow 6x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ ou $x = \dfrac{1}{2}$, que não satisfazem (I).
$S = \varnothing$

e) A condição de existência dos logaritmos é $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{4}{3}$ (I).
Temos:
$\log_2 (4 - 3x) - \log_2 (2x - 1) = \log_2 (3 - x) - \log_2 (x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2\left(\dfrac{4-3x}{2x-1}\right) = \log_2\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right) \Rightarrow \dfrac{4-3x}{2x-1} = \dfrac{3-x}{x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x = -7$ ou $x = 1$.

Somente $x = 1$ satisfaz (I).

$S = \{1\}$

f) A condição de existência dos logaritmos é $x > \dfrac{1}{3}$ (I).

Temos:

$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 13x) + \operatorname{colog}_{\frac{1}{3}} (x + 3) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 13x) - \log_{\frac{1}{3}} (x + 3) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x^2+13x}{x+3}\right) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 1) \Rightarrow \dfrac{x^2+13x}{x+3} = 3x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = 3$.

Somente $x = 3$ satisfaz (I).

$S = \{3\}$

g) A condição de existência dos logaritmos é $x > -1 + \sqrt{3}$ (I).

Temos:

$\log (2x^2 + 4x - 4) + \operatorname{colog} (x + 1) = \log 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log (2x^2 + 4x - 4) - \log (x + 1) = \log 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\left(\dfrac{2x^2+4x-4}{x+1}\right) = \log 4 \Rightarrow \dfrac{2x^2+4x-4}{x+1} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

Somente $x = 2$ satisfaz (I).

$S = \{2\}$

267. Fazendo $\log x = y$, vem:

$2 \log y = \log (7 - 2y) - \log 5 \Rightarrow \log y^2 = \log\left(\dfrac{7-2y}{5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = \dfrac{7-2y}{5} \Rightarrow 5y^2 + 2y - 7 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{7}{5}$ ou $y = 1$.

Daí, $\log x = -\dfrac{7}{5}$ ou $\log x = 1$.

Notemos que, se $x = -\dfrac{7}{5}$ no primeiro membro, teremos:

$\log (\log x) = \log\left(-\dfrac{7}{5}\right) \notin \mathbb{R}$!

Então, $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$.

$S = \{10\}$

268. A condição de existência dos logaritmos é $x > -\dfrac{5}{7}$ (I).
Temos:
$\log \sqrt{7x + 5} + \dfrac{1}{2} \log (2x + 7) = 1 + \log \dfrac{9}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log \sqrt{7x + 5} + \log (2x + 7)^{\frac{1}{2}} = \log 10 + \log \dfrac{9}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log \left[\sqrt{7x + 5} \cdot \sqrt{2x + 7}\,\right] = \log \left(10 \cdot \dfrac{9}{2}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(7x + 5)(2x + 7)} = 45 \Rightarrow 14x^2 + 59x - 1\,990 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -\dfrac{199}{14}$ ou $x = 10$.
Somente $x = 10$ satisfaz (I).
$S = \{10\}$

269. a) Temos:
$\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{\log x} = \dfrac{1}{2} \cdot \log x$
Fazendo $\log x = t$, vem:
$\sqrt{t} = \dfrac{1}{2}t \Rightarrow \dfrac{1}{4}t^2 = t \Rightarrow (t = 0 \text{ ou } t = 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log x = 0 \text{ ou } \log x = 4) \Rightarrow (x = 10^0 \text{ ou } x = 10^4)$.
Verificando $x = 1$: $\sqrt{\log 1} = \log\sqrt{1}$. (V)
Verificando $x = 10^4$: $\sqrt{\log 10^4} = \sqrt{10^4}$. (V)
$S = \{1, 10^4\}$

b) $\log^{-1} x = 2 + \log x^{-1} \Rightarrow (\log x)^{-1} = 2 - \log x$
Fazendo $\log x = t$, vem:
$t^{-1} = 2 - t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$.
Então, $\log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10$.
$x = 10$ é solução, pois $x > 0$.
$S = \{10\}$

c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$.
Temos:
$\log_8 x^3 = 5 + \dfrac{12}{\log_8 x} \Rightarrow 3\log_8 x = 5 + \dfrac{12}{\log_8 x}$.
Fazendo $\log_8 x = t$, vem:
$3t = 5 + \dfrac{12}{t} \Rightarrow \left(t = -\dfrac{4}{3} \text{ ou } t = 3\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\log_8 x = -\dfrac{4}{3} \text{ ou } \log_8 x = 3\right) \Rightarrow \left(x = 8^{-\frac{4}{3}} \text{ ou } x = 8^3\right)$,
$x = \dfrac{1}{16}$ ou $x = 512$, que satisfazem a condição de existência.
$S = \left\{\dfrac{1}{16}, 512\right\}$

270. $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^x \cdot 3 - 3) = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 [3 \cdot (3^x - 1)] = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 (3^x - 1) \cdot [\log_3 3 + \log_3 (3^x - 1)] = 6$
Fazendo $\log_3 (3^x - 1) = t$, vem:
$t \cdot [1 + t] = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t = -3 \text{ ou } t = 2)$.
Daí,
$\log_3 (3^x - 1) = -3 \Rightarrow 3^x - 1 = 3^{-3} \Rightarrow 3^x = \dfrac{28}{27} \Rightarrow x = \log_3 \dfrac{28}{27}$
ou
$(3^x - 1) = 2 \Rightarrow 3^x - 1 = 9 \Rightarrow 3^x = 10 \Rightarrow x = \log_3 10$.
Os valores encontrados garantem a existência dos logaritmos acima e são, portanto, soluções.
$S = \left\{\log_3 \dfrac{28}{27}, \log_3 10\right\}$

271. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$. Temos:
$\log^2 x^3 - 20 \cdot \log \sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\log x^3)^2 - 20 \cdot \log x^{\frac{1}{2}} + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (3 \cdot \log x)^2 - 20 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \log x + 1 = 0.$
Fazendo $\log x = t$, vem:
$(3 \cdot t)^2 - 10t + 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{9}$ ou $t = 1$. Daí,
$\log x = \dfrac{1}{9} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{10}$
ou
$\log x = 1 \Rightarrow x = 10.$
Os dois valores encontrados satisfazem a condição de existência.
$S = \{\sqrt[9]{10}, 10\}$.

b) A condição de existência dos logaritmos é $0 < x \neq 1$. Temos:
$\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \log_x^2 \sqrt{5} \Rightarrow \log_x 5 + \log_x \sqrt{5} - 1{,}25 = (\log_x \sqrt{5})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_x 5 + \log_x 5^{\frac{1}{2}} - 1{,}25 = \left(\log_x 5^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_x 5 + \dfrac{1}{2} \log_x 5 - 1{,}25 = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \log_x 5\right)^2$
Fazendo $\log_x 5 = t$, vem:
$t + \dfrac{1}{2} t - 1{,}25 = \left(\dfrac{1}{2} t\right)^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t = 5 \text{ ou } t = 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_x 5 = 5 \text{ ou } \log_x 5 = 1) \Rightarrow (x^5 = 5 \text{ ou } x^1 = 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x = \sqrt[5]{5}$ ou $x = 5)$, que satisfazem a condição de existência.
$S = \left\{\sqrt[5]{5}, 5\right\}$

c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$ (I). Temos:

$$\frac{\log_8\left(\frac{8}{x^2}\right)}{\log_8^2 x} = 3 \Rightarrow \frac{\log_8 8 - \log_8 x^2}{(\log_8 x)^2} = 3 \Rightarrow \frac{1 - 2\log_8 x}{(\log_8 x)^2} = 3.$$

Fazendo $\log_8 x = t$, vem:

$$\frac{1-2t}{t^2} = 3 \Rightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = -1 \text{ ou } t = \frac{1}{3}\right), \text{ isto é,}$$

$$\left(\log_8 x = -1 \text{ ou } \log_8 x = \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left(x = 8^{-1} \text{ ou } x = 8^{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$ ou $x = 2$, que satisfazem (I).

$S = \left\{\frac{1}{8}, 2\right\}$

272. Escrevendo log 5 como $\log\left(\frac{10}{2}\right)$, temos:

$$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2.$$

A equação proposta é, então, $x^2 + x \cdot (1 - \log 2) - \log 2 = 0$. Temos:
$\Delta = (1 - \log 2)^2 + 4 \log 2 = (1 + \log 2)^2$.
Daí,

$$x = \frac{-(1 - \log 2) \pm \sqrt{(1 + \log 2)^2}}{2} = \frac{(\log 2 - 1) \pm (1 + \log 2)}{2},$$

donde $x' = \log 2$ e $x'' = -1$.
$S = \{\log 2, -1\}$

274. a) Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.
Aplicando a propriedade dos logaritmos na 2ª equação, temos:
$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \Rightarrow \log_2 (x \cdot y) = \log_2 8 \Rightarrow xy = 8$.
Então o sistema fica: $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$, cujas soluções são
$(x = 4$ e $y = 2)$ ou $(x = 2$ e $y = 4)$.
$S = \{(4, 2); (2,4)\}$

b) Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.
Da 1ª equação temos:
$4^{x-y} = 8 \Rightarrow 2^{2x-2y} = 2^3 \Rightarrow 2x - 2y = 3$.
Da 2ª equação, aplicando a propriedade dos logaritmos, vem:

$$\log_2 x - \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2^2 \Rightarrow x = 4y.$$

Então o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ x = 4y \end{cases}$

cuja solução é $x = 2$ e $y = \frac{1}{2}$.

$S = \left\{\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

c) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$.
Aplicando a propriedade dos logaritmos na 2ª equação, temos:
$\log x + \log y = 2 \Rightarrow \log (x \cdot y) = 2 \Rightarrow x \cdot y = 10^2 = 100$.
Então, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ xy = 100 \end{cases}$
cujas soluções são ($x = 20$ e $y = 5$) ou ($x = 5$ e $y = 20$).
$S = \{(20, 5); (5, 20)\}$

d) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$.
Aplicando as propriedades dos logaritmos na 2ª equação, vem:
$2 \log x + \log y = 2 \log 2 + \log 3 \Rightarrow \log x^2 - \log y = \log 2^2 + \log 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2}{y}\right) = \log (2^2 \cdot 3) \Rightarrow \frac{x^2}{y} = 12 \Rightarrow x^2 = 12y$.
Assim, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ x^2 = 12y \end{cases}$
cujas soluções são ($x = 6$ e $y = 3$) ou ($x = -6$ e $y = 3$).
(Note que $x = -6$ não convém.)
$S = \{(6, 3)\}$

e) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$. Da 1ª equação vem:
$2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 512 \Rightarrow 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2^9 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$.
Da 2ª equação, aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:
$\log \sqrt{xy} = 1 + \log 2 \Rightarrow \log \sqrt{xy} = \log 10 = \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log \sqrt{xy} = \log (10 \cdot 2) \Rightarrow \sqrt{xy} = 20$.
Assim, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ \sqrt{xy} = 20 \end{cases}$, cujas
soluções são ($x = 25$ e $y = 16$) ou ($x = 16$ e $y = 25$).
$S = \{(25, 16); (16, 25)\}$

275. Devemos ter $x + y > 0$, $x - y > 0$, $x > 0$ e $y > 0$ (I).
Da 1ª equação segue que:

$$2^{\log_{\frac{1}{2}} (x + y)} = 5^{\log_5 (x - y)} \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{\log_{\frac{1}{2}} (x + y)} = 5^{\log_5 (x - y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} (x + y)}\right]^{-1} = 5^{\log_5 (x - y)} \Rightarrow (x + y)^{-1} = x - y \Rightarrow x^2 - y^2 = 1.$$

Da 2ª equação vem:

$\log_2 x + \log_2 y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \log_2 (x \cdot y) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow xy = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Assim, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy = \sqrt{2} \end{cases}$

cuja única solução é $x = \sqrt{2}$ e $y = 1$, pois deve satisfazer (I).

$S = \{(\sqrt{2}, 1)\}$.

277. a) Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

Fazendo $\log x = a$ e $\log y = b$, vem: $\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 4a + 3b = 17 \end{cases}$

que resolvido fornece $a = 2$ e $b = 3$, isto é,

$(\log x = 2 \text{ e } \log y = 3) \Rightarrow (x = 10^2 \text{ e } y = 10^3)$.

$S = \{(100, 1000)\}$

b) Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

Fazendo $\log_2 x = a$ e $\log_2 y = b$, vem $\begin{cases} 2a + 3b = 27 \\ 5a - 2b = 1 \end{cases}$

que resolvido dá $a = 3$ e $b = 7$. Então:

$(\log_2 x = 3 \text{ e } \log_2 y = 7) \Rightarrow (x = 2^3 = 8 \text{ e } y = 2^7 = 128)$.

$S = \{(8, 128)\}$

278. Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

Aplicando propriedades na 1ª equação, temos:

$\log_2 (xy) \cdot \log_2 \left(\dfrac{x}{y}\right) = -3 \Rightarrow (\log_2 x + \log_2 y) \cdot (\log_2 x - \log_2 y) = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - (\log_2 y)^2 = -3$.

Então, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} (\log_2 x)^2 - (\log_2 y)^2 = -3 \\ (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = 5 \end{cases}$

Somando membro a membro as equações acima, vem:

$(\log_2 x)^2 = 1 \Rightarrow (\log_2 x = -1 \text{ ou } \log_2 x = 1) \Rightarrow \left(x = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \text{ ou } x = 2\right)$.

- Se $x = \dfrac{1}{2}$, na 1ª equação, segue que:

  $(\log_2 y)^2 = 4 \Rightarrow (\log_2 y = -2 \text{ ou } \log_2 y = 2) \Rightarrow \left(y = \dfrac{1}{4} \text{ ou } y = 4\right)$.

- Se $x = 2$, na 1ª equação, temos novamente $y = \dfrac{1}{4}$ ou $y = 4$.

$S = \left\{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right); \left(\dfrac{1}{2}, 4\right); \left(2, \dfrac{1}{4}\right); (2; 4)\right\}$

280. a) Aplicando logaritmo de base 3 a ambos os membros, temos:
$9 \cdot x^{\log_3 x} = x^3 \Rightarrow \log_3 (9 \cdot x^{\log_3 x}) = \log_3 x^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 9 + \log_3 x^{\log_3 x} = 3 \log_3 x \Rightarrow 2 + (\log_3 x) \cdot (\log_3 x) = 3 \log_3 x.$
Fazendo $\log_3 x = t$, vem:
$2 + t^2 = 3t \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow (\log_3 x = 1 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x = 3 \text{ ou } x = 9)$, que satisfazem a condição $x > 0$.
$S = \{3, 9\}$

b) Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros, temos:
$x^{\log x} = 100 \cdot x \Rightarrow \log (x^{\log x}) = \log (100 \cdot x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log x) \cdot (\log x) = \log 100 + \log x.$
Fazendo $\log x = t$, vem:
$t \cdot t = 2 + t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{10} \text{ ou } x = 100\right)$, que satisfazem a condição $x > 0$.
$S = \left\{\frac{1}{10}, 100\right\}$

c) A condição de existência do logaritmo é $0 < x \neq 1$.
Aplicando logaritmo de base *x* a ambos os membros, temos:
$16^{\log_x 2} = 8x \Rightarrow \log_x (16^{\log_x 2}) = \log_x (8 \cdot x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_x 2) \cdot (\log_x 16) = \log_x 8 + \log_x x \Rightarrow (\log_x 2) \cdot (\log_x 2^4) = \log_x 2^3 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_x 2) \cdot 4 \cdot \log_x 2 = 3 \cdot \log_x 2 + 1.$
Fazendo $\log_x 2 = t$, temos:
$t \cdot 4t = 3t + 1 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{4} \text{ ou } t = 1\right) \Rightarrow \left(\log_x 2 = -\frac{1}{4} \text{ ou } \log_x 2 = 1\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x^{-\frac{1}{4}} = 2 \text{ ou } x = 2\right) \Rightarrow (x = 16^{-1} \text{ ou } x = 2).$
$S = \left\{2, \frac{1}{16}\right\}$

d) A condição de existência do logaritmo é: $0 < x \neq 1$.
Aplicando logaritmo de base $\sqrt{x}$ a ambos os membros, temos:
$9^{\log_{\sqrt{x}} 3} = 27x \Rightarrow \log_{\sqrt{x}} (9^{\log_{\sqrt{x}} 3}) = \log_{\sqrt{x}} (27x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_{\sqrt{x}} 3) \cdot (\log_{\sqrt{x}} 9) = \log_{\sqrt{x}} 27 + \log_{\sqrt{x}} x \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_{\sqrt{x}} 3) \cdot (2 \log_{\sqrt{x}} 3) = 3 \log_{\sqrt{x}} 3 + 2.$
Fazendo $\log_{\sqrt{x}} 3 = t$, vem:
$2t^2 = 3t + 2 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 2\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\log_{\sqrt{x}} 3 = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_{\sqrt{x}} 3 = 2\right) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{81} \text{ ou } x = 3\right).$
$S = \left\{\frac{1}{81}, 3\right\}$

e) A condição de existência do logaritmo é: $0 < x \neq 1$. Temos:
$3^{2 \log_x 3} = x^{\log_x 3x} \Rightarrow 3^{\log_x 3^2} = 3x$
Aplicando logaritmo de base *x* a ambos os membros, vem:
$3^{\log_x 9} = 3x \Rightarrow \log_x (3^{\log_x 9}) = \log_x (3x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log_x 9) \cdot (\log_x 3) = \log_x 3 + \log_x x \Rightarrow 2 \log_x 3 \cdot \log_x 3 = \log_x 3 + 1.$
Fazendo $\log_x 3 = t$, vem:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\log_x 3 = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_x 3 = 1\right) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{9} \text{ ou } x = 3\right).$$
$$S = \left\{\frac{1}{9}, 3\right\}$$

281. A condição de existência dos logaritmos é $0 < x \neq 1$ e $x \neq 3$ (I).

Notemos inicialmente $\log_x \sqrt{x} = \frac{1}{2}$. Então, a equação proposta pode ser escrita como:
$2^{\log_x (x^2 - 6x + 9)} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} \Rightarrow 2^{\log_x (x-3)^2} = 1 \Rightarrow \log_x (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 3)^2 = x^0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 1 \Rightarrow (x - 3 = -1 \text{ ou } x - 3 = 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 4)$, que satisfazem (I).
$S = \{2, 4\}$

282. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$ (I). Temos:
$\log (x^{\log x}) = 1 \Rightarrow (\log x) \cdot (\log x) = 1 \Rightarrow (\log x)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 1) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{10} \text{ ou } x = 10\right)$, que satisfazem (I).
$$S = \left\{\frac{1}{10}, 10\right\}$$

b) A condição de existência dos logaritmos é $0 < x \neq 1$ (I). Temos:
$x^{\log x - 1} = 100 \Rightarrow \log_x 100 = \log x - 1.$
Escrevendo $\log_x 100$ na base 10, temos:
$$\frac{\log 100}{\log x} = \log x - 1 \Rightarrow \frac{2}{\log x} = \log x - 1.$$
Fazendo $\log x = t$, vem:
$$\frac{2}{t} = t - 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$
$\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{10} \text{ ou } x = 100\right)$, que satisfazem (I).
$$S = \left\{\frac{1}{10}, 100\right\}$$

c) Temos:

$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 \Rightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100 \Rightarrow \log_x 100 = \log \sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x 100 = \dfrac{1}{2} \log x.$

Escrevendo $\log_x 100$ em base 10, vem:

$\dfrac{\log 100}{\log x} = \dfrac{1}{2} \log x \Rightarrow \dfrac{2}{\log x} = \dfrac{\log x}{2} \Rightarrow (\log x)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log x = -2 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \left(x = \dfrac{1}{100} \text{ ou } x = 100\right).$

Verificando $x = \dfrac{1}{100}$, temos:

$\sqrt{\left(\dfrac{1}{100}\right)^{\log \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)}}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{100}\right)^{-1}} = 10.$

Verificando $x = 100$, temos:

$\sqrt{100^{\log \sqrt{100}}} = \sqrt{100^1} = 10.$

$S = \left\{\dfrac{1}{100}, 100\right\}$

283. a) A condição de existência do logaritmo é: $0 < x \neq 1$. Temos:

$x^{3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x} = 100 \cdot \sqrt[3]{10} \Rightarrow x^{3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x} = 10^{\frac{7}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x 10^{\frac{7}{3}} = 3 \log^2 x - \dfrac{2}{3} \log x \Rightarrow \dfrac{7}{3} \log_x 10 = 3 \log^2 x - \dfrac{2}{3} \log x.$

Escrevendo $\log_x 10$ em base 10, vem:

$\dfrac{7}{3} \cdot \dfrac{\log 10}{\log x} = 3 \log^2 x - \dfrac{2}{3} \log x \Rightarrow \dfrac{7}{3 \log x} = 3 \log^2 x - \dfrac{2}{3} \log x.$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$\dfrac{7}{3t} = 3t^2 - \dfrac{2t}{3} \Rightarrow 9t^3 - 2t^2 - 7 = 0 \Rightarrow 7t^3 + 2t^3 - 2t^2 - 7 = 0.$

Fatorando por agrupamento, vem:

$7(t - 1)(t^2 + t + 1) + 2t^2(t - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t - 1)(7t^2 + 7t + 7 + 2t^2) = 0 \Rightarrow (t - 1)(9t^2 + 7t + 7) = 0,$

donde $t - 1 = 0$ ou $\underbrace{9t^2 + 7t + 7 = 0}_{\substack{\Delta < 0 \\ (t \notin \mathbb{R})}} \Rightarrow t = 1.$

Daí, $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$, que é solução, pois satisfaz (I).

$S = \{10\}$

b) Notemos inicialmente que: $\log_{2\sqrt{2}} 4 = y \Rightarrow (2\sqrt{2})^y = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4}{3}.$

Então:

$x^{\log_3^3 x} - \log_3 x^3 = 3^{-3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + 8} \Rightarrow x^{(\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x} = 3^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x 3^4 = (\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x \Rightarrow 4 \log_x 3 = (\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x$

Escrevendo $\log_x 3$ em base 3, vem:

$$4 \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 x} = (\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x.$$

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$4 \cdot \frac{1}{t} = t^3 - 3t \Rightarrow t^4 - 3t^2 - 4 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x = -2 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{9} \text{ ou } x = 9\right).$$

$$S = \left\{\frac{1}{9}, 9\right\}$$

c) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$x^{\log^2 x - 3 \log x + 1} = 1000 \Rightarrow \log_x 1000 = \log^2 x - 3 \log x + 1.$

Escrevendo $\log_x 1000$ em base 10, temos:

$$\frac{\log 1000}{\log x} = \log^2 x - 3 \log x + 1 \Rightarrow \frac{3}{\log x} = (\log x)^2 - 3 \log x + 1.$$

Fazendo $\log x = t$, temos:

$$\frac{3}{t} = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow t^2 (t - 3) + (t - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t - 3)(t^2 + 1) = 0 \Rightarrow (t - 3 = 0 \text{ ou } \underbrace{t^2 + 1 = 0}_{(t \notin \mathbb{R})}) \Rightarrow t = 3.$$

Daí, $\log x = 3 \Rightarrow x = 1000$.

