МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, осень 2023
Контрольная работа №1, тренировочный вариант

Контрольная работа пройдёт в среду, 11 октября, с 13:55 до 15:20 **в Актовом зале**. На выполнение работы отводится 80 минут. Каждая задача оценивается в 10 баллов. Никакими материалами пользоваться нельзя. При решении можно использовать изученные на лекциях и семинарах теоремы, если явно на них сослаться. Задачи, решённые менее, чем на 8 баллов, можно будет перерешать дома, получив индивидуальный вариант. При этом они будут оцениваться из 5 баллов, которые добавятся к баллам за задачу на контрольной, при этом сумма не превысит 8. Если пропускаете контрольную по уважительной причине, сообщите в Телеграм `@musatych` до начала контрольной, в таком случае все задачи для дорешивания будут даны за 8 баллов. Из задач 6–8 в каждой группе на контрольной будет только одна, остальне 2 будут даны в домашней работе за 10 баллов.

1. Рассмотрим двухленточные машины Тьюринга, которые на каждом шаге на каждой из лент либо и меняют символ, и сдвигают указатель, либо не меняют символа и остаются на месте (возможно, на разных лентах делают разное).

а) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида.

б) Докажите, что на машине такого вида можно смоделировать классическую одноленточную машину Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

2. Пусть $A \in \mathbf{NP}$, при этом A понимается как множество натуральных чисел. Докажите, что множество чисел m, таких что для некоторого $k \in A$ верно $m \vdots k^2$, также лежит в $\mathbf{NP}$.

3. Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1$ и s является кодом графа, в котором есть клика размером в половину графа).

(Произвольная строка интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности. Возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются. Размеры клики и графа считаются как число вершин). Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

4. Пусть $\mathsf{ONLY\text{-}ODD\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение k на простые множители все множители входят в нечётных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки – сформулируйте и поясните интуицию.

5. Пусть $\mathsf{HAMPATHCYCLE} = \{(G,s,t) \mid$ в ориентированном графе G есть непересекающиеся путь и цикл, такие что s является началом пути, t — его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл$\}$. Докажите, что этот язык является $\mathbf{NP}$-полным.

6. (Только для групп 124, 125, 126, 128) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXINDSET} = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе G есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем k вершин $\}$.

7. (Только для групп 122, 123, 129, 152) Рассмотрим задачу поиска по 3-КНФ набора, на котором в каждом дизъюнкте есть как истинные, так и ложные литералы (в каждой скобке должно быть ровно 3 различных литерала).

а) Постройте формулу, для которой есть ровно 2 таких набора.

б) Постройте явную самосводимость для упомянутой задачи поиска (в этом пункте существование формулы из предыдущего можно использовать без доказательства).

8. (Только для групп 127, 151) Докажите, что если $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$, то $\mathbf{NEXP} = \mathbf{coNEXP}$.