Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A (k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1,\dots,n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1,\dots,n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ALMOST3COL} = \{G \mid$ все вершины графа $G$, кроме, возможно, одной, можно правильным образом раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SCSS} = \{(R,k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k\ \forall x \in R\ x \sqsubset w\}$. (Задача о наименьшей надстроке в алфавите $\Sigma$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x,x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G,s,t,\pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ONE\text{-}THIRD\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно треть переменных равна 1$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BETWEENNESS} = \{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f\colon A \to \{1,2,\ldots,|A|\}\, \forall (a,b,c) \in C\ (f(a) < f(b) < f(c)$ или $f(a) > f(b) > f(c))\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G,s,t,k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{2\text{-}VISITS\text{-}HAMCYCLE} = \{G \mid$ в неориентированном графе $G$ существует цикл, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более чем дважды$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BETWEENNESS} = \{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f\colon A \to \{1,2,\dots,|A|\}\, \forall (a,b,c) \in C\ (f(a) < f(b) < f(c)$ или $f(a) > f(b) > f(c))\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Бодренков Антон (М05-316а), группа 122, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$ является палиндромом, $y$ является подсловом $z\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \ldots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ALMOST3COL} = \{G \mid$ все вершины графа $G$, кроме, возможно, одной, можно правильным образом раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Гаврилин Александр, группа 122, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMCYCLEFIXEDARC} = \{(G, e) \mid$ в ориентированном графе $G$ найдётся гамильтонов цикл, проходящий через ребро $e\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHCONTRACTABILITY} = \{(G, H) \mid$ из графа $G$ можно получить граф $H$ последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра $(u, v)$ вместо него образуется новая вершина $w$, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин $u$ и $v$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid H$ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то $G \in A$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMTREFOIL} = \{(G, s, t, u) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины $s$, $t$ и $u$, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NOMONOCHROMTRIANGLE} = \{G \mid$ рёбра графа $G$ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y(x, y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G, s, t, \pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TWO\text{-}THIRDS\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны 1$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NOMONOCHROMTRIANGLE} = \{G \mid$ рёбра графа $G$ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid$ существует граф $G \in A$, в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных $H$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUE\text{-}AFTER\text{-}EXPANSION} = \{(G,k) \mid$ в неориентированный граф $G$ можно добавить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе была клика размера $k\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NOMONOCHROMTRIANGLE} = \{G \mid$ рёбра графа $G$ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Калимуллин Евгений, группа 122, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2 \dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2 \dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1 - x_1)x_2 \dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины неориентированного графа $G$ можно разбить на $k$ групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, можно раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е. } s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUE\text{-}AFTER\text{-}EXPANSION} = \{(G, k) \mid$ в неориентированный граф $G$ можно добавить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе была клика размера $k\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BETWEENNESS} = \{(A, C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1, 2, \dots, |A|\}\, \forall (a, b, c) \in C\ (f(a) < f(b) < f(c)$ или $f(a) > f(b) > f(c))\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BIPARTITESUBGRAPH} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы $k$ вершин$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$ является палиндромом, $y$ является подсловом $z\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DUMBBELL} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть подграф, состоящий из двух клик размера $k$, соединённых одним ребром$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXMINVERTEXCOVER} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \ldots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ALMOST3COL} = \{G \mid$ все вершины графа $G$, кроме, возможно, одной, можно правильным образом раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ имеет подслово, лежащее в $A$ и являющееся палиндромом$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDIFFERENT\text{-}SAT} = \{\varphi \mid$ формула $\varphi$ от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ такова, что для некоторого $i$ выполнимы и $\varphi|_{x_i=1}$, и $\varphi|_{x_i=0}\}$.

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BETWEENNESS} = \{(A, C) \mid C \subset A^3, \exists f\colon A \to \{1, 2, \dots, |A|\} \forall (a,b,c) \in C\ (f(a) < f(b) < f(c)$ или $f(a) > f(b) > f(c))\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TWO\text{-}THIRDS\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны 1$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXINDSET} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \text{ и } yx \in A\}$ (здесь $yx$ означает конкатенацию) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DOUBLEINDSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ существуют два непересекающихся независимых множества размера $k\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHCONTRACTABILITY} = \{(G, H) \mid$ из графа $G$ можно получить граф $H$ последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра $(u, v)$ вместо него образуется новая вершина $w$, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин $u$ и $v$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ имеет подслово, лежащее в $A$ и являющееся палиндромом$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины неориентированного графа $G$ можно разбить на $k$ групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, можно раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SCSS} = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$. (Задача о наименьшей надстроке в алфавите $\Sigma$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ имеет подслово, лежащее в $A$ и являющееся палиндромом$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k+10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DOUBLEINDSET} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ существуют два непересекающихся независимых множества размера $k\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть остовное дерево с не менее чем $k$ листьями$\}$. (Остовным деревом в графе $G$ называется подграф $G$, который является деревом и содержит все вершины $G$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid$ существует граф $G \in A$, в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных $H$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\text{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е.}$$
$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HYPERGRAPH\text{-}VCOVER} = \{(V, S, k) \mid S$ — система 3-элементных подмножеств $V$, такая что для некоторого множества $C \subset V$ из $k$ элементов любое множество из $S$ содержит хотя бы один элемент $C\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{1\text{-}PLANARITY} = \{G \mid$ граф $G$ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x,x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G,S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NONCONSTSAT} = \{\varphi :$ у формулы $\varphi$ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны $1\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXMINVERTEXCOVER} = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s'\text{, отличающегося от } s \text{ заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \dots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \dots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDIFFERENT\text{-}SAT} = \{\varphi \mid$ формула $\varphi$ от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ такова, что для некоторого $i$ выполнимы и $\varphi|_{x_i=1}$, и $\varphi|_{x_i=0}\}$.