$S = \{1000\}$

284. $\log_x (2 \cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4 \Rightarrow 2 \cdot x^{x-2} - 1 = x^{2x-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot x^{x-2} - 1 = x^{2 \cdot (x-2)}.$

Fazendo $x^{x-2} = t$, vem:

$2 \cdot t - 1 = t^2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 1$, isto é, $x^{x-2} = 1$.

Como $0 < x \neq 1$, temos: $x^{x-2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$S = \{2\}$

285. Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$$3 + \log_x \left(\frac{x^{4x-6} + 1}{2}\right) = 2x \Rightarrow \log_x \left(\frac{x^{4x-6} + 1}{2}\right) = 2x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^{4x-6} + 1}{2} = x^{2x-3} \Rightarrow \frac{x^{2 \cdot (2x-3)} + 1}{2} = x^{2x-3}$$

Fazendo $x^{2x-3} = t$, vem:

$\frac{t^2 + 1}{2} = t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow x^{2x - 3} = 1.$

Como $0 < x \neq 1$, temos:

$x^{2x - 3} = 1 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$

$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

286. a) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$.

Aplicando a propriedade dos logaritmos à 2ª equação, temos:

$\log_2 x - \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 \left(\frac{x}{y}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2^2 \Rightarrow x = 4y.$

Então, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} x \cdot y = 16 \\ x = 4y \end{cases}$

donde $y = -2$ (não convém) ou $y = 2$ e $x = 8$.

$S = \{(8, 2)\}$

b) Devemos ter $0 < x \neq 1$ e $y > 0$.

Da 2ª equação temos:

$x^{\log_2 y} = 64 \Rightarrow \log_x 64 = \log_2 y$ (I).

Da 1ª equação vem $y = \frac{32}{x}$ (II).

Substituindo (II) em (I), vem:

$\log_x 64 = \log_2 \left(\frac{32}{x}\right) \Rightarrow \log_x 64 = \log_2 32 - \log_2 x.$

Passando $\log_x 64$ para a base 2, vem:

$\frac{\log_2 64}{\log_2 x} = 5 - \log_2 x.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$\frac{6}{t} = 5 - t \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x = 2 \text{ ou } \log_2 x = 3) \Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 8).$

Se $x = 4$, de (II), segue que $y = 8$.

Se $x = 8$, de (II), segue que $y = 4$.

$S = \{(4, 8); (8, 4)\}$

c) Devemos ter: $0 < x \neq 1$ e $y > 0$.

Da 1ª equação temos:

$\log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \Rightarrow \log_5 x + y = 7.$

Da 2ª equação temos:

$x^y = 5^{12} \Rightarrow \log_x 5^{12} = y.$

Então, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} \log_5 x + y = 7 \text{ (I)} \\ y = \log_x 5^{12} \text{ (II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), vem:

$\log_5 x + \log_x 5^{12} = 7 \Rightarrow \log_5 x + 12 \log_x 5 = 7.$

Escrevendo $\log_x 5$ em base 5, vem:

$\log_5 x + 12 \cdot \dfrac{\log_5 5}{\log_5 x} = 7.$

Fazendo $\log_5 x = t$, vem:

$t + \dfrac{12}{t} = 7 \Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow t = 3$ ou $t = 4$, isto é,

$t = 3 \Leftrightarrow \log_5 x = 3 \Rightarrow x = 5^3$. Em (II): $y = \log_{5^3} 5^{12} \Rightarrow y = 4.$

$t = 4 \Leftrightarrow \log_5 x = 4 \Rightarrow x = 5^4$. Em (II): $y = \log_{5^4} 5^{12} \Rightarrow y = 3.$

$S = \{(125, 4); (625, 3)\}$

288. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > 6$ (I).

Escrevendo $\log_{\frac{1}{3}} (x - 6)$ em base 3 e aplicando propriedades dos logaritmos, vem:

$\log_3 (x + 2) - \log_{\frac{1}{3}} (x - 6) = \log_3 (2x - 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 (x + 2) - \dfrac{\log_3 (x - 6)}{\log_3 \frac{1}{3}} = \log_3 (2x - 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 (x + 2) + \log_3 (x - 6) = \log_3 (2x - 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 [(x + 2)(x - 6)] = \log_3 (2x - 5) \Rightarrow (x + 2)(x - 6) = 2x - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x = -1$ ou $x = 7).$

Apenas $x = 7$ satisfaz (I).

$S = \{7\}$

b) A condição de existência dos logaritmos é $1 < x < 5$ (I).

Aplicando propriedades e escrevendo os logaritmos em base 2, vem:

$\log_2 (x + 2) + \log_{\frac{1}{2}} (5 - x) + \operatorname{colog}_{\frac{1}{2}} (x - 1) = \log_2 (8 - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x + 2) + \dfrac{\log_2 (5 - x)}{\log_2 \frac{1}{2}} - \dfrac{\log_2 (x - 1)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \log_2 (8 - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x + 2) - \log_2 (5 - x) + \log_2 (x - 1) = \log_2 (8 - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \left[\dfrac{(x + 2)(x - 1)}{5 - x}\right] = \log_2 (8 - x) \Rightarrow \dfrac{(x + 2)(x - 1)}{5 - x} = 8 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$, que é solução, pois satisfaz (I).

$S = \{3\}$

c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 4$ (I).

Aplicando propriedades e escrevendo os logaritmos em base 3, vem:

$\log_3 (x^2 - 2x + 2) + \log_{\frac{1}{3}} (2x + 1) = \log_3 (x - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 (x^2 - 2x + 2) + \dfrac{\log_3 (2x + 1)}{\log_3 \frac{1}{3}} = \log_3 (x - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 (x^2 - 2x + 2) - \log_3 (2x + 1) = \log_3 (x - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 \left(\dfrac{x^2 - 2x + 2}{2x + 1}\right) = \log_3 (x - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2 - 2x + 2}{2x + 1} = x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 6$.

Apenas $x = 6$ satisfaz (I).

$S = \{6\}$

290. a) Devemos ter $x > 0$.

Escrevendo $\log_9 x$ em base 3, vem:

$\log_3^2 x - 5 \log_9 x + 1 = 0 \Rightarrow (\log_3 x)^2 - 5 \cdot \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - \dfrac{5}{2} \log_3 x + 1 = 0.$

Fazendo $\log_3 x = t$, temos:

$t^2 - \dfrac{5}{2} t + 1 = 0 \Rightarrow \left(t = \dfrac{1}{2} \text{ ou } t = 2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\log_3 x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } \log_3 x = 2\right) \Rightarrow (x = \sqrt{3} \text{ ou } x = 9).$

$S = \{\sqrt{3}, 9\}$

b) Devemos ter $x > 0$.

Aplicando propriedades dos logaritmos e passando-os para a base 2, vem:

$\log_2^2 x - \log_8 x^8 = 1 \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 8 \cdot \log_8 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - 8 \cdot \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} = 1 \Rightarrow (\log_2 x)^2 - \dfrac{8}{3} \log_2 x = 1.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$t^2 - \dfrac{8}{3} t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = -\dfrac{1}{3} \text{ ou } t = 3\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\log_2 x = -\dfrac{1}{3} \text{ ou } \log_2 x = 3\right) \Rightarrow \left(x = 2^{-\frac{1}{3}} \text{ ou } x = 8\right).$

$S = \left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, 8\right\}$

c) Devemos ter $x > 0$.

Aplicando propriedades dos logaritmos e escrevendo-os em base 3, vem:

$\log_3^2 x = 2 + \log_9 x^2 \Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + 2 \log_9 x \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + 2 \cdot \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} \Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + 2 \cdot \dfrac{\log_3 x}{2}$.

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$t^2 = 2 + t \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow (\log_3 x = -1 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x = \dfrac{1}{3} \text{ ou } x = 9\right)$.

$S = \left\{\dfrac{1}{3}, 9\right\}$

291. a) Aplicando propriedades dos logaritmos e passando-os para a base 2, podemos escrever:

$\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \cdot \log_4 \sqrt{\dfrac{2}{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{4 \cdot \log_2 x} + 4 \cdot \log_4 \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 2 \log_4 \left(\dfrac{2}{x}\right) = 2 \Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 2 \cdot (\log_4 2 - \log_4 x) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 2\left(\dfrac{1}{2} - \log_4 x\right) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 1 - 2 \cdot \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 1 - \log_2 x = 2$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem: $\sqrt{4t} + 1 - t = 2 \Rightarrow \sqrt{4t} = 1 + t \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$, que de fato é solução, por verificação.

$S = \{2\}$

b) Escrevendo $\log_4 x$ em base 2, vem:

$\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \log_4 x - 2} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \cdot \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} - 2} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{2 \cdot \log_2 x - 2} = 4$.

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$\sqrt{1 + t} + \sqrt{2t - 2} = 4 \Rightarrow (t = 99 \text{ ou } t = 3)$.

Verificando $t = 99$: $\sqrt{100} + \sqrt{196} = 4$ (F).

Verificando $t = 3$: $\sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$ (V).

Assim, $t = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8$, que é de fato solução, pois:

$\sqrt{1 + \log_2 8} + \sqrt{4 \cdot \log_4 8 - 2} = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$ (V)!

$S = \{8\}$

292. $\dfrac{1 + \log_2 (x - 4)}{\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \log_2 (x - 4) = \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 2 = \log_2 (x - 4) = \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}\right).$

Aplicando a propriedade dos logaritmos e escrevendo-os em base 2, vem:

$$\log_2 [2 \cdot (x - 4)] = \frac{\log_2 (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})}{\log_2 \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_2 (2x - 8) = 2 \log_2 \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (2x - 8) = \log_2 \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 8 = (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})^2 \Rightarrow (x = -5 \text{ ou } x = 5).$

Como $x = -5$ não convém, a única solução é $x = 5$.

$S = \{5\}$

293. a) Devemos ter $y > 0$ e $x < y$.

Da 1ª equação, vem:

$$\log_{\frac{1}{2}} (y - x) + \log_2 \left(\frac{1}{y}\right) = -2 \Rightarrow \frac{\log_2 (y - x)}{\log_2 \frac{1}{2}} + \log_2 \left(\frac{1}{y}\right) = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log_2 (y - x) + \log_2 \left(\frac{1}{y}\right) = -2 \Rightarrow \log_2 \left(\frac{\frac{1}{y}}{y - x}\right) = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{y}}{y - x} = 2^{-2} \Rightarrow x = \frac{y^2 - 4}{y} \text{ (I).}$$

Substituindo esse valor de *x* na 2ª equação, vem $\left(\frac{y^2 - 4}{y}\right)^2 + y^2 = 25$.

Fazendo $y^2 = t$, segue que:

$$\frac{(t - 4)^2}{t} + t = 25 \Rightarrow 2t^2 - 33t + 16 = 0 \Rightarrow \left(t = 16 \text{ ou } t = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y^2 = 16 \text{ ou } y^2 = \frac{1}{2}\right) \xRightarrow{y > 0} y = 4 \text{ ou } y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Em (I), temos que:

$$y = 4 \Rightarrow x = \frac{4^2 - 4}{4} = 3 \text{ e } y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

$$S = \left\{(3, 4); \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

b) Devemos ter $y > 2$ e $x^2 - 2y^2 + 10y - 7 > 0$ (I).

Da 1ª equação, vem:

$$\log_9 (x^2 + 1) - \log^3 (y - 2) = 0 \Rightarrow \frac{\log_3 (x^2 + 1)}{\log_3 9} = \log_3 (y - 2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_3 (x^2 + 1) = 2 \log_3 (y - 2) \Rightarrow \log_3 (x^2 + 1) = \log_3 (y - 2)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 1 = (y - 2)^2 \Rightarrow x^2 = y^2 - 4y + 3$ (II).
De 2ª equação vem:
$\log_2 (x^2 - 2y^2 + 10y - 7) = 2 \Rightarrow x^2 - 2y^2 + 10y - 7 = 2^2$.
Por (II): $(y^2 - 4y + 3) - 2y^2 + 10y - 7 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 2$, que não convém, pois não satisfaz (I), ou $y = 4$.
Substituindo $y = 4$ em (II), temos:
$x^2 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.
$S = \{(-\sqrt{3}, 4); (\sqrt{3}, 4)\}$

c) Devemos ter $x + y > 0$ e $x - y > 0$ (I).
Da 1ª equação temos que:
$\log_9 (x^2 + 2) + \log_{81} (y^2 + 9) = 2 \Rightarrow \log_9 (x^2 + 2) + \dfrac{\log_9 (y^2 + 9)}{\log_9 81} = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_9 (x^2 + 2) + \dfrac{1}{2} \log_9 (y^2 + 9) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_9 \left[(x^2 + 2) \cdot (y^2 + 9)^{\frac{1}{2}}\right] = 2 \Rightarrow (x^2 + 2) \cdot (y^2 + 9)^{\frac{1}{2}} = 81$ (II).
Da 2ª equação temos que:
$2 \cdot \log_4 (x + y) = \log_2 (x - y) \Rightarrow 2 \cdot \dfrac{\log_2 (x + y)}{\log_2 4} = \log_2 (x - y) \Rightarrow$
$\Rightarrow x + y = x - y \Rightarrow y = 0$.
Substituindo $y = 0$ em (II), vem:
$(x^2 + 2) \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 81 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 5$.
$x = -5$ e $y = 0$ não satisfazem (I).
$x = 5$ e $y = 0$ satisfazem (I).
$S = \{(5, 0)\}$

d) Da 1ª equação vem:
$\log_3 (\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_{\frac{1}{2}} y\right) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 (\log_2 x) + \dfrac{\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} y\right)}{\log_3 \dfrac{1}{3}} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 (\log_2 x) - \log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} y\right) = 1 \Rightarrow \log_3 \left(\dfrac{\log_2 x}{\log_{\frac{1}{2}} y}\right) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\log_2 x}{\log_{\frac{1}{2}} y} = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \log_{\frac{1}{2}} y$ (I).
Da 2ª equação, aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros, vem:
$xy^2 = 4 \Rightarrow \log_2 (x \cdot y^2) = \log_2 4 \Rightarrow \log_2 x + \log_2 y^2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 x + 2 \log_2 y = 2$.

Por (I), podemos escrever:

$3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} y + 2 \log_2 y = 2 \Rightarrow 3 \cdot \dfrac{\log_2 y}{\log_2 \frac{1}{2}} + 2 \log_2 y = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 \log_2 y + 2 \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 y = -2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}$.

Substituindo $y = \dfrac{1}{4}$ em (I) segue que:

$\log_2 x = 3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{4} \Rightarrow \log_2 x = 6 \Rightarrow x = 2^6 = 64$.

$S = \left\{\left(64, \dfrac{1}{4}\right)\right\}$

e) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$.

Escrevendo os logaritmos das duas equações em base 2, vem:

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = a \\ \log_4 x - \log_8 y = b \end{cases} = \begin{cases} \log_2 x - \dfrac{\log_2 y}{\log_2 4} = a \\ \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} - \dfrac{\log_2 y}{\log_2 8} = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - \dfrac{1}{2} \log_2 y = a \text{ (I)} \\ \dfrac{1}{2} \log_2 x - \dfrac{1}{3} \log_2 y = b \end{cases}$$

Somando à 2ª equação a 1ª multiplicada por $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, vem:

$\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\right) \log_2 y = -\dfrac{a}{2} + b \Rightarrow \dfrac{1}{12} \log_2 y = \dfrac{a - 2b}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 y = 6a - 12b \Rightarrow y = 2^{6a - 12b}$.

Substituindo $y = 2^{6a - 12b}$ em (I), segue que:

$\log_2 x - \dfrac{1}{2} \log_2 2^{6a - 12b} = a \Rightarrow \log_2 x - \dfrac{1}{2} \cdot (6a - 12b) = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x = 4a - 6b \Rightarrow x = 2^{4a - 6b}$.

$S = \{(2^{4a - 6b}, 2^{6a - 12b})\}$

295. Escrevendo $\log_{16} (x - 3)$ em base 4, vem:

$\log_4 (x - 3) - \log_{16} (x - 3) = 1 \Rightarrow \log_4 (x - 3) - \dfrac{\log_4 (x - 3)}{\log_4 16} = 1.$

Fazendo $\log_4 (x - 3) = t$, vem:

$t - \dfrac{t}{2} = 1 \Rightarrow t = 2$, isto é, $\log_4 (x - 3) = 2 \Rightarrow x - 3 = 4^2 \Rightarrow x = 19$,

que é solução, pois satisfaz a condição $x > 3$.
$S = \{19\}$

296. A equação $x^2 - x \cdot (\log_b a) + 2 \log_a b = 0$ tem duas raízes reais e iguais se, e somente se, $\Delta = 0$, isto é,
$(-\log_b a)^2 - 4 \cdot 2 \log_a b = 0 \Rightarrow (\log_b a)^2 - 8 \log_a b = 0$.
Lembrando que $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, temos: $(\log_b a)^2 - 8 \dfrac{1}{\log_b a} = 0$.
Fazendo $\log_b a = t$, vem:
$t^2 - \dfrac{8}{t} = 0 \Rightarrow t = 2$, isto é, $\log_b a = 2 \Rightarrow a = b^2$.

297. A condição de existência dessa equação é: $0 < x \neq 1$.
Notemos inicialmente que:
$\log_{\sqrt{x}} x^2 = y \Rightarrow (\sqrt{x})^y = x^2 \Rightarrow y = 4$ e $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$.
Então, temos:
$\log_2 x = \log_{\sqrt{x}} x^2 + \log_x 2 \Rightarrow \log_2 x = 4 + \dfrac{1}{\log_2 x}$.
Fazendo $\log_2 x = t$, temos:
$t = 4 + \dfrac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 4t - 1 = 0 \Rightarrow t = 2 - \sqrt{5}$ ou $t = 2 + \sqrt{5}$,
isto é, $\log_2 x = 2 - \sqrt{5}$ ou $\log_2 x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = 2^{2-\sqrt{5}}$ ou $x = 2^{2+\sqrt{5}}$.
$S = \{2^{2-\sqrt{5}}, 2^{2+\sqrt{5}}\}$

298. Como sabemos, $\log_{a^2} x = \dfrac{1}{\log_x a^2} = \dfrac{1}{2 \log_x a}$.
Escrevendo $\log_{x^2} a$ em base x, vem:
$\log_{x^2} a = \dfrac{\log_x a}{\log_x x^2} = \dfrac{\log_x a}{2}$.
Então, temos:
$\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2 \log_x a} + \dfrac{\log_x a}{2} = 1$.
Fazendo $\log_x a = t$, temos:
$\dfrac{1}{2t} + \dfrac{t}{2} = 1 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_x a = 1 \Rightarrow x = a$.

299. A condição de existência dessa equação é $0 < x \neq 1$ (I).
Expressando $\log_{(x+1)} x$ em base x, temos:

$\log_x (x+1) = \log_{(x+1)} x \Rightarrow \log_x (x+1) = \dfrac{\log_x x}{\log_x (x+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x (x+1) = \dfrac{1}{\log_x (x+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_x (x + 1))^2 = 1 \Rightarrow \log_x (x + 1) = -1$ ou $\log_x (x + 1) = 1$.

Se $\log_x (x + 1) = -1 \Rightarrow x^{-1} = x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, que não convém, pois não satisfaz (I), ou $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (satisfaz (I)).

Se $\log_x (x + 1) = 1 \Rightarrow x + 1 = x \Rightarrow 0 = -1$, absurdo!

$S = \left\{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

300. a) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$\log_2 x = \log_x 2 \Rightarrow \log_2 x = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 x} \Rightarrow (\log_2 x)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x = -1 \text{ ou } \log_2 x = 1) \Rightarrow \left(x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } x = 2\right)$.

$S = \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$

b) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$\log_3 x = 1 + \log_x 9 \Rightarrow \log_3 x = 1 + \dfrac{\log_3 9}{\log_3 x}$.

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$t = 1 + \dfrac{2}{t} \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_3 x = -1 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow \left(x = \dfrac{1}{3} \text{ ou } x = 9\right)$.

$S = \left\{\dfrac{1}{3}, 9\right\}$

c) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$\log_2 x - 8 \log_{x^2} 2 = 3 \Rightarrow \log_2 x - 8 \cdot \dfrac{\log_2 2}{\log_2 x^2} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x - \dfrac{8}{2 \log_2 x} = 3$.

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$t - \dfrac{8}{2t} = 3 \Rightarrow 2t^2 - 6t - 8 = 0 \Rightarrow (t = 4 \text{ ou } t = -1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x = 4 \text{ ou } \log_2 x = -1) \Rightarrow \left(x = 16 \text{ ou } x = \dfrac{1}{2}\right)$.

