

# 摄像机标定的原理与方法综述

冯亮, 谢劲松, 李根, 霍庆立

(长春理工大学, 长春 130022)

**摘要:** 介绍了和摄像机标定技术有关的基本概念和定义,在此基础上介绍了摄像机标定方法的分类,并对现有的比较典型的相机标定方法进行了对比论述,分别介绍了它们各自的标定原理和标定过程,以及该标定方法的优缺点。最后对摄像机标定方法未来可能的发展趋势以及研究方向进行了分析。

**关键词:** 摄像机标定;传统标定法;自标定;摄像机模型

中图分类号: TH 164; TP 391

文献标志码: A

文章编号: 1002-2333(2016)01-0018-03

## Review of Camera Calibration Principles and Methods

FENG Liang, XIE Jinsong, LI Gen, HUO Qingli

(Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

**Abstract:** This paper introduces the basic concepts and definitions of camera calibration firstly, then introduces the camera calibration methods of classification. We compare and discuss the existed typical camera calibration methods and calibration process, describe their advantages and disadvantages. Finally the development trend and research direction of the camera calibration are analyzed.

**Key words:** camera calibration; camera model; traditional calibration method; self calibration

## 0 引言

相机标定是机械视觉技术和摄影测量学非常重要的组成部分,机械视觉技术和摄影测量学的本质就是从摄像机拍摄的图像信息中获得三维物体的几何信息,也可以说,相机标定是机械视觉技术和摄影测量学的基础。相机标定的过程就是通过计算等获取摄像机内部参数和外部参数的过程。其中,内参数包括摄像机的焦距等,外参数则包含了摄像机本身在世界坐标系中的位置信息。世界坐标系和图像坐标系间的投影关系就是通过这些摄像机的内外部参数来确定的<sup>[1]</sup>。

## 1 相机模型

相机模型表现了在世界坐标系中的坐标及其在图像坐标系上的坐标之间的关系,即给出了物点和像点之间的射影关系。

### 1.1 图像坐标系

简而言之,图像坐标系就是描述点在图像上位置信息的坐标系。图像坐标系分为两种:一种是图像像素坐标系,在习惯中一般将图像的左上角作为像素坐标系的坐标原点,记为  $O_0$ ,单位为像素,图像中每个点的坐标用  $(u, v)$  表示;一种是图像物理坐标系,习惯中一般将摄像机的光轴与图像平面的交点为原点,记为  $O_1$ 。这个点一般处于

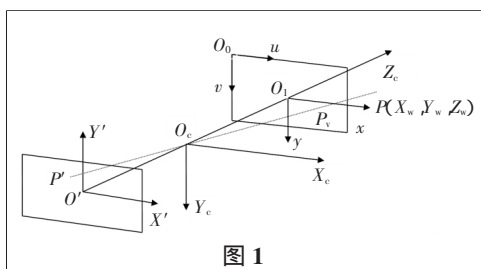


图 1

图像的中心,单位则为 mm,每个图像点的坐标用  $(x, y)$  表示,  $x$  轴、 $y$  轴分

别与  $u$  轴、 $v$  轴平行。如图 1 所示。

假设每个像素点的实际大小为  $dx \times dy$ ,它们分别为  $x$  轴和  $y$  轴方向上的增量。这样就得到了某点的坐标在物理坐标系和像素坐标系间的转换关系:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

### 1.2 摄像机坐标系

摄像机坐标系是为了确定摄像机在世界坐标系中的位置而建立的,习惯中通常将摄像机的光心  $O_c$  设为摄像机坐标的原点,它的  $X_c$  轴和  $Y_c$  轴分别是和图像的物理坐标系中的  $x$  轴和  $y$  轴属于平行关系,  $Z_c$  轴一般取为和摄影方向一致的摄像机光轴,如图 1 所示。

假如三维空间中的某点在图像坐标系和摄像机坐标系中的坐标分别为  $(x, y)$  和  $(X_c, Y_c, Z_c)$ ,则它们之间的关系可以表示为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

### 1.3 世界坐标系

世界坐标系是用来表示物体和摄像机在三维世界中关系的坐标系,这个坐标系的原点通常取为方便计算的位置,可根据实际情况选择。如果用  $R$  和  $t$  来表示两个坐标系的旋转向量和平移向量。又设  $(X_w, Y_w, Z_w)$  和  $(X_c, Y_c, Z_c)$  分别为三维空间中的某点在这两个坐标系中的坐标,则它们之间的转换关系可以表示为