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{1\text{-}PLANARITY} = \{G \mid$ граф $G$ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \dots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные}).. $$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1,\dots,n_k) \mid$ набор чисел $n_1,\dots,n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{TWO\text{-}THIRDS\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны 1$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{TILING} = \{(T, 1^N) \mid$ квадрат $N \times N$ можно замостить плитками из набора $T\}$. (Плитка есть элемент $C^4$ для некоторого множества цветов $C$. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{2\text{-}VISITS\text{-}HAMCYCLE} = \{G \mid$ в неориентированном графе $G$ существует цикл, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более чем дважды$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CROSSWORD} = \{(W, A) \mid$ существует кроссворд из словаря $W$ с маской $A\}$. ($W$ — множество слов в некотором алфавите $\Sigma$, $A$ — матрица размера $n \times n$ из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток $(i, j)$, для которых $A_{ij} = 1$, в $\Sigma$, такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в $W$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\text{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины неориентированного графа $G$ можно разбить на $k$ групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, имеет гамильтонов цикл$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2 \dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2 \dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1 - x_1)x_2 \dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid$ существует граф $G \in A$, в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных $H$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \dots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \dots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDSETFIXEDVERTEX} = \{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть независимое множество размера $k$, содержащее вершину $v\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETBASIS} = \{(C, k) \mid C$ есть набор подмножеств конечного множества $S$ и существует набор $B$ из $k$ подмножеств $S$, такой что любое $c \in C$ можно получить как пересечение некоторого числа множеств из $B\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1,\ldots,n_k),S,m) \mid$ из набора чисел $n_1,\ldots,n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ODDMAXCLIQUE} = \{G \mid$ в графе $G$ есть максимальная (неувеличиваемая) клика из нечётного числа вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXMINVERTEXCOVER} = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x, x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е. } s = s_1\dots s_k, s' = s_{i+1}\dots s_ks_1\dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLEXCLUSION} = \{(G, k) \mid$ из неориентированного графа $G$ можно удалить не более $k$ рёбер, так что оставшийся подграф можно раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CROSSWORD} = \{(W, A) \mid$ существует кроссворд из словаря $W$ с маской $A\}$. ($W$ — множество слов в некотором алфавите $\Sigma$, $A$ — матрица размера $n\times n$ из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток $(i, j)$, для которых $A_{ij} = 1$, в $\Sigma$, такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в $W$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Озернова Вероника, группа 123, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x, x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMTREFOIL} = \{(G, s, t, u) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины $s$, $t$ и $u$, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть остовное дерево с не менее чем $k$ листьями$\}$. (Остовным деревом в графе $G$ называется подграф $G$, который является деревом и содержит все вершины $G$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists x\, |x| = |y| \text{ и } yx \in A\}$ (здесь $yx$ означает конкатенацию) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMPATHCYCLE} = \{(G,s,t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть непересекающиеся путь и цикл, такие что $s$ является началом пути, $t$ — его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть остовное дерево с не менее чем $k$ листьями$\}$. (Остовным деревом в графе $G$ называется подграф $G$, который является деревом и содержит все вершины $G$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CONNECTEDDOMSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть связное доминирующее множество размера не больше $k\}$. (Связным доминирующим множеством $D$ в графе $G$ называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне $D$ связана ребром с одной из точек $D$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \dots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \dots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMTREFOIL} = \{(G, s, t, u) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины $s$, $t$ и $u$, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHCONTRACTABILITY} = \{(G, H) \mid$ из графа $G$ можно получить граф $H$ последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра $(u, v)$ вместо него образуется новая вершина $w$, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин $u$ и $v$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXMINVERTEXCOVER} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G,s,t,\pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETBASIS} = \{(C,k) \mid C$ есть набор подмножеств конечного множества $S$ и существует набор $B$ из $k$ подмножеств $S$, такой что любое $c \in C$ можно получить как пересечение некоторого числа множеств из $B\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G,S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DUMBBELL} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть подграф, состоящий из двух клик размера $k$, соединённых одним ребром$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{1\text{-}PLANARITY} = \{G \mid$ граф $G$ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists x\, |x| = |y| \text{ и } yx \in A\}$ (здесь $yx$ означает конкатенацию) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G,s,t,k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NONCONSTSAT} = \{\varphi :$ у формулы $\varphi$ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны 1$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BIPARTITESUBGRAPH} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Христофорова Дарья, группа 123, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BIPARTITESUBGRAPH} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DISJOINTCLIQUES} = \{(G,k) \mid$ среди вершин графа $G$ можно выделить $k$ попарно непересекающихся клик различных размеров$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Шопяк Егор, группа 123, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2 \dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2 \dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1 - x_1)x_2 \dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ имеет подслово, лежащее в $A$ и являющееся палиндромом$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \dots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \dots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLFIXEDVERTICES} = \{(G, u, v) \mid$ вершины графа $G$ можно раскрасить в 3 цвета, так чтобы вершины $u$ и $v$ были одного цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHWIDTH} = \{(G, k) \mid$ ширина графа $G$ не превосходит $k\}$. (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция $f\colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$, такая что для всех $(u, v) \in E$ выполнено $|f(u) - f(v)| < k$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1,\ldots,n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1,\ldots,n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NONCONSTSAT} = \{\varphi :$ у формулы $\varphi$ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны $1\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BIPARTITESUBGRAPH} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y (x, y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HALF3COL} = \{G \mid$ в графе $G$ можно выбрать половину или больше вершин и раскрасить индуцируемый ими подграф в три цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TILING} = \{(T, 1^N) \mid$ квадрат $N \times N$ можно замостить плитками из набора $T\}$. (Плитка есть элемент $C^4$ для некоторого множества цветов $C$. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid$ существует граф $G \in A$, в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных $H$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETSPLITTING} = \{(S, (A_1, \ldots, A_k)) \mid \forall i\ A_i \subset S$ и существует разбиение $S = S_1 \sqcup S_2$, такое что $\forall i, A_i \cap S_1 \neq \varnothing$ и $A_i \cap S_2 \neq \varnothing\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BETWEENNESS} = \{(A, C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1, 2, \ldots, |A|\}\, \forall (a, b, c) \in C\ (f(a) < f(b) < f(c)$ или $f(a) > f(b) > f(c))\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Долгополый Николай, группа 124, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists x\, |x| = |y| \text{ и } yx \in A\}$ (здесь $yx$ означает конкатенацию) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G,s,t,\pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BARBELL} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть подграф, состоящий из двух клик размера $k$, соединённых простым путём из $k$ рёбер$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{6\text{-}2\text{-}1\text{-}SPLITTING} = \{(n_1,\dots,n_m) \in \mathbb{N}^* \mid \exists I,J,K(I \sqcup J \sqcup K = \{1,\dots,m\} \wedge 6\sum_{i\in I} n_i = 2\sum_{j\in J} n_j = \sum_{k\in K} n_k)\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{MAXMINVERTEXCOVER} = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid H$ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то $G \in A$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{2\text{-}VISITS\text{-}HAMPATH} = \{(G, s, t) \mid$ в неориентированном графе $G$ существует путь из $s$ в $t$, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более, чем дважды$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid$ $\varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{HYPERGRAPH\text{-}VCOVER} = \{(V, S, k) \mid S$ — система 3-элементных подмножеств $V$, такая что для некоторого множества $C \subset V$ из $k$ элементов любое множество из $S$ содержит хотя бы один элемент $C\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{SCSS} = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k\ \forall x \in R\ x \sqsubset w\}$. (Задача о наименьшей надстроке в алфавите $\Sigma$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists x\, |x| = |y| \text{ и } yx \in A\}$ (здесь $yx$ означает конкатенацию) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе } G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\textsf{5-3-1-SPLITTING} = \{(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^* \mid \exists I, J, K(I \sqcup J \sqcup K = \{1, \dots, m\} \wedge 5\sum_{i \in I} n_i = 3\sum_{j \in J} n_j = \sum_{k \in K} n_k)\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXCLIQUE} = \{(G, k) \mid \text{в неориентированном графе } G \text{ есть неувеличиваемая клика из не более чем } k \text{ вершин}\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi \text{ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше } k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Манжула Елизавета, группа 124, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A (k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \dots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \dots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETSPLITTING} = \{(S, (A_1, \dots, A_k)) \mid \forall i\ A_i \subset S$ и существует разбиение $S = S_1 \sqcup S_2$, такое что $\forall i, A_i \cap S_1 \neq \varnothing$ и $A_i \cap S_2 \neq \varnothing\}$

