Великий математический бой

1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc(a+b+c) = 3$. Докажите, что $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8$
   Решение. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)+abc = (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 8+abc \Leftrightarrow abc(a+b+c)(ab+bc+ca) = 3(ab+bc+ca) \geq 8abc+(abc)^2$. Заметим, что$3 = abc(a+b+c) \geq 3(abc)^{4/3}$, откуда $abc \leq 1.8abc+(abc)^2 \leq 9$. С другой стороны, $(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(a+b+c).$, $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = (a^2b^2+b^2c^2)/2+(b^2c^2+a^2c^2)/2+(a^2b^2+a^2c^2)/2 \geq ab^2c+bc^2a+ca^2b = abc(a+b+c)$.Таким образом, $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 9$,откуда$3(ab+bc+ca) \geq 3 \cdot 3 \geq 8abc+(abc)^2$что и завершает доказательство.

2. У Влада и Саши есть $n \geq 5000$ бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Влад (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких n Влад может победить?

3. Пусть $A = 11\ldots11(1526)$. При каком наибольшем n не существует натурального числа B, кратного A, сумма цифр которого равна n?

4. Решите в натуральных числах уравнение $n^2m^5 - 2^n5^m = 30+4nm$.

5. На выездную олимпиаду в ЛМШ приехали 2023 ученика. Согласно новому Порядку, если на 1-ю неделю приехали a учеников, на 2-й осталось b учеников, а на 3-й — с учеников, то $a-b$ должно равняться $b-c$. Поскольку ученик очередной недели должен быть учеником и предыдущего, a $\geq$ b $\geq$ c. Сколькими способами дирекция ЛМШ может выбрать количество детей на очередной неделе? Варианты считаются различными, если они отличаются составом учеников хотя бы на одной неделе.

6. Дан остроугольный разносторонний треугольник. С помощью циркуля и линейки проведите две прямые, делящие данный треугольник на четыре части так, что из них можно сложить прямоугольник, и ни одна из прямых не параллельна стороне треугольника.