$S = \left\{\dfrac{1}{2}, 16\right\}$

d) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.
$\log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \cdot 2 \log_4 x + 9 = 0 \Rightarrow \dfrac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{x}} + 8 \cdot \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} + 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1}{\log_2 x^{\frac{1}{2}}} + 4 \log_2 x + 9 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\frac{1}{2} \log_2 x} + 4 \log_2 x + 9 = 0.$
Fazendo $\log_2 x = t$, vem:
$\dfrac{2}{t} + 4t + 9 = 0 \Rightarrow 4t^2 + 9t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = -\dfrac{1}{4} \text{ ou } t = -2\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\log_2 x = -\dfrac{1}{4} \text{ ou } \log_2 x = -2\right) \Rightarrow \left(x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ ou } x = \dfrac{1}{4}\right).$
$S = \left\{\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}, \dfrac{1}{4}\right\}$

301. a) Notemos inicialmente que:
$\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = y \Rightarrow (\sqrt{5})^y = 5\sqrt{5} \Rightarrow 5^{\frac{y}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = 3.$
Então: $\log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + 3} = -\sqrt{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\dfrac{\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}}{\log_{\sqrt{5}} x} + 3} = -\sqrt{6}.$
Fazendo $\log_{\sqrt{5}} x = t$, vem:
$t \cdot \sqrt{\dfrac{3}{t} + 3} = -\sqrt{6} \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = -2).$
$t = 1$ não é solução da equação irracional, pois
$1 \cdot \sqrt{\dfrac{3}{1} + 3} = -\sqrt{6}$. (F)
$t = -2$ é solução da equação irracional, pois
$(-2)\sqrt{-\dfrac{3}{2} + 3} = -\sqrt{6}$. (V)
Assim, $t = -2 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x = -2 \Rightarrow x = (\sqrt{5})^{-2} = \dfrac{1}{5}.$
$S = \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

b) Escrevendo $\log_x \sqrt{27}$ em base 3, vem:
$\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{1 + \dfrac{\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 x}} \cdot \log_3 x + 1 = 0.$
Fazendo $\log_3 x = t$ e lembrando que $\log_3 \sqrt{27} = \dfrac{3}{2}$, vem:
$\sqrt{1 + \dfrac{3}{2t}} \cdot t + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + \dfrac{3}{2}t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = -2 \text{ ou } t = \dfrac{1}{2}\right).$
$t = -2$ é solução da equação irracional, pois:
$\sqrt{1 + \dfrac{3}{2(-2)}} \cdot (-2) + 1 = 0.$ (V)

$t = \frac{1}{2}$ não é solução da equação irracional, pois:

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}} + 1 = 0.\ (F)$$

Daí, $t = -2 \Rightarrow \log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$.

$S = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

302. Devemos ter $0 < x < 10$ e $x \neq 1$ (I).

$1 + 2 \log_x 2 \cdot \log_4 (10 - x) = \frac{2}{\log_4 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 2 \cdot \frac{\log_4 2}{\log_4 x} \cdot \log_4 (10 - x) = \frac{2}{\log_4 x}$.

Fazendo $\log_4 x = a$ e $\log_4 (10 - x) = b$ (II), temos:

$1 + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{a} \cdot b = \frac{2}{a} \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a = 2 - b$ (III).

De (II) segue que: $\begin{cases} 4^a = x \\ 4^b = 10 - x \end{cases}$

Utilizando (III) na 1ª equação, vem:

$4^{2-b} = x \Leftrightarrow \frac{4^2}{4^b} = x \Rightarrow \frac{16}{10 - x} = x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = 2$ ou $x = 8)$, que são soluções, pois satisfazem (I).

$S = \{2, 8\}$

303. a) Devemos ter $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$.

Como $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$, temos na 1ª equação:

$\log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log_x y} + \log_x y = \frac{5}{2}$ (I).

Aplicando logaritmo de base *x* à 2ª equação, vem:

$xy = 8 \Rightarrow \log_x (x \cdot y) = \log_x 8 \Rightarrow 1 + \log_x y = \log_x 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x y = \log_x 8 - 1$ (II).

Substituindo (II) em (I), temos: $\frac{1}{\log_x 8 - 1} + \log_x 8 - 1 = \frac{5}{2}$.

Fazendo $\log_x 8 = t$, vem:

$\frac{1}{t - 1} + t - 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 9t + 9 = 0 \Rightarrow \left(t = 3 \text{ ou } t = \frac{3}{2}\right)$.

Se $t = 3$, $\log_x 8 = 3 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$.

Em (II): $\log_2 y = \log_2 8 - 1 \Rightarrow \log_2 y = 2 \Rightarrow y = 4$.

Se $t = \frac{3}{2}$, $\log_x 8 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 4$.

Em (II): $\log_4 y = \log_4 8 - 1 \Rightarrow \log_4 y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2$.
$S = \{(2, 4); (4, 2)\}$

b) Devemos ter: $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$.
Expressando os logaritmos da 1ª equação em base x, vem:

$$3 \cdot \left(\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y\right) = 10 \Rightarrow 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x y^2} - \frac{\log_x y}{\log_x \left(\frac{1}{x}\right)}\right) = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{2 \log_x y} + \log_x y\right) = 10 \Rightarrow \frac{1}{\log_x y} + \log_x y = \frac{10}{3} \text{ (I)}.$$

Aplicando logaritmo de base x a ambos os membros da 2ª equação, temos:

$xy = 81 \Rightarrow \log_x (xy) = \log_x 81 \Rightarrow 1 + \log_x y = \log_x 81 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_x y = \log_x 81 - 1$ (II).

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\frac{1}{\log_x 81 - 1} + \log_x 81 - 1 = \frac{10}{3}.$$

Fazendo $\log_x 81 = t$, temos:

$$\frac{1}{t - 1} + t - 1 = \frac{10}{3} \Rightarrow 3t^2 - 16t + 16 = 0 \Rightarrow \left(t = 4 \text{ ou } t = \frac{4}{3}\right).$$

1ª possibilidade: $t = 4$
Temos: $\log_x 81 = 4 \Rightarrow x^4 = 81 \Rightarrow x = -3$ (não convém) ou $x = 3$.
Se $x = 3$, em (II), temos: $\log_3 y = \log_3 81 - 1 \Rightarrow y = 3^3 = 27$.

2ª possibilidade: $t = \dfrac{4}{3}$
Temos: $\log_x 81 = \dfrac{4}{3} \Rightarrow x = 27$. Se $x = 27$, em (II) temos:
$\log_{27} y = \log_{27} 81 - 1 \Rightarrow \log_{27} y = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = 3$.
$S = \{(3, 27), (27, 3)\}$

304. Devemos ter $\begin{cases} 4 - x > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 4$.

Expressando os logaritmos em base 2, temos:

$$\log_6 (x + 3) = \frac{\log_2 (x + 3)}{\log_2 6};\ \log_{0,25} (4 - x) = \frac{\log_2 (4 - x)}{\log_2 0{,}25} =$$

$$= -\frac{1}{2} \log_2 (4 - x).$$

Então, voltando à equação, temos:

$$\frac{1}{\log_6 (x + 3)} + \frac{2 \log_{0,25} (4 - x)}{\log_2 (x + 3)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 6}{\log_2 (x + 3)} + \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) \log_2 (4 - x)}{\log_2 (x + 3)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 6 - \log_2 (4 - x)}{\log_2 (x + 3)} = 1\ (*) \Rightarrow \log_2 \left(\frac{6}{4 - x}\right) = \log_2 (x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6}{4 - x} = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 3).$$

Notemos, porém, que $x = -2$ não convém, pois $x = -2$ anula o denominador de (*).

Logo, a única solução da equação é $x = 3$.

$S = \{3\}$

306. a) $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_3 x} \cdot \dfrac{1}{\log_3 \left(\frac{x}{3}\right)} + \dfrac{1}{\log_3 \left(\frac{x}{81}\right)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 x - 1} + \frac{1}{\log_3 x - 4} = 0.$$

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{t - 4} = 0 \Rightarrow t^2 - 4 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x = 2 \text{ ou } \log_3 x = -2) \Rightarrow \left(x = 9 \text{ ou } x = \frac{1}{9}\right).$$

$S = \left\{9, \dfrac{1}{9}\right\}$

b) $\log_{3x} \left(\dfrac{3}{x}\right) + \log_3 27x^2 = 5 \Rightarrow \dfrac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 3x} + \log_3 27x^2 = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + (3 + 2 \cdot \log_3 x) = 5$$

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$\frac{1 - t}{1 + t} + (3 + 2t) = 5 \Rightarrow (1 - t) + (3 + 2t)(1 + t) = 5\,(1 + t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = 1 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_3 x = 1 \text{ ou } \log_3 x = -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$S = \left\{3, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

c) Expressando os logaritmos em base 2, vem:

$$\log_x 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 x} = \frac{3}{\log_2 x};\ \log_{2x} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 2x} = \frac{3}{1 + \log_2 x};$$

$$\log_{4x} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4x} = \frac{3}{2 + \log_2 x}.$$

Temos:

$$\frac{1}{\log_x 8} + \frac{1}{\log_{2x} 8} + \frac{1}{\log_{4x} 8} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\dfrac{3}{\log_2 x}} + \frac{1}{\dfrac{3}{1 + \log_2 x}} + \frac{1}{\dfrac{3}{2 + \log_2 x}} = 2$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$\frac{t}{3} + \frac{1 + t}{3} + \frac{2 + t}{3} = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$, que é, de fato, solução.

$S = \{2\}$

d) Notemos que $x = 1$ é solução particular da equação.
Expressando os logaritmos em base *x*, vem:

$$\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \cdot \log_{16x} x^3 + 40 \cdot \log_{4x} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \log_{\frac{x}{2}} x - 42 \cdot \log_{16x} x + 20 \cdot \log_{4x} x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x \left(\dfrac{x}{2}\right)} - 42 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x (16x)} + 20 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x 4x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1 - \log_x 2} - \frac{42}{\log_x 2^4 + 1} + \frac{20}{\log_x 2^2 + 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1 - \log_x 2} - \frac{42}{4 \log_x 2 + 1} + \frac{20}{2 \log_2 x + 1} = 0.$$

Fazendo $\log_x 2 = t$, vem:

$$\frac{2}{1 - t} - \frac{42}{4t + 1} + \frac{20}{2t + 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 - t} + \frac{10}{2t + 1} = \frac{21}{4t + 1} \Rightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = -2\right), \text{ isto é,}$$

$\log_x 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ ou

$\log_x 2 = -2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 2 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Como $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ não convém, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$S = \left\{1, 4, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

307. Como $\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 = \dfrac{1}{\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)}$, podemos escrever:

$$\frac{1}{\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} \cdot \log(x^2 - 3x + 2) = -2 + \frac{1}{\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} \cdot \log(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x^2 - 3x + 2)}{\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} - \frac{\log(x-3)}{\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-3}\right)}{\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} = -2 \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x-3}\right) = -2\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x-3}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{-2} \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x-3}\right) = \log(1+x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x-3} = 1 + x \Rightarrow x = 5.$$

$S = \{5\}$

308. Lembrando que $a^{\log_a b} = b$, temos:

$$x^{\log_2^2 x^2 - \log_2(2x) - 2} + \left(\left[(x+2)^2\right]^{\log_{(x+2)^2} 4}\right)^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{(2\log_2 x)^2 - [\log_2 2 + \log_2 x] - 2} + 4^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{(2\log_2 x)^2 - \log_2 x - 3} = 1$$

Notando que $x = 1$ é solução particular dessa equação exponencial, para $x \neq 1$ temos:

$(2\log_2 x)^2 - \log_2 x - 3 = 0.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$4t^2 - t - 3 = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{3}{4}$ ou $t = 1$, isto é,

$\log_2 x = -\dfrac{3}{4}$ ou $\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^{-\frac{3}{4}}$ ou $x = 2$.

$S = \left\{1, 2^{-\frac{3}{4}}, 2\right\}$

309. a) $\log_a(ax) \cdot \log_x(ax) = \log_{a^2}\dfrac{1}{a} \Rightarrow \log_a(ax) \cdot \dfrac{\log_a(ax)}{\log_a x} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\log_a x + 1) \cdot \frac{(1 + \log_a x)}{\log_a x} = -\frac{1}{2}$$

Fazendo $\log_a x = t$, vem:

$$(t + 1) \cdot \frac{(1 + t)}{t} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = -2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_a x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_a x = -2\right) \Rightarrow \left(x = a^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } x = a^{-2}\right).$$

$S = \left\{a^{-\frac{1}{2}}, a^{-2}\right\}$

b) $2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2x} a = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \log_x a + \frac{\log_x a}{\log_x (ax)} + 3 \cdot \frac{\log_x a}{\log_x (a^2 \cdot x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \log_x a + \frac{\log_x a}{1 + \log_x a} + 3 \cdot \frac{\log_x a}{1 + 2 \log_x a} = 0$$

Fazendo $\log_x a = t$, vem:

$$2t + \frac{t}{1 + t} + \frac{3t}{1 + 2t} = 0 \Rightarrow 4t^3 + 11t^2 + 6t = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow t(4t^2 + 11t + 6) = 0.$

1ª possibilidade: $t = 0$, isto é, $\log_x a = 0 \Rightarrow a = 1$, o que é impossível por hipótese.

2ª possibilidade: $4t^2 + 11t + 6 = 0 \Rightarrow \left(t = -2 \text{ ou } t = -\frac{3}{4}\right)$. Daí,

$t = -2, \log_x a = -2 \Rightarrow x^{-2} = a \Rightarrow x = a^{-\frac{1}{2}}$

ou $t = -\frac{3}{4}, \log_x a = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^{-\frac{3}{4}} = a \Rightarrow x = a^{-\frac{4}{3}}$

$S = \left\{a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{4}{3}}\right\}$

c) Como $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$, podemos escrever:

$$\log_x (ax) \cdot \frac{1}{\log_x a} = 1 + \log_x \sqrt{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x a + 1) \cdot \frac{1}{\log_x a} = 1 + \log_x a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x a + 1) \cdot \frac{1}{\log_x a} = 1 + \frac{1}{2} \log_x a.$$

Fazendo $\log_x a = t$, vem:

$$(t + 1) \cdot \frac{1}{t} = 1 + \frac{t}{2} \Rightarrow \frac{t + 1}{t} = \frac{2 + t}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t^2 - 2 = 0 \Rightarrow (t = -\sqrt{2} \text{ ou } t = \sqrt{2}).$

Se $t = -\sqrt{2}$, $\log_x a = -\sqrt{2} \Rightarrow a = x^{-\sqrt{2}} \Rightarrow x = a^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

ou

Se $t = \sqrt{2}$, $\log_x a = \sqrt{2} \Rightarrow a = x^{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

$S = \left\{a^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}, a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right\}$

d) Expressando os logaritmos em base x, $0 < x \neq 1$, vem:

$$\log_{a^2\sqrt{x}} a = \frac{\log_x a}{\log_x (a^2\sqrt{x})} = \frac{\log_x a}{\log_x a^2 + \log_x \sqrt{x}} = \frac{\log_x a}{2\log_x a + \frac{1}{2}}$$

$$\log_{2x} a = \frac{\log_x a}{\log_x (2x)} = \frac{\log_x a}{1 + \log_x 2}; \ a > 0 \text{ e } 0 < x \neq \frac{1}{2} \ (*).$$

$$\log_{ax} a = \frac{\log_x a}{\log_x (ax)} = \frac{\log_x a}{1 + \log_x a}$$

$$\log_{\frac{1}{a}} 2x = \frac{\log_x (2x)}{\log_x \left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log_x 2 + 1}{-\log_x a}.$$

Fazendo $\log_x a = m$ e $\log_x 2 = n$, a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{\dfrac{m}{2m + \frac{1}{2}}}{\dfrac{m}{1 + n}} + \frac{m}{1 + m} \cdot \frac{n + 1}{-m} = 0 \Rightarrow \frac{1 + n}{2m + \frac{1}{2}} - \frac{n + 1}{m + 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n + 1)\left(\frac{1}{2m + \frac{1}{2}} - \frac{1}{m + 1}\right) = 0$$

1ª possibilidade: $n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1 \Rightarrow \log_x 2 = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, não convém, pois não satisfaz (*).

2ª possibilidade: $\dfrac{1}{2m + \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{m + 1} = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_x a = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = a \Rightarrow x = a^2.$$

$S = \{a^2\}$

310. Expressando os logaritmos em base 2, temos:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - 2\frac{\log_a x}{\log_{\frac{1}{b}} a} = \log_{\sqrt[3]{a}} x \cdot \log_a x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - 2 \cdot \frac{\left(\dfrac{\log_2 x}{\log_2 a}\right)}{\left(\dfrac{\log_2 a}{\log_2 \frac{1}{b}}\right)} = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 x}{(\log_2 a)^2} + 2 \cdot \frac{\log_2 x \cdot \log_2 b}{(\log_2 a)^2} = 3 \cdot \frac{(\log_2 x)^2}{(\log_2 a)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_2 x + 2 \cdot \log_2 x \cdot \log_2 b = 3(\log_2 x)^2$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$t + 2t \cdot \log_2 b = 3t^2 \Rightarrow 3t^2 - t - 2t \log_2 b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t(3t - 1 - 2 \log_2 b) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $3t - 1 - 2 \log_2 b = 0$.

1ª possibilidade: $t = 0$

$t = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1$

2ª possibilidade: $3t - 1 - 2 \log_2 b = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1 + 2 \log_2 b}{3}$. Daí,

$\log_2 x = \dfrac{1 + 2 \log_2 b}{3} \Rightarrow 3 \log_2 x = 1 + 2 \log_2 b \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \log_2 x = \log_2 2 + \log_2 b^2 \Rightarrow \log_2 x^3 = \log_2 (2 \cdot b^2) \Rightarrow x^3 = 2b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2b^2}$.

$S = \{1, \sqrt[3]{2b^2}\}$

311. Devemos ter: $x > 0$.

Expressando os logaritmos em base 2, vem:

$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1 \Rightarrow \log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3} + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1.$

Fazendo $\log_2 x = t$, temos:

$$t + \frac{t}{\log_2 3} + \frac{t}{2} = 1 \Rightarrow t\left(1 + \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot \left(\frac{2 \log_2 3 + 2 + \log_2 3}{2 \log_2 3}\right) = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow t \cdot (2 \log_2 3 + 2 + \log_2 3) = 2 \log_2 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \cdot (\log_2 3^2 + \log_2 4 + \log_2 3) = \log_2 3^2 \Rightarrow t[\log_2 (3^2 \cdot 4 \cdot 3)] = \log_2 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log_2 9}{\log_2 108} = \log_{108} 9.$

Então,

$\log_2 x = \log_{108} 9 \Rightarrow x = 2^{\log_{108} 9}$.

$S = \{2^{\log_{108} 9}\}$

312. $10^{\log_a (x^2 - 3x + 5)} = 3^{\log_a 10} \Rightarrow \log_{10} 3^{\log_a 10} = \log_a (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a 10 \cdot \log_{10} 3 = \log_a (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{10} 3 = \dfrac{\log_a (x^2 - 3x + 5)}{\log_a 10} \Rightarrow \log_{10} 3 = \log_{10} (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 5 = 3 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2).$

$S = \{1, 2\}$

313. Escrevendo os logaritmos em base 10, temos:

$$1 + \frac{\log (a - x)}{\log (x + b)} = \frac{2 - \log_{(a-b)} 4}{\log_{(a-b)} (x + b)} \Rightarrow 1 + \frac{\log (a - x)}{\log (x + b)} =$$

$$= \frac{2 - \dfrac{\log 4}{\log (a - b)}}{\dfrac{\log (x + b)}{\log (a - b)}} \Rightarrow \frac{\log (x + b) + \log (a - x)}{\log (x + b)} =$$

$$= \frac{\dfrac{2 \log (a - b) - \log 4}{\log (a - b)}}{\dfrac{\log (x + b)}{\log (a - b)}} \Rightarrow \frac{\log [(x + b) \cdot (a - x)]}{\log (x + b)} =$$

$$= \frac{\log \dfrac{(a - b)^2}{4}}{\log (x + b)} \xRightarrow{x \neq (1 - b)} \log [(x + b)(a - x)] = \log \frac{(a - b)^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + b)(a - x) = \frac{(a - b)^2}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x (a - b) + (a^2 - 6ab + b^2) = 0$, cujo discriminante é:

$\Delta = [-4(a - b)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (a^2 - 6ab + b^2)$

$\Delta = 64ab$

Logo,

$x = \dfrac{4a - 4b \pm 8\sqrt{ab}}{8}$, donde $x = \dfrac{a - b}{2} + \sqrt{ab}$ ou $x = \dfrac{a - b}{2} - \sqrt{ab}$.

$$S = \left\{\frac{a - b}{2} + \sqrt{ab}\ ;\ \frac{a - b}{2} - \sqrt{ab}\right\}$$

314. a) Expressando os logaritmos da 2ª equação em base 2, vem:

$$\log_{y^2} 2 = \log_{xy} 4 \Rightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 y^2} = \frac{\log_2 4}{\log_2 (xy)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \log_2 y} = \frac{2}{\log_2 x + \log_2 y} \Rightarrow 4 \log_2 y = \log_2 x + \log_2 y \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3 \log_2 y = \log_2 x = \log_2 y^3 = \log_2 x \Rightarrow x = y^3$ (I).

Substituindo (I) na 1ª equação, vem:

$x^2 + 4y^3 = 96 \Rightarrow x^2 + 4 \cdot x - 96 = 0 \Rightarrow x = -12$ ou $x = 8$.

Se $x = -12$, em (I), vem: $y^3 = -12 \Rightarrow y = \sqrt[3]{-12}$.

Se $x = 8$, em (I), vem: $y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$.

$S = \{(-12, \sqrt[3]{-12}); (8, 2)\}$

b) Da 2ª equação vem:
$\log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_y 4} \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_y (y - 3x) = \log_y 4 \Rightarrow y - 3x = 4$ (I).
Aplicando logaritmo de base *y* a ambos os membros da 1ª equação, vem:
$y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \log_y \left(y \cdot x^{\log_y x}\right) = \log_y x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + (\log_y x) \cdot (\log_y x) = \dfrac{5}{2} (\log_y x)$.
Fazendo $\log_y x = t$, vem:
$1 + t^2 = \dfrac{5t}{2} \Rightarrow \left(t = \dfrac{1}{2} \text{ ou } t = 2\right)$, isto é,
$\left(\log_y x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } \log_y x = 2\right) \Rightarrow x = \sqrt{y} \text{ ou } x = y^2$ (II).
Substituindo (II) em (I), temos:
1º caso: $x = \sqrt{y}$ e $y - 3x = 4 \Rightarrow y - 3\sqrt{y} = 4 \Rightarrow y = 1$ (não convém, pois *y* é base do sistema de logaritmo) ou $y = 16$.
Se $y = 16$, $x = \sqrt{16} = 4$.
2º caso: $x = y^2$ e $y - 3x = 4 \Rightarrow y - 3y^2 = 4 \Rightarrow 3y^2 - y + 4 = 0$, que não apresenta raízes reais.
$S = \{(4, 16)\}$

c) Escrevendo os logaritmos da 1ª equação em base y ($0 < y \neq 1$), vem:
$x \cdot \log_2 y \cdot \log_{\frac{1}{x}} 2 = y\sqrt{y} \cdot (1 - \log_x 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \cdot \dfrac{\log_y y}{\log_y 2} \cdot \dfrac{\log_y 2}{\log_y \left(\dfrac{1}{x}\right)} = y^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \dfrac{\log_y 2}{\log_y x}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow -\dfrac{x}{\log_y x} = y^{\frac{3}{2}} \cdot \dfrac{(\log_y x - \log_y 2)}{\log_y x}$ (I).
Escrevendo os logaritmos da 2ª equação em base 2, vem:
$\log_{y^3} 2 \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 1 \Rightarrow \dfrac{\log_2 2}{\log_2 y^3} \cdot \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1}{3 \log_2 y} \cdot \dfrac{\log_2 x}{\dfrac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\log_2 x}{\log_2 y} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{2}{3} \log_y x = 1 \Rightarrow \log_y x = \dfrac{3}{2}$ (II).
Substituindo (II) em (I) e notando que, por (II), $x = y^{\frac{3}{2}}$, vem:

$$-\frac{x}{\log_y x} = y^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\left(\log_y x - \log_y^2\right)}{\log_y x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{\frac{3}{2}} = x \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} - \log_y 2\right)}{\frac{3}{2}} \xRightarrow{x \neq 0} -1 = \frac{3}{2} - \log_y 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_y 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow y^{\frac{5}{2}} = 2 \Rightarrow y = 2^{\frac{2}{5}}.$$

De (II), $x = y^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{5}}$.

