МФТИ, сложность вычислений, осень 2023
Семинар 06. Самосводимости и пэддинг

Определение. $\mathbf{EXP} = \bigcup\limits_{c=1}^{+\infty} \mathbf{DTIME}(2^{n^c})$.

Определение. $\mathbf{NEXP} = \bigcup\limits_{c=1}^{+\infty} \mathbf{NTIME}(2^{n^c})$.

Путь $A \in \mathbf{NP}$, соответствующий ему верификатор — $V(x, s)$. Рассмотрим следующую задачу: по входу x нужно либо сообщить, что $x \notin A$, либо выдать такое s, что $V(x, s) = 1$. Если такую задачу можно решить за полиномиальное время при помощи оракула A, то говорим, что A обладает самосводимостью.

---

1. Постройте самосводимость для следующих языков:

а) $\mathsf{HAMPATH} = \{G \mid$ в орграфе G есть гамильтонов путь$\}$;

б) $\mathsf{VERTEXCOVER} = \{(G, k) \mid$ в графе G есть вершинное покрытие размера не более $k\}$;

в) $\mathsf{SUBSETSUM} = \{(k, n_1, n_2, \ldots, n_k, N) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $N\}$;

г) $\mathsf{3COL} = \{G \mid \chi(G) \leqslant 3\}$;

д) $\mathsf{SUBSET\text{-}SUM} = \{(k, n_1, \ldots, n_k, N) \mid \exists I \subset \{1, \ldots, k\} : \sum\limits_{i \in I} n_i = N\}$;

е) $\{(k, n_1, \ldots, n_k, N) \mid$ существуют целые неотрицательные $a_1, \ldots, a_k$, такие что $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i n_i = N\}$;

ж) $\mathsf{GI} = \{(G_1, G_2) \mid$ графы G_1 и G_2 изоморфны$\}$.

2. Докажите, что если $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, то $\mathbf{EXP} = \mathbf{NEXP}$.

3. Докажите, что если любой унарный язык из $\mathbf{NP}$ лежит в $\mathbf{P}$, то $\mathbf{EXP} = \mathbf{NEXP}$.

4. Зная, что $\mathbf{E} \neq \mathbf{EXP}$, докажите, что $\mathbf{NP} \neq \mathbf{EXP}$.

1.

а) Можно ли сделать s стартовой вершиной гамильтонова пути? Для этого можно удалить все рёбра, входящие в s, и проверить гамильтоновость. Альтернативно, можно удалять ненужные рёбра.

б) Можно ли не включать v в вершинное покрытие?

в) Можно ли не включать n_1 в сумму для получения N?

г) Можно ли считать, что u и v покрашены в один цвет? Можно, если граф, полученный после их стягивания в одну вершину, останется 3-раскрашиваемым.

д) Можно ли выбросить первый предмет? Если нельзя, то его нужно добавить к ответу, вычесть из N его вес и всё равно выкинуть.

е) Бинарным поиском найдите максимально возможное значение a_1, затем удалите n_1.

ж) Каноническое решение со стрелочками. Научимся определять, существует ли изоморфизм G_1 и G_2, переводящий вершину i в вершину j (пусть $n \geqslant 2$). Для этого к обеим этим вершинам дорисуем «стрелочки»: цепочку длины $n+2$ вершин, и ещё два отдельных ребра из ближайшей к i (или j) вершины этой цепочки. Можно показать, что любой изоморфизм таких графов со стрелочками обязан переводить конец стрелочки в конец стрелочки, а значит, и i в j.

Более простое решение. Существует ли изоморфизм, отображающий 1 в $\pi(1)$, 2 в $\pi(2)$, ..., k в $\pi(k)$? К вершине i и $\pi(i)$ подвесим $2ni$ листьев. Тогда k обязана перейти в $\pi(k)$ и т. д.

2. Пусть $A \in \mathbf{NEXP}$, и A распознаётся недетерминированной машиной за время 2^{n^c}. Тогда $B = \{x01^{2^{|x|^c}} \mid x \in A\} \in \mathbf{NP}$.

3. Пусть $A \in \mathbf{NEXP}$ и A распознаётся недетерминированной машиной за время 2^{n^c} для некоторого $c \geqslant 2$. Тогда $B = \{1^{2^{|x|^c}+f(x)} \mid x \in A\} \in \mathbf{NP}$, где $f(x)$ — номер строки x среди всех битовых строк длины $|x|$.

4. Предположим противное. Рассмотрим произвольный язык $A \in \mathbf{EXP}$, то есть $A \in \mathbf{DTIME}(2^{n^c})$. Пусть $A' = \{x01^{|x|^c} \mid x \in A\}$. Тогда $A' \in \mathbf{E}$, то есть $A' \in \mathbf{NP}$. Но тогда и $A \in \mathbf{NP}$. Отсюда следует, что $\mathbf{EXP} = \mathbf{NP} = \mathbf{E}$, что не может быть верно.