

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики  
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2023  
Контрольная работа №2(10), тренировочный вариант

Контрольная пройдёт 15 марта в обычное время, 12:30, в Б. Хим. Время на выполнение работы — 40 минут. Все задачи оцениваются по принципу зачёт/незачёт, если не указано иное. Задачи 7–9 тестовые: нужен только ответ, верный ответ оценивается в 0.8 баллов, нет переписывания. Задачи 10–11 обычные: нужно полное решение, верное решение оценивается в 1 балл, в случае неверного решения на следующей к/р будет предложена аналогичная задача за 0.8 балла. Задача 12 будет дана на к/р за 1.5 балла тем, кто решил задачи 4–5 на прошлой к/р, а также за 1 балл на дом для всех. Задачи 13–14 будут даны на дом за 1 балл.

7. Какие из следующих свойств верны для всех ординалов?

- а) Любой элемент ординала является его подмножеством
- б) Любое подмножество ординала является его элементом
- в) Любой элемент ординала является его начальным отрезком
- г) Любой начальный отрезок ординала является его элементом
- д) Никакие из предыдущих

8. Какие из следующих свойств верны для всех ординалов?

- а)  $\alpha + 0 = \alpha$
- б)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- в) Если  $\beta > 0$ , то  $\alpha + \beta > \alpha$
- г) Если  $\alpha > 0$ , то  $\alpha + \beta > \beta$
- д) Никакие из предыдущих

9. Какие из этих уравнений имеют решения в бесконечных ординалах?

- а)  $1 + \alpha = \alpha + 1$
- б)  $\alpha \cdot 2 + 1 = (\alpha + 1) \cdot 2$
- в)  $\alpha^2 + 1 = (\alpha + 1)^2$
- г)  $\omega^\alpha + 1 = \alpha + 1$
- д) Ни одно из предыдущих

10. Найдите все решения уравнений  $\alpha + \omega^2 + \omega = \omega^3 + \omega$  и  $\omega^2 + \omega + \alpha = \omega^3 + \omega$  и докажите, что других нет.

11. Поделите с остатком  $\omega^3 + \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 4 + 2$  на  $\omega + 3$ .

12. (Будет выдана на дом за 1 балл, а также на к/р за 1.5 балла тем, кто решил обе задачи 4 и 5 на прошлой к/р). Представьте ординал  $\omega^3 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 3 + \omega$  в ординальной системе счисления по основанию  $\omega + 1$ , т. е. как сумму вида  $\alpha^{\beta_1} \cdot \alpha_1 + \dots + \alpha^{\beta_k} \cdot \alpha_k$  для  $\beta_1 > \dots > \beta_k$ ,  $\alpha_i < \alpha$  и  $\alpha = \omega + 1$ .

**13.** (*Будет выдана на дом*). Обозначим через  $S_{a,b}$  множество  $\{b - \frac{b-a}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ . Рассмотрим множество  $S_{2,3} \cup \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} S_{1-\frac{1}{m}, 2-\frac{1}{m}} \right)$ . Является ли оно вполне упорядоченным (со стандартным порядком на  $\mathbb{R}$ )? Если да, то каков его порядковый тип?

**14.** (*Будет выдана на дом*). Опишите подмножество  $\mathbb{R}$ , упорядоченное по типу  $\alpha = \omega^\omega + \omega^2 \cdot 2 + 1$ . Из описания должно быть понятно, как по произвольному элементу  $\alpha$  найти число, которое ему соответствует.