$S = \left\{\left(2^{\frac{3}{5}}, 2^{\frac{2}{5}}\right)\right\}$

315. Da 2ª equação vem:

$x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow \log_2 (x^2 - y^2) = \log_2 2 \Rightarrow \log_2 [(x + y)(x - y)] = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (x + y) + \log_2 (x - y) = 1 \Rightarrow \log_2 (x + y) = 1 - \log_2 (x - y)$.

Substituindo essa expressão na 1ª equação, vem:

$\log_2 (x + y) - \log_3 (x - y) = 1 \Rightarrow 1 - \log_2 (x - y) - \log_3 (x - y) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (x - y) = -\log_3 (x - y) \Rightarrow \log_2 (x - y) = \log_3 (x - y)^{-1}$.

Transformando para a base 2, vem:

$$\log_2 (x - y) = \log_3 \left(\frac{1}{x - y}\right) \Rightarrow \log_2 (x - y) = \frac{\log_2 \left(\frac{1}{x - y}\right)}{\log_2 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (x - y) = \frac{-\log_2 (x - y)}{\log_2 3} \Rightarrow \log_2 (x - y) \cdot \log_2 3 = -\log_2 (x - y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_2 (x - y) \cdot \log_2 3 + \log_2 (x - y) = 0 \Rightarrow \log_2 (x - y) \cdot [\log_2 3 + 1] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (x - y) = 0$ ou $\log_2 3 + 1 = 0$ (F)!

Então: $\log_2 (x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 1$ (I)

Como $x^2 - y^2 = (x + y)\underbrace{(x - y)}$, vem:

$$2 = (x + y) \cdot 1 \Rightarrow x + y = 2 \text{ (II)}$$

De (I) e (II) vem que $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$.

$S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

316. Escrevendo cada um dos logaritmos das três equações em base 2, vem:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \dfrac{\log_2 y}{\log_2 4} + \dfrac{\log_2 z}{\log_2 4} = 2 \\ \dfrac{\log_2 y}{\log_2 3} + \dfrac{\log_2 z}{\log_2 9} + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 9} = 2 \\ \dfrac{\log_2 z}{\log_2 4} + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 16} + \dfrac{\log_2 y}{\log_2 16} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \dfrac{\log_2 y}{2} + \dfrac{\log_2 z}{2} = 2 \\ \dfrac{\log_2 y}{\log_2 3} + \dfrac{\log_2 z}{2\log_2 3} + \dfrac{\log_2 x}{2\log_2 3} = 2 \\ \dfrac{\log_2 z}{2} + \dfrac{\log_2 x}{4} + \dfrac{\log_2 y}{4} = 2 \end{cases}$$

Fazendo $\log_2 x = a$, $\log_2 y = b$ e $\log_2 z = c$, vem:

$$\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} = 2 \\ \dfrac{b}{\log_2 3} + \dfrac{c}{2\log_2 3} + \dfrac{a}{2\log_2 3} = 2 \\ \dfrac{c}{2} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 4 \\ a + 2b + c = 4\log_2 3 \\ a + b + 2c = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima por Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4;\ a = \frac{D_A}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4\log_2 3 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 - \log_2 81}{4} = \frac{\log_2 16 - \log_2 81}{4} = \frac{\log_2\left(\frac{16}{81}\right)}{4} =$$

$$= \frac{\log_2\left(\frac{2}{3}\right)^4}{4} = \log_2\left(\frac{2}{3}\right).$$

Analogamente,

$$b = \frac{12\log_2 3 - 12}{4} = \frac{12(\log_2 3 - 1)}{4} = 3(\log_2 3 - \log_2 2) =$$

$$= 3 \cdot \log_2\left(\frac{3}{2}\right) = \log_2\left(\frac{27}{8}\right);$$

$$c = \frac{20 - 4\log_2 3}{4} = \frac{4(5 - \log_2 3)}{4} = \log_2 32 - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{32}{3}\right).$$

Dessa forma, temos:

$$\log_2 x = a \Rightarrow \log_2 x = \log_2\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\log_2 y = b \Rightarrow \log_2 y = \log_2\left(\frac{27}{8}\right) \Rightarrow y = \frac{27}{8}$$

$$\log_2 z = c \Rightarrow \log_2 z = \log_2\left(\frac{32}{3}\right) \Rightarrow z = \frac{32}{3}.$$

$$S = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)\right\}$$

317. Aplicando logaritmo de base *a* $(0 < a \neq 1)$ a ambos os membros da 1ª equação, vem:

$a^x \cdot b^y = ab \Rightarrow \log_a (a^x \cdot b^y) = \log_a (ab) \Rightarrow x + y \log_a b = 1 + \log_a b \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 1 = (1 - y) \log_a b$ (I).

Transformando para a base *a* os logaritmos da 2ª equação, temos:

$$2 \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b \Rightarrow 2 \log_a x = \frac{\log_a y}{\log_a \frac{1}{b}} \cdot \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a x^2 = \frac{\log_a y}{-\log_a b} \cdot \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_a x^2 = -2 \log_a y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a x^2 = \log_a y^{-2} \Rightarrow x^2 = y^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \text{ ou } x = -\frac{1}{y}.$$

Voltando a (I), temos:

1º caso: $x = \frac{1}{y}$, isto é,

$$x - 1 = (1 - y) \log_a b \Rightarrow \frac{1}{y} - 1 = (1 - y) \log_a b \Rightarrow \frac{1 - y}{y} = (1 - y) \log_a b$$

$$(1 - y) \cdot \left(\frac{1}{y} - \log_a b\right) = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

Se $y = 1$, $x = \frac{1}{y} = 1$.

Se $y = \log_b a$, $x = \frac{1}{\log_b a} = \log_a b$.

2º caso: $x = -\frac{1}{y}$ não ocorre, pois, para garantir a existência dos logaritmos do sistema devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

$S = [(1, 1); (\log_a b, \log_b a)]$

318. Da 1ª equação temos:

$\log_{12} x \cdot (\log_2 x + \log_2 y) = \log_2 x \Rightarrow \log_{12} x \cdot \log_2 (xy) = \log_2 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_{12} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 (xy)}, \ xy \neq 1.$$

Por outro lado, escrevendo $\log_{12} x$ em base 2, temos:

$$\log_{12} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 (xy)} \Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 12} = \frac{\log_2 x}{\log_2 (xy)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x \left(\frac{1}{\log_2 12} - \frac{1}{\log_2 (xy)}\right) = 0 \Rightarrow \left(\log_2 x = 0 \text{ ou } \log_2 12 = \log_2 (xy)\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 1$ (não convém)

ou

$\log_2 12 = \log_2 (xy) \Rightarrow xy = 12$ (I).

Da 2ª equação temos que:

$\log_2 x \cdot \log_3 (x + y) = 3 \log_3 x \Rightarrow \log_2 x = \dfrac{\log_3 x^3}{\log_3 (x + y)} = \log_{x + y} x^3.$

Passando para a base 2, vem:

$\log_2 x = \dfrac{\log_2 x^3}{\log_2 (x + y)} \Rightarrow \log_2 x = \dfrac{3 \log_2 x}{\log_2 (x + y)} \xRightarrow{\text{por (I)}}$

$\Rightarrow \log_2 x = \dfrac{3 \log_2 x}{\log_2 \left(x + \dfrac{12}{x}\right)} \xRightarrow{x \neq 1} \log_2 \left(x + \dfrac{12}{x}\right) = 3 \Rightarrow x + \dfrac{12}{x} = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 6$.

Se $x = 2$, por (I), vem que $y = 6$.

Se $x = 6$, por (I), vem com $y = 2$.

$S = \{(2, 6); (6, 2)\}$

319. a) Notemos que $x = y = 1$ é solução particular desse sistema.

Para $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$, aplicando logaritmo decimal a ambos os membros da 1ª e da 2ª equações, vem:

$$\begin{cases} x^{x + y} = y^{12} \\ y^{x + y} = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log (x^{x + y}) = \log y^{12} \\ \log (y^{x + y}) = \log x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y) \cdot \log x = 12 \log y \\ (x + y) \cdot \log y = 3 \log x \end{cases}$$

Dividindo membro a membro, temos que:

$\dfrac{\log x}{\log y} = 4 \cdot \dfrac{\log y}{\log x} \Rightarrow (\log x)^2 = 4 (\log y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log x = 2 \log y \text{ ou } \log x = -2 \log y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log x = \log y^2 \text{ ou } \log x = \log y^{-2}) \Rightarrow \left(x = y^2 \text{ ou } x = \dfrac{1}{y^2}\right).$

1º caso: Se $x = y^2$, substituindo na 1ª equação (original), vem:

$(y^2)^{y^2 + y} = y^{12} \Rightarrow 2y^2 + 2y - 12 = 0 \Rightarrow y = -3$ (não convém) ou $y = 2$, donde $x = 2^2 = 4$.

2º caso: Se $x = \dfrac{1}{y^2}$, vem, na 1ª equação:

$\left(\dfrac{1}{y^2}\right)^{\frac{1}{y^2} + y} = y^{12} \Rightarrow (y^{-2})^{\frac{1}{y^2} + y} = y^{12} \Rightarrow -\dfrac{2}{y^2} - 2y = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{y^2} - y = 12 \Rightarrow y^3 + 6y^2 + 1 = 0$, que não apresenta raiz real positiva.

$S = \{(1, 1); (4, 2)\}$

b) Notemos que $x = y = 1$ é solução particular desse sistema.

Para $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$, aplicando logaritmo de base *x* a ambos os membros da 1ª e da 2ª equações, vem:

$\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^6y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_x (x^{x+y}) = \log_x y^3 \\ \log_x (y^{x+y}) = \log_x (x^6y^3) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \log_x y \\ (x + y) \log_x y = 6 + 3 \log_x y \end{cases}$

Dividindo membro a membro, vem:

$\dfrac{1}{\log_x y} = \dfrac{3 \log_x y}{6 + 3 \log_x y}$. Fazendo $\log_x y = t$, vem:

$\dfrac{1}{t} = \dfrac{3t}{6 + 3t} \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = -1$ ou $t = 2$.

1ª possibilidade: $t = -1$

Temos: $\log_x y = -1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$. Substituindo esse valor de *y* na 1ª equação, temos:

$x^{x+y} = y^3 \Rightarrow x^{x + \frac{1}{x}} = x^{-3} \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0$ (não convém) e $x = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (não convém)

2ª possibilidade: $t = 2$

Temos: $\log_x y = 2 \Rightarrow y = x^2$. Na 1ª equação temos:

$x^{x+y} = y^3 \Rightarrow x^{x+x^2} = x^6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$,

que, desprezando a raiz negativa, fornece $x = 2$ e $y = 4$.

$S = \{(1, 1); (2, 4)\}$

c) $x = y = 1$ não é solução desse sistema. Para $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$, aplicando logaritmo de base *x* a ambos os membros da 1ª equação, temos:

$x^y = y^x \Rightarrow \log_x (x^y) = \log_x (y^x) \Rightarrow y = x \log_x y$ (I).

Aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros da 2ª equação, vem:

$2^x = 3^y \Rightarrow \log_2 (2^x) = \log_2 (3^y) \Rightarrow x = y \cdot \log_2 3$.

Vamos chamar $\log_2 3 = a$; daí $x = y \cdot a$ (II).

Substituindo (I) em (II), vem:

$x = x \cdot \log_x y \cdot a \overset{x \neq 0}{\Longrightarrow} \log_x y \cdot a = 1 \Rightarrow \log_x y = \dfrac{1}{a} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{a}}$ (III).

Em (II) temos:

$x = y \cdot a \Rightarrow x = x^{\frac{1}{a}} \cdot a \Rightarrow x^{\frac{a-1}{a}} = a \Rightarrow x = a^{\frac{a}{a-1}}$,

que, substituído em (III), fornece:

$y = \left(a^{\frac{a}{a-1}}\right)^{\frac{1}{a}} \Rightarrow y = a^{\frac{1}{a-1}}$.

$S = \left\{\left(a^{\frac{a}{a-1}}, a^{\frac{1}{a-1}}\right)\text{, em que } a = \log_2 3\right\}$

320. a) Aplicando logaritmo decimal a ambos os membro da 2ª equação, vem:
$\sqrt{x^{\log y} \cdot y^{\log x}} = y \Rightarrow x^{\log y} \cdot y^{\log x} = y^2 \Rightarrow \log\left(x^{\log y} \cdot y^{\log x}\right) = \log y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log x^{\log y} + \log y^{\log x} = 2 \log y \Rightarrow$
$\Rightarrow (\log y) \cdot (\log x) + (\log x) \cdot (\log y) = 2 \log y \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \log x \log y - 2 \log y = 0 \Rightarrow 2 \log y (\log x - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log y = 0$ ou $\log x = 1$.
1ª possibilidade: Se $\log y = 0 \Rightarrow y = 1$. Na 1ª equação teremos:
$x^0 + 1^{\log x} = 200$, o que é absurdo!
2ª possibilidade: $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$. Na 1ª equação teremos:
$10^{\log y} + y^{\log 10} = 200 \Rightarrow 10^{\log y} = 200 - y \Rightarrow \log_{10}(200 - y) = \log_{10} y \Rightarrow$
$\Rightarrow 200 - y = y \Rightarrow y = 100$.
S= {(10, 100)}

b) Da 2ª equação vem:
$\sqrt[x]{(\log x \cdot \log y)^y} = 1024 \Rightarrow \log x \cdot \log y = 1024^{\frac{x}{y}}$.
Aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros dessa última expressão, vem:
$\log_2 [\log x \cdot \log y] = \log_2 1024^{\frac{x}{y}} \Rightarrow \log_2 (\log x) = \log_2 (\log y) = \frac{x}{y} \log_2 2^{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (\log x) + \log_2 (\log y) = \frac{10x}{y}$.
Fazendo $\log x = a$ e $\log y = b$ ($x = 10^a$ e $y = 10^b$), temos:
$\log_2 a + \log_2 b = 10 \cdot \frac{10^a}{10^b} \Rightarrow \log_2 (ab) = 10^{a + 1 - b}$ (I).
Em termos das novas variáveis, a 1ª equação pode ser escrita como:
$x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \Rightarrow (10^a)^b + (10^b)^a = 200 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{ab} + 10^{ab} = 200 \Rightarrow 2 \cdot 10^{ab} = 200 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{ab} = 100 \Rightarrow ab = 2$ (II).
Substituindo (II) em (I), vem:
$\log_2 (ab) = 10^{a+1-b} \Rightarrow \log_2 2 = 10^{a+1-b} \Rightarrow 10^{a+1-b} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + 1 - b = 0 \Rightarrow a - b = -1$ (III)
De (II) e (III) temos: $\begin{cases} ab = 2 \\ a - b = -1 \end{cases}$, que resolvido fornece
($a = 1$ e $b = 2$) ou ($a = -2$ e $b = -1$).
1ª possibilidade: $a = 1$ e $b = 2$, isto é, $\log x = 1$ e $\log y = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 10$ e $y = 100$.
2ª possibilidade: $a = -2$ e $b = -1$, isto é, $\log x = -2$ e $\log y = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{1}{100}$ e $y = \frac{1}{10}$ (não convém, pois *x* deve ser natural, já que é índice de raiz).
S = {(10, 100)}

c) Da 2ª equação vem:
$\log\sqrt{xy} = 1 \Rightarrow \sqrt{xy} = 10 \Rightarrow xy = 100$ (I).
Fazendo $\log x = a$ e $\log y = b$ ($x = 10^a$ e $y = 10^b$) e tendo em vista (I), o sistema pode ser reescrito da forma:
$$\begin{cases}(10^a)^b = (10^b)^a = 20\\ 10^a \cdot 10^b = 100\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2 \cdot 10^{ab} = 20\\ 10^{a+b} = 100\end{cases} \Rightarrow$$
$\Rightarrow \begin{cases}ab = 1\\ a + b = 2\end{cases}$, que resolvido fornece $a = 1$ e $b = 1$ isto é,
$\log x = 1$ e $\log y = 1 \Rightarrow x = 10$ e $y = 10$.
$S = \{(10, 10)\}$

CAPÍTULO VI — Inequações exponenciais e logarítmicas

322. a) $4^x > 7 \Rightarrow \log_4 4^x > \log_4 7 \Rightarrow x \cdot \log_4 4 > \log_4 7 \Rightarrow x > \log_4 7$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_4 7\}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 5 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 5 \Rightarrow x \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 5 \Rightarrow x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 5$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 5\right\}$

c) $2^{3x+2} > 9 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2^2 > 9 \Rightarrow 8^x > \frac{9}{4} \Rightarrow \log_8 8^x > \log_8 \left(\frac{9}{4}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow x > \log_8 \frac{9}{4}$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_8 \left(\frac{9}{4}\right)\right\}$

d) $5^{4x-1} < 3 \Rightarrow \frac{5^{4x}}{5} < 3 \Rightarrow 625^x < 15 \Rightarrow \log_{625} 625^x < \log_{625} 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \cdot \log_{625} 625 < \log_{625} 15 \Rightarrow x < \log_{625} 15$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{625} 15\}$

e) $3^{2-3x} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3^2}{3^{3x}} < \frac{1}{4} \Rightarrow 27^x > 36 \Rightarrow \log_{27} 27^x > \log_{27} 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \cdot \log_{27} 27 > \log_{27} 36 \Rightarrow x > \log_{27} 36$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{27} 36\}$

f) $3^{\sqrt{x}} > 4 \Rightarrow \log_3 3^{\sqrt{x}} > \log_3 4 \Rightarrow \sqrt{x} > \log_3 4 \Rightarrow x > \log_3^2 4$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_3^2 4\}$

g) $2^{(x^2)} \leqslant 5 \Rightarrow \log_2 2^{x^2} \leqslant \log_2 5 \Rightarrow x^2 \cdot \log_2 2 \leqslant \log_2 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 \leqslant \log_2 5 \Rightarrow x^2 - \log_2 5 \leqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{\log_2 5} \leqslant x \leqslant \sqrt{\log_2 5}$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{\log_2 5} \leqslant x \leqslant \sqrt{\log_2 5}\right\}$

324. a) $2^x > 3^{x-1} \Rightarrow 2^x > \frac{3^x}{3} \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} \Rightarrow x \cdot \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} < \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} \Rightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$

b) $2^{3x-1} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \Rightarrow \frac{2^{3x}}{2} \leqslant \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{3}} \Rightarrow \frac{(2^3)^x}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^x} \leqslant \frac{2}{\frac{1}{27}}$

$\frac{8^x}{\left(\frac{1}{9}\right)^x} \leqslant 54 \Rightarrow 72^x \leqslant 54 \Rightarrow \log_{72} 72^x \leqslant \log_{72} 54 \Rightarrow x \leqslant \log_{72} 54$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \log_{72} 54\}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} > 2^{4x-3} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3} > \frac{2^{4x}}{2^3} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{25}\right)^x}{16^x} > \frac{1}{2^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{400}\right)^x > \frac{125}{8} \Rightarrow 400^x < \frac{8}{125} \Rightarrow \log_{400} 400^x < \log_{400} \frac{8}{125} \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \log_{400} \frac{8}{125}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{400} \frac{8}{125}\right\}$

d) $2^{x-2} > 3^{2x-1} \Rightarrow \frac{2^x}{2^2} > \frac{3^{2x}}{3} \Rightarrow \frac{2^x}{9^x} > \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{9}\right)^x > \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{2}{9}} \left(\frac{2}{9}\right)^x < \log_{\frac{2}{9}} \frac{4}{3} \Rightarrow x < \log_{\frac{2}{9}} \frac{4}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{2}{9}} \frac{4}{3}\right\}$

325. a) $5^x > 3^x + 3^{x+1} \Rightarrow 5^x > 3^x + 3^x \cdot 3 \Rightarrow 5^x > 3x \cdot (1 + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5^x}{3^x} > 4 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x > 4 \Rightarrow \log_{\frac{5}{3}} \left(\frac{5}{3}\right)^x > \log_{\frac{5}{3}} 4 \Rightarrow x > \log_{\frac{5}{3}} 4$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{5}{3}} 4\right\}$

b) $3^x + 3^{x+1} \leqslant 2^x - 2^{x-1} \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 \leqslant 2^x - \frac{2^x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x \cdot (1 + 3) \leqslant 2^x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \leqslant \frac{1}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^x \leqslant \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{8} \Rightarrow x \leqslant \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{8}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{8}\right\}$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 3^{x+1} - 3^x \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 > 3^x \cdot 3 - 3^x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x(1 + 2 + 4) > 3^x(3 - 1) \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} > \frac{2}{7} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{2}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{7} \Rightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{7}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{7}\right\}$

d) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} < 2^{x-2} - 2^x \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 < \frac{2^x}{2^2} - 2^x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x \cdot (1 + 3 + 9) < 2^x \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} < \frac{-\frac{3}{4}}{13} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < -\frac{3}{52}.$

Como $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a desigualdade acima nunca é satisfeita.

$S = \varnothing$

e) $2^x + 2^{x+1} - 2^{x+3} < 5^{x+2} - 5^{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 - 2^x \cdot 2^3 < 5^x \cdot 5^2 - \frac{5^x}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x \cdot (1 + 2 - 8) < 5^x \cdot \left(25 - \frac{1}{5}\right) \Rightarrow (-5) \cdot 2^x < \frac{124}{5} \cdot 5^x.$

Multiplicando a desigualdade acima por (-1), vem:

$5 \cdot 2^x > -\frac{124}{5} \cdot 5^x \Rightarrow \frac{2^x}{5^x} > -\frac{124}{25} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > -\frac{124}{25}.$

Como $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a desigualdade acima é sempre satisfeita.