**6.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SCSS} = \{(R,k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k\ \forall x \in R\ x \sqsubset w\}$. (Задача о наименьшей надстроке в алфавите $\Sigma$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x, x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е. } s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DOUBLEINDSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ существуют два непересекающихся независимых множества размера $k\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TILING} = \{(T, 1^N) \mid$ квадрат $N \times N$ можно замостить плитками из набора $T\}$. (Плитка есть элемент $C^4$ для некоторого множества цветов $C$. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G,s,t,\pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DISJOINTINDSETS} = \{(G,k) \mid$ среди вершин графа $G$ можно выделить $k$ попарно непересекающихся независимых множеств различных размеров$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TILING} = \{(T, 1^N) \mid$ квадрат $N \times N$ можно замостить плитками из набора $T\}$. (Плитка есть элемент $C^4$ для некоторого множества цветов $C$. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists x\, |x| = |y| \text{ и } yx \in A\}$ (здесь $yx$ означает конкатенацию) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины неориентированного графа $G$ можно разбить на $k$ групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, имеет гамильтонов цикл$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SQRT} = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c)\ x^2 \equiv a \mod b\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Салимзянов Булат, группа 124, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$ является палиндромом, $y$ является подсловом $z\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ODDMAXCLIQUE} = \{G \mid$ в графе $G$ есть максимальная (неувеличиваемая) клика из нечётного числа вершин$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHWIDTH} = \{(G,k) \mid$ ширина графа $G$ не превосходит $k\}$. (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция $f\colon V \to \{1,2,\dots,|V|\}$, такая что для всех $(u,v) \in E$ выполнено $|f(u) - f(v)| < k$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Шевцова Маргарита, группа 124, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDIFFERENT\text{-}SAT} = \{\varphi \mid$ формула $\varphi$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такова, что для некоторого $i$ выполнимы и $\varphi|_{x_i=1}$, и $\varphi|_{x_i=0}\}$.

