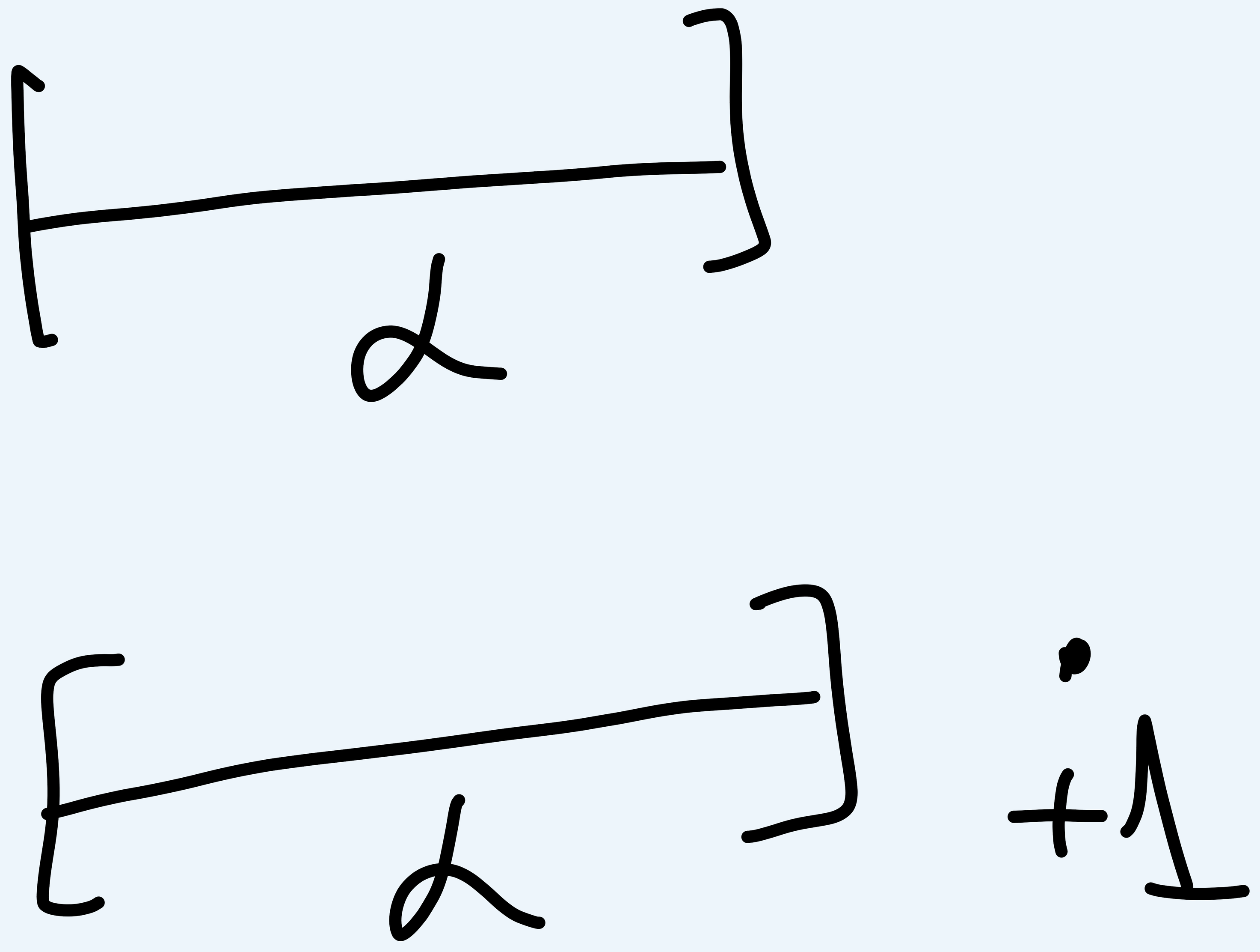
Арифметика ординалов

Неформально: ординал $\alpha+\beta$ — порядк. тип мн-ва $A+B$, где A — в.у.м. типа α, B — в.у.м. типа β