$S = \mathbb{R}$

326. a) $2^{3x+1} \cdot 5^{2x-3} > 6 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2 \cdot \frac{5^{2x}}{5^3} > 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8^x \cdot 25^x > 375 \Rightarrow 200^x > 375 \Rightarrow \log_{200} 200^x > \log_{200} 375 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > \log_{200} 375$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{200} 375\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 2^{5-4x} > 5 \Rightarrow \frac{3^{2x}}{3} \cdot \frac{2^5}{2^{4x}} > 5 \Rightarrow \frac{9^x}{16^x} > \frac{15}{32} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{9}{16}\right)^x > \frac{15}{32} \Rightarrow \log_{\frac{9}{16}} \left(\frac{9}{16}\right)^x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32} \Rightarrow x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32}\right\}$

327. a) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 > 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 > 0.$

Fazendo $3^x = t$, temos:

$t^2 - 5t + 6 > 0 \Rightarrow (t < 2 \text{ ou } t > 3) \Rightarrow (3^x < 2 \text{ ou } 3^x > 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_3 3^x < \log_3 2 \text{ ou } x > 1) \Rightarrow (x < \log_3 2 \text{ ou } x > 1).$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_3 2 \text{ ou } x > 1\}$

b) $4^x - 2^{x+2} + 3 < 0 \Rightarrow (2^2)^x - 2^x \cdot 2^2 + 3 < 0.$

Fazendo $2^x = t$, vem:

$t^2 - 4t + 3 < 0 \Rightarrow 1 < t < 3 \Rightarrow 1 < 2^x < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 1 < \log_2 2^x < \log_2 3 \Rightarrow 0 < x < \log_2 3.$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \log_2 3\}$

c) $25^x - 5^x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow (5^x)^2 - 5x - 6 \geqslant 0.$

Fazendo $5^x = t$, temos:

$t^2 - t - 6 \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -2 \text{ ou } t \geqslant 3.$

Se $t \leqslant -2$, vem: $5^x \leqslant -2$ nunca é satisfeita.

Se $t \geqslant 3$, vem: $5^x \geqslant 3 \Rightarrow \log_5 5x \geqslant \log_5 3 \Rightarrow x \geqslant \log_5 3.$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_5 3\}$

d) $4^{x+\frac{1}{2}} - 2^x - 3 \leqslant 0 \Rightarrow 4^x \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 2^x - 3 \leqslant 0.$

Fazendo $2^x = t$, vem:

$t^2 \cdot 2 - t - 3 \leqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant t \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow -1 \leqslant 2^x \leqslant \frac{3}{2}.$

Como $2^x \geqslant -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$2^x \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow \log_2 2^x \leqslant \log_2 \frac{3}{2} \Rightarrow x \leqslant \log_2 \frac{3}{2}.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \log_2 \frac{3}{2}\right\}$

e) $25^x + 5^{x+1} + 4 \leqslant 0 \Rightarrow (5^x)^2 + 5^x \cdot 5 + 4 \leqslant 0.$

Fazendo $5^x + t$, vem:

$t^2 + 5t + 4 \leqslant 0 \Rightarrow -4 \leqslant t \leqslant -1$, isto é, $-4 \leqslant 5^x \leqslant -1.$

Como a 2ª parte da inequação simultânea nunca é satisfeita, pois $5^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, não há solução.

$S = \varnothing$

f) $2 \cdot 9^x + 3^{x+2} + 4 > 0 \Rightarrow 2 \cdot (3^2)^x + 3^x \cdot 3^2 + 4 > 0.$

Fazendo $3^x = t$, vem:
$2t^2 + 9t + 4 > 0 \Rightarrow \left(t < -4 \text{ ou } t > -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(3^x < -4 \text{ ou } 3^x > -\frac{1}{2}\right)$.
A 1ª desigualdade nunca é satisfeita e a 2ª desigualdade é satisfeita $\forall x \in \mathbb{R}$.
$S = \mathbb{R}$

328. $9^x - 6^x - 4^x > 0 \Rightarrow 9^x - 6^x > 4^x$.
Como $4^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos dividir membro a membro por 4^x:

$$\frac{9^x - 6^x}{4^x} > \frac{4^x}{4^x} \Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x - \left(\frac{6}{4}\right)^x > 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x > 1.$$

Fazendo $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, temos:

$$t^2 - t - 1 > 0 \Rightarrow \left(t < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } t > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (absurdo!) ou } \left(\frac{3}{2}\right)^x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^x > \log_{\frac{3}{2}} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x > \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

329. Como $25^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos dividir ambos os membros por 25^x:

$$4^x - 6 \cdot 10^x + 8 \cdot 25^x \leqslant 0 \Rightarrow \frac{4^x - 6 \cdot 10^x + 8 \cdot 25^x}{25^x} \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{25}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{10}{25}\right)^x + 8 \leqslant 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 8 \leqslant 0.$$

Fazendo $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$, temos:

$$t^2 - 6t + 8 \leqslant 0 \Rightarrow 2 \leqslant t \leqslant 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^x \leqslant 4 \Rightarrow \log_{\frac{2}{5}} 2 \geqslant \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5}\right)^x \geqslant \log_{\frac{2}{5}} 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{2}{5}} 4 \leqslant x \leqslant \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \log_{\frac{2}{5}} 4 \leqslant x \leqslant \log_{\frac{2}{5}} 2\right\}$$

330. $4^{x+1} - 8 \cdot 6^x + 9^{x + \frac{1}{2}} \geqslant 0 \Rightarrow 4^x \cdot 4 - 8 \cdot 6^x + 9^x \cdot 9^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$.
Como $9^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos dividir os membros por 9^x:

$$\frac{4^x \cdot 4 - 8 \cdot 6^x + 9^x \cdot 3}{9^x} \geqslant 0 \Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 8 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 \geqslant 0.$$

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, temos:

$$4t^2 - 8t + 3 \geqslant 0 \Rightarrow \left(t \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } t \geqslant \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } \left(\frac{2}{3}\right)^x \geqslant \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^x \geqslant \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \text{ ou } \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^x \leqslant \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x \geqslant \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \text{ ou } x \leqslant -1\right).$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}\right\}$$

331. a) $\log_3 (5x - 2) < \log_3 4 \Rightarrow 0 < 5x - 2 < 4 \Rightarrow \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}\right\}$

b) $\log_{0,3} (4x - 3) < \log_{0,3} 5 \Rightarrow 4x - 3 > 5 \Rightarrow 4x > 8 \Rightarrow x > 2.$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} (2x + 3) \Rightarrow 0 < 3x - 1 \leqslant 2x + 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < x \leqslant 4.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x \leqslant 4\right\}$

d) $\log_2 (2x^2 - 5x) \leqslant \log_2 3 \Rightarrow 0 < 2x^2 - 5x \leqslant 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x^2 - 5x > 0 \text{ e } 2x^2 - 5x \leqslant 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x < 0 \text{ ou } x > \frac{5}{2} \text{ (I) e } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3 \text{ (II)}\right)$

Determinando (I) $\cap$ (II), temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < 0 \text{ ou } \frac{5}{2} < x \leqslant 3\right\}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) > \log_{\frac{1}{2}} (3x + 9) \Rightarrow 0 < x^2 - 1 < 3x + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1 < 3x + 9 \text{ e } 0 < x^2 - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2 < x < 5 \text{ (I) e } x < -1 \text{ ou } x > 1 \text{ (II)})$

Determinando (I) $\cap$ (II), temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 5\}$

f) $\log_{\frac{1}{10}} (x^2 + 1) < \log_{\frac{1}{10}} (2x - 5) \Rightarrow x^2 + 1 > 2x - 5 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 1 > 2x - 5 \text{ e } 2x - 5 > 0) \Rightarrow x > \dfrac{5}{2}.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{5}{2}\right\}$

g) $\log (x^2 - x - 2) < \log (x - 4) \Rightarrow 0 < x^2 - x - 2 < x - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2 > 0 \text{ e } x^2 - x - 2 < x - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x < -1 \text{ ou } x > 2) \text{ e } (x^2 - 2x + 2 < 0)$

Como a 2ª desigualdade não é nunca satisfeita, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se $x^2 - 2x + 2 > 0$, segue que não há solução.

$s = \varnothing$

332. a) $\log_5 (x^2 - x) > \log_{0,2} \dfrac{1}{6} \Rightarrow \log_5 (x^2 - x) > \log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5 (x^2 - x) > -\log_5 \dfrac{1}{6} \Rightarrow \log_5 (x^2 - x) > \log_5 \left(\dfrac{1}{6}\right)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x > 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x < -2 \text{ ou } x > 3).$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x - \dfrac{3}{4}\right) > 2 - \log_2 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x - \dfrac{3}{4}\right) > \log_2 4 - \log_2 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x - \dfrac{3}{4} > \log_2 \left(\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x - \dfrac{3}{4}\right) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{4}{5}\right)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < x^2 - x - \dfrac{3}{4} < \dfrac{5}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x^2 - x - \dfrac{3}{4} > 0 \text{ e } x^2 - x - \dfrac{3}{4} < \dfrac{5}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x < -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x > \dfrac{3}{2} \text{ (I) e } -1 < x < 2 \text{ (II)}\right)$

Determinando (I) $\cap$ (II), temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\dfrac{1}{2} \text{ ou } \dfrac{3}{2} < x < 2\right\}$

333. $\log x - \text{colog } (x + 1) > \log 12 \Rightarrow \log x + \log (x + 1) > \log 12$

Lembrando que as propriedades operatórias só podem ser aplicadas se estabelecermos a condição de existência dos logaritmos, temos: $x > 0 \text{ e } x + 1 > 0 \Rightarrow x > 0$ (I). Então:

$\log x + \log(x+1) > \log 12 \Rightarrow \log[x \cdot (x+1)] > \log 12 \Rightarrow x^2 + x > 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x < -4 \text{ ou } x > 3)$ (II).
Fazendo (I) $\cap$ (II), temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

334. a) Para mudarmos de base precisamos garantir a existência dos logaritmos, isto é, $2 - x > 0$ e $x + 1 > 0 \Rightarrow -1 < x < 2$ (I).
Assim, temos:
$\log_2 (2 - x) < \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) \Rightarrow \log_2 (2 - x) < \log_2 (x + 1)^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 - x < \dfrac{1}{x + 1} \Rightarrow (2 - x)(x + 1) < 1$ (esta passagem é garantida por (I)) $\Rightarrow$
$\Rightarrow -x^2 + x + 1 < 0 \Rightarrow \left(x < \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x > \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ (II).
De (I) e (II) vem:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < 2\right\}$

b) 1º caso: $\log_2 x > 0 \Rightarrow x > 1$ (I)
Temos:
$\dfrac{1}{\log_2 x} \leqslant \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x + 2}} \Rightarrow 1 \leqslant \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{x + 2}} \Rightarrow \log_2 x \geqslant \log_2 \sqrt{x + 2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geqslant \sqrt{x + 2} \Rightarrow x^2 - x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow (x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2)$ (II).
De (I) $\cap$ (II) temos: $x \geqslant 2$.
2º caso: $\log_2 x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$ (I)
Temos:
$\dfrac{1}{\log_2 x} \leqslant \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x + 2}} \Rightarrow 1 \geqslant \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{x + 2}} \Rightarrow \log_2 x \leqslant \log_2 \sqrt{x + 2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - x - 2 \leqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2$ (II).
De (I) $\cap$ (II) resulta $0 < x < 1$.
Juntando os dois casos, temos: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ ou } 0 < x < 1\}$.

335. a) $\log_2 (3x + 5) > 3 \Rightarrow 3x + 5 > 2^3 \Rightarrow 3x + 5 > 8 \Rightarrow x > 1$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} (4x - 3) \geqslant 2 \Rightarrow 0 < 4x - 3 \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{3}{4} < x \leqslant \dfrac{7}{9}$.
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3}{4} < x \leqslant \dfrac{7}{9}\right\}$

c) $\log_2 (x^2 + x - 2) \leqslant 2 \Rightarrow 0 < x^2 + x - 2 \leqslant 4 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ \text{e} \\ x^2 + x - 6 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ -3 \leqslant x \leqslant 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II), vem:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -2 \text{ ou } 1 < x \leqslant 2\}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - 6x + 3) < 1 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 3 > \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow 2x^2 - 6x + \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{5}{2}.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) > -4 \Rightarrow 0 < x^2 + 4x - 5 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ \text{e} \\ x^2 + 4x - 21 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -5 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ -7 < x < 3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II), vem:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -5 \text{ ou } 1 < x < 3\}$

f) $\log_{\frac{5}{8}} \left(2x^2 - x - \frac{3}{8}\right) \geqslant 1 \Rightarrow 0 < 2x^2 - x - \frac{3}{8} \leqslant \frac{5}{8} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - \frac{3}{8} > 0 \\ \text{e} \\ 2x^2 - x - 1 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{4} \text{ ou } x > \frac{3}{4} \text{ (I)} \\ \text{e} \\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II), vem:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < -\frac{1}{4} \text{ ou } \frac{3}{4} < x \leqslant 1\right\}$

g) $\log (x^2 + 3x + 3) > 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 3 > 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > -1.$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -1\}$

h) $\log_{0,3} (x^2 - 4x + 1) \geqslant 0 \Rightarrow 0 < x^2 - 4x + 1 \leqslant 0{,}3^0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 > 0 \\ \text{e} \\ x^2 - 4x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x > 2 + \sqrt{3} \text{ (I)} \\ \text{e} \\ 0 \leqslant x \leqslant 4 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II) vem:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } 2 + \sqrt{3} < x \leqslant 4\}$

336. $\log_a (2x - 3) > 0 \xrightarrow{0 < a < 1} 0 < 2x - 3 < a^0 \Rightarrow 0 < 2x - 3 < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2.$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 2\right\}$

337. a) $2 < \log_2 (3x + 1) < 4 \Rightarrow 2^2 < 3x + 1 < 2^4 \Rightarrow 4 < 3x + 1 < 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 < x < 5.$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

b) $2 < \log_2 (3 - 2x) \leqslant 3 \Rightarrow 4 < 3 - 2x \leqslant 8 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leqslant x < -\frac{1}{2}.$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x < -\frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} (2x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < \frac{1}{\sqrt{8}}\right\}$

d) $0 < \log_3 (x^2 - 4x + 3) < 1 \Rightarrow 1 < x^2 - 4x + 3 < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 > 0 \\ e \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 - \sqrt{2} \text{ ou } x > 2 + \sqrt{2} \text{ (I)} \\ e \\ 0 < x < 4 \text{ (II)} \end{cases}$

Fazendo (I) $\cap$ (II), vem;
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 - \sqrt{2} \text{ ou } 2 + \sqrt{2} < x < 4\}$

338. Temos: $1 \leqslant \log_{10} (x - 1) \leqslant 2 \Rightarrow 10 \leqslant x - 1 \leqslant 100 \Rightarrow 11 \leqslant x \leqslant 101.$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 11 \leqslant x \leqslant 101\}$

339. a) $|\log_2 x| > 1 \Rightarrow (\log_2 x < -1 \text{ ou } \log_2 x > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right).$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

b) $|\log_3 (x - 3)| \geqslant 2 \Rightarrow (\log_3 (x - 3) \leqslant -2 \text{ ou } \log_3 (x - 3) \geqslant 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(0 < x - 3 \leqslant \frac{1}{9} \text{ ou } x - 3 \geqslant 9\right) \Rightarrow \left(3 < x \leqslant \frac{28}{9} \text{ ou } x \geqslant 12\right).$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant \frac{28}{9} \text{ ou } x \geqslant 12\right\}$

c) $|\log x| < 1 \Rightarrow -1 < \log x < 1 \Rightarrow 10^{-1} < x < 10 \Rightarrow \frac{1}{10} < x < 10.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x < 10\right\}$

d) $|2 + \log_2 x| \geqslant 3 \Rightarrow (2 + \log_2 x \leqslant -3 \text{ ou } 2 + \log_2 x \geqslant 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x \leqslant -5 \text{ ou } \log_2 x \geqslant 1) \Rightarrow (0 < x \leqslant 2^{-5} \text{ ou } x \geqslant 2).$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \frac{1}{32} \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

e) $|\log_3 (x^2 - 1)| < 1 \Rightarrow -1 < \log_3 (x^2 - 1) < 1 \Rightarrow 3^{-1} < x^2 - 1 < 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > \frac{1}{3} \\ \text{e} \\ x^2 - 1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } x > \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{(I)} \\ \text{e} \\ -2 < x < 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II), vem:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } \frac{2}{\sqrt{3}} < x < 2\right\}$

340. a) Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$3 \log_3^2 x + 5 \log_3 x - 2 \leqslant 0 \Rightarrow 3t^2 + 5t - 2 \leqslant 0 \Rightarrow -2 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \leqslant \log_3 x \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{-2} \leqslant x \leqslant 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{9} \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{3}.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{9} \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{3}\right\}$

b) Fazendo $\log_{\frac{1}{2}} x = t$, vem:

$\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3 \log_{\frac{1}{2}} x - 4 > 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 > 0 \Rightarrow (t < -1 \text{ ou } t > 4)$

$(\log_{\frac{1}{2}} x < -1 \text{ ou } \log_{\frac{1}{2}} x > 4) \Rightarrow \left(x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ ou } 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x > 2 \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{16}\right).$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{16} \text{ ou } x > 2\right\}$

c) $\log_2^2 x < 4.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$t^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < t < 2 \Rightarrow -2 < \log_2 x < 2 \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 4.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 4\right\}$

d) $1 < \log^2 x < 3 \Rightarrow \begin{cases} \log^2 x > 1 \\ \text{e} \\ \log^2 x < 3 \end{cases}$

Fazendo $\log x = t$, temos:

$\begin{cases} t^2 > 1 \\ \text{e} \\ t^2 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t < -1 \text{ ou } t > 1 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ -\sqrt{3} < t < \sqrt{3} \text{ (II)} \end{cases}$

De (I) e (II) vem:

$\left(-\sqrt{3} < t < -1 \text{ ou } 1 < t < \sqrt{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(-\sqrt{3} < \log x < -1 \text{ ou } 1 < \log x < \sqrt{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (10^{-\sqrt{3}} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^{\sqrt{3}})$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10^{\sqrt{3}}} < x < \frac{1}{10} \text{ ou } 10 < x < 10^{\sqrt{3}}\right\}$

e) Fazendo $\log^2 x = t$, temos:

$\log^4 x - 5\log^2 x + 4 < 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 < 0 \Rightarrow 1 < t < 4$, isto é, $1 < \log^2 x < 4$.

Se fizermos $\log x = v$, teremos:

$1 < v^2 < 4 \Rightarrow \begin{cases} v^2 > 1 \\ \text{e} \\ v^2 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v < -1 \text{ ou } v > 1 \\ \text{e} \\ -2 < v < 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2 < v < -1 \text{ ou } 1 < v < 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2 < \log x < -1 \text{ ou } 1 < \log x < 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (10^{-2} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^2)$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 10^{-2} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^2\}$

f) Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} < 1 \Rightarrow \frac{-t^2 + t - 1}{t^2 - t} < 0.$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$(t < 0 \text{ ou } t > 1) \Rightarrow (\log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x > 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (0 < x < 1 \text{ ou } x > 2)$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

341. Fazendo $\log_e x = t$, temos:

$2(\log_e x)^2 - \log_e x > 6 \Rightarrow 2t^2 - t - 6 > 0 \Rightarrow \left(t < -\frac{3}{2} \text{ ou } t > 2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\log_e x < -\frac{3}{2} \text{ ou } \log_e x > 2\right) \Rightarrow \left(0 < x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ ou } x > e^2\right)$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ ou } x > e^2\right\}$

342. a) Como $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, temos:

$\log_2 x - 6\log_x 2 + 1 > 0 \Rightarrow \log_2 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_2 x} + 1 > 0.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$t - \dfrac{6}{t} + 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{t^2 + t - 6}{t} > 0.$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$(-3 < t < 0 \text{ ou } t > 2) \Rightarrow (-3 < \log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x > 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{8} < x < 1 \text{ ou } x > 4\right).$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{8} < x < 1 \text{ ou } x > 4\right\}$

b) $\log_2 x - \log_x 8 - 2 \geqslant 0 \Rightarrow \log_2 x - \dfrac{\log_2 8}{\log_2 x} - 2 \geqslant 0.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$t - \dfrac{3}{t} - 2 \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{t^2 - 2t - 3}{t} \geqslant 0.$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$(-1 \leqslant t < 0 \text{ ou } t \geqslant 3) \Rightarrow (-1 \leqslant \log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x \geqslant 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2} \leqslant x < 1 \text{ ou } x \geqslant 8\right).$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{2} \leqslant x < 1 \text{ ou } x \geqslant 8\right\}$

c) Como sabemos, $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x^5}{4}\right) = \dfrac{\log_2\left(\dfrac{x^5}{4}\right)}{\log_2 \dfrac{1}{2}} = -\log_2\left(\dfrac{x^5}{4}\right) =$

$= -[\log_2 x^5 - \log_2 4] = 2 - 5 \log_2 x.$

Então, a desigualdade proposta é equivalente a:

$(\log_2 x)^4 - (2 - 5 \log_2 x)^2 - 20 \log_2 x + 148 < 0.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$t^4 - (2 - 5t)^2 - 20t + 148 < 0 \Rightarrow t^4 - 25t^2 + 144 < 0.$

Fazendo $t^2 = v$, temos:

$v^2 - 25v + 144 < 0 \Rightarrow 9 < v < 16 \Rightarrow 9 < t^2 < 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-4 < t < -3 \text{ ou } 3 < t < 4) \Rightarrow (-4 < \log_2 x < -3 \text{ ou }$

$3 < \log_2 x < 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{16} < x < \dfrac{1}{8} \text{ ou } 8 < x < 16\right).$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{16} < x < \dfrac{1}{8} \text{ ou } 8 < x < 16\right\}$

343. Como $\log_x e = \dfrac{1}{\log_e x}$, podemos escrever:

$$\frac{1}{\log_e x} + \frac{1}{\dfrac{1}{\log_e x} - 1} > 1.$$

Fazendo $\log_e x = t$, vem:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} > 1 \Rightarrow \frac{2t^2 - 2t + 1}{t - t^2} > 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$0 < t < 1 \Rightarrow 0 < \log_e x < 1 \Rightarrow 1 < x < e.$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < e\}$

344. A condição de existência dos logaritmos é $1 - 8(\log_{\frac{1}{4}} x)^2 \geqslant 0$ e $x > 0$.

Fazendo $\log_{\frac{1}{4}} x = t$, vem:

$$1 - 8t^2 \geqslant 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant \log_{\frac{1}{4}} x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ e } x > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ (I).}$$

Voltando à desigualdade proposta, temos:

$$1 - \sqrt{1 - 8(\log_{\frac{1}{4}} x)^2} < 3 \log_{\frac{1}{4}} x \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - 8t^2} < 3t \Rightarrow$$

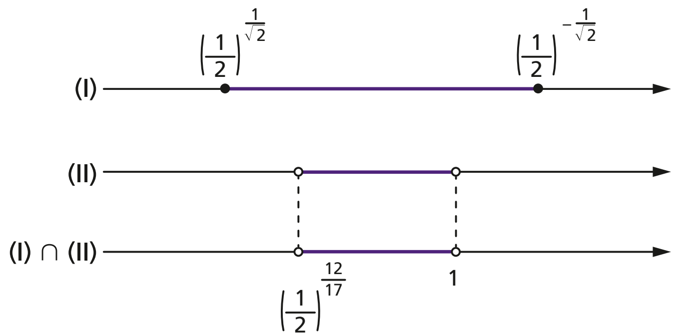
$$\Rightarrow 1 - 3t < \sqrt{1 - 8t^2} \Rightarrow 0 \leqslant (1 - 3t)^2 < 1 - 8t^2.$$

Como $(1 - 3t)^2 \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}$, temos apenas:

$$(1 - 3t)^2 < 1 - 8t^2 \Rightarrow 17t^2 - 6t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < t < \frac{6}{17} \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{4}} x < \frac{6}{17} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{17}} < x < 1 \text{ (II).}$$

A solução da inequação é dada pela interseção de (I) e (II):



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{17}} < x < 1\right\}$$

345. Escrevendo os logaritmos em base 2, temos:

$$\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4} \Rightarrow \frac{\log_2 8}{\log_2 \left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\log_2 8}{\log_2 \left(\frac{x}{4}\right)} < \frac{4 \log_2 x}{2 \log_2 x - 4}.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, temos:

$$\frac{3}{t-1} + \frac{3}{t-2} < \frac{4t}{2t-4} \Rightarrow \frac{-2t^2 + 8t - 9}{t^2 - 3t + 2} < 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, obtemos:

$(t < 1 \text{ ou } t > 2) \Rightarrow (\log_2 x < 1 \text{ ou } \log_2 x > 2) \Rightarrow (0 < x < 2 \text{ ou } x > 4).$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } x > 4\}$

346. Fazendo $\log_a x = t$, temos:

$$\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1 \Rightarrow \frac{1 + t^2}{1 + t} > 1 \Rightarrow \frac{t^2 - t}{1 + t} > 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, obtemos: $-1 < t < 0$ ou $t > 1$, isto é:

$$-1 < \log_a x < 0 \xRightarrow{0 < a < 1} 1 < x < \frac{1}{a}$$

ou

$$\log_a x > 1 \xRightarrow{0 < a < 1} 0 < x < a.$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{1}{a} \text{ ou } 0 < x < a\right\}$$

348. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > \frac{1}{2}$ (I).