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CONNECTEDDOMSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть связное доминирующее множество размера не больше $k\}$. (Связным доминирующим множеством $D$ в графе $G$ называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне $D$ связана ребром с одной из точек $D$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x, x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUEPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины графа $G$ можно разбить на $k$ групп, внутри каждой из которых проведены все рёбра$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETBASIS} = \{(C, k) \mid C$ есть набор подмножеств конечного множества $S$ и существует набор $B$ из $k$ подмножеств $S$, такой что любое $c \in C$ можно получить как пересечение некоторого числа множеств из $B\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G,S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ALMOSTHAMCYCLE} = \{G \mid$ граф $G$ связен и в нём существует простой цикл, проходящий через все вершины, кроме ровно одной$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове}).. $$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDEPPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины графа $G$ можно разбить на $k$ групп, внутри каждой из которых не проведено рёбер$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SQRT} = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c)\ x^2 \equiv a \mod b\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Зубов Павел, группа 125, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists x\, |x| = |y| \text{ и } yx \in A\}$ (здесь $yx$ означает конкатенацию) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т. е.}$$
$$s = s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s' = s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMPATHCYCLE} = \{(G,s,t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть непересекающиеся путь и цикл, такие что $s$ является началом пути, $t$ — его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHWIDTH} = \{(G,k) \mid$ ширина графа $G$ не превосходит $k\}$. (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция $f\colon V \to \{1,2,\dots,|V|\}$, такая что для всех $(u,v) \in E$ выполнено $|f(u) - f(v)| < k$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Иванов-Сухолитко Александр, группа 125, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUEPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины графа $G$ можно разбить на $k$ групп, внутри каждой из которых проведены все рёбра$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CROSSWORD} = \{(W, A) \mid$ существует кроссворд из словаря $W$ с маской $A\}$. ($W$ — множество слов в некотором алфавите $\Sigma$, $A$ — матрица размера $n \times n$ из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток $(i, j)$, для которых $A_{ij} = 1$, в $\Sigma$, такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в $W$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{ONE\text{-}THIRD\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно треть переменных равна 1$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NOMONOCHROMTRIANGLE} = \{G \mid$ рёбра графа $G$ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDSET\text{-}AFTER\text{-}EXCLUSION} = \{(G, k) \mid$ из неориентированного графа $G$ можно исключить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе было независимое множество размера $k\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x, x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUE\text{-}AFTER\text{-}EXPANSION} = \{(G, k) \mid$ в неориентированный граф $G$ можно добавить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе была клика размера $k\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETBASIS} = \{(C, k) \mid C$ есть набор подмножеств конечного множества $S$ и существует набор $B$ из $k$ подмножеств $S$, такой что любое $c \in C$ можно получить как пересечение некоторого числа множеств из $B\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{2\text{-}VISITS\text{-}HAMCYCLE} = \{G \mid$ в неориентированном графе $G$ существует цикл, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более чем дважды$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CONNECTEDDOMSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть связное доминирующее множество размера не больше $k\}$. (Связным доминирующим множеством $D$ в графе $G$ называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне $D$ связана ребром с одной из точек $D$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s'\text{, отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т. е.}$$
$$s = s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k,\ s' = s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1,\dots,n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1,\dots,n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{6\text{-}2\text{-}1\text{-}SPLITTING} = \{(n_1,\dots,n_m) \in \mathbb{N}^* \mid \exists I, J, K(I \sqcup J \sqcup K = \{1,\dots,m\} \wedge 6\sum_{i\in I} n_i = 2\sum_{j\in J} n_j = \sum_{k\in K} n_k)\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x, x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{2\text{-}VISITS\text{-}HAMPATH} = \{(G, s, t) \mid$ в неориентированном графе $G$ существует путь из $s$ в $t$, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более, чем дважды$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHCONTRACTABILITY} = \{(G, H) \mid$ из графа $G$ можно получить граф $H$ последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра $(u, v)$ вместо него образуется новая вершина $w$, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин $u$ и $v$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т. е.}$$
$$s = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_{j+1} \dots s_k,\ s' = s_1 \dots s_{i-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1} s_i s_{j+1} \dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{6\text{-}2\text{-}1\text{-}SPLITTING} = \{(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^* \mid \exists I, J, K(I \sqcup J \sqcup K = \{1, \dots, m\} \wedge 6\sum_{i \in I} n_i = 2\sum_{j \in J} n_j = \sum_{k \in K} n_k)\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \dots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HALF3COL} = \{G \mid$ в графе $G$ можно выбрать половину или больше вершин и раскрасить индуцируемый ими подграф в три цвета$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXINDSET} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т. е.}$$
$$s = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_{j+1} \dots s_k, s' = s_1 \dots s_{i-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1} s_i s_{j+1} \dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1,\dots,n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1,\dots,n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DISJOINTCLIQUES} = \{(G,k) \mid$ среди вершин графа $G$ можно выделить $k$ попарно непересекающихся клик различных размеров$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G,l,E',b) \mid G=(V,E)$ — граф, $l\colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более $b$, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s'\text{, отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е. } s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \dots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \dots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s'\text{, отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е. } s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G,s,t,\pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G,l,E',b) \mid G = (V,E)$ — граф, $l\colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более $b$, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi,k) \mid$ $\varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{DOUBLEINDSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ существуют два непересекающихся независимых множества размера $k\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{MINMAXCLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемая клика из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Боровец Андрей (М05-316а), группа 126, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y(x, y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETSPLITTING} = \{(S, (A_1, \ldots, A_k)) \mid \forall i\ A_i \subset S$ и существует разбиение $S = S_1 \sqcup S_2$, такое что $\forall i, A_i \cap S_1 \neq \varnothing$ и $A_i \cap S_2 \neq \varnothing\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s'\text{, отличающегося от } s \text{ заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GAPHAMPATH} = \{(G,s,t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть два непересекающихся простых пути, такие что $s$ является началом одного из них, $t$ — концом другого, а каждая вершина входит ровно в один$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NOMONOCHROMTRIANGLE} = \{G \mid$ рёбра графа $G$ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s'\text{, отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е.}$$
$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETBASIS} = \{(C,k) \mid C$ есть набор подмножеств конечного множества $S$ и существует набор $B$ из $k$ подмножеств $S$, такой что любое $c \in C$ можно получить как пересечение некоторого числа множеств из $B\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{MINMAXINDSET} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$$
$$\text{заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDSETFIXEDVERTEX} = \{(G,k,v) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть независимое множество размера $k$, содержащее вершину $v\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G,l,E',b) \mid G = (V,E)$ — граф, $l\colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более $b$, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ имеет подслово, лежащее в $A$ и являющееся палиндромом$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \ldots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ALMOSTHAMCYCLE} = \{G \mid$ граф $G$ связен и в нём существует простой цикл, проходящий через все вершины, кроме ровно одной$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SQRT} = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c)\ x^2 \equiv a \mod b\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$ является палиндромом, $y$ является подсловом $z\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HALFHAMCYCLE} = \{G \mid$ граф $G$ связен и в нём существует простой цикл, проходящий хотя бы через половину вершин$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHCONTRACTABILITY} = \{(G,H) \mid$ из графа $G$ можно получить граф $H$ последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра $(u,v)$ вместо него образуется новая вершина $w$, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин $u$ и $v$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{3COLEXCLUSION} = \{(G, k) \mid$ из неориентированного графа $G$ можно удалить не более $k$ рёбер, так что оставшийся подграф можно раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid$ $\varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists x\, |x| = |y| \text{ и } yx \in A\}$ (здесь $yx$ означает конкатенацию) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DUMBBELL} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть подграф, состоящий из двух клик размера $k$, соединённых одним ребром$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{1\text{-}PLANARITY} = \{G \mid$ граф $G$ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2 \dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2 \dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1 - x_1)x_2 \dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUEFIXEDVERTEX} = \{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть клика размера $k$, содержащая вершину $v\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SQRT} = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c)\ x^2 \equiv a \mod b\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{SQRT} = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c)\ x^2 \equiv a \mod b\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ имеет подслово, лежащее в $A$ и являющееся палиндромом$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ONE\text{-}THIRD\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно треть переменных равна 1$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid$ существует граф $G \in A$, в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных $H$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G, s, t, \pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMPATHCYCLE} = \{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть непересекающиеся путь и цикл, такие что $s$ является началом пути, $t$ — его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHWIDTH} = \{(G, k) \mid$ ширина графа $G$ не превосходит $k\}$. (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция $f\colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$, такая что для всех $(u, v) \in E$ выполнено $|f(u) - f(v)| < k$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid H$ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то $G \in A$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1$ и $s$ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G,s,t,k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ONE\text{-}THIRD\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно треть переменных равна $1\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SCSS} = \{(R,k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k\ \forall x \in R\ x \sqsubset w\}$. (Задача о наименьшей надстроке в алфавите $\Sigma$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \dots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Чернятин Александр, группа 126, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{HAMADDITION} = \{(G, k) \mid$ в неориентированный граф $G$ можно добавить не более $k$ рёбер, так чтобы в результирующем графе был гамильтонов цикл$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{SCSS} = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \; \forall x \in R \; x \sqsubset w\}$. (Задача о наименьшей надстроке в алфавите $\Sigma$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Асриян Александр (М05-307а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLEXCLUSION} = \{(G, k) \mid$ из неориентированного графа $G$ можно удалить не более $k$ рёбер, так что оставшийся подграф можно раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CONNECTEDDOMSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть связное доминирующее множество размера не больше $k\}$. (Связным доминирующим множеством $D$ в графе $G$ называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне $D$ связана ребром с одной из точек $D$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**8 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CLIQUEPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины графа $G$ можно разбить на $k$ групп, внутри каждой из которых проведены все рёбра$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CROSSWORD} = \{(W, A) \mid$ существует кроссворд из словаря $W$ с маской $A\}$. ($W$ — множество слов в некотором алфавите $\Sigma$, $A$ — матрица размера $n \times n$ из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток $(i, j)$, для которых $A_{ij} = 1$, в $\Sigma$, такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в $W$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ имеет подслово, лежащее в $A$ и являющееся палиндромом$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т.е. } s = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_{j+1} \dots s_k, s' = s_1 \dots s_{i-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1} s_i s_{j+1} \dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUEFIXEDVERTEX} = \{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть клика размера $k$, содержащая вершину $v\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G, l, E', b) \mid G = (V, E)$ — граф, $l\colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более $b$, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**8 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Егоров Максим (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid H$ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то $G \in A$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G,s,t,\pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{5\text{-}3\text{-}1\text{-}SPLITTING} = \{(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^* \mid \exists I, J, K (I \sqcup J \sqcup K = \{1, \ldots, m\} \wedge 5\sum_{i \in I} n_i = 3\sum_{j \in J} n_j = \sum_{k \in K} n_k)\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть остовное дерево с не менее чем $k$ листьями$\}$. (Остовным деревом в графе $G$ называется подграф $G$, который является деревом и содержит все вершины $G$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDSET\text{-}AFTER\text{-}EXCLUSION} = \{(G,k) \mid$ из неориентированного графа $G$ можно исключить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе было независимое множество размера $k\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SQRT} = \{(a,b,c) \mid \exists x \in (0,c)\ x^2 \equiv a \mod b\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUEFIXEDVERTEX} = \{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть клика размера $k$, содержащая вершину $v\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NOMONOCHROMTRIANGLE} = \{G \mid$ рёбра графа $G$ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G, s, t, \pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDSET\text{-}AFTER\text{-}EXCLUSION} = \{(G, k) \mid$ из неориентированного графа $G$ можно исключить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе было независимое множество размера $k\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXCLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемая клика из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**8.** (**8 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Картушин Леонид (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{SETBASIS} = \{(C, k) \mid C$ есть набор подмножеств конечного множества $S$ и существует набор $B$ из $k$ подмножеств $S$, такой что любое $c \in C$ можно получить как пересечение некоторого числа множеств из $B\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid$ $\varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NONCONSTSAT} = \{\varphi :$ у формулы $\varphi$ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны $1\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHWIDTH} = \{(G,k) \mid$ ширина графа $G$ не превосходит $k\}$. (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция $f\colon V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$, такая что для всех $(u,v) \in E$ выполнено $|f(u) - f(v)| < k$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Крехов Николай, группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y (x, y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDEPPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины графа $G$ можно разбить на $k$ групп, внутри каждой из которых не проведено рёбер$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть остовное дерево с не менее чем $k$ листьями$\}$. (Остовным деревом в графе $G$ называется подграф $G$, который является деревом и содержит все вершины $G$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**8 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{HYPERGRAPH\text{-}VCOVER} = \{(V, S, k) \mid S$ — система 3-элементных подмножеств $V$, такая что для некоторого множества $C \subset V$ из $k$ элементов любое множество из $S$ содержит хотя бы один элемент $C\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{BIPARTITESUBGRAPH} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Муратиди Александр (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{ODDMAXCLIQUE} = \{G \mid$ в графе $G$ есть максимальная (неувеличиваемая) клика из нечётного числа вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть остовное дерево с не менее чем $k$ листьями$\}$. (Остовным деревом в графе $G$ называется подграф $G$, который является деревом и содержит все вершины $G$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Набоков Рудольф (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове}).. $$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G,s,t,k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ALMOST3COL} = \{G \mid$ все вершины графа $G$, кроме, возможно, одной, можно правильным образом раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BIPARTITESUBGRAPH} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**8 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DISJOINTINDSETS} = \{(G,k) \mid$ среди вершин графа $G$ можно выделить $k$ попарно непересекающихся независимых множеств различных размеров$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TILING} = \{(T, 1^N) \mid$ квадрат $N \times N$ можно замостить плитками из набора $T\}$. (Плитка есть элемент $C^4$ для некоторого множества цветов $C$. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Прасковьин Арсений, группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BARBELL} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть подграф, состоящий из двух клик размера $k$, соединённых простым путём из $k$ рёбер$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TILING} = \{(T, 1^N) \mid$ квадрат $N \times N$ можно замостить плитками из набора $T\}$. (Плитка есть элемент $C^4$ для некоторого множества цветов $C$. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Прокофьев Илья (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2 \dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2 \dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1 - x_1)x_2 \dots x_{k-1}x_k$.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ имеет подслово, лежащее в $A$ и являющееся палиндромом$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{5\text{-}3\text{-}1\text{-}SPLITTING} = \{(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^* \mid \exists I, J, K(I \sqcup J \sqcup K = \{1, \dots, m\} \wedge 5\sum_{i \in I} n_i = 3\sum_{j \in J} n_j = \sum_{k \in K} n_k)\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHWIDTH} = \{(G, k) \mid$ ширина графа $G$ не превосходит $k\}$. (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция $f\colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$, такая что для всех $(u, v) \in E$ выполнено $|f(u) - f(v)| < k$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**8 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Сагателян Акоб (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMCYCLEFIXEDARC} = \{(G,e) \mid$ в ориентированном графе $G$ найдётся гамильтонов цикл, проходящий через ребро $e\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHCONTRACTABILITY} = \{(G,H) \mid$ из графа $G$ можно получить граф $H$ последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра $(u,v)$ вместо него образуется новая вершина $w$, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин $u$ и $v$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Смирнов Михаил (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \dots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \dots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины неориентированного графа $G$ можно разбить на $k$ групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, можно раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CONNECTEDDOMSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть связное доминирующее множество размера не больше $k\}$. (Связным доминирующим множеством $D$ в графе $G$ называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне $D$ связана ребром с одной из точек $D$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т. е.}$$
$$s = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_{j+1} \dots s_k,\ s' = s_1 \dots s_{i-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1} s_i s_{j+1} \dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ODDMAXINDEP} = \{G \mid$ в графе $G$ есть максимальное (неувеличиваемое) независимое множество из нечётного числа вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G, l, E', b) \mid G = (V, E)$ — граф, $l\colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более $b$, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$ является палиндромом, $y$ является подсловом $z\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е. } s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMTREFOIL} = \{(G, s, t, u) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины $s$, $t$ и $u$, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SCSS} = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$. (Задача о наименьшей надстроке в алфавите $\Sigma$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GAPHAMPATH} = \{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть два непересекающихся простых пути, такие что $s$ является началом одного из них, $t$ — концом другого, а каждая вершина входит ровно в один$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXCLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемая клика из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid$ существует граф $G \in A$, в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных $H$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е. } s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \dots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \dots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDSETFIXEDVERTEX} = \{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть независимое множество размера $k$, содержащее вершину $v\}$

