Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2023
Листок 12: Фундированные и вполне упорядоченные множества, условия задач

Фундированным называется множество, каждое непустое подмножество которого содержит минимальный элемент. (Напоминание: минимальным элементом называется тот, меньше которого нет; наименьшим — тот, который меньше всех остальных). Свойству фундированности также эквивалентны следующие свойства:

а) *Принцип невозможности бесконечного спуска:* не существует бесконечной строго убывающей последовательности элементов множества;

б) *Принцип (трансфинитной) индукции:* известно, что если некоторое свойство A выполнено при всех $x < y$, то выполнено $A(y)$. Тогда A выполнено при всех x.

1. Докажите, что в фундированном множестве любая нестрого убывающая последовательность стабилизируется (т. е. $\exists N\ \forall n > N\ x_n = x_N$), и наоборот.

2. Докажите, что для любого множества существует равномощное ему фундированное множество.

3. Докажите, что для любое конечное частично упорядоченное множество фундировано.

4. Докажите, что если в фундированном множестве некоторые пары элементов сделать несравнимыми, то множество останется фундированным. (Иными словами, подмножество фундированного порядка это фундированный порядок).

Вполне упорядоченным называется фундированное линейно упорядоченное множество.

5. Приведите пример фундированного, но не линейно упорядоченного множества, а также пример линейно упорядоченного, но не фундированного множества. Для последнего непосредственно покажите нарушение всех трёх условий.

6. В некотором упорядоченном множестве любое непустое подмножество содержит *наименьший* элемент. Верно ли, что оно вполне упорядоченное?

7. Подмножество частично упорядоченного множества называется *цепью*, если любые два его элемента сравнимы. Докажите, что множество является фундированным тогда и только тогда, когда любая его цепь вполне упорядочена.

8. Является ли вполне упорядоченным множество всех конечных слов из букв латинского алфавита с лексикографическим порядком? (Слово x меньше слова y, если либо некоторые префиксы x и y совпадают, а следующая буква в x раньше по алфавиту, чем следующая буква y, либо x является префиксом y). Явным образом докажите или опровергните каждое из трёх свойств: фундированность, отсутствие бесконечно убывающей цепочки, принцип трансфинитной индукции.

9. Докажите, что во вполне упорядоченном множестве у каждого элемента a (кроме максимального) есть единственный непосредственно следующий, т. е. такой $c > a$, что ни для какого b неверно $c > b > a$.

Непосредственно следующий элемент после a будем обозначать через $S(a)$. *Предельным элементом* вполне упорядоченного множества называется элемент, не являющийся непосредственно следующим ни за каким другим.

10. Докажите, что элемент a предельный тогда и только тогда, когда для любого $b < a$ также верно $S(b) < a$.

11. Для натурального числа k обозначим через $S_k(a)$ элемент $\underbrace{S(S(\ldots(S}_{k \text{ раз}}(a))\ldots))$. (Формально $S_0(a) = a$, $S_{k+1}(a) = S(S_k(a))$). Докажите, что для любого элемента a вполне упорядоченного множества найдётся предельный элемент b и натуральное число k, такое что $a = S_k(b)$.

12. Докажите, что элемент a *счётного* вполне упорядоченного множества A предельный тогда и только тогда, когда либо он наименьший во всём множестве, либо найдётся *счётное* семейство $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, такое что все a_i меньше a, но любой элемент, меньший a, также меньше какого-то a_i.

Примеры таких цепочек в ординальных обозначениях:

- $\omega : 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots;$
- $\omega \cdot 2 : \omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \omega + 3 < \ldots;$
- $\omega^2 : \omega < \omega \cdot 2 < \omega \cdot 3 < \omega \cdot 4 < \ldots;$
- $\omega^\omega : \omega < \omega^2 < \omega^3 < \omega^4 < \ldots;$
- $\varepsilon_0 : \omega < \omega^\omega < \omega^{\omega^\omega} < \omega^{\omega^{\omega^\omega}} < \ldots$

13. Докажите, что если A вполне упорядоченное множество, а $f\colon A \to A$ такова, что при $x > y$ верно $f(x) > f(y)$, то при всех x выполнено $f(x) \geqslant x$. Верна ли эта теорема для фундированных множеств? Линейно упорядоченных?