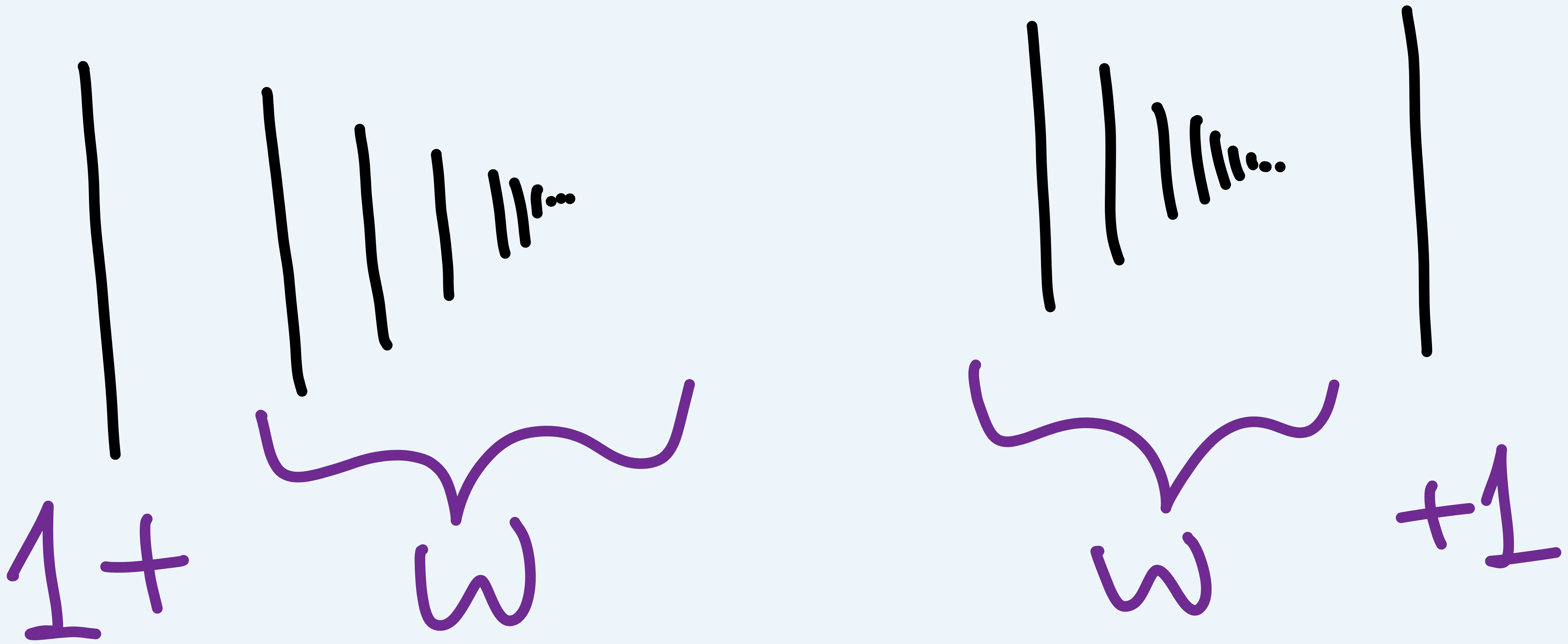
$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$$

$\alpha+1$ — непоср. след.



$1+\omega=\omega$

$\omega+1\neq\omega$



Нет комм.

$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ — Есть ассоц.

Рекурс. опр.

$$\alpha+0=\alpha$$
$$\alpha+S(\beta)=S(\alpha+\beta)$$
$$\alpha+\sup\{\beta_i\}=\sup\{\alpha+\beta_i\}$$

$\omega = \sup\{n\}$

$1+\omega = \sup\{1+n\} = \sup\{m \mid m>0\} = \omega$

Умножение

$\alpha \cdot \beta$ – порядк. тип $A \cdot B$, где A – в.у.м. типа α

B – в.у.м. типа β

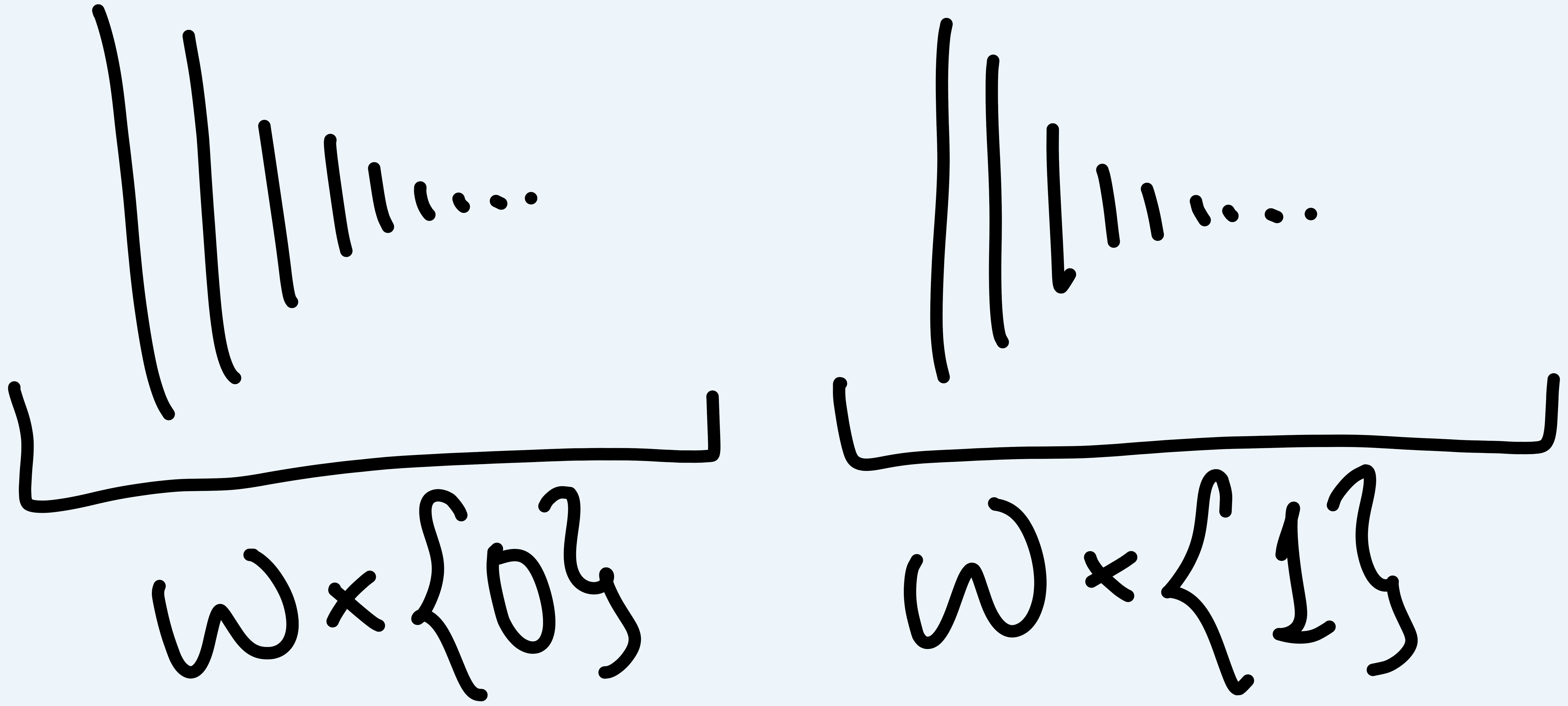
Порядок на $A \cdot B$ – сначала 2-я коорд., потом 1-я