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中  $\mathbf{R}$  是三阶正交单位矩阵  $\mathbf{t}$  是三维平移向量。

#### 1.4 相机的线性模型

线性模型又叫针孔模型,在这个模型中,认为三维空间中的任意一点在图像坐标系上所成的像是通过小孔成像原理形成的。设  $p$  为空间中的任意一点,可以从图 2 看到它的投影模型。通过前文中的 3 个坐标系之间的关系,可以得出世界坐标系上的任意一点  $p$  和它在图像坐标系的投影  $p$  间的转换关系:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & a_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{X}}_w \quad (4)$$

其中  $\mathbf{M}$  是用来表达摄像机平移量和旋转量两个运动参数的四阶矩阵  $\mathbf{P}_m$  表示世界坐标系中的点与它在图像坐标系中的投影点之间射影关系的一个的矩阵,即投影矩阵,这个矩阵和相机的内外参数有关。求解这个矩阵的过程就是相机的标定过程。

#### 1.5 非线性相机模型

实际情况中,相机通常是通过透镜来成像的,由于透镜的加工技术水平以及相机的制造技术水平,相机的投影关系并不能简单地描述成针孔模型。这种情况下相机的投影关系不再是线性投影关系。尤其是使用广角镜头时,在图像的远离中心处往往造成很大的畸变,这样就会使测量到的坐标存在偏差,降低了所求得的世界坐标的精度。所以必须使用考虑了畸变情况的非线性相机模型来进行相机标定。可以用下面的式子来描述投影关系:

$$\bar{x} = x + \delta_x(x, y) \quad \bar{y} = y + \delta_y(x, y) \quad (5)$$

其中,对于同一个点来说  $(\bar{x}, \bar{y})$  表示期望中想得到的理想坐标值,而  $(x, y)$  则表示它的实际坐标值。 $\delta_x$  与  $\delta_y$  分别是投影模型的非线性畸变量的  $X$ 、 $Y$  轴分量。可以用下面的式子来描述:

$$\begin{cases} \delta_x(x, y) = k_1 x(x^2 + y^2) + (p_1(3x^2 + y^2) + 2p_2 xy) + s_1(x^2 + y^2); \\ \delta_y(x, y) = k_2 y(x^2 + y^2) + (p_2(3x^2 + y^2) + 2p_1 xy) + s_2(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (6)$$

#### 2 相机标定技术中常用的几种方法

现存的相机标定技术基本上可以分为三种类型:传统的相机标定方法、相机自标定方法、主动视觉相机标定法<sup>[2-3]</sup>。传统相机标定方法常利用三维数据已知的标定模块,具有理论清晰明了、求解简单、标定精度高的优点,但是标定的过程相对复杂,对标定模块的精度要求较高。相机的主动视觉标定技术一般用于摄像机在世界坐标系中

的运动参数已知的情况下,通常能线性求解而且获得的结果拥有很高的鲁棒性。相机的自标定技术不需要高精度的标定模块,可以由从图像序列中获得的约束关系来计算出实时的、在线的相机模型的参数,虽然鲁棒性不高但灵活性强,逐渐成为标定方法中一个研究热点。随后将介绍几种常见的摄像机标定方法。

##### 2.1 直接线性变换法(DLT 法)

直接线性变换法最早由 Abdal-Aziz 和 Karara 提出<sup>[4]</sup>,属于传统标定法。假设某点在图像坐标系中的齐次坐标为  $(u, v, 1)$ ,在世界坐标系中的齐次坐标为  $(X_w, Y_w, Z_w, 1)$ ,那么直接线性变换法中表示某点的投影关系的齐次坐标矩阵为:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{P}$  为投影矩阵,  $S$  为比例因子。

在消去  $S$  后,就得到了如下方程组:

$$\begin{aligned} p_{11}X_w + p_{12}Y_w + p_{13}Z_w + p_{14} - p_{31}uX_w - p_{32}uY_w - p_{33}uZ_w - p_{34}u &= 0; \\ p_{21}X_w + p_{22}Y_w + p_{23}Z_w + p_{24} - p_{31}uX_w - p_{32}uY_w - p_{33}uZ_w - p_{34}u &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