**6.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NOMONOCHROMTRIANGLE} = \{G \mid$ рёбра графа $G$ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \dots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$ является палиндромом, $y$ является подсловом $z\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s'\text{, отличающегося от } s \text{ заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k+10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GAPHAMPATH} = \{(G,s,t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть два непересекающихся простых пути, такие что $s$ является началом одного из них, $t$ — концом другого, а каждая вершина входит ровно в один$\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHCONTRACTABILITY} = \{(G,H) \mid$ из графа $G$ можно получить граф $H$ последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра $(u,v)$ вместо него образуется новая вершина $w$, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин $u$ и $v$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k+10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMCYCLEFIXEDARC} = \{(G,e) \mid$ в ориентированном графе $G$ найдётся гамильтонов цикл, проходящий через ребро $e\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CROSSWORD} = \{(W,A) \mid$ существует кроссворд из словаря $W$ с маской $A\}$. ($W$ — множество слов в некотором алфавите $\Sigma$, $A$ — матрица размера $n \times n$ из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток $(i,j)$, для которых $A_{ij} = 1$, в $\Sigma$, такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в $W$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid H$ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то $G \in A$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDIFFERENT\text{-}SAT} = \{\varphi \mid$ формула $\varphi$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такова, что для некоторого $i$ выполнимы и $\varphi|_{x_i=1}$, и $\varphi|_{x_i=0}\}$.

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{1\text{-}PLANARITY} = \{G \mid \text{граф } G$ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{BETWEENNESS} = \{(A, C) \mid C \subset A^3, \exists f\colon A \to \{1, 2, \ldots, |A|\}\, \forall (a, b, c) \in C\ (f(a) < f(b) < f(c)$ или $f(a) > f(b) > f(c))\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid$ $\varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е. } s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G, s, t, \pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHWIDTH} = \{(G, k) \mid$ ширина графа $G$ не превосходит $k\}$. (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция $f \colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$, такая что для всех $(u, v) \in E$ выполнено $|f(u) - f(v)| < k$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HYPERGRAPH-VCOVER $= \{(V, S, k) \mid S$ — система 3-элементных подмножеств $V$, такая что для некоторого множества $C \subset V$ из $k$ элементов любое множество из $S$ содержит хотя бы один элемент $C\}$

**6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 1-PLANARITY $= \{G \mid$ граф $G$ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH $= \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y(x, y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ODDMAXCLIQUE} = \{G \mid$ в графе $G$ есть максимальная (неувеличиваемая) клика из нечётного числа вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть остовное дерево с не менее чем $k$ листьями$\}$. (Остовным деревом в графе $G$ называется подграф $G$, который является деревом и содержит все вершины $G$).

**7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{BIPARTITESUBGRAPH} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы $k$ вершин$\}$.

**7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Дивильковский Максим, группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid H$ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то $G \in A$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$$
$$\text{заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1,\ldots,n_k),S,1^m) \mid$ из набора чисел $n_1,\ldots,n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDEPPARTITION} = \{(G,k) \mid$ вершины графа $G$ можно разбить на $k$ групп, внутри каждой из которых не проведено рёбер$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1,\ldots,M_s,q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A (k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMADDITION} = \{(G, k) \mid$ в неориентированный граф $G$ можно добавить не более $k$ рёбер, так чтобы в результирующем графе был гамильтонов цикл$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HALFHAMCYCLE} = \{G \mid$ граф $G$ связен и в нём существует простой цикл, проходящий хотя бы через половину вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NOMONOCHROMTRIANGLE} = \{G \mid$ рёбра графа $G$ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G,S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TWO\text{-}THIRDS\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны $1\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Малышева Ольга (М05-316а), группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y(x, y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{2\text{-}VISITS\text{-}HAMCYCLE} = \{G \mid$ в неориентированном графе $G$ существует цикл, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более чем дважды$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHWIDTH} = \{(G, k) \mid$ ширина графа $G$ не превосходит $k\}$. (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция $f : V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$, такая что для всех $(u, v) \in E$ выполнено $|f(u) - f(v)| < k$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Моряков Данила (М05-316а), группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$$
$$\text{заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DISJOINTINDSETS} = \{(G,k) \mid$ среди вершин графа $G$ можно выделить $k$ попарно непересекающихся независимых множеств различных размеров$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TILING} = \{(T, 1^N) \mid$ квадрат $N \times N$ можно замостить плитками из набора $T\}$. (Плитка есть элемент $C^4$ для некоторого множества цветов $C$. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Наниз Пщимаф, группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1$ и $V(x,s') = 1$ для любого $s'$, отличающегося от $s$ обращением какого-то подслова, т. е.

$$s = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_{j+1} \dots s_k, s' = s_1 \dots s_{i-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1} s_i s_{j+1} \dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DISJOINTCLIQUES} = \{(G,k) \mid$ среди вершин графа $G$ можно выделить $k$ попарно непересекающихся клик различных размеров$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1, \dots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1, \dots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{INDSET\text{-}AFTER\text{-}EXCLUSION} = \{(G, k) \mid$ из неориентированного графа $G$ можно исключить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе было независимое множество размера $k\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{SQRT} = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c)\ x^2 \equiv a \mod b\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Панарин Александр, группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k+10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BARBELL} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть подграф, состоящий из двух клик размера $k$, соединённых простым путём из $k$ рёбер$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXCLIQUE} = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемая клика из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y (x, y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUEFIXEDVERTEX} = \{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть клика размера $k$, содержащая вершину $v\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXINDSET} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CROSSWORD} = \{(W, A) \mid$ существует кроссворд из словаря $W$ с маской $A\}$. ($W$ — множество слов в некотором алфавите $\Sigma$, $A$ — матрица размера $n \times n$ из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток $(i, j)$, для которых $A_{ij} = 1$, в $\Sigma$, такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в $W$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid H$ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то $G \in A$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{DIFF\text{-}DEGREES} = \{k \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят в попарно различных степенях $\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{2\text{-}VISITS\text{-}HAMPATH} = \{(G, s, t) \mid$ в неориентированном графе $G$ существует путь из $s$ в $t$, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более, чем дважды$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G, l, E', b) \mid G = (V, E)$ — граф, $l \colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более $b$, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$.

**7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Середкин Сергей (М05-316а), группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т. е. } s = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_{j+1} \dots s_k, s' = s_1 \dots s_{i-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1} s_i s_{j+1} \dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \dots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \dots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TWO\text{-}THIRDS\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны 1$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETBASIS} = \{(C, k) \mid C$ есть набор подмножеств конечного множества $S$ и существует набор $B$ из $k$ подмножеств $S$, такой что любое $c \in C$ можно получить как пересечение некоторого числа множеств из $B\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),} \\ \text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HALF3COL} = \{G \mid$ в графе $G$ можно выбрать половину или больше вершин и раскрасить индуцируемый ими подграф в три цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXINDSET} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{BETWEENNESS} = \{(A, C) \mid C \subset A^3, \exists f\colon A \to \{1, 2, \ldots, |A|\}\, \forall (a, b, c) \in C\ (f(a) < f(b) < f(c)$ или $f(a) > f(b) > f(c))\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CONNECTEDDOMSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть связное доминирующее множество размера не больше $k\}$. (Связным доминирующим множеством $D$ в графе $G$ называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне $D$ связана ребром с одной из точек $D$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G, s, t, \pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMCYCLEFIXEDARC} = \{(G, e) \mid$ в ориентированном графе $G$ найдётся гамильтонов цикл, проходящий через ребро $e\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G, l, E', b) \mid G = (V, E)$ — граф, $l \colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более $b$, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$.

**7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Федоренко Екатерина, группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \ldots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMTREFOIL} = \{(G, s, t, u) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины $s$, $t$ и $u$, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{1\text{-}PLANARITY} = \{G \mid$ граф $G$ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ имеет подслово, лежащее в $A$ и являющееся палиндромом$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т. е.}$$
$$s = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_{j+1} \dots s_k,\ s' = s_1 \dots s_{i-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1} s_i s_{j+1} \dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMPARTITION} = \{(G,k) \mid$ вершины неориентированного графа $G$ можно разбить на $k$ групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, имеет гамильтонов цикл$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXCLIQUE} = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемая клика из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Щепановский Александр, группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$ является палиндромом, $y$ является подсловом $z\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NONCONSTSAT} = \{\varphi :$ у формулы $\varphi$ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны $1\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXINDSET} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Алекберов Ислам (М05-316а), группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{MINMAXCLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемая клика из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$ является палиндромом, $y$ является подсловом $z\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины неориентированного графа $G$ можно разбить на $k$ групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, можно раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{1\text{-}PLANARITY} = \{G \mid$ граф $G$ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid$ $\varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x, x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUE\text{-}AFTER\text{-}EXPANSION} = \{(G, k) \mid$ в неориентированный граф $G$ можно добавить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе была клика размера $k\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHCONTRACTABILITY} = \{(G, H) \mid$ из графа $G$ можно получить граф $H$ последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра $(u, v)$ вместо него образуется новая вершина $w$, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин $u$ и $v$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Атабекян Эдгар, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HALFHAMCYCLE} = \{G \mid$ граф $G$ связен и в нём существует простой цикл, проходящий хотя бы через половину вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXMINVERTEXCOVER} = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{2\text{-}VISITS\text{-}HAMPATH} = \{(G, s, t) \mid$ в неориентированном графе $G$ существует путь из $s$ в $t$, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более, чем дважды$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Боймуродов Хабибулло, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т. е. } s = s_1 \ldots s_{i-1} s_i s_{i+1} \ldots s_{j-1} s_j s_{j+1} \ldots s_k, s' = s_1 \ldots s_{i-1} s_j s_{j-1} \ldots s_{i+1} s_i s_{j+1} \ldots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ODDMAXINDEP} = \{G \mid$ в графе $G$ есть максимальное (неувеличиваемое) независимое множество из нечётного числа вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GRAPHWIDTH} = \{(G, k) \mid$ ширина графа $G$ не превосходит $k\}$. (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция $f\colon V \to \{1, 2, \ldots, |V|\}$, такая что для всех $(u, v) \in E$ выполнено $|f(u) - f(v)| < k$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Вашкевич Егор, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{INDEPPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины графа $G$ можно разбить на $k$ групп, внутри каждой из которых не проведено рёбер$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{BIPARTITESUBGRAPH} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid$ $\varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{ALMOSTHAMCYCLE} = \{G \mid$ граф $G$ связен и в нём существует простой цикл, проходящий через все вершины, кроме ровно одной$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть остовное дерево с не менее чем $k$ листьями$\}$. (Остовным деревом в графе $G$ называется подграф $G$, который является деревом и содержит все вершины $G$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G,s,t,k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DISJOINTCLIQUES} = \{(G,k) \mid$ среди вершин графа $G$ можно выделить $k$ попарно непересекающихся клик различных размеров$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{TILING} = \{(T, 1^N) \mid$ квадрат $N \times N$ можно замостить плитками из набора $T\}$. (Плитка есть элемент $C^4$ для некоторого множества цветов $C$. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists x\, |x| = |y| \text{ и } yx \in A\}$ (здесь $yx$ означает конкатенацию) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\text{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDIFFERENT\text{-}SAT} = \{\varphi \mid$ формула $\varphi$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такова, что для некоторого $i$ выполнимы и $\varphi|_{x_i=1}$, и $\varphi|_{x_i=0}\}$.