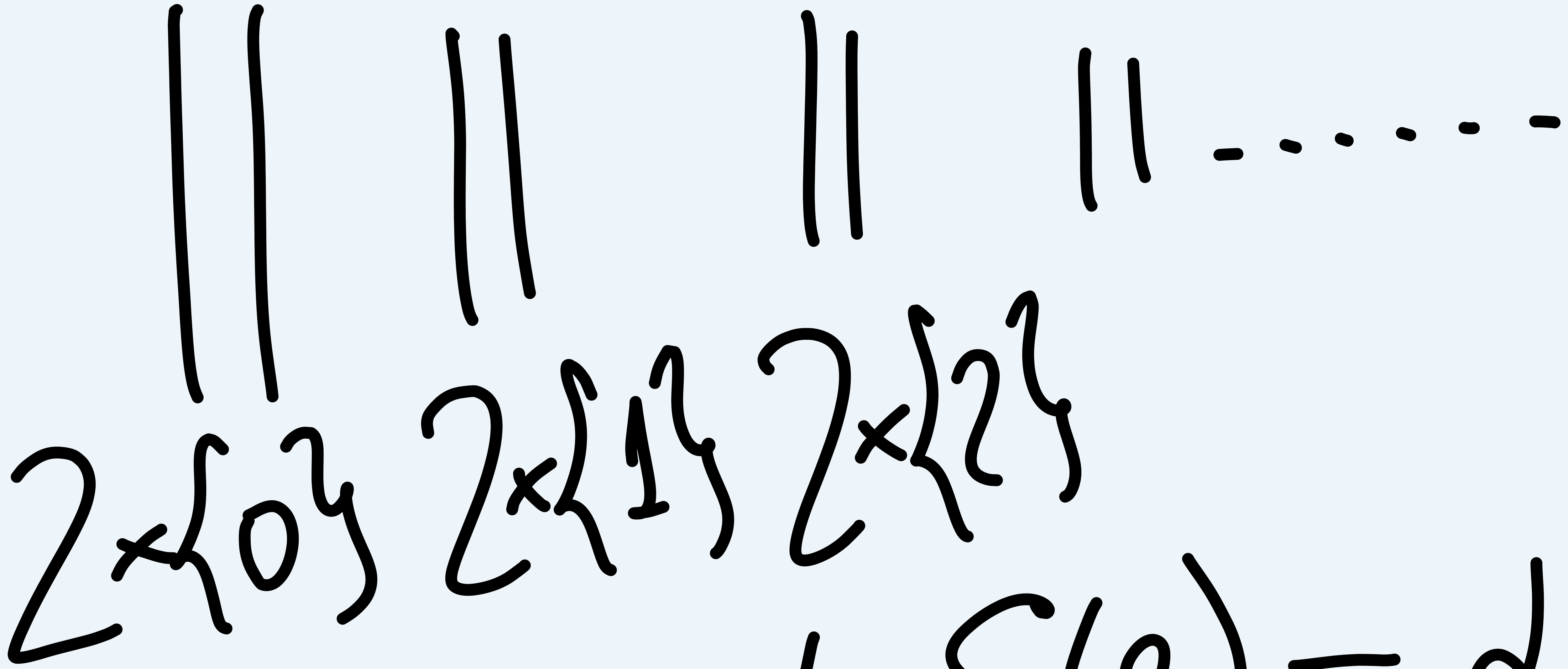
$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$

$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$

$\omega \cdot 2 = \omega + \omega$

$2 \cdot \omega = \omega$





РЕК. ОПР.

$\alpha \cdot 0 = 0$

$\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$

$\alpha \cdot \sup\{\beta_i\} = \sup\{\alpha \cdot \beta_i\}$

Ассоц. $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

Дистриб. (правая) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$

Левой может не быть:

$$(1+1)\cdot\omega\neq1\cdot\omega+1\cdot\omega$$

Теор. о сравн. в.у.м.: из A и B одно мн-во изом. нач. отр. другого

О сравн. орд.: из α и β один равен нач. отр. др. (= эл-том др.)

$\alpha\neq\beta$

Вычитание

Теор. $\alpha \le \beta \Rightarrow \exists! \gamma \quad \beta = \alpha + \gamma$

$\beta = \delta + \alpha$ — м.б. нет реш., м.б. много реш.

$\omega = 1 + \gamma \Rightarrow \gamma = \omega$

$\omega = \omega + \gamma \Rightarrow \gamma = 0$

$\omega = \delta + 1 \Rightarrow$ нет. реш.

$\omega = \delta + \omega \Rightarrow \delta$ - люб. кон.

Д-во (!) $\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, б.о.о. $\gamma_1 < \gamma_2$

$\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow \alpha + \gamma_1 < \alpha + \gamma_2$, противор.

$(\exists)$ A — предст. α $\qquad \alpha = \beta \Rightarrow \gamma = 0$

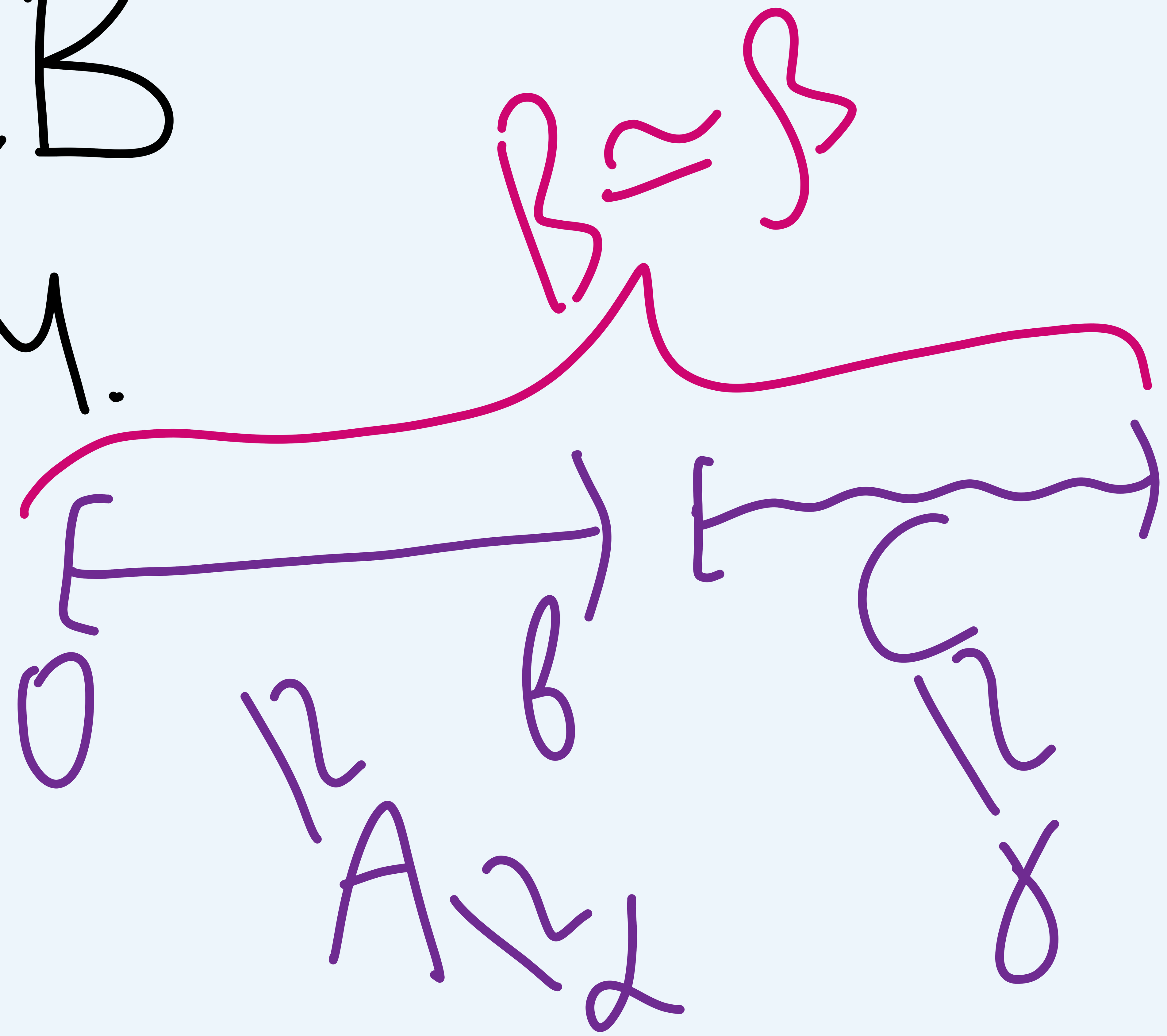
B — предст. β

$\alpha < \beta \Rightarrow A \simeq [0, b)$, $b \in B$

$C = B \setminus [0, b)$ — в.ум.

γ — орд., соотв. C

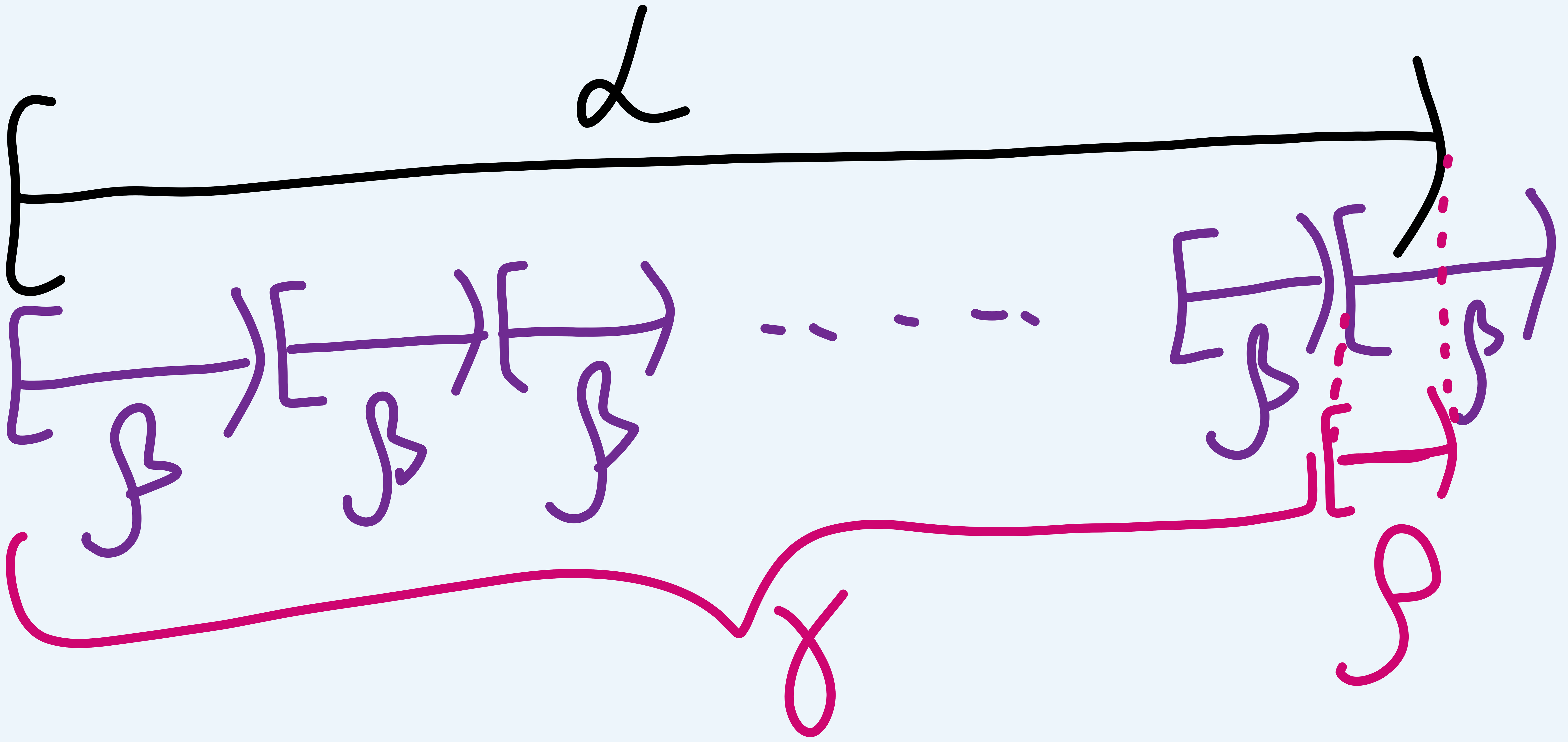
$\alpha + \gamma = \beta$



Деление с остатком

<u>Теор.</u> $\forall \alpha, \beta \neq 0 \ \exists!\, \gamma, \rho$ $\alpha = \beta \cdot \gamma + \rho$

$\rho < \beta$



Единств. $\beta\cdot\gamma_1+\rho_1=\beta\cdot\gamma_2+\rho_2$

сл.1 $\gamma_1\neq\gamma_2$, б.о.о. $\gamma_1<\gamma_2$

$$\beta\cdot\gamma_1+\rho_1<\beta\cdot\gamma_1+\beta=\beta\cdot(\gamma_1+1)\leq\beta\cdot\gamma_2\leq\beta\cdot\gamma_2+\rho_2$$

противор.

сл.2 $\gamma_1=\gamma_2\Rightarrow\rho_1=\rho_2$ по единств. выч.