Temos:

$$\log_3 (3x + 4) - \log_3 (2x - 1) > 1 \Rightarrow \log_3 \left(\frac{3x + 4}{2x - 1}\right) > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x + 4}{2x - 1} > 3 \xRightarrow{x > \frac{1}{2}} 3x + 4 > 3(2x - 1) \Rightarrow x < \frac{7}{3} \text{ (II)}.$$

A solução da inequação é dada por (I) $\cap$ (II):

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}\right\}$$

b) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$ (I).

Temos:

$$\log_2 x + \log_2 (x + 1) < \log_2 (2x + 6) \Rightarrow \log_2 [x \cdot (x + 1)] < \log_2 (2x + 6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x < 2x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow -2 < x < 3 \text{ (II)}.$$

De (I) $\cap$ (II) vem: $0 < x < 3$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

c) A condição de existência dos logaritmos é $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$ (I).

Temos:

$\log_2 (3x + 2) - \log_2 (1 - 2x) > 2 \Rightarrow \log_2 \left(\dfrac{3x + 2}{1 - 2x}\right) > 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3x + 2}{1 - 2x} > 4 \xRightarrow{1 - 2x > 0} 3x + 2 > 4 - 8x \Rightarrow x > \dfrac{2}{11}$ (II).

De (I) ∩ (II) segue que: $\dfrac{2}{11} < x < \dfrac{1}{2}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2}{11} < x < \dfrac{1}{2}\right\}$

d) A condição de existência dos logaritmos é $x > \dfrac{1}{2}$ (I).

Temos:

$\log (2x - 1) - \log (x + 2) < \log 3 \Rightarrow \log \left(\dfrac{2x - 1}{x + 2}\right) < \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2x - 1}{x + 2} < 3 \xRightarrow{x + 2 > 0} 2x - 1 < 3x + 6 \Rightarrow x > -7$ (II).

De (I) ∩ (II) temos: $x > \dfrac{1}{2}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{1}{2}\right\}$

e) A condição de existência dos logaritmos é $x > 2$ (I).

Temos: $\log_3 (x^2 + x - 6) - \log_3 (x + 1) > \log_3 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 \left(\dfrac{x^2 + x - 6}{x + 1}\right) > \log_3 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 1} > 4 \xRightarrow{(I)} x^2 + x - 6 > 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < -2$ ou $x > 5$ (II).

(I) ∩ (II): $x > 5$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

f) A condição de existência dos logaritmos é $x > 1$ (I).

Temos:

$\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (3x - 2) \geqslant -2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} [(x - 1)(3x - 2)] \geqslant -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1)(3x - 2) \leqslant 4 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2$ (II)

De (I) ∩ (II) temos $1 < x \leqslant 2$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

349. A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$ (I).

Temos:

$\log_{10} x + \log_{10} (x + 3) < 1 \Rightarrow \log_{10} [x \cdot (x + 3)] < 1 \Rightarrow x^2 + 3x < 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$ (II).

De (I) $\cap$ (II) vem: $0 < x < 2$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

350. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > -\dfrac{1}{6}$ (I).
Temos:

$$\log_2 \sqrt{6x+1} + \log_2 \sqrt{x+1} > \log_4 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_2 \left[\sqrt{6x+1} \cdot \sqrt{x+1}\right] > \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_2 \sqrt{6x^2+7x+1} > \frac{1}{2} \cdot \log_2 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot \log_2 \sqrt{6x^2+7x+1} > \log_2 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_2 \left(\sqrt{6x^2+7x+1}\right)^2 > \log_2 3 \Rightarrow 6x^2+7x+1 > 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x^2+7x-2 > 0 \Rightarrow x < \frac{-7-\sqrt{97}}{12} \text{ ou } x > \frac{-7+\sqrt{97}}{12} \text{ (II).}$$

De (I) $\cap$ (II) temos: $x > \dfrac{-7+\sqrt{97}}{12}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{-7+\sqrt{97}}{12}\right\}$$

b) A condição de existência dos logaritmos é $x > 1$ (I).
Como $\log_4 (8x) = \dfrac{\log_2 (8x)}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 (8x) = \log_2 (8x)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{8x}$,
podemos escrever:

$$\log_4 (8x) - \log_2 \sqrt{x-1} - \log_2 \sqrt{x+1} < \log_2 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_2 \sqrt{8x} < \log_2 3 + \log_2 \sqrt{x-1} + \log_2 \sqrt{x+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_2 \sqrt{8x} < \log_2 \left(3 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_2 \sqrt{8x} < \log_2 \left(3 \cdot \sqrt{x-1}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x < 9(x^2-1) \Rightarrow 9x^2 - 8x - 9 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x < \frac{4-\sqrt{97}}{9} \text{ ou } x > \frac{4+\sqrt{97}}{9} \text{ (II).}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II), obtemos: $x > \dfrac{4+\sqrt{97}}{9}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4+\sqrt{97}}{9}\right\}$$

351. A condição de existência dos logaritmos é:

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 1 > 0 \text{ (é satisfeita para } \forall x \in \mathbb{R}) \\ \text{e} \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2} \text{ (I)}$$

Como $\log_4 (2x^2+x+1) = \dfrac{\log_2 (2x^2+x+1)}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 (2x^2+x+1) =$
$= \log_2 (2x^2+x+1)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{2x^2+x+1}$, podemos escrever:
$\log_4 (2x^2+x+1) - \log_2 (2x-1) \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + x + 1} - \log_2 (2x - 1) \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \left(\dfrac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{2x - 1}\right) \leqslant 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{2x - 1} \leqslant 2 \overset{(I)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2 + x + 1} \leqslant 2(2x - 1) \Rightarrow 2x^2 + x + 1 \leqslant [2(2x - 1)]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 14x^2 - 17x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow \left(x \leqslant \dfrac{3}{14} \text{ ou } x \geqslant 1\right)$ (II).

Fazendo (I) $\cap$ (II), temos: $x \geqslant 1$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

353. a) $\log_{\frac{1}{3}} (\log_2 x) < 0 \Rightarrow \log_2 x > \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow \log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{\frac{1}{3}} x) \geqslant 0 \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant x < 1$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{3} \leqslant x < 1\right\}$

c) $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \geqslant 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 2 \Rightarrow 0 < x \leqslant \dfrac{1}{4}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \dfrac{1}{4}\right\}$

d) $\log_2 [\log_3 (\log_5 x)] > 0 \Rightarrow \log_3 (\log_5 x) > 1 \Rightarrow \log_5 x > 3 \Rightarrow x > 125$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 125\}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} \left[\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)\right] < 0 \Rightarrow \log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < x < \dfrac{1}{8}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{1}{8}\right\}$

f) $\log_2 [\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x)] > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x) > 2 \Rightarrow 0 < \log_3 x < \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \log_3 x < \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 < x < \sqrt[4]{3}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \sqrt[4]{3}\right\}$

354. $\log_{\frac{1}{3}} \left[\log_{\frac{1}{3}} x\right] \geqslant 0 \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant x < 1$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{3} \leqslant x < 1\right\}$

355. Temos:

$\log_a(\log_a x) < 0 \xRightarrow{a>1} 0 < \log_a x < 1 \xRightarrow{a>1} 1 < x < a.$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < a\}$

356. Temos:

$\log_a(\log_{\frac{1}{a}} x) \leqslant 0 \xRightarrow{0<a<1} \log_{\frac{1}{a}} x \geqslant 1 \xRightarrow{\frac{1}{a}>1} x \geqslant \dfrac{1}{a}.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{1}{a}\right\}$

357. Temos:

$\log_a\left[\log_{\frac{1}{a}}(\log_a x)\right] \geqslant 0 \xRightarrow{a>1} \log_{\frac{1}{a}}(\log_a x) \geqslant 1 \xRightarrow{0<\frac{1}{a}<1} 0 < \log_a x \leqslant \dfrac{1}{a} \Rightarrow$

$\xRightarrow{a>1} 1 < x \leqslant a^{\frac{1}{a}}.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant \sqrt[a]{a}\right\}$

358. Temos:

$\log_{\frac{1}{a}}[\log_a(\log_a x)] \leqslant 0 \xRightarrow{\frac{1}{a}>1} 0 < \log_a(\log_a x) \leqslant 1 \xRightarrow{0<a<1}$

$\Rightarrow a \leqslant \log_a x < 1 \xRightarrow{0<a<1} a < x \leqslant a^a.$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant a^a\}$

359. a) $\log_2\{1 + \log_3[\log_2(x^2 - 3x + 2)]\} \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \log_3[\log_2(x^2 - 3x + 2)] \geqslant 1 \Rightarrow \log_3[\log_2(x^2 - 3x + 2)] \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2(x^2 - 3x + 2) \geqslant 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geqslant 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 3.$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 3\}$

b) $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2 - 5)] > 0 \Rightarrow 0 < \log_4(x^2 - 5) < 1 \Rightarrow 1 < x^2 - 5 < 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 > 1 \\ \text{e} \\ x^2 - 5 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{6} \text{ ou } x > \sqrt{6} \text{ (I)} \\ \text{e} \\ -3 < x < 3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II), vem:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -\sqrt{6}$ ou $\sqrt{6} < x < 3\}$

c) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{x-1}\right) < 0 \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{3} \\ \text{e} \\ \dfrac{1}{x-1} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4-x}{x-1} > 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ \dfrac{2-x}{x-1} < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo o quadro-quociente para (I), decorre $1 < x < 4$, e para (II) decorre $x < 1$ ou $x > 2$.

Fazendo a interseção desse intervalos, vem:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

d) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3}\right) \leqslant 0 \Rightarrow \log_8\left(\dfrac{x^2-2x}{x-3}\right) \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{x^2-2x}{x-3} \geqslant 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2-10x+24}{x-3} \geqslant 0.$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 4 \text{ ou } x \geqslant 6\}$

360. a) Devemos ter: $\log_2 x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1.$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

b) Devemos ter: $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 0 \Rightarrow 0 < x \leqslant 1.$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 1\}$

c) Devemos ter: $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \geqslant 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 1 \Rightarrow 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}.$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$

d) Neste caso, precisamos garantir somente a existência do logaritmo, isto é, $\log_2 x > 0 \Rightarrow x > 1.$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

e) Devemos ter: $\log_3 \dfrac{x^2+2x-7}{x-1} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+2x-7}{x-1} \geqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+x-6}{x-1} \geqslant 0.$

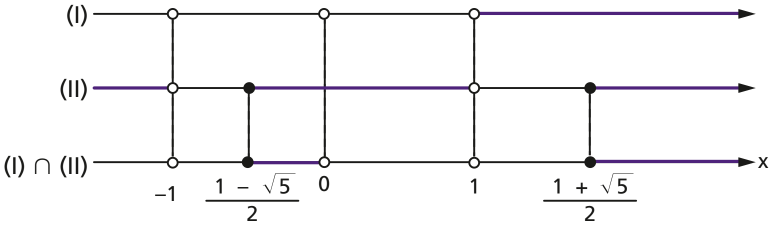
Fazendo o quadro-quociente, temos:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

f) Devemos ter: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right) \geqslant 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{x}{x^2-1} \leqslant 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 1} > 0 \\ \text{e} \\ \dfrac{x}{x^2 - 1} \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 1} > 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ \dfrac{-x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \leqslant 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo o quadro-quociente para (I) e (II), obtemos:



$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

361. Devemos ter: $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) \geqslant 0 \Rightarrow 0 < x - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 1 < x \leqslant 2$.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

362. A desigualdade $\sqrt{\log_a \dfrac{3 - 2x}{1 - x}} < 1$ é equivalente à desigualdade

$0 \leqslant \log_a \dfrac{3 - 2x}{1 - x} < 1$.

1º caso: $0 < a < 1$

$$0 \leqslant \log_a \frac{3 - 2x}{1 - x} < 1 \Rightarrow a < \frac{3 - 2x}{1 - x} \leqslant 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3 - 2x}{1 - x} > a \text{ (I)} \\ \text{e} \\ \dfrac{3 - 2x}{1 - x} \leqslant 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(-2 + a)x + 3 - a}{1 - x} > 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ \dfrac{-x + 2}{1 - x} \leqslant 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

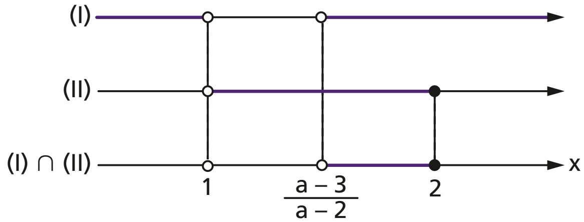
Para resolver (I), notemos que, como $0 < a < 1$, $-2 + a < 0$ e, portanto, a função $f(x) = (-2 + a)x + 3 - a$ é decrescente. Então, fazendo o quadro-quociente, temos:

		1		$\frac{a-3}{a-2}$	
$f(x) = (-2 + a)x + 3 - a$	$+$		$+$		$-$
$g(x) = 1 - x$	$+$		$-$		$-$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+$		$-$		$+$

Fazendo o quadro-quociente para (II), obtemos:

		1		2	
$f(x) = -x + 2$	$+$		$+$		$-$
$g(x) = 1 - x$	$+$		$-$		$-$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+$		$-$		$+$

Fazendo (I) ∩ (II), vem:



2º caso: $a > 1$ e $-2 + a < 0$, isto é, $1 < a < 2$

Temos:

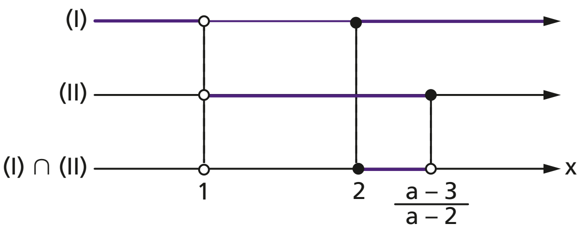
$$0 \leqslant \log_a \frac{3 - 2x}{1 - x} < 1 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{3 - 2x}{1 - x} < a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3 - 2x}{1 - x} \geqslant 1 \\ \text{e} \\ \dfrac{3 - 2x}{1 - x} < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x + 2}{1 - x} \geqslant 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ \dfrac{(-2 + a)x + 3 - a}{1 - x} < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Utilizando o quadro-quociente anterior para (I) e (II) (notemos que a função $f(x) = (-2 + a)x + 3 - a$ neste caso também é decrescente), temos:

(I): $x < 1$ ou $x \geqslant 2$ e (II): $1 < x < \dfrac{a-3}{a-2}$.

Fazendo (I) $\cap$ (II), temos:



(Notemos que para $1 < a < 2$, $\dfrac{a-3}{a-2} > 2$.)

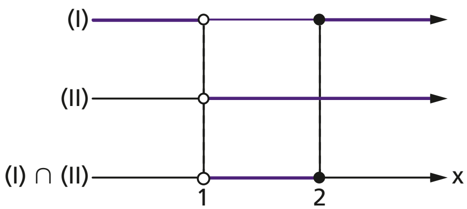
3º caso: $a > 1$ e $-2 + a = 0$, isto é, $a = 2$

Temos:

$$0 \leqslant \log_a \frac{3-2x}{1-x} < 1 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{3-2x}{1-x} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3-2x}{1-x} \geqslant 1 \\ \text{e} \\ \dfrac{3-2x}{1-x} < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x+2}{1-x} \geqslant 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ \dfrac{1}{1-x} < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Temos:



4º caso: $a > 1$ e $-2 + a > 0$, isto é, $a > 2$

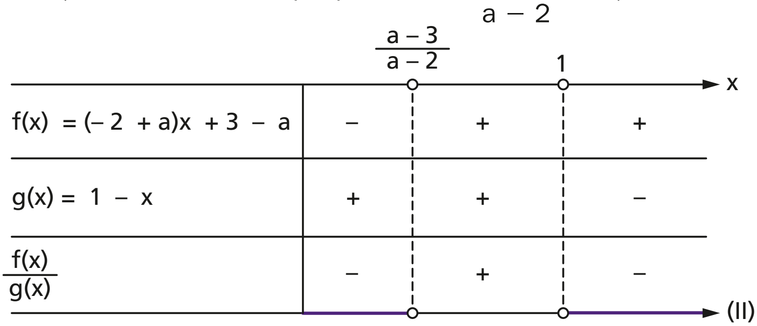
Temos:

$$0 \leqslant \log_a \left(\frac{3 - 2x}{1 - x}\right) < 1 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{3 - 2x}{1 - x} < a \Rightarrow$$

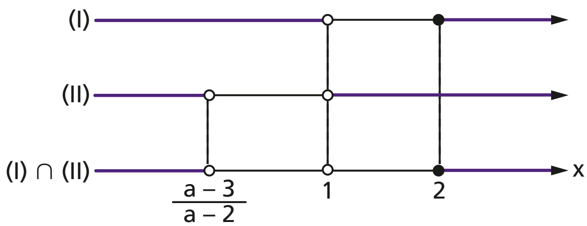
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3 - 2x}{1 - x} \geqslant 1 \\ \text{e} \\ \dfrac{3 - 2x}{1 - x} < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x + 2}{1 - x} \geqslant 0 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ \dfrac{(-2 + a)x + 3 - a}{1 - x} < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Para resolvermos (II), notemos que, como $a > 2$, a função $f(x) = (-2 + a)x + 3 - a$ é crescente. Fazendo o quadro-quociente, temos:

(Notemos também que para $a > 2$, $\dfrac{a - 3}{a - 2} < 1$.)



Fazendo, então, (I) ∩ (II), temos:



Agrupando os 4 casos, temos:

$$0 < a < 1 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{a - 3}{a - 2} < x \leqslant 2\right\}$$

$$1 < a < 2 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < \frac{a - 3}{a - 2}\right\}$$

$$a = 2 \qquad \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\};$$

$$a > 2 \qquad \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{a - 3}{a - 2} \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$$

363. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 9x + 5)} > 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 9x + 5)} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow$

$\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 9x + 5) < -1 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 5 > 3 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \frac{1}{4}$ ou $x > 2$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 2\right\}$

b) $3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x)} \leqslant \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x)} \leqslant 3^{-4} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x) \leqslant -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x \geqslant 16 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -8$ ou $x \geqslant 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -8 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]} < 1 \Rightarrow \log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{x}\right) > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 < x - \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} > 0 \\ \text{e} \\ x - \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \\ \text{e} \\ \frac{2x^2 - x - 2}{2x} < 0 \end{cases}$$

Fazendo o quadro-quociente, vem:

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } 0 < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \text{ (II).} \end{cases}$$

Fazendo (I) $\cap$ (II), vem:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } 1 < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right\}$

d) $(1{,}25)^{1 - \log_2^2 x} < (0{,}64)^{2 + \log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1 - \log_2^2 x} < \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^{(2 + \log_{\sqrt{2}} x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1 - \log_2^2 x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4 + 2\log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^{1 - \log_2^2 x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4 + 2\log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_2^2 x - 1} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4 + 2\log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow \log_2^2 x - 1 > 4 + 2\log_{\sqrt{2}} x$

Como $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} = 2\log_2 x$, podemos escrever:

$(\log_2 x)^2 - 1 > 4 + 4\log_2 x.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$t^2 - 1 > 4 + 4t \Rightarrow t^2 - 4t - 5 > 0 \Rightarrow (t < -1 \text{ ou } t > 5)$, isto é,

$\left(\log_2 x < -1 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2}\right)$ ou $(\log_2 x > 5 \Rightarrow x > 32)$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{1}{2} \text{ ou } x > 32\right\}$

364. 1º caso: $0 < x < 1$ (I)

$x^{2-\log_2^2 x - \log x^2} > x^{-1} \Rightarrow 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 < -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - (\log_2 x)^2 - 2 \cdot \log_2 x < -1.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$2 - t^2 - 2t < -1 \Rightarrow -t^2 - 2t + 3 < 0 \Rightarrow (t < -3 \text{ ou } t > 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x < -3 \text{ ou } \log_2 x > 1) \Rightarrow 0 < x < \dfrac{1}{8} \text{ ou } x > 2$ (II).

