МФТИ, сложность вычислений, осень 2023

Семинар 08. Класс **PH**

Определение. Σ_k^p — класс языков A, для которых существует машина Тьюринга V, работающая за полиномиальное время от длины первого аргумента, т.ч. $x \in A \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots V(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) = 1$.

Определение. Π_k^p — класс языков A, для которых существует машина Тьюринга V, работающая за полиномиальное время от длины первого аргумента, т.ч. $x \in A \Leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots V(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) = 1$.

Определение. $\mathbf{PH} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Sigma_k^p$.

Утверждение. Для произвольного $k \geqslant 1$ следующие условия эквивалентны:

а) $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+1}^p$;

б) $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$;

в) $\mathbf{PH} = \Sigma_k^p$. В этом случае говорят, что **PH** схлопывается на k-м уровне.

Определение. Язык B называется Σ_k^p-трудным, если $\forall A \in \Sigma_k^p : A \leqslant_p B$. Язык B называется Σ_k^p-полным, если он лежит в Σ_k^p и является Σ_k^p-трудным. Определение для Π_k^p аналогично.

Теорема. Язык $\Sigma_k\mathsf{SAT} = \{\varphi(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_k}) \mid \exists \overrightarrow{x_1} \forall \overrightarrow{x_2} \exists \overrightarrow{x_3} \ldots \varphi(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_k}) = 1\}$ является Σ_k^p-полным. Язык $\Pi_k\mathsf{SAT} = \{\varphi(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_k}) \mid \forall \overrightarrow{x_1} \exists \overrightarrow{x_2} \forall \overrightarrow{x_3} \ldots \varphi(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_k}) = 1\}$ является Σ_k^p-полным.

Теорема. $\mathbf{P}^{\Sigma_{k-1}^p} \subset \Sigma_k^p \cap \Pi_k^p$; $\Sigma_k^p = \mathbf{NP}^{\Sigma_{k-1}^p}$; $\Pi_k^p = \mathbf{coNP}^{\Sigma_{k-1}^p}$

Утверждение. Если A является Σ_k^p-трудным, причём $A \leqslant_p B$, то и B является Σ_k^p-трудным. Аналогично с Π_k^p.

Определение. Раскраска G в k цветов называется кликовой раскраской, если в любой максимальной по включению клике G есть вершины разных цветов.

---

1. Что такое Σ_k^p и Π_k^p для $k \leqslant 1$?

2. Докажите, что $\Pi_k^p = \{\,\overline{A} \mid A \in \Sigma_k^p\} = \{A \mid \overline{A} \in \Sigma_k^p\}$. Поэтому уместна запись $\Pi_k^p = \mathbf{co}\Sigma_k^p$.

3. Докажите следующие простые свойства классов полиномиальной иерархии.

а) Докажите, что классы Σ_k^p и Π_k^p замкнуты относительно объединения и пересечения.

б) Что происходит, если один из них оказывается замкнут относительно дополнений?

в) Выведите, что $\mathbf{PH} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Pi_k^p$, и $\Sigma_k^p \cup \Pi_k^p \subset \Sigma_{k+1}^p \cap \Pi_{k+1}^p$.

4. Докажите, что если в **PH** есть (**PH**-)полный язык, то **PH** схлопывается.

5. Классифицируйте как можно точнее в полиномиальной иерархии языки:

а) $\mathsf{ALL3COL} = \{G \mid$ любая раскраска вершин графа G в три цвета является правильной$\}$;

б) $\mathsf{CHROMNUMBER} = \{(G, k) \mid \chi(G) = k\}$. Почему он вряд ли полон в каком-нибудь классе?

в) $\mathsf{SYMGRAPH} = \{G \mid$ для всякой пары вершин u и v графа G существует его автоморфизм, переводящий u в $v\}$.

г) $\mathsf{ALMOST\text{-}TAUT} = \{\varphi \mid$ пропозициональная формула φ истинна на всех наборах значений переменных, кроме не более чем n, где n — число переменных в $\varphi\}$.

д) $\mathsf{MINEQCNF} = \{(\varphi, 1^\ell) \mid$ формула φ эквивалентна некоторой формуле в КНФ длины не более $\ell\}$. Оказывается, он полон в своём классе.

е) $\mathsf{RAMSEY} = \{(G, H_1, H_2) \mid$ для любой раскраски вершин графа G в красный и синий цвета найдётся либо красный подграф, изоморфный H_1, или синий подграф, изоморфный $H_2\}$.