$\beta \cdot \alpha \geq \alpha$ — ВСЕГДА ПРИ $\beta \neq 0$

$\beta \cdot \alpha = \alpha \Rightarrow \gamma = \alpha, \rho = 0$

$\beta \cdot \alpha > \alpha \Rightarrow \alpha \simeq [0, x), x \in \beta \cdot \alpha$

$x = (b_1, a_1), b_1 \in \beta, a_1 \in \alpha$

$$[0, x) \simeq \beta \cdot \underbrace{[0, a_1)}_{\gamma} + \underbrace{[0, b_1)}_{\rho}$$

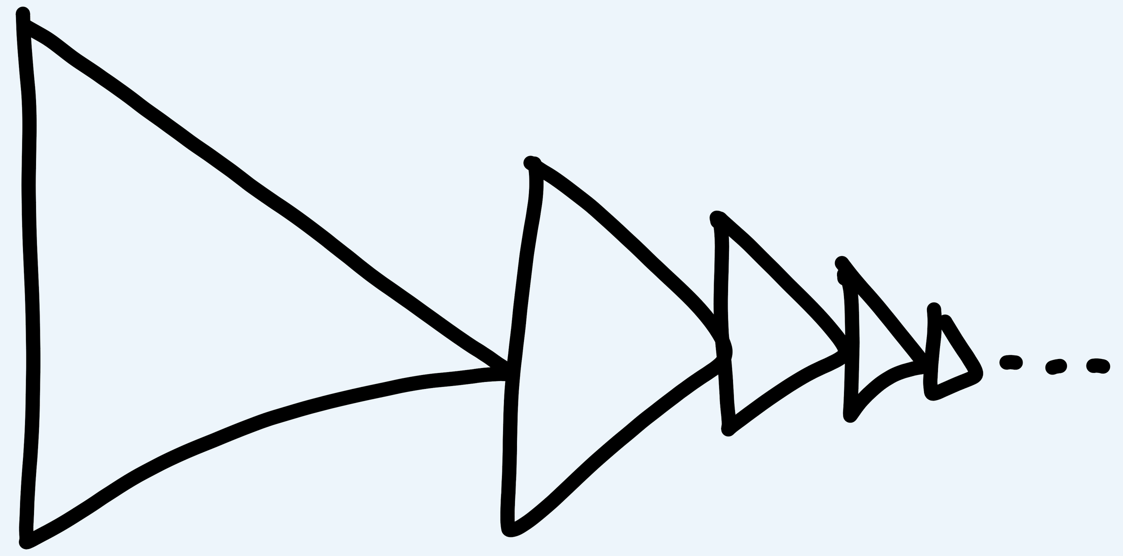
$\alpha < \omega \Rightarrow \alpha = n$

$\alpha < \omega^2 \Rightarrow \alpha = \omega \cdot k + l$

ПОР-К ОБР. ЛЕКС. ПО (l, k)

$\alpha < \omega^3 \Rightarrow \alpha = \omega^2 \cdot m + \omega \cdot k + l$

ПОР-К ОБР. ЛЕКС. ПО (l, k, m)

ω^2 

ω^3 

$$\alpha < \omega^\omega \Rightarrow \alpha = \omega^q \cdot m_q + \omega^{q-1} \cdot m_{q-1} + \ldots + \omega \cdot m_1 + m_0$$

ПОР-К ОБР. ЛЕКС. ПО

$$(m_0, m_1, m_2, \ldots, m_q, \ldots)$$

$$\omega^\omega = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \ldots =$$

$$= \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \ldots$$

$$\left\{1 - \frac{1}{n}\right\} \simeq \omega \qquad \left\{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right\} \simeq \omega^2$$

$$\left\{1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \ldots - \frac{1}{n_k}\right\} \simeq \omega^k \quad (k \text{ ФИКС.})$$

$$\left\{ k - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \ldots - \frac{1}{n_k} \right\} \simeq \omega^\omega$$

α^β — пор. тип $\to [B \to A]$

A — в.у.м. типа α

B — в.у.м. типа β

$[B \to A]$ — мн-во ф-ий из B в A, у к-рых только кон. число знач. отлично от 0

Порядок — обр. лекс. в след. смысле

$f: B \to A$, $g: B \to A$

$b_{max}(f) = \max\{b : f(b) \neq 0\}$

$f_{max} = f(b_{max}(f))$

СНАЧАЛА СРАВН. $b_{max}(f)$ и $b_{max}(g)$

КАКАЯ КООРД. БОЛЬШЕ, ТА Ф-ИЯ И БОЛЬШЕ

РАВНЫ $\Rightarrow$ СРАВН. f_{max} и g_{max}

ТОЖЕ РАВНЫ $\Rightarrow$ ТАК ЖЕ ДЛЯ МЕНЬШИХ АРГ-ТОВ

Теор. A, B - в.у.м. $\Rightarrow \{A \to B\}$ — в.у.м.

