МФТИ, сложность вычислений, осень 2023
Семинар 03. **NP**-полные языки (1)

Утверждение. Пусть $\mathsf{SYSTEMLINEQ} = \{(A, b) \mid$ для матрицы целых/рациональных чисел A размера $n \times m$ и столбца целых/рациональных чисел b размера $n \times 1$ существует столбец рациональных чисел x размера $m \times 1$, такой что $Ax = b\}$. Тогда $\mathsf{SYSTEMLINEQ} \in \mathbf{P}$.
Определение. Пусть G — граф. Тогда его хроматическим числом $\chi(G)$ называют минимальное такое k, что вершины G можно раскрасить в k цветов правильным образом (концы каждого ребра должны быть разноцветными).
Определение. Пусть G — граф. Тогда его кликовым числом $\omega(G)$ называют максимальное такое k, что в G есть подмножество из k вершин, попарно соединённых рёбрами между собой.
Определение. Язык A полиномиально сводится к языку B (сводится по Карпу), если существует полиномиально вычислимая функция f, такая что для произвольного слова x выполнена эквивалентность: $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. В таком случае пишем $A \leqslant_p B$.
Определение. Язык B называется **NP**-трудным, если $\forall A \in \mathbf{NP} : A \leqslant_p B$.
Определение. Язык B называется **NP**-полным, если $B \in \mathbf{NP}$ и B является **NP**-трудным.
Теорема Кука—Левина. Язык $\mathsf{SAT} = \{\varphi \mid$ пропозициональная формула φ выполнима$\}$ является **NP**-полным.
Замечание. Из (доказательства) теоремы Кука—Левина, на самом деле, можно вывести **NP**-полноту языка $\mathsf{CNFSAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — выполнимая формула в КНФ$\}$.

---

1. Докажите, что $\mathsf{2COL} = \{G \mid \chi(G) \leqslant 2\} \in \mathbf{P}$.
2. Докажите, что $\mathsf{3COL} = \{G \mid \chi(G) \leqslant 3\} \in \mathbf{NP}$. Что можно сказать о $\mathsf{COL} = \{(G, k) \mid \chi(G) \leqslant k\}$? А что — о языке $\mathsf{EXACTCOL} = \{(G, k) \mid \chi(G) = k\}$?
3. Докажите, что $\mathsf{10CLIQUE} = \{G \mid \omega(G) \geqslant 10\} \in \mathbf{P}$. Докажите, что $\mathsf{CLIQUE} = \{(G, k) \mid \omega(G) \geqslant k\} \in \mathbf{NP}$. Что можно сказать о языке $\mathsf{EXACT10CLIQUE} = \{G \mid \omega(G) = 10\}$? А что — о языке $\mathsf{EXACTCLIQUE} = \{(G, k) \mid \omega(G) = k\}$?
4. Предъявите сводимость $\mathsf{CBS} = \{s \mid$ строка s из круглых открывающих и закрывающих скобок задаёт правильную скобочную последовательность$\}$ к $\mathsf{3COL}$.
5. Докажите, что:
а) $A \leqslant_p A$;
б) если $A \leqslant_p B$ и $B \leqslant_p C$, то $A \leqslant_p C$;
в) если $A \in \mathbf{P}$, $B \neq \varnothing$ и $B \neq \Sigma^*$, то $A \leqslant_p B$;
г) если $B \in \mathbf{P}$ и $A \leqslant_p B$, то $A \in \mathbf{P}$;
д) если $B \in \mathbf{NP}$ и $A \leqslant_p B$, то $A \in \mathbf{NP}$;
е) если $A \leqslant_p B$, то $\overline{A} \leqslant_p \overline{B}$.
6. Докажите, что:
а) если A — **NP**-трудный язык и $A \leqslant_p B$, то B — **NP**-трудный;
б) если $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, то любой язык из **NP** (кроме $\varnothing$ и Σ^*) является **NP**-полным;
в) если A — **NP**-трудный и $A \in \mathbf{P}$, то $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
7. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — выполнимая формула в 3-КНФ$\}$ путем сведения SAT и CNFSAT к нему.
8. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{EXACTONE3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в 3-КНФ, в которой при некотором наборе значений переменных в каждой скобке выполнен ровно 1 литерал$\}$.
9. Рассмотрим формулы в 3-КНФ. Назовём формулу хорошей, если существует набор значений переменных, для которого (а) в каждой скобке выполнено хотя бы два литерала; (б) в каждой скобке выполнено не более одного литерала. Что можно сказать о сложности этих языков?
10. Докажите **NP**-полноту языков:
а) $\mathsf{SUBSETSUM} = \{(k, n_1, n_2, \ldots, n_k, N) \mid$ из набора чисел $n_1, \ldots, n_k$ можно выбрать подмножество с суммой $N\}$;

б) $\mathsf{KNAPSACK} = \{(k, w_1, \ldots, w_k, c_1, \ldots, c_k, W, C) \mid$ из набора предметов с весами w_i и стоимостями c_i можно выбрать подмножество с суммарным весом не более W и суммарной стоимости по крайней мере $C\}$;

в) $\{(k, n_1, n_2, \ldots, n_k, N) \mid \exists a_1, \ldots, a_k$ — целые неотрицательные числа такие, что $\sum\limits_i a_i n_i = N\}$.

1. Если граф красится в два цвета, то можно покрасить v в первый цвет, всех соседей v — во второй, всех их соседей — в первый, и так далее.
2. $\mathsf{3COL}, \mathsