

МФТИ, ФПМИ
Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022
Семинар №12. Потоки (1)

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

- 1*. Приведите пример сети с вещественными пропускными способностями, в которой алгоритм Форда—Фалкерсона может не завершиться.
2. Докажите теорему о декомпозиции потока: если в сети G течёт некий поток f , то его можно разбить на несколько путей из s в t , а также на несколько замкнутых циклов.
3. Сведите задачу поиска максимального паросочетания в двудольном графе к поиску максимального потока в некоторой сети. Сравните время работы алгоритмов Форда—Фалкерсона и Эдмондса—Карпа. Можно ли проделать то же в произвольном (необязательно двудольном) графе?
4. На фабрику поступило n заказов, реализация i -го из которых принесёт ей прибыль в a_i рублей. Каждый заказ для производства требует некоторого набора инструментов. Пусть всего зависимостей “заказ—инструмент” ровно k . Инструменты можно переиспользовать, то есть задействовать в нескольких заказах. Однако в данный момент на фабрике вообще нет инструментов, так что покупка j -го из них обойдётся в b_j рублей. Конечно, от приёма каких-то заказов или покупки каких-то инструментов фабрика может отказаться. Какие заказы следует реализовать для максимизации прибыли (с учётом трат на инструменты)?
5. Как найти минимальный разрез в графе?
6. В турнире участвует n команд, в каждой команде по k членов. Каждый участник в совершенстве владеет одной из m тем. Какое максимальное количество команд можно выбрать так, чтобы в них можно было выбрать по капитану таким образом, что темы, которыми владеют все капитаны, были попарно различны? Асимптотика: $O(knm)$.
7. Грабители хотят украсть изумруд из музея и вывезти его в своё логово! Формально, дан неориентированный граф, в котором выделены вершины s и t . Полиция может заблокировать движение через город $i \notin \{s, t\}$, потратив a_i ресурсов. Найдите минимальное необходимое число ресурсов, чтобы заблокировать грабителям путь из s в t . Асимптотика: $O(n(n + m)^2)$.
8. Есть n предприятий и n банков, предприятия могут брать кредиты у банков (причём одно предприятие может брать кредиты в нескольких банках и наоборот, один банк может давать кредиты нескольким предприятиям). Известно, что i -е предприятие хочет взять в кредит суммарно a_i рублей, а j -й банк готов предоставить кредитов суммарно на b_j рублей. Могут ли предприятия взять кредиты так, чтобы все условия были выполнены? Асимптотика: $\text{poly}(n)$.