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{NOMONOCHROMTRIANGLE} = \{G \mid$ рёбра графа $G$ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Масленникова София, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CONNECTEDDOMSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть связное доминирующее множество размера не больше $k\}$. (Связным доминирующим множеством $D$ в графе $G$ называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне $D$ связана ребром с одной из точек $D$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Миранович Ян, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2 \dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2 \dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1 - x_1)x_2 \dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y (x, y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \dots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \dots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины неориентированного графа $G$ можно разбить на $k$ групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, имеет гамильтонов цикл$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Прохорчук Екатерина, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$$
$$\text{удвоением всех символов в каком-то подслове}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{2ALMOSTEULER} = \{G \mid$ после удаления не более чем двух рёбер в графе $G$ найдётся эйлеров цикл$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLFIXEDVERTICES} = \{(G, u, v) \mid$ вершины графа $G$ можно раскрасить в 3 цвета, так чтобы вершины $u$ и $v$ были одного цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXLEAFSPANTREE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть остовное дерево с не менее чем $k$ листьями$\}$. (Остовным деревом в графе $G$ называется подграф $G$, который является деревом и содержит все вершины $G$).

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid y$ можно получить из $x \in A$, вычеркнув не более половины символов $\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G, s, t, \pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GAPHAMPATH} = \{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть два непересекающихся простых пути, такие что $s$ является началом одного из них, $t$ — концом другого, а каждая вершина входит ровно в один$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G, l, E', b) \mid G = (V, E)$ — граф, $l \colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более $b$, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{BETWEENNESS} = \{(A, C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1, 2, \ldots, |A|\} \, \forall (a, b, c) \in C \ (f(a) < f(b) < f(c) \text{ или } f(a) > f(b) > f(c))\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G, s, t, \pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ODDMAXINDEP} = \{G \mid$ в графе $G$ есть максимальное (неувеличиваемое) независимое множество из нечётного числа вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень $3\}$.

**8.** (**8 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Стешенко Александр, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid$ существует граф $G \in A$, в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных $H$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BARBELL} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть подграф, состоящий из двух клик размера $k$, соединённых простым путём из $k$ рёбер$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{1\text{-}PLANARITY} = \{G \mid$ граф $G$ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ALMOSTHAMCYCLE} = \{G \mid$ граф $G$ связен и в нём существует простой цикл, проходящий через все вершины, кроме ровно одной$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s'\text{, отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е.}$$
$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETSPLITTING} = \{(S, (A_1, \dots, A_k)) \mid \forall i \ A_i \subset S$ и существует разбиение $S = S_1 \sqcup S_2$, такое что $\forall i, A_i \cap S_1 \neq \varnothing$ и $A_i \cap S_2 \neq \varnothing\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ обращением какого-то подслова, т. е.}$$
$$s = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_{j+1} \dots s_k, s' = s_1 \dots s_{i-1} s_j s_{j-1} \dots s_{i+1} s_i s_{j+1} \dots s_k)..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HALFHAMCYCLE} = \{G \mid$ граф $G$ связен и в нём существует простой цикл, проходящий хотя бы через половину вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXMINVERTEXCOVER} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**10 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid$ $\varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**5 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**8 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid$ существует граф $G \in A$, в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных $H$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**8 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**8 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1,\dots,n_k), S, m) \mid$ из набора чисел $n_1,\dots,n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**8 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{6\text{-}2\text{-}1\text{-}SPLITTING} = \{(n_1,\dots,n_m) \in \mathbb{N}^* \mid \exists I, J, K (I \sqcup J \sqcup K = \{1,\dots,m\} \wedge 6\sum_{i\in I} n_i = 2\sum_{j\in J} n_j = \sum_{k\in K} n_k)\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CROSSWORD} = \{(W, A) \mid$ существует кроссворд из словаря $W$ с маской $A\}$. ($W$ — множество слов в некотором алфавите $\Sigma$, $A$ — матрица размера $n\times n$ из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток $(i,j)$, для которых $A_{ij} = 1$, в $\Sigma$, такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в $W$).