Рек. опр. $\alpha^0 = 1$

$$\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$$

$$\alpha^{\sup\{\beta_i\}} = \sup\{\alpha^{\beta_i}\}$$

Св-ва $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$$

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\Big\}\omega = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$$

$$\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$$

$$\omega^{\varepsilon_0} = \omega^{\sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}} = \sup\{\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\} = \varepsilon_0$$

<u>Теор.</u> $\varepsilon_0 = \min\{\alpha \mid \alpha = \omega^\alpha\}$

ТЕОР. „ОБ ОРДИНАЛЬНОЙ СИСТ. СЧИСЛ.“

$$\gamma < \alpha^{\beta} \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k < \alpha$$

$$\exists\, \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k < \beta$$

$$\gamma = \alpha^{\beta_k} \cdot \alpha_k + \alpha^{\beta_{k-1}} \cdot \alpha_{k-1} + \ldots + \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha_1$$

Цель: A, B беск. $\Rightarrow A \cup B \cong A$ или $A \cup B \cong B$

A беск. $\Rightarrow A \times A \cong A$

Аксиома выбора: сущ. ф-ия $\varphi : 2^A \to A$, т.ч. $\forall S \subset A, S \neq \emptyset \quad \varphi(S) \in S$

Теорема Цермело: У любого мн-ва есть равномощное ему в.у.м.

ЛЕММА ЦОРНА, ПРИНЦИП ХАУСДОРФА, ...

ВСЕ ЭТИ УТВ. ЭКВИВ.

МЫ Д-ЕМ: АКС. ВЫБ. $\Rightarrow$ ТЕОР. ЦЕРМЕЛО

ЭКВ. ВАР. АКС. ВЫБ.: $\exists \varphi : 2^A \to A$

$\forall S \subset A, S \neq A \quad \varphi(S) \notin S$

КАК УПОРЯД. A?

$\varphi(\emptyset), \varphi(\{\varphi(\emptyset)\}), \varphi(\{\varphi(\emptyset), \varphi(\{\varphi(\emptyset)\})\})$

ФРАГМЕНТ $S \mapsto$ ДОПОЛН. СПРАВА ЭЛ-ТОМ $\varphi(S)$

И Т.Д., ПОКА A НЕ ЗАКОНЧ.

ИНАЧЕ ГОВОРЯ:

$a_0 = \varphi(\emptyset)$

$a_1 = \varphi(\{a_0\})$

$a_2 = \varphi(\{a_0, a_1\})$

$\ldots$

$a_n = \varphi(\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\})$

$\ldots$

$a_\omega = \varphi(\{a_0, a_1, a_2, \ldots\})$

Корректный фрагмент $\langle S, \leq_S \rangle$

1) $S \subset A$

2) $\leq_S$ — вполне упорядочение S

3) $x \in S \Rightarrow x = \varphi(\{y \mid y <_S x\})$

Покажем, что все корр. фрагм. можно объед. в один пор-к на A

$\underline{\Delta 1}$ $\langle S, \leq_S \rangle$, $\langle T, \leq_T \rangle$, $x, y \in S \cap T \Rightarrow$

$$(x \leq_S y \Leftrightarrow x \leq_T y)$$

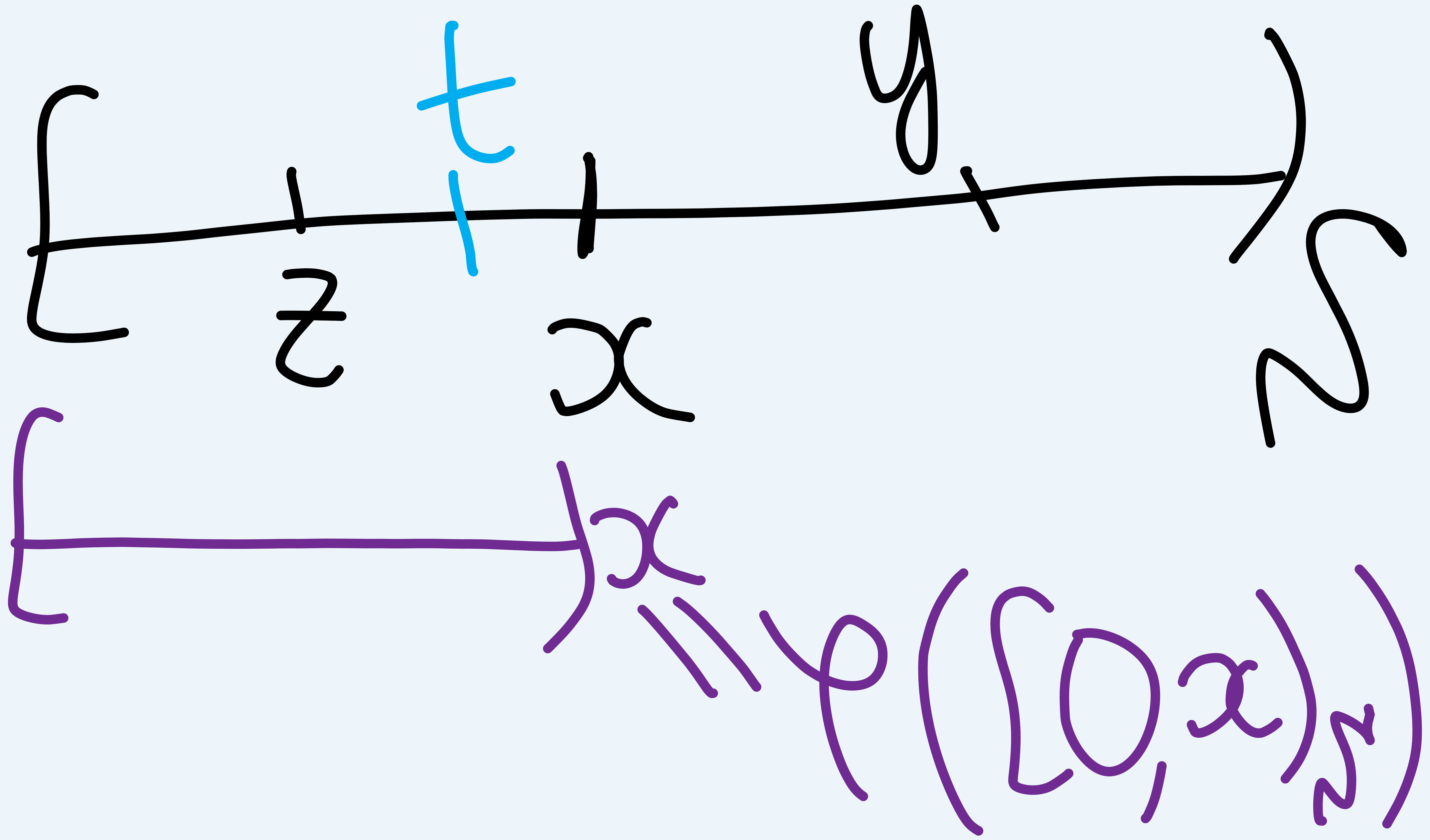
$\underline{\text{Д-во}}$ Пусть не так. Рассм. мин. в S эл-т x, к-рый по-разн. сравн. с каким-то y

