

1. (3 балла) Задан массив $a(0), \dots, a(2^n - 1)$. Определим $a'(mask) = \sum_{submask \subseteq mask} a(submask)$. Докажите, что следующий код решает эту задачу на месте (результат сохраняется в исходном массиве).

```
void magic(vector<int>& a) {
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int mask = 0; mask < (1 << n); ++mask)
            if (!bit(mask, i))
                a[mask + (1 << i)] += a[mask];
}
```

2. (1 балл) Пусть в задаче о рюкзаке предметы не имеют стоимостей, то есть характеризуются только весами. Нужно найти максимальный суммарный вес предметов, который можно уместить в рюкзак вместимости W . Решите задачу за $O(nW/w)$, где w — длина машинного слова (обычно 32 или 64).

3. На гранях шестигранного кубика могут располагаться числа от 1 до n , повторы не запрещены. Два кубика считаются различными, если на кубиках различны мультимножества расположенных чисел. Скажем, что один кубик *превосходит* другой, если с вероятностью, строго большей $\frac{1}{2}$, при случайном равномерном бросании обоих кубиков на первом выпадает большее число. Назовём тройку кубиков *хорошей*, если первый кубик превосходит второй, второй превосходит третий, а третий превосходит первый. Определите число хороших упорядоченных троек кубиков за

- а) (2 балла) $O(n)$;
- б) (1 балл) $O(\log n)$;
- в) (2 балла) $O(1)$.