如果有  $n$  个点分别在世界坐标系和图像坐标系中的坐标时,那么就得到了一个包含了  $2n$  个方程的线性方程组:

$$\mathbf{A}\mathbf{L} = \mathbf{0} \quad (9)$$

其中  $\mathbf{A}$  是  $(2N \times 12)$  的矩阵  $\mathbf{L}$  是 11 维列向量,由投影矩阵的元素组成。通过寻找最合适的  $\mathbf{L}$ ,使得  $\|\mathbf{A}\mathbf{L}\|$  最小这一过程来达到相机标定的目的。

##### 2.2 R.Tsai 的 RAC 标定方法

基于 RAC 的标定方法由 Tsai<sup>[6]</sup>在 1987 年提出,属于传统标定方法,是相机标定方法的一个重要突破。在该方法中,先利用径向一致的约束条件去计算摄像机的外部参数(先不考虑摄像机光轴方向的平移),进而再计算出摄像机其他的参数。又因为它的计算过程中大部分方程属于线性方程,所以求解参数的过程相对比较简单。从而标定过程变得更加快捷、精确。

在该方法中,图像坐标系和世界坐标系的转换关系为:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} fs & 0 & u_0 \\ 0 & f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

只考虑径向畸变的情况下,理想图像坐标到实际图像坐标的变换:

$$\begin{aligned} (x - u_c)(1 + k_1(u^2 + v^2)) &= u - u_c; \\ (y - v_c)(1 + k_1(u^2 + v^2)) &= v - v_c. \end{aligned} \quad (11)$$

RAC 标定法过程一般分为两步:第一步,在径向一致的约束条件下,通过矩阵变换来求得相机的外参数旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和平移矩阵  $\mathbf{t}$ ;第二步,通过矩阵变换的方法来求得相机的焦距  $f$ ,畸变参数  $k_1$  和  $z$  轴方向上的平移分量  $t_3$ 。

##### 2.3 张正友平面标定方法

张氏标定法是针对径向畸变问题提出的一个新的求

解摄像机内外参数的方法<sup>[5]</sup>。如果从分类上来说它是介于传统标定和自标定之间的一种方法。标定的时候首先需要准备一个布满精确点阵的模板,然后用摄像机从不同方向拍摄多幅图片,通过提取的特征点在图像坐标下的坐标和其在世界坐标系中坐标来计算每张图像的单应性矩阵,从而进行相机的标定。张正友标定法具有模板制作容易、使用方便、成本低、鲁棒性好、准确率高等优点。但是该方法过程过于复杂,人工的交互操作比较多,不利于自动化程度的提高。

根据前面所述摄像机针孔成像模型,可以得到下面的等式:

$$S \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K[r_1 \ r_2 \ r_3 \ t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = K[r_1 \ r_2 \ t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ I \end{bmatrix} \quad (12)$$

在这里,假设模板处于世界坐标系中  $Z_w=0$  的平面上,其中  $K$  为摄像机的内参数矩阵,  $\tilde{M}=[X \ Y \ 1]^T$  为点在世界坐标系中的齐次坐标;  $\tilde{m}=[u \ v \ 1]^T$  为点在图像坐标系中的齐次坐标  $[r_1 \ r_2 \ r_3]$  和  $t$  分别是描述了摄像机外部参数的旋转向量和平移向量。

令  $H$  为每一幅图像的单应性矩阵,则有:

$$H=[h_1 \ h_2 \ h_3]=\lambda K[r_1 \ r_2 \ t]; \quad (13)$$

$$r_1=\frac{1}{\lambda}K^{-1}h_1 \quad r_2=\frac{1}{\lambda}K^{-1}h_2 \quad (14)$$

根据旋转向量的正交性:

$$r_1^T r_2 = 0; \|r_1\| = \|r_2\| = 1 \quad (15)$$

每幅图像可以得到两个方程式:

$$\begin{cases} h_1^T K^{-T} K^{-1} h_2 = 0; \\ h_1^T K^{-T} K^{-1} h_1 = h_2^T K^{-T} K^{-1} h_2. \end{cases} \quad (16)$$

相机内参矩阵有 5 个参数,所以当取得的图像数目大于等于 3 时,就可解出  $K$ 。再由每幅图像的单应性矩阵  $H$  就可以求得每幅图像的外部参数  $R$  和  $t$ 。