**7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \dots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Ахмедов Амонуллохон, группа 152, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid H$ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то $G \in A$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{SHORTPATHS} = \{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе $G$ любой простой путь из $s$ в $t$ имеет длину не больше $k\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{INDSETFIXEDVERTEX} = \{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть независимое множество размера $k$, содержащее вершину $v\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXINDSET} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid \exists y (x, y) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DISJOINTINDSETS} = \{(G, k) \mid$ среди вершин графа $G$ можно выделить $k$ попарно непересекающихся независимых множеств различных размеров$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y \in A,\ y$ дважды входит в $z$ как подслово (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G,S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMPATHCYCLE} = \{(G,s,t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть непересекающиеся путь и цикл, такие что $s$ является началом пути, $t$ — его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETBASIS} = \{(C,k) \mid C$ есть набор подмножеств конечного множества $S$ и существует набор $B$ из $k$ подмножеств $S$, такой что любое $c \in C$ можно получить как пересечение некоторого числа множеств из $B\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \dots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{LONGESTPATH} = \{(G, s, t, \pi) \mid$ ориентированный простой путь $\pi$ соединяет вершины $s$ и $t$ в графе $G$, при этом он является самым длинным таким путём$\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{GRAPHCONTRACTABILITY} = \{(G, H) \mid$ из графа $G$ можно получить граф $H$ последовательностью стягиваний рёбер$\}$. (При стягивании ребра $(u, v)$ вместо него образуется новая вершина $w$, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин $u$ и $v$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Еселкепов Тамирлан, группа 152, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x1 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k1$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_kx_1x_2\dots x_{k-1}$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid$ существует граф $G \in A$, в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных $H$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MODULARSUBSETSUM} = \{((n_1,\dots,n_k),S,m) \mid$ из набора чисел $n_1,\dots,n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{GAPHAMPATH} = \{(G,s,t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть два непересекающихся простых пути, такие что $s$ является началом одного из них, $t$ — концом другого, а каждая вершина входит ровно в один$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SQRT} = \{(a,b,c) \mid \exists x \in (0,c)\ x^2 \equiv a \mod b\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP'}$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP'}$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP'} = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES} = \{k > 1 \mid$ в разложение $k$ на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве $\mathsf{RECURSIVE\text{-}DEGREES}$. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMPATHCYCLE} = \{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе $G$ есть непересекающиеся путь и цикл, такие что $s$ является началом пути, $t$ — его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \dots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \dots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{3COLFIXEDVERTICES} = \{(G, u, v) \mid$ вершины графа $G$ можно раскрасить в 3 цвета, так чтобы вершины $u$ и $v$ были одного цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CONNECTEDDOMSET} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть связное доминирующее множество размера не больше $k\}$. (Связным доминирующим множеством $D$ в графе $G$ называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне $D$ связана ребром с одной из точек $D$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе } G\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{HAMADDITION} = \{(G, k) \mid$ в неориентированный граф $G$ можно добавить не более $k$ рёбер, так чтобы в результирующем графе был гамильтонов цикл$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CROSSWORD} = \{(W, A) \mid$ существует кроссворд из словаря $W$ с маской $A\}$. ($W$ — множество слов в некотором алфавите $\Sigma$, $A$ — матрица размера $n \times n$ из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток $(i, j)$, для которых $A_{ij} = 1$, в $\Sigma$, такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в $W$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Лутфуллаев Сардор, группа 152, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{x \mid (x, x) \in A\}$ (здесь $A$ понимается как множество пар) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MINVCOVER} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HAMADDITION} = \{(G, k) \mid$ в неориентированный граф $G$ можно добавить не более $k$ рёбер, так чтобы в результирующем графе был гамильтонов цикл$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{BIPARTITESUBGRAPH} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{MAX2SAT} = \{(\varphi, k) \mid \varphi$ — формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше $k\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{z \mid \exists y, w \in A,\ y$ и $w$ входят в $z$ как подслова (вхождения могут перекрываться)$\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{ODDMAXINDEP} = \{G \mid$ в графе $G$ есть максимальное (неувеличиваемое) независимое множество из нечётного числа вершин$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{RURALPOSTMAN} = \{(G, l, E', b) \mid G = (V, E)$ — граф, $l \colon E \to \mathbb{N}$ — длины рёбер, $E' \subset E$, $b \in \mathbb{N}$ и существует цикл длины не более $b$, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из $E'\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{ALMOST\text{-}SET\text{-}COVERING} = \{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$ представлено как объединение $M_{i_j}$, при этом не больше $q$ элементов $M$ принадлежат более, чем одному из множеств $M_{i_j}\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \wedge m \vdots kl)\}$ (здесь $A$ понимается как множество натуральных чисел) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{5\text{-}3\text{-}1\text{-}SPLITTING} = \{(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^* \mid \exists I, J, K(I \sqcup J \sqcup K = \{1, \ldots, m\} \wedge 5\sum_{i \in I} n_i = 3\sum_{j \in J} n_j = \sum_{k \in K} n_k)\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXINDSET} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \ldots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLEXCLUSION} = \{(G,k) \mid$ из неориентированного графа $G$ можно удалить не более $k$ рёбер, так что оставшийся подграф можно раскрасить в 3 цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MAXMINVERTEXCOVER} = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid$ существует подпоследовательность $y$, лежащая в $A\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x,s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s'\text{, отличающегося от } s \text{ удвоением всех символов в каком-то подслове})..$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{UNARYMODSUBSETSUM} = \{((n_1,\ldots,n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел $n_1,\ldots,n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $S$ по модулю $m\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{DUMBBELL} = \{(G,k) \mid$ в графе $G$ есть подграф, состоящий из двух клик размера $k$, соединённых одним ребром$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SETBASIS} = \{(C,k) \mid C$ есть набор подмножеств конечного множества $S$ и существует набор $B$ из $k$ подмножеств $S$, такой что любое $c \in C$ можно получить как пересечение некоторого числа множеств из $B\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{NAE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки $x = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$ в одну из четырёх ячеек $x0 = x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$, $x' = x_1x_2\dots x_{k-1}$, $cycle(x) = x_2\dots x_{k-1}x_kx_1$ или $inv(x) = (1-x_1)x_2\dots x_{k-1}x_k$.

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$ является палиндромом, $y$ является подсловом $z\}$ также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$$
$$\text{в котором есть независимое множество размером в половину графа)..}$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{MAXCLIQUE} = \{(G, S) \mid$ вершины $S$ образуют клику наибольшего размера в графе $G\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CLIQUEPARTITION} = \{(G, k) \mid$ вершины графа $G$ можно разбить на $k$ групп, внутри каждой из которых проведены все рёбра$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{SCSS} = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k\ \forall x \in R\ x \sqsubset w\}$. (Задача о наименьшей надстроке в алфавите $\Sigma$).

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{CLAQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть полный двудольный подграф с долями размера по $k\}$. (Иными словами, найдутся $V_1$ и $V_2$, такие что $|V_1| = |V_2| = k$ и $V_1 \times V_2 \subset E$).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$$

.

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{RESTRICTED\text{-}CLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в графе $G$ есть клика на $k$ вершинах, а степень каждой вершины в $G$ не превосходит $k + 10\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{HALF3COL} = \{G \mid$ в графе $G$ можно выбрать половину или больше вершин и раскрасить индуцируемый ими подграф в три цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{MINMAXCLIQUE} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе $G$ есть неувеличиваемая клика из не более чем $k$ вершин$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала$\}$.

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

**1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).

а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.

б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

**2.** (**5 баллов**) Докажите, что если $A \in \mathbf{NP}$, то и язык $\{H \mid H$ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то $G \in A$, при этом число вершин $G$ не больше квадрата числа вершин $H\}$ (здесь произвольная строка, лежащая в $A$, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в $\mathbf{NP}$.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } V(x, s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

**4.** (**5 баллов**) Определим язык $\mathsf{EQUALSPLIT} = \{(n_1, \ldots, n_k) \mid$ набор чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно разбить на две группы с равными суммами$\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

**5.** (**5 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{3COLFIXEDVERTICES} = \{(G, u, v) \mid$ вершины графа $G$ можно раскрасить в 3 цвета, так чтобы вершины $u$ и $v$ были одного цвета$\}$

**6.** (**10 баллов**) Докажите $\mathbf{NP}$-полноту языка $\mathsf{CUBICSUBGRAPH} = \{G \mid$ в графе $G$ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3$\}$.

**7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку $\mathsf{SUDOKU} = \{P \mid$ позиция $P$ в обобщённом судоку имеет решение$\}$ (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера $n^2 \times n^2$ расположены числа от 1 до $n^2$. Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из $n^2$ квадратов $n \times n$, на которые разбита доска, встречались все числа).

**8.** (**10 баллов**) Докажите, что $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$. (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

## Содержание