Начальным отрезком вполне упорядоченного множества A называется такое множество B, что из $x \in B$ и $y \leqslant x$ следует $y \in B$. *Собственным* начальным отрезком называется начальный отрезок, не равный самому множеству.

14. Докажите, что:

а) Определение начального отрезка эквивалентно такому: если $x \in B$, а $z \in A \setminus B$, то $x < z$.

б) Начальный отрезок (и вообще любое подмножество) вполне упорядоченного множества сам является вполне упорядоченным множеством.

в) Начальный отрезок начального отрезка A сам является начальным отрезком A.

г) Множества вида $[0, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$ и $[0, a) = \{x \mid x < a\}$ являются начальными отрезками.

д) Любой собственный начальный отрезок имеет вид $[0, a)$.

15. Докажите, что множество не может быть изоморфно собственному начальному отрезку.

16. Докажите, что собственный начальный отрезок не представляется в виде $[0, a]$ тогда и только тогда, когда он равен $[0, a)$, где a предельный.

17. Докажите, что начальные отрезки вполне упорядоченного множества A тоже образуют вполне упорядоченное множество по отношению «быть начальным отрезком», при этом это множество изоморфно $A \cup \{A\}$.

Теорема о сравнимости вполне упорядоченных множеств утверждает, что из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого. Будем обозначать такое сравнение через $A \lesssim B$. Если A изоморфно собственному начальному отрезку B, будем писать просто $A < B$.

18. Докажите, что сравнение вполне упорядоченных множества транзитивно.

19. Докажите, что для любых вполне упорядоченных A и B выполнено ровно одно из условий $A < B$, $B < A$, $A \simeq B$, причём в первых двух случаях существует только один начальный отрезок большего множества, которому изоморфно меньшее.

20. Докажите, что любое подмножество вполне упорядоченного множества изоморфно какому-то его начальному отрезку. Приведите пример, когда собственное подмножество изоморфно всему множеству.

21. Вспомните, как определяются сумма, произведение и декартово произведение упорядоченных множеств.

а) Всегда ли сумма, произведение и декартово произведение фундированных множеств фундированы?

б) Могут ли сумма, произведение или декартово произведение множеств, одно из которых не фундировано, быть фундированными?

в) Всегда ли сумма, произведение и декартово произведение вполне упорядоченных множеств вполне упорядочены? Если не всегда, попробуйте придумать необходимое и достаточное условие.

22. Существуют ли такие непустые вполне упорядоченные множества A и B, что $A + B \simeq B$?

23. Верны ли для суммы и произведения вполне упорядоченных множеств правила коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (правой и левой)? А для фундированных?

24. Существуют ли такие непустые вполне упорядоченные множества A и B, что $A + B \simeq A$?

25. Найдите все решения уравнения $A \cdot B \simeq A$ среди вполне упорядоченных множеств.

26. Докажите, что если вполне упорядоченное множество A не имеет максимального элемента, то A изоморфно $\mathbb{N} \cdot L$, где L — множество предельных элементов. А если A имеет максимальный элемент, то A изоморфно $\mathbb{N} \cdot (L \setminus \{m\}) + B$, где m — максимальный предельный элемент, а B — конечное вполне упорядоченное множество.

27. Опишите все вполне упорядоченные множества, имеющие конечное число предельных элементов.

28. Покажите, что если A и B вполне упорядоченные множества, при этом A конечно и непусто, а B не имеет наибольшего элемента, то $A \cdot B \simeq B$.

29. Являются ли операции сложения и умножения монотонными? Иными словами, если $A < B$ ($A \lesssim B$), то верно ли, что для всех C истинно $A+C < B+C$, $C+A < C+B$, $A \cdot C < B \cdot C$, $C \cdot A < C \cdot B$ (то же для $\lesssim$ вместо $<$)?