#### 2.4 孟晓桥等提出的圆标定法

该方法和张氏标定法类似,基于图 2 中的图形模板。在标定的过程中,首先需要拍摄 3 张以上处于不同方位的图像,由射影不变性,可以计算出每张图像上的圆环点的坐标信息,这样就得到了和内参数矩阵有关的 6 个以上的方程,就可以解出内参数。

和张氏标定法相比,它们的标定过程是类似的,区别在于所用模板的不同,而且该方法并不需要进行特征点配对。

#### 2.5 胡占义等主动视觉标定方法

该方法是基于平面中单应性矩阵的正交运动方法原理,先假设  $t^{(1)}$  和  $t^{(2)}$  分别是描述摄像机运动信息的一组正交的平移向量,根据这两个向量可以得到两个相应的单应矩阵:

$$H_1 = \sigma_1 \left( I + K \frac{t^{(1)} n^T}{d} K^{-1} \right) \quad H_2 = \sigma_2 \left( I + K \frac{t^{(2)} n^T}{d} K^{-1} \right) \quad (18)$$

而且两个矩阵满足如下关系:

$$K^{-1}(H_1^T - \sigma_1 I)K^{-T}K^{-1}(H_2 - \sigma_2 I)K = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{d^2} n^{(1)} n^{(2)T} = 0 \quad (19)$$

即

$$(H_1^T - \sigma_1 I) \bar{C} (H_2 - \sigma_2 I) = 0 \quad (20)$$

其中  $\bar{C} = K^{-T} K^{-1}$ 。利用 5 组两正交运动就可求得摄像机的 5 个内部参数。

#### 2.6 基于 Kruppa 方程的自标定法

该标定法的基础是根据绝对二次曲线在图像中的像与摄像机的刚体运动无关而与摄像机内参数有关的性质推导出的 Kruppa 方程。在计算过程中,直接求解 Kruppa 方程是比较难的,尤其是在两两图像之间列方程。这是因为在图像数目增加的同时,它的解的个数增长非常快,成指数模式,这样一来基本上就很难求得想要结果了。而另一种方法是利用间接地非线性优化算法,先计算出多幅图像上的点到对应极线距离的和,再把这个距离的值进行优化减小,从而得到想要的内参数。同样的,由于计算中待优化参数比较多,计算很容易陷入局部最优值的境况中去。

#### 3 结语

上述的几种标定方法都有自己的优点和缺点,随着机械视觉技术的发展,在提高图像采集效率和图像处理的速度方面来说,在今后的摄像机标定方法的研究中寻求一种快速又精确的摄像机标定方法就显得尤为重要。应该在现有的标定方法的基础上,再进一步研究如何更有效地、合理地确定非线性模型的畸变参数的同时,融合不同方法的特点,从而更有效地进行相机标定。

[参考文献]

- [1] 马颂德,张正友.计算机视觉-计算理论与算法基础[M].北京:科学出版社,1998.
- [2] 张永军,张祖勋,张剑清.利用二维 DLT 及光束法平差进行数字摄像机标定[J].武汉大学学报(信息科学版) 2002 27(6):12-13.
- [3] 吴福朝,胡占义.摄像机自标定的线性理论与算法[J].计算机学报 2001 24(11):1121-1135.
- [4] ZHANG Zhengyou. A flexible new technique for camera calibration [J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence 2000 22(11):1330-1336.
- [5] MENG X Q, LI H, HU Z Y. A new camera calibration technique based on circular points[C]//Conf British Machine Vision. UK: Bristol, IEEE 2000 496-500.
- [6] TSAI R Y. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses [J]. IEEE journal of Robotics and Autom -ation, 1987, 3(4):323-340.

(编辑 吴天)

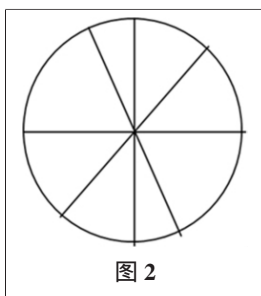


图 2

作者简介 冯亮(1984—)男,硕士研究生,研究方向为机械设计及理论; 谢劲松(1969—)男,副教授,硕士生导师,研究方向为虚拟制造与装配技术、精密、超精密加工、检测及装备。

收稿日期 2015-09-04