МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, осень 2023
Контрольная работа №2, вариант 1

Каждая задача оценивается в 10 баллов. Никакими материалами пользоваться нельзя. При решении можно использовать изученные на лекциях и семинарах теоремы, если явно на них сослаться.

9. Назовём граф (k,l)-кликово-резистентным, если после удаления любых k рёбер в нём всё ещё останется клика размера l (т. е. l вершин, попарно соединённых рёбрами между собой). Определим язык $\mathsf{CLIQUE\text{-}RESIST\text{-}PARTITION} = \{(G,k,l) \mid$ вершины графа G можно разбить на 2 группы, так чтобы индуцированный граф на каждой из них был (k,l)-кликово-резистентным$\}$.

Классифицируйте этот язык как можно точнее в полиномиальной иерархии (варианты ответа: $\Sigma_m^p, \Pi_m^p, \Sigma_m^p \cap \Pi_m^p$ для указанного вами m).

10. Рассмотрим язык $\mathsf{CLIQUE\text{-}EXTENSION} = \{(G,V_1,V_2,k,l) \mid V = V_1 \sqcup V_2$ и любая клика в G_1 из k вершин дополняется некоторой кликой в G_2 из l вершин до клики из $k+l$ вершин, где G_i — индуцированный подграф на множестве вершин $V_i\}$.

а) (2 балла) Классифицируйте этот язык в один из классов Σ_2^p и Π_2^p.

б) (8 баллов) Докажите его полноту в этом классе.

11. Рассмотрим язык $\mathsf{LONG\text{-}EXACT\text{-}CYCLE} = \{(M,x,1^s,l) \mid$ среди конфигураций детерминированной машины Тьюринга M на входе x, занимающих не больше s ячеек, найдётся простой цикл длины в точности l, образованный корректными переходами этой машины$\}$.

а) (3 балла) Докажите, что этот язык лежит в **PSPACE**.

б) (7 баллов) Докажите, что он **PSPACE**-полон.

12. Пусть вход машины длины $n\lceil \log n \rceil$ воспринимается как код перестановки на множестве из n элементов (записанной как $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$). Покажите, что на логарифмической памяти можно:

а) (2 балла) Проверить, что это и правда перестановка (n произвольное, не обязательно степень двойки).

б) (8 баллов) Проверить, что в её разложении на непересекающиеся циклы есть ровно один цикл чётной длины, большей 2, а остальные циклы имеют длину 2 или 1 (т. е. являются транспозициями или неподвижными точками).

13. (2 пункта по 5 баллов) Докажите, что язык $\mathsf{PRIME\text{-}SCC} = \{(G,v) \mid$ компонента сильной связности графа G, содержащая вершину v, имеет простое число вершин$\}$ (а) лежит в **NL**; (б) **NL**-полон.

14. Докажите, что функция $\mathcal{BB}_{inc}(n)$, возвращающая максимальную длину слова, в котором биты не убывают (т. е. сначала идут нули, потом единицы), являющегося в точности ответом какой-то машины Тьюринга с n состояниями и алфавитом $\{0,1,\#\}$ на каком-то входе длины ровно n, растёт быстрее любой вычислимой функции.

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, осень 2023
Контрольная работа №2, вариант 2

Каждая задача оценивается в 10 баллов. Никакими материалами пользоваться нельзя. При решении можно использовать изученные на лекциях и семинарах теоремы, если явно на них сослаться.

9. Назовём граф (k, l)-кликово-резистентным, если после удаления любых k рёбер в нём всё ещё останется клика размера l (т. е. l вершин, попарно соединённых рёбрами между собой). Определим язык $\mathsf{CLIQUE\text{-}RESIST\text{-}SUBGRAPH} = \{(G, s, k, l) \mid$ в графе G найдётся (k, l)-кликово-резистентный подграф из не более чем s вершин$\}$.

Классифицируйте этот язык как можно точнее в полиномиальной иерархии (варианты ответа: $\Sigma_m^p, \Pi_m^p, \Sigma_m^p \cap \Pi_m^p$ для указанного вами m).

10. Рассмотрим язык $\mathsf{INDSET\text{-}EXTENSION} = \{(G, V_1, V_2, k, l) \mid V = V_1 \sqcup V_2$ и любое независимое множество в G_1 из k вершин дополняется некоторым независимым множеством в G_2 из l вершин до независимого множества из $k + l$ вершин, где G_i — индуцированный подграф на множестве вершин $V_i\}$.

а) (2 балла) Классифицируйте этот язык в один из классов Σ_2^p и Π_2^p.

б) (8 баллов) Докажите его полноту в этом классе.

11. Рассмотрим язык $\mathsf{LONG\text{-}EXACT\text{-}MEET} = \{(M, x, 1^s, l) \mid$ среди конфигураций детерминированной машины Тьюринга M на входе x, занимающих не больше s ячеек, найдутся 2 пути длины в точности l, приходящие в одну и ту же точку и образованные корректными переходами этой машины. При этом вершины с одними и теми же номерами на этих путях должны быть разными, но других условий на повторы не накладывается: пути не обязаны быть простыми, также могут совпадать вершины с разными номерами$\}$.

а) (3 балла) Докажите, что этот язык лежит в **PSPACE**.

б) (7 баллов) Докажите, что он **PSPACE**-полон.

12. Пусть вход машины длины $n\lceil \log n \rceil$ воспринимается как код перестановки на множестве из n элементов (записанной как $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$). Покажите, что на логарифмической памяти можно:

а) (2 балла) Проверить, что это и правда перестановка (n произвольное, не обязательно степень двойки).

б) (8 баллов) Проверить, что в её разложении на непересекающиеся циклы есть ровно один цикл нечётной длины, большей 1, а остальные циклы имеют длину 2 или 1 (т. е. являются транспозициями или неподвижными точками).

13. (2 пункта по 5 баллов) Докажите, что язык $\mathsf{COMPOSITE\text{-}SCC} = \{(G, v) \mid$ компонента сильной связности графа G, содержащая вершину v, имеет составное число вершин$\}$ (а) лежит в **NL**; (б) **NL**-полон.

14. Докажите, что функция $\mathcal{BB}_{dec}(n)$, возвращающая максимальную длину слова, в котором биты не возрастают (т. е. сначала идут единицы, потом нули), являющегося в точности ответом какой-то машины Тьюринга с n состояниями и алфавитом $\{0, 1, \#\}$ на каком-то входе длины ровно n, растёт быстрее любой вычислимой функции.