ж) $\mathsf{CLIQUE\text{-}CHOOSABILITY} = \{(G, k) \mid$ в графе G с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, как бы ни были заданы k-элементные множества $L_1, \ldots, L_n$, можно выбрать кликовую раскраску всех вершин с условием, что каждая вершина j будет покрашена в один из цветов множества $L_j\}$.

6. Что такое $\Sigma_1\mathsf{SAT}$ и $\Pi_1\mathsf{SAT}$?

7. Определим языки $\Sigma_k\mathsf{3SAT}$ и $\Sigma_k\mathsf{3DNFSAT}$ аналогично $\Sigma_k\mathsf{SAT}$ для формул в 3-КНФ и 3-ДНФ соответственно. Аналогично определим $\Pi_k\mathsf{3SAT}$ и $\Pi_k\mathsf{3DNFSAT}$. При каких k языки полны в соответствующих классах? Почему $\Sigma_1\mathsf{3DNFSAT}$ вряд ли полон в Σ_1^p? Почему $\Pi_1\mathsf{3SAT}$ вряд ли полон в Π_1^p?

8. Докажите Π_2^p-полноту языка $\mathsf{3COLEXTENSION} = \{(G, k) \mid$ вершины графа G пронумерованы последовательными натуральными числами с 1, а любую правильную раскраску в 3 цвета вершин с номерами

$1, 2, \ldots, k$ можно продолжить до правильной раскраски всего G в три цвета$\}$.
9. Докажите Π_2^p-полноту языка $\mathsf{HAMPATHEXT} = \{(G, k, s, t) \mid$ ориентированный граф G задан списком рёбер $e_1, \ldots, e_m$, причём при любом выборе по одному элементу из каждой пары $(e_1, e_2), (e_3, e_4), \ldots, (e_{2k-1}, e_{2k})$, в G найдётся гамильтонов путь из s в t, использующий выбранные рёбра$\}$.
10. Определим $A = \{k \mid \Sigma_k^p = \Pi_k^p\}$. Что можно сказать о сложности языка A?
11. Как соотносятся $\mathcal{C}^O$ и $\mathcal{C}^{\overline{O}}$ для любого класса $\mathcal{C}$ и любого оракула O?
12. Пусть $O \in \mathbf{PH}$. Докажите, что $\mathbf{P}^O \subset \mathbf{PH}$.

1. $\Sigma_0^p = \mathbf{P} = \Pi_0^p$, $\Sigma_1^p = \mathbf{NP}$, $\Pi_1^p = \mathbf{coNP}$.
2. Если V — машина, показывающая принадлежность A к Σ_k^p, то $(1 - V)$ показывает принадлежность $\overline{A}$ к Π_k^p.
3.

а) Возьмите естественную булеву связку верификаторов с независимыми переменными, вынесите кванторы в правильном порядке.
б) Если Σ_k^p замкнут относительно дополнений, то $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$. В общем случае, если $\mathcal{C}$ — произвольный сложностной класс, такой что $\mathcal{C} \subset \mathbf{co}\mathcal{C}$, то $\mathcal{C} = \mathbf{co}\mathcal{C}$.
в) Навесьте фиктивный квантор.

4. Достаточно показать, что из условий $A \in \Sigma_k^p$ и $B \leqslant_p A$ следует, что $B \in \Sigma_k^p$.
5.

а) $\mathbf{P}$;
б) $\Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$;
в) $\mathbf{NP}$;
г) $\mathbf{coNP}$;
д) Σ_2^p;
е) Π_2^p;
ж) Π_3^p.

6. SAT и TAUT.
7. $\Sigma_k\mathsf{3SAT}$ полон в Σ_k^p при нечётных k. $\Pi_k\mathsf{3SAT}$ полон в Π_k^p при чётных k. Это достигается обычным сведением формулы к виду 3-КНФ за счёт того, что последний квантор — квантор существования, который и навешивается на новые переменные.
8. Используйте сведение $\mathsf{3SAT}$ к $\mathsf{3COL}$. Останется (при необходимости) добавить некоторые фиктивные вершины и ввести необходимую нумерацию.
9. Вспомните сводимость $\mathsf{3SAT}$ к $\mathsf{HAMPATH}$. Значение переменной однозначно соответствует выбору первого ребра в соответствующем гаджете.
Обобщите это сведение на сведение Π_2-$\mathsf{3SAT}$ к $\mathsf{HAMPATHEXT}$.
10. $A \in \mathbf{P}$.
11. Классы совпадают.
12. $O \in \Sigma_k^p$ для некоторого k, так что $\mathbf{P}^O \subset \Sigma_{k+1}^p \cap \Pi_{k+1}^p$.