A solução do 1º caso é dada por (I) ∩ (II), isto é: $0 < x < \dfrac{1}{8}$.

2º caso: $x > 1$ (I)

$x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > x^{-1} \Rightarrow 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - (\log_2 x)^2 - 2 \cdot \log_2 x + 1 > 0.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$2 - t^2 - 2t + 1 > 0 \Rightarrow -t^2 - 2t + 3 > 0 \Rightarrow -3 < t < 1$, isto é,

$-3 < \log_2 x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{8} < x < 2$ (II).

A solução do 2º caso é dada por (I) ∩ (II), isto é: $1 < x < 2$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{1}{8} \text{ ou } 1 < x < 2\right\}$

366.

a) Devemos ter $\Delta \geqslant 0$, isto é:

$4 + 4 \log_2 a \geqslant 0 \Rightarrow \log_2 a \geqslant -1 \Rightarrow a \geqslant \dfrac{1}{2}$.

b) Devemos ter $\Delta \geqslant 0$, isto é:

$36 - 4 \cdot 3 \cdot \log a \geqslant 0 \Rightarrow \log a \leqslant 3 \Rightarrow 0 < a \leqslant 10^3$.

c) Devemos ter $\Delta \geqslant 0$, isto é:

$(-\log_3 a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \geqslant 0 \Rightarrow (\log_3 a)^2 - 16 \geqslant 0.$

Fazendo $\log_3 a = t$, vem:

$t^2 - 16 \geqslant 0 \Rightarrow (t \leqslant -4 \text{ ou } t \geqslant 4)$, isto é,

$(\log_3 a \leqslant -4 \text{ ou } \log_3 a \geqslant 4) \Rightarrow 0 < a \leqslant \dfrac{1}{81} \text{ ou } a \geqslant 81.$

d) Devemos ter $\Delta \geqslant 0$, isto é:

$(-\log_2 a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log_2 a \geqslant 0 \Rightarrow (\log_2 a)^2 - 4 \log_2 a \geqslant 0.$

Fazendo $\log_2 a = t$, vem:
$t^2 - 4t \geqslant 0 \Rightarrow (t \leqslant 0 \text{ ou } t \geqslant 4)$, isto é,
$(\log_2 a \leqslant 0 \text{ ou } \log_2 a \geqslant 4) \Rightarrow 0 < a \leqslant 1 \text{ ou } a \geqslant 16$.

367. Devemos ter $\Delta < 0$, isto é,
$(-2)^2 - 4 \cdot 1\,(-\log_{10} m) < 0 \Rightarrow 4 + 4\log_{10} m < 0 \Rightarrow \log_{10} m < -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < m < \dfrac{1}{10}$.

368. A equação admitirá raízes de sinais contrários se o produto das raízes for negativo, isto é, $P = \dfrac{c}{a} < 0$.
Temos, então:
$\dfrac{\log_{10} N}{1} < 0 \Rightarrow \log_{10} N < 0 \Rightarrow 0 < N < 1$.

369. Devemos ter $\Delta > 0$, isto é,
$[-(\log_e t + 3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\log_e t) > 0 \Rightarrow (\log_e t)^2 + 10\log_e t + 9 > 0$.
Fazendo $\log_e t = y$, vem:
$y^2 + 10y + 9 > 0 \Rightarrow y < -9 \text{ ou } y > -1$, isto é,
$\log_e t < -9 \text{ ou } \log_e t > -1 \Rightarrow 0 < t < e^{-9} \text{ ou } t > \dfrac{1}{e}$.

370. Devemos ter $P = \dfrac{c}{a} < 0$, isto é,
$\dfrac{\log(2a^2 - 9a + 10)}{3} < 0 \Rightarrow \log(2a^2 - 9a + 10) < 0 \Rightarrow$

$$0 < 2a^2 - 9a + 10 < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 9a + 10 > 0 \\ 2a^2 - 9a + 9 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 2 \text{ ou } a > \dfrac{5}{2} \text{ (I)} \\ \dfrac{3}{2} < a < 3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Devemos ter $\dfrac{3}{2} < a < 2$ ou $\dfrac{5}{2} < a < 3$ para satisfazer (I) e (II).

371. a) 1º caso: Se $\log_2(1 - x) \geqslant 0$, isto é, $1 - x \geqslant 1 \Rightarrow x \leqslant 0$ (I).
Temos:
$(4 - x^2) \cdot \log_2(1 - x) \leqslant 0 \overset{(I)}{\Longrightarrow} 4 - x^2 \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2$ (II).
Fazendo (I) $\cap$ (II), temos $x \leqslant -2$.
2º caso: Se $\log_2(1 - x) \leqslant 0$, isto é, $0 < 1 - x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x < 1$ (I).
Temos:
$(4 - x^2) \cdot \log_2(1 - x) \leqslant 0 \overset{(I)}{\Longrightarrow} 4 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$ (II).
Fazendo (I) $\cap$ (II), temos $0 \leqslant x < 1$.

Assim, agrupando as 2 possibilidades, vem:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } 0 \leqslant x < 1\}$

b) 1º caso: Se $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \geqslant 0 \Rightarrow 0 < 3x - 4 \leqslant 1 \Rightarrow \frac{4}{3} < x \leqslant \frac{5}{3}$ (I)
Temos:
$(5x^2 + x - 6) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) \geqslant 0 \overset{(I)}{\Longrightarrow} 5x^2 + x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \leqslant -\frac{6}{5}$ ou $x \geqslant 1$ (II).
Fazendo (I) ∩ (II), temos: $\frac{4}{3} < x \leqslant \frac{5}{3}$.
2º caso: $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) \leqslant 0 \Rightarrow 3x - 4 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant \frac{5}{3}$ (I).
Temos:
$(5x^2 + x - 6) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) \geqslant 0 \overset{(I)}{\Longrightarrow} 5x^2 + x - 6 \leqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{6}{5} \leqslant x \leqslant 1$ (II).
Fazendo (I) ∩ (II), temos: (I) ∩ (II) = ∅.
Assim, temos soluções apenas no 1º caso.
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3} < x \leqslant \frac{5}{3}\right\}$$

372. A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$.
Fazendo $\log x = t (x = 10^t)$, vem:
$x^{\frac{1}{\log x}} \cdot \log x < 1 \Rightarrow (10^t)^{\frac{1}{t}} \cdot t < 1 \Rightarrow t < \frac{1}{10} \Rightarrow \log x < \frac{1}{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < x < 10^{\frac{1}{10}}$.
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \sqrt[10]{10}\right\}$$

374. a) A condição de existência do logaritmo é
$x > -2$ e $x \neq 0$ e $x \neq -1$ e $x \neq 1$ (I).
1º caso: $x^2 > 1$, isto é, $x < -1$ ou $x > 1$ (II).
Temos:
$\log_{x^2} (x + 2) < 1 \Rightarrow x + 2 < x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x < -1$ ou $x > 2$ (II).
A solução é dada por (I) ∩ (II) ∩ (III): $-2 < x < -1$ ou $x > 2$.
2º caso: $0 < x^2 < 1$, isto é, $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$ (IV).
Temos:
$\log_{x^2} (x + 2) < 1 \Rightarrow x + 2 > x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$ (V).
A solução, neste caso, é dada por (I) ∩ (IV) ∩ (V): $-1 < x < -1$ e $x \neq 0$.

Considerando as duas possibilidades, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x > 2 \text{ ou } (-1 < x < 1 \text{ e } x \neq 0)\}$,
que é equivalente a $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (-2 < x < 1 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1) \text{ ou } x > 2\}$.

b) A condição de existência do logaritmo é $x > -\dfrac{3}{2}$ e $x \neq -1$ e $x \neq 0$ (I).
1º caso: Se $2x + 3 > 1$, isto é, $x > -1$ (II).
Temos: $\log_{2x+3} x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 < x < 3$ (III).
A solução S_1 neste caso é dada por (I) $\cap$ (II) $\cap$ (III):
$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } -1 < x < 3\}$.
2º caso: Se $0 < 2x + 3 < 1$, isto é, $-\dfrac{3}{2} < x < -1$ (IV).
Temos: $\log_{2x+3} x^2 < 1 \Rightarrow x^2 > 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x < -1$ ou $x > 3$ (V).
A solução S_2 neste caso é dada por $S_2 =$ (I) $\cap$ (IV) $\cap$ (V).
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < -1\right\}$$
A solução da inequação proposta é:
$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < 3 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1\right\}$$

c) A condição de existência do logaritmo é ($x < 1$ e $x \neq 0$ e $x \neq -1$) ou $x > 4$ (I).
1º caso: Se $x^2 > 1$, isto é, $x < -1$ ou $x > 1$ (II), temos:
$\log_{x^2} (x^2 - 5x + 4) < 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < x^2 \Rightarrow x > \dfrac{4}{5}$ (III).
A solução S_1 neste caso é dada por (I) $\cap$ (II) $\cap$ (III):
$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
2º caso: Se $x^2 < 1$, isto é, $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$ (IV), temos:
$\log_{x^2} (x^2 - 5x + 4) < 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > x^2 \Rightarrow x < \dfrac{4}{5}$ (V).
A solução S_2 neste caso é dada por (I) $\cap$ (IV) $\cap$ (V), isto é,
$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{4}{5} \text{ e } x \neq 0\right\}.$$
A solução da inequação proposta é: $S = S_1 \cup S_2$, isto é,
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{4}{5} \text{ e } x \neq 0 \text{ ou } x > 4\right\}.$$

d) A condição de existência do logaritmo é $0 < x < \dfrac{6}{5}$ e $x \neq 1$ (I).
1º caso: Se $x > 1$ (II), então:
$$\log_x \left(\frac{4x + 5}{6 - 5x}\right) < -1 \Rightarrow \frac{4x + 5}{6 - 5x} < x^{-1} \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -3 < x < \frac{1}{2}$ (III).

A solução S_1 neste caso é dada por (I) ∩ (II) ∩ (III), isto é, $S_1 = \varnothing$.

2º caso: Se $0 < x < 1$ (IV), então:

$\log_x \left(\frac{4x + 5}{6 - 5x}\right) < -1 \Rightarrow \frac{4x + 5}{6 - 5x} > x^{-1} \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < -3$ ou $x > \frac{1}{2}$ (V).

A solução S_2 neste caso é dada por (I) ∩ (IV) ∩ (V), isto é:

$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$.

A solução da inequação proposta é: $S = S_1 \cup S_2 = S_2 =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$.

e) A condição de existência do logaritmo é $0 < 3x^2 + 1 \neq 1$. Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 1 > 0$, devemos ter: $3x^2 + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$ (I). Notemos que, para $\forall x \in \mathbb{R}^*$, vem $3x^2 + 1 > 1$. Assim, há um único caso a considerar:

$\log_{3x^2 + 1} 2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < (3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$, isto é, $2 < \sqrt{3x^2 + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 < 3x^2 + 1 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 1$ (II).

A solução da inequação proposta é: S = (I) ∩ (II), isto é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1$ ou $x > 1\}$.

f) A condição de existência do logaritmo é $\begin{cases} \frac{x + 3}{x - 1} > 0 \\ \text{e} \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x < -3 \text{ ou } x > 1) \\ \text{e} \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$ (I).

Como $x < 1$, temos:

$\log_x \left(\frac{x + 3}{x - 1}\right) > 1 \Rightarrow \frac{x + 3}{x - 1} > x \Rightarrow -1 < x < 3$ (II).

A solução S neste caso é dada por: (I) ∩ (II), isto é,

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.

g) A condição de existência do logaritmo é $(-6 < x < -1$ e $x \neq -5)$ ou $x > 2$ (I).

1º caso: Se $x + 6 > 1$, isto é, $x > -5$ (II), temos:

$\log_{x + 6} (x^2 - x - 2) \geqslant 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geqslant x + 6 \Rightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 4$ (III).

A solução S_1 neste caso é dada por (I) ∩ (II) ∩ (III):

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 4\}$.

2º caso: Se $0 < x + 6 < 1$, isto é, $-6 < x < -5$ (IV), temos:

$\log_{x + 6} (x^2 - x - 2) \geqslant 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leqslant x + 6 \Rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 4$ (V).

A solução S_2 neste caso é dada por: (I) ∩ (IV) ∩ (V), isto é, $S_2 = \varnothing$.

A solução da inequação proposta é $S = S_1 \cup S_2 = S_1$, isto é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 4\}$

h) A condição de existência do logaritmo é $x > -\dfrac{5}{2}$ e $x \neq \dfrac{3}{2}$ e $x \neq 5$ e $x \neq -\dfrac{3}{2}$ (I).

1º caso: Se $\dfrac{2x + 5}{2} > 1 \Rightarrow x > -\dfrac{3}{2}$ (II), temos:

$$\log_{\left(\frac{2x+5}{2}\right)}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 1 \Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x + 16}{(2x-3)^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{x \neq \frac{3}{2}} -3x^2 + 2x + 16 > 0 \xRightarrow{x \neq \frac{3}{2}} -2 < x < \frac{8}{3} \text{ (III).}$$

A solução S_1 neste caso é dada por (I) $\cap$ (II) $\cap$ (III), isto é:

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < \frac{8}{3} \text{ e } x \neq \frac{3}{2}\right\}.$$

2º caso: Se $0 < \dfrac{2x + 5}{2} < 1 \Rightarrow -\dfrac{5}{2} < x < -\dfrac{3}{2}$ (IV), temos:

$$\log_{\left(\frac{2x+5}{2}\right)}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x + 16}{(2x-3)^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 2x + 16 < 0 \Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > \frac{8}{3} \text{ (V).}$$

A solução S_2 neste caso é dada por: (I) $\cap$ (IV) $\cap$ (V), isto é:

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} < x < -2\right\}.$$

A solução S da inequação proposta é $S = S_1 \cup S_2$, isto é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < \frac{8}{2} \text{ e } x \neq \frac{3}{2} \text{ ou } -\frac{5}{2} < x < -2\right\}.$$

i) A condição de existência do logaritmo é

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} > 0 \\ \text{e} \\ 0 < 2x^2 - 7x + 6 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{e} \\ \left(x < \dfrac{3}{2} \text{ ou } x > 2\right) \text{e } x \neq \dfrac{5}{2} \text{ e } x \neq 1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(0 < x < \frac{3}{2} \text{ e } x \neq 1\right) \text{ ou } \left(x > 2 \text{ e } x \neq \frac{5}{2}\right).$$

1º caso: Se $\sqrt{2x^2 - 7x + 6} > 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 > 1 \Rightarrow x < 1$ ou $x > \dfrac{5}{2}$ (II), temos: $\log_{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}}\left(\dfrac{x}{3}\right) > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{3} > 1 \Rightarrow x > 3$ (III).

A solução S_1 neste caso é dada por (I) $\cap$ (II) $\cap$ (III), isto é:

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

2º caso: Se $0 < \sqrt{2x^2 - 7x + 6} < 1 \Rightarrow 1 < x < \dfrac{5}{2}$ (IV), temos:

$\log_{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}}\left(\dfrac{x}{3}\right) > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{3} < 1 \Rightarrow x < 3$ (V).

A solução S_2 neste caso é dada por (I) $\cap$ (IV) $\cap$ (V):

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{3}{2} \text{ ou } 2 < x < \frac{5}{2}\right\}.$$

A solução da inequação proposta é $S = S_1 \cup S_2$, isto é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{3}{2} \text{ ou } 2 < x < \frac{5}{2} \text{ ou } x > 3\right\}.$$

375. A condição de existência do logaritmo é $\frac{1}{2} < x \neq 1$ (I).

1º caso: Se $x > 1$ (II), temos:

$\log_x (2x - 1) \leqslant 2 \Rightarrow 2x - 1 \leqslant x^2 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow (x - 1)^2 \geqslant 0$, que é satisfeita $\forall x \in \mathbb{R}$ (III).

A solução S_1 neste caso é dada por (I) $\cap$ (II) $\cap$ (III), isto é:

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

2º caso: Se $0 < x < 1$ (IV), temos:

$\log_x (2x - 1) \leqslant 2 \Rightarrow 2x - 1 \geqslant x^2 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leqslant 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (V).

A solução S_2 neste caso é dada por (I) $\cap$ (IV) $\cap$ (V), isto é, $S_2 = \varnothing$.

A solução da inequação proposta é $S = S_1 \cup S_2 = S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

376. A condição de existência da equação é: $\begin{cases} a^2b > 0 \\ 0 < a \neq 1 \text{ (I)} \\ 0 < b \neq 1 \end{cases}$

Temos:

$\log_a (a^2b) > \log_b a^{-5} \Rightarrow 2 + \log_a b > -5 \log_b a$.

Como $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, temos: $2 + \log_a b > -\frac{5}{\log_a b}$.

Fazendo $\log_a b = t$, vem:

$$2 + t > -\frac{5}{t} \Rightarrow \frac{t^2 + 2t + 5}{t} > 0.$$

Como para $\forall t \in \mathbb{R}$, temos $t^2 + 2t + 5 > 0$, devemos ter $t > 0$, isto é, $\log_a b > 0$.

1º caso: $a > 1 \Rightarrow \log_a b > 0 \Rightarrow b > 1$ (II).

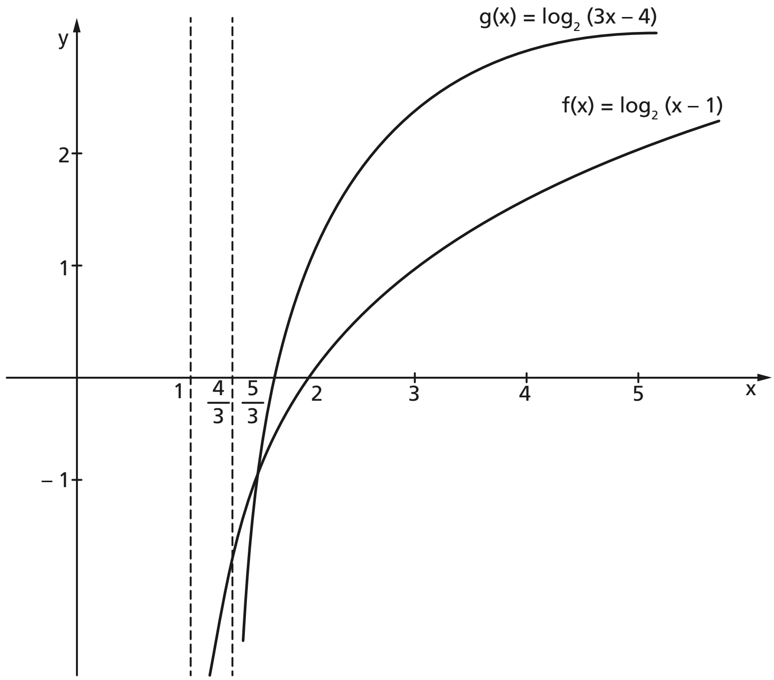
De (I) $\cap$ (II) resulta que $a > 1$ e $b > 1$.

2º caso: $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > 0 \Rightarrow 0 < b < 1$ (III).

De (I) $\cap$ (II) resulta que $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$.

Assim há 2 possibilidades $\begin{cases} a > 1 \text{ e } b > 1 \\ \text{ou} \\ 0 < a < 1 \text{ e } 0 < b < 1 \end{cases}$

377. Como $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) = -\log_2(3x - 4)$, a inequação proposta equivale a: $\log_2 (x - 1) \cdot [-\log_2 (3x - 4)] > 0 \Rightarrow \log_2 (x - 1) \cdot \log_2 (3x - 4) < 0$.
Vamos obter graficamente a solução. Para isso, precisamos construir os gráficos de $f(x) = \log_2 (x - 1)$ e $g(x) = \log_2 (3x - 4)$.
Temos:



Notemos que $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ é o ponto de interseção das duas curvas, pois corresponde à solução da equação: $\log_2 (x - 1) = \log_2 (3x - 4)$.
O que desejamos encontrar são os valores de *x* tais que $f(x) \cdot g(x) < 0$.
Notemos que para $\frac{5}{3} < x < 2$ temos $g(x) > 0$ e $f(x) < 0$, de modo que $f(x) \cdot g(x) < 0$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} < x < 2\right\}$

378. Aplicando logaritmo de base $a(a > 1)$ a ambos os membros da desigualdade, vem:

$x^{\log_a x + 1} > a^2x \xRightarrow{a > 1} \log_a (x^{\log_a x + 1}) > \log_a (a^2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_a x + 1) \cdot \log_a x > 2 + \log_a x.$

Fazendo $\log_a x = t$, vem:
$(t + 1)t > 2 + t \Rightarrow t^2 - 2 > 0 \Rightarrow t < -\sqrt{2}$ ou $t > \sqrt{2}$, isto é,
$\log_a x < -\sqrt{2}$ ou $\log_a x > \sqrt{2} \xRightarrow{a > 1} 0 < x < a^{-\sqrt{2}}$ ou $x < a^{\sqrt{2}}$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < a^{-\sqrt{2}} \text{ ou } x > a^{\sqrt{2}}\}$

379. Escrevendo os logaritmos em base 2, temos:

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1 \Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} + \frac{\log_2 x}{\log_3 2} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_3 2} > 1.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$-t + \frac{t}{\log_3 2} > 1 \Rightarrow t \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\log_3 2} - 1\right)}_{< 0} > 1 \Rightarrow t < \frac{\log_2 3}{1 - \log_2 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t < \frac{\log_2 3}{\log_2 2 - \log_2 3} \Rightarrow t < \frac{\log_2 3}{\log_2 \left(\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow t < \log_{\frac{2}{3}} 3, \text{ isto é:}$$

$$\log_2 x < \log_{\frac{2}{3}} 3 \Rightarrow 0 < x < 2^{\log_{\frac{2}{3}} 3}.$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2^{\log_{\frac{2}{3}} 3}\right\}$$

380. A condição de existência é $x > 0$ (I)

Temos:

$\log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 2) > -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^x \cdot 2 - 2) > -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} [2(2^x - 1)] > -2.$

Fazendo $2^x - 1 = t$, vem:

$\log_2 t \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2t) > -2 \Rightarrow \log_2 t \cdot \left[\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} t\right] > -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 t \cdot (-1 - \log_2 t) > -2.$

Fazendo $\log_2 t = r$, vem:

$r \cdot (-1 - r) > -2 \Rightarrow -r^2 - r + 2 > 0 \Rightarrow r^2 + r - 2 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 < r < 1$, isto é,

$$-2 < \log_2 t < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < t < 2, \text{ isto é,}$$

$$\frac{1}{4} < 2^x - 1 < 2 \Rightarrow \frac{5}{4} < 2^x < 3 \Rightarrow \log_2 \left(\frac{5}{4}\right) < x < \log_2 3 \text{ (II).}$$

A solução da inequação proposta é dada por (I) $\cap$ (II), isto é,

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 \left(\frac{5}{4}\right) < x < \log_2 3\right\}$.