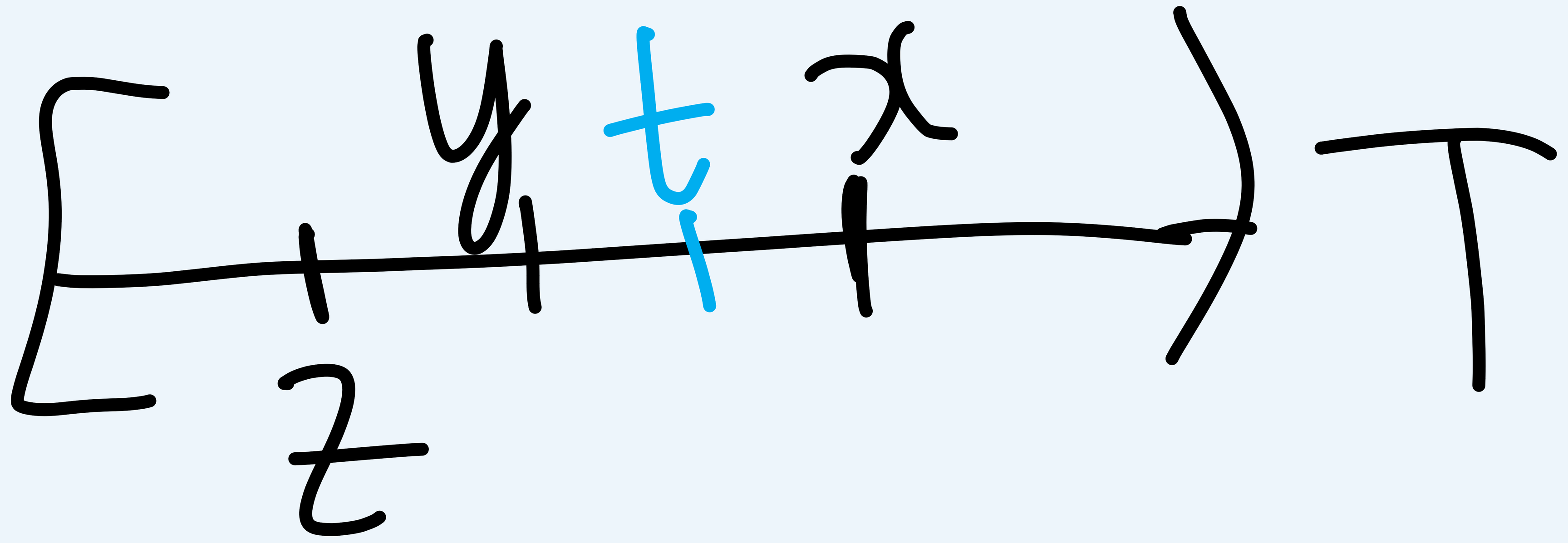
$y <_S x$, $y >_T x \Rightarrow x$ не мин., поэтому

$y >_S x$. Из всех таких y выберем мин. в T

$y <_T x$

Рассм. z, т.ч. $z <_T y$. По транз. $z <_T x$





Получ. $z <_S x$,

иначе это меньший в T контрпример

$$[0,y)_T \subset [0,x)_S$$

$t <_S x \Rightarrow t <_S y \Rightarrow$ Если $t >_T y$, то t — контрпр. $< x$

поэтому $t <_T y$

$[0, x)_S \subset [0, y)_T$

т. е. $[0, x)_S = [0, y)_T = W$

$x = y = \varphi(W)$, противор.

Л2 | Объед. любого числа корр. фр. — корр. фр.

Л3 | Объед. всех корр. фрагм. — вполне упор. мн-ва $\bar{A}$