381. Como $\log_3 27 = 3$ e $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$, a desigualdade proposta equivale a:

$(x - 3) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) < 0$.

Fazendo o quadro-produto, temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3\right\}$.

382. 1º caso: Se $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > 0$, isto é, $0 < x - 1 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$ (I), temos:

$x \cdot \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) < 0 \Rightarrow x < 0$ (II).

A solução neste caso é dada por (I) $\cap$ (II), isto é, $S_1 = \varnothing$.

2º caso: Se $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) < 0$, isto é, $x - 1 > 1 \Rightarrow x > 2$ (I), temos:

$x \cdot \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) < 0 \Rightarrow x > 0$ (II).

A solução neste caso é dada por (I) $\cap$ (II), isto é,

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

A solução da inequação proposta é $S = S_1 \cup S_2 = S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

CAPÍTULO VII — Logaritmos decimais

383. Utilizando as regras (I) e (II), temos:

$\log 7 \rightarrow C = 0$

$\log 0{,}032 \rightarrow C = -2$

$\log 10^5 \rightarrow C = 5$

$\log 0{,}00010 \rightarrow C = -4$

384. a) A característica é 3 e a mantissa é 0,5065.
Temos, então: $\log 3210 = 3 + 0{,}5065 = 3{,}5065$.

b) A característica é 1 e a mantissa é 0,4048.
Assim, $\log 25{,}4 = 1 + 0{,}4048 = 1{,}4048$.

c) A característica é 0 e a mantissa é 0,7574.
Assim, $\log 5{,}72 = 0 + 0{,}7574 = 0{,}7574$.

d) A característica é -1 e a mantissa é 0,8692.
Assim, $\log 0{,}74 = -1 + 0{,}8692 = \bar{1}{,}8692$.

e) A característica é -3 e a mantissa é 0,5527.
Assim, $\log 0{,}00357 = -3 + 0{,}5527 = \bar{3}{,}5527$.

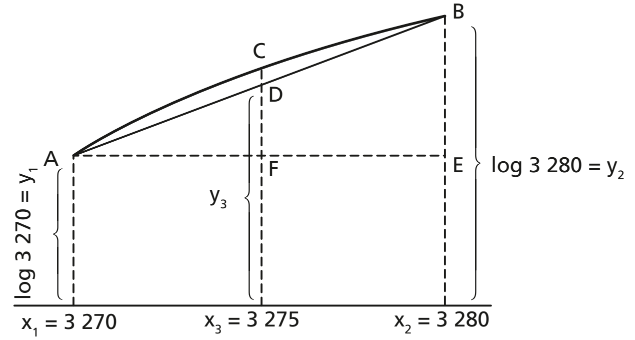
385. a) $x = \text{antilog } 3{,}8768 \Rightarrow \log x = 3{,}8768 = 3 + 0{,}8768$.
Com a mantissa 0,8768 encontramos o número 753, mas, como a característica de log x é 3, temos $x = 7\,530$.
b) $x = \text{antilog } 1{,}8035 \Rightarrow \log x = 1{,}8035 = 1 + 0{,}8035$.
Com a mantissa 0,8035 encontramos o número 636, mas, como a característica de log x é 1, temos $x = 63{,}6$.
c) $x = \text{antilog } 0{,}9175 \Rightarrow \log x = 0{,}9175 = 0 + 0{,}9175$.
Com a mantissa 0,9175 encontramos o número 827, mas, como a característica de log x é 0, temos $x = 8{,}27$.
d) $x = \text{antilog } \overline{1}{,}5145 \Rightarrow \log x = \overline{1}{,}5145 = -1 + 0{,}5145$.
Com a mantissa 0,5145 encontramos o número 327, mas, como a característica de log x é −1, temos $x = 0{,}327$.
e) $\text{antilog } \overline{3}{,}6693 = x \Rightarrow \log x = \overline{3}{,}6693 = -3 + 0{,}6693$.
Com a mantissa 0,6693 encontramos o número 467, mas, como a característica de log x é −3, temos $x = 0{,}00467$.
f) $x = \text{antilog } \overline{2}{,}1271 \Rightarrow \log x = \overline{2}{,}1271 \Rightarrow \log x = -2 + 0{,}1271$.
Com a mantissa 0,1271 encontramos o número 134, mas, como a característica de log x é −2, temos $x = 0{,}0134$.

386. a) $\text{antilog } -2{,}0899 = x \Rightarrow \log x = -2{,}0899 = -2 - 0{,}0899 =$
$= -2 - 1 + 1 - 0{,}0899 = -3 + 0{,}9101$.
Com a mantissa 0,9101 encontramos o número 813, mas, como a característica de log x é − 3, temos $x = 0{,}00813$.
b) $\text{antilog } -3{,}2147 = x \Rightarrow \log x = -3{,}2147 = -3 - 0{,}2147 =$
$= -3 - 1 + 1 - 0{,}2147 = -4 + 0{,}7853$.
Com a mantissa 0,7853 encontramos o número 610, mas, como a característica de log x é −4, temos $x = 0{,}00061$.
c) $\text{antilog } -0{,}4473 = x \Rightarrow \log x = -0{,}4473 = -1 + 1 - 0{,}4473 =$
$= -1 + 0{,}5527$.
Com a mantissa 0,5527 encontramos o número 357, mas, como a característica de log x é −1, temos $x = 0{,}357$.
d) $\text{antilog } -1{,}6517 = x \Rightarrow \log x = -1{,}6517 = -1 - 0{,}6517 =$
$= -1 - 1 + 1 - 0{,}6517 = -2 + 0{,}3483$.
Com a mantissa 0,3483 encontramos o número 223, mas, como a característica de log x é −2, vem que $x = 0{,}0223$.

387. a) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	y = log x
$x_1 = 3270$	$y_1 = 3 + 0{,}5145 = 3{,}5145$
$x_3 = 3275$	$y_3 = ?$
$x_2 = 3280$	$y_2 = 3 + 0{,}5159 = 3{,}5159$

Utilizando a aproximação linear para a função logarítmica, temos:



$\triangle AFD \sim \triangle AEB$, donde:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{y_3 - 3{,}5145}{3{,}5159 - 3{,}5145} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_3 = 3{,}5152$, isto é, $\log 3275 = 3{,}5152$.

b) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	y = log x
$x_1 = 23{,}7$	$y_1 = 1 + 0{,}3747 = 1{,}3747$
$x_3 = 23{,}72$	$y_3 = ?$
$x_2 = 23{,}8$	$_2 = 1 + 0{,}3766 = 1{,}3766$

Por raciocínio idêntico ao anterior, temos:

$y_3 = \log 23{,}72 = 1{,}3751$.

c) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	y = log x
$x_1 = 0{,}0457$	$y_1 = -2 + 0{,}6599$
$x_3 = 0{,}04576$	$y_3 = ?$
$x_2 = 0{,}0458$	$y_2 = -2 + 0{,}6609$

Por raciocínio idêntico aos anteriores, vem:

$y_3 = \log 0{,}04576 = -1{,}3395 = \overline{2}{,}6605$.

d) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	y = log x
$x_1 = 0{,}835$	$y_1 = -1 + 0{,}9217$
$x_3 = 0{,}8358$	$y_3 = ?$
$x_2 = 0{,}836$	$y_2 = -1 + 0{,}9222$

Analogamente aos anteriores, segue que:

$y_3 = \log 0{,}8358 = -0{,}0779 = \overline{1}{,}9221$.

e) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	y = log x
$x_1 = 2{,}71$	$y_1 = 0 + 0{,}4330$
$x_3 = 2{,}718$	$y_3 = ?$
$x_2 = 2{,}7$	$y_2 = 0 + 0{,}4346$

Analogamente aos anteriores, vem:

$y_3 = \log 2{,}718 \cong \log e \cong 0{,}4343$.

388. a) $x = \text{antilog } 1{,}3552 \Rightarrow \log x = 1{,}3552 = 1 + 0{,}3552$.

A mantissa 0,3552 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,3541 e 0,3560.

Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	y = log x
$x_1 = 22{,}6$	$y_1 = \log 22{,}6 = 1{,}3541$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = 1{,}3552$
$x_2 = 22{,}7$	$y_2 = \log 22{,}7 = 1{,}3560$

Analogamente ao exercício anterior, temos que $x_3 \cong 22{,}65$.

Assim, antilog $1{,}3552 \cong 22{,}65$.

b) $x = \text{antilog } 0{,}4357 \Rightarrow \log x = 04357 = 0 + 0{,}4357$.

A mantissa 0,4357 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,4346 e 0,4362. Temos:

x	y = log x
$x_1 = 2{,}72$	$y_1 = \log 2{,}72 = 0{,}4346$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = 0{,}4357$
$x_2 = 2{,}73$	$y_2 = \log 2{,}72 = 0{,}4362$

Analogamente ao anterior, vem:

$x_3 = 2,727$, isto é, antilog $0,4357 = 2,727$.

c) $x = \text{antilog } \bar{1},7383 \Rightarrow \log x = \bar{1},7383 = -1 + 0,7383$.

A mantissa 0,7383 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,7380 e 0,7388. Temos:

x	y = log x
$x_1 = 0,547$	$y_1 = \log 0,547 = -0,262$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = -0,2617$
$x_2 = 0,548$	$y_2 = 0,548 = -0,261$

Do raciocínio anterior, vem:

$x_3 = 0,5474$, isto é, antilog $\bar{1},7383 = 0,5474$.

d) $x = \text{antilog } -1,6336 \Rightarrow \log x = -1,6336 \Rightarrow \log x = -1 - 0,6336 =$
$= -1 - 1 + 1 - 0,6336 = -2 + 0,3664$.

A mantissa 0,3664 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,3655 e 0,3674. Temos:

x	y = log x
$x_1 = 0,0232$	$y_1 = \log 0,0232 = -1,6345$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = -1,6336$
$x_2 = 0,0233$	$y_2 = \log 0,0233 = -1,6326$

Teremos: $x_3 = 0,02325$, isto é, antilog $-1,6336 = 0,02325$.

389. (I) Para calcularmos a_1, notemos que:

$\log 12\,300 = 4 + 0,0899 = 4,0899$

e

$\log 12\,400 = 4 + 0,0934 = 4,0934$

Por interpolação linear, temos que $a_1 = \log 12\,345 = 4,0909$.

(II) Para calcularmos a_2, notemos que:

$\log 4 = 0 + 0,6021 = 0,6021$

e

$\log 4,1 = 0 + 0,6128 = 0,6128$

Por interpolação linear, temos que $a_2 = \log 4,0909 = 0,6118$.

(III) Para calcularmos a_3, notemos que:

$\log 0,61 = -1 + 0,7853 = -0,2147$

e

$\log 0,62 = -1 + 0,7924 = -0,2076$

Por interpolação linear, temos que $a_3 = \log 0,6118 = -0,2134$.

(V) Como $a_4 = \log a_3$ e $a_3 < 0$, a_4 não está definido em $\mathbb{R}$, pois precisamos ter logaritmando positivo.

Assim, o maior valor de *n* é n = 3.

391. a) $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = \dfrac{0{,}3010}{0{,}4771} = 0{,}6309$

b) $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{0{,}6990}{0{,}3010} = 2{,}3222$

c) $\log_5 3 = \dfrac{\log 3}{\log 5} = \dfrac{0{,}4771}{0{,}6990} = 0{,}6825$

d) $\log_5 6 = \dfrac{\log 6}{\log 5} = \dfrac{0{,}7782}{0{,}6990} = 1{,}1133$

e) $\log_6 4 = \dfrac{\log 4}{\log 6} = \dfrac{0{,}6021}{0{,}7782} = 0{,}7737$

392. Temos:

$\log_3 800 = \dfrac{\log 800}{\log 3} = \dfrac{2 + 0{,}9031}{0{,}4771} = 6{,}084.$

Assim, $\log_3 800 = 6{,}084$; temos então característica 6.

393. Seja $N = 50^{50}$. Temos:

$N = 50^{50} \Rightarrow \log N = \log(50^{50}) \Rightarrow \log N = 50 \cdot \log 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log N = 50 \cdot (1 + 0{,}699) \Rightarrow \log N = 84{,}95 = \underbrace{84}_{c} + \underbrace{0{,}95}_{m}.$

Como a característica de log N é 84, pela regra I, segue que $N = 50^{50}$ possui 85 algarismos.

394. a) $5^x = 100 \Rightarrow \log 5^x = \log 100 \Rightarrow x \cdot \log 5 = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{0{,}699} \cong 2{,}86.$

b) $3^x = 20 \Rightarrow \log 3^x = \log 20 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot 0{,}4771 = (1 + 0{,}3010) \Rightarrow x \cong 2{,}73.$

c) $2^x = 30 \Rightarrow \log 2^x = \log 30 \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{(1 + 0{,}4771)}{0{,}3010} \cong 4{,}91.$

d) $7^x = 0{,}3 \Rightarrow \log 7^x = \log 0{,}3 \Rightarrow x \cdot \log 7 = \log 0{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot 0{,}8451 = (-1 + 0{,}4771) \Rightarrow x \cong -0{,}62.$

e) $e^x = 50 \Rightarrow \log e^x = \log 50 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 50.$

Pelo item *e* do exercício 387, $\log e \cong 0{,}4343$.

Então, $x = \dfrac{1{,}6990}{0{,}4343} \cong 3{,}91.$

395. a) Fazendo $2^x = t$, equação proposta é equivalente a:

$t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t = 3 \text{ ou } t = 5)$, isto é:

$2^x = 3 \Rightarrow \log 2^x = \log 3 \Rightarrow x = \dfrac{\log 3}{\log 2} = 1{,}58$

ou

$2^x = 5 \Rightarrow \log 2^x = \log 5 \Rightarrow x = \dfrac{\log 5}{\log 2} = 2{,}32.$

$S = \{1{,}58; 2{,}32\}$

b) Fazendo $3^x = t$, a equação proposta é equivalente a:

$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 4)$, isto é:

$3^x = 1 \Rightarrow x = 0$

ou

$3^x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{\log 4}{\log 3} = 1{,}26.$

$S = \{0; 1{,}26\}$

c) Fazendo $10^x = t$, a equação proposta é equivalente a:

$t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 5)$, isto é:

$10^x = 2 \Rightarrow x = \log 2 = 0{,}30$

ou

$10^x = 5 \Rightarrow x = \log 5 = 0{,}69$

$S = \{0{,}30; 0{,}69\}$

d) Fazendo $e^x = t$, a equação proposta é equivalente a:

$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3)$, isto é:

$e^x = 2 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 2 \Rightarrow x = 0{,}69$

ou

$e^x = 3 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 3 \Rightarrow x = 1{,}10$

$S = \{0{,}69; 1{,}10\}$

396. Inicialmente, notemos que:

$\log_{10} 6 = \log_{10} (2 \cdot 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0{,}30 + 0{,}48 = 0{,}78$

e

$\log_{10} 12 = \log_{10} (2^2 \cdot 3) = 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48 = 1{,}08$

Então, temos:

$3^x \cdot 2^{3x - 1} = 6^{2x + 1} \Rightarrow 3^x \cdot \dfrac{2^{3x}}{2} = 6^{2x} \cdot 6 \Rightarrow 3^x \cdot 2^{3x} = 12 \cdot 6^{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{10} (3^x \cdot 2^{3x}) = \log_{10} ((12 \cdot 6^{2x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \log_{10} 3 + 3x \cdot \log_{10} 2 = \log_{10} 12 + 2x \cdot \log_{10} 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot 0{,}48 + 3x \cdot 0{,}30 = 1{,}08 + 2x \cdot 0{,}78 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}38x = 1{,}08 + 1{,}56x \Rightarrow x = -6.$

$S = \{-6\}$

398. a) $x = \sqrt[6]{3} \Rightarrow \log x = \log \sqrt[6]{3} \Rightarrow \log x = \log 3^{\frac{1}{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = \frac{1}{6} \cdot \log 3 \Rightarrow \log x = \frac{1}{6} \cdot 0{,}4771 = 0{,}0795$

Por interpolação linear, $x = 1{,}201$.

b) $x = \sqrt[4]{10} \Rightarrow \log x = \log \sqrt[4]{10} \Rightarrow \log x = \log 10^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = \frac{1}{4} \cdot \log 10 \Rightarrow \log x = 0{,}25$.

Por interpolação linear, $x = 1{,}778$.

c) $x = 2^{3,4} \Rightarrow \log x = \log 2^{3,4} \Rightarrow \log x = 3{,}4 \cdot \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = 3{,}4 \cdot 0{,}3010 = 1{,}0234$.

Por interpolação linear, $x = 10{,}554$.

d) $x = 5^{2,3} \Rightarrow \log x = 2{,}3 \cdot \log 5 \Rightarrow \log x = 2{,}3 \cdot 0{,}6990 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = 1{,}6077$.

Por interpolação linear, $x = 40{,}520$.

399. Temos:

$V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow R^3 = \frac{3V}{4\pi} \cong \frac{3 \cdot 20}{4 \cdot 3{,}14} \cong 4{,}78$.

Assim,

$R^3 = 4{,}78 \Rightarrow \log R^3 = \log 4{,}78 \Rightarrow 3 \log R = \log 4{,}78$.

Da tábua, $\log 4{,}78 = 0 + 0{,}6794$, isto é, $\log 4{,}78 \cong 0{,}6794$, donde $\log R \cong 0{,}2264$,

Novamente por interpolação linear, vem que $R \cong 1{,}68$ cm.

400. Temos:

$A = \sqrt[5]{(3{,}4)^3 \cdot (1{,}73)^2} \Rightarrow A = [(3{,}4)^3 \cdot (1{,}73)^2]^{\frac{1}{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log A = \frac{1}{5} \cdot \log [(3{,}4)^3 \cdot (1{,}73)^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow \log A = \frac{1}{5} \cdot [3 \log 3{,}4 + 2 \log 1{,}73]$.

Da tábua temos:

$\log 3{,}4 = 0{,}5315$ e $\log 1{,}73 = 0{,}2380$, donde:

$\log A = \frac{1}{5} \cdot [3 \cdot 0{,}5315 + 2 \cdot 0{,}2380] \Rightarrow \log A = 0{,}414$.

Por interpolação linear, $A = 2{,}60$.

402. Devemos ter: $C = 3Co$, isto é:

$C = Co \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 3 \cdot Co = Co \cdot (1 + 0{,}03)^t \Rightarrow (1{,}03)^t = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \cdot \log 1{,}03 = \log 3 \Rightarrow t \cdot 0{,}0128 = 0{,}4771 \Rightarrow t = 37{,}2$.

Resposta: 38 meses.

403. Devemos ter: $C = 2Co$, isto é:

$C = Co \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 2 \cdot Co = Co \cdot (1 + 0{,}105)^t \Rightarrow 2 = 1{,}105^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 2 = t \cdot \log 1{,}105$.

Como log 1,1 = 0,0414 e log 1,2 = 0,0792, por interpolação linear, log 1,105 = 0,0433.

Daí, $t = \dfrac{0{,}301}{0{,}0433} = 6{,}95$.

Resposta: 7 trimestres.

404. Temos: $Co = 10^6$, $i = 0{,}03$ e $t = 18$.

Daí,

$C = Co \cdot (1 + i)^t \Rightarrow C = 10^6 \cdot (1 + 0{,}03)^{18} \Rightarrow C = 10^6 \cdot 1{,}03^{18} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log C = \log (10^6 \cdot 1{,}03^{18}) \Rightarrow \log C = 6 + 18 \cdot \log 1{,}03$.

Da tábua, log 1,03 = 0,0128.

Daí, $\log C = 6 + 18 \cdot 0{,}0128 = 6{,}2304 = 6 + 0{,}2304$.

Com a mantissa 0,2304 encontramos na tábua o número 170. Como a característica de log C é 6, segue que C = 1 700 000.

Resposta: R$ 1 700 000,00.

405. Temos: $Co = 5 \cdot 10^5$, $i = 0{,}04$ e $t = 48$ trimestres.

Daí,

$C = Co \cdot (1 + i)^t \Rightarrow C = 5 \cdot 10^5 \cdot (1{,}04)^{48} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log C = \log [5 \cdot 10^5 \cdot (1{,}04)^{48}] \Rightarrow \log C = \log 5 + 5 + 48 \cdot \log 1{,}04$.

Como $\begin{cases} \log 1{,}04 = 0{,}017 \\ \text{e} \\ \log 5 = 0{,}699 \end{cases}$, vem que log C = 6,515.

Por interpolação linear, segue que C = 3 273 000.

Resposta: R$ 3 273 000,00.

406. O número de bactérias após 3 horas é dado por:

$N(3) = 2\,000 \cdot 10^{\frac{3}{36}} \Rightarrow \log N(3) = \log (2\,000 \cdot 10^{\frac{3}{36}}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log N(3) = \log 2\,000 + \dfrac{1}{12} \log 10$.

Como log 2 000 = 3,3010, vem que:

$\log N(3) = 3{,}3010 + \dfrac{1}{12} \cong 3{,}3843$.

Por interpolação linear, N(3) = 2 422.

Resposta: Após 3 horas, haverá 2 422 bactérias.

407. Temos:

$Q(t) = Qo \cdot 10^{-Kt} \Rightarrow Q(20) = Qo \cdot 10^{-20K} \Rightarrow$
$\Rightarrow 400 = 500 \cdot 10^{-20K} \Rightarrow \dfrac{4}{5} = 10^{-20K} \Rightarrow 0{,}8 = 10^{-20K} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 0{,}8 = \log 10^{-20K} \xRightarrow{\text{tábua}} (-1 + 0{,}9031) = -20K \Rightarrow$
$\Rightarrow -20K = -0{,}0969 \Rightarrow K = 0{,}004845$.

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.

Atual Editora

ISBN 978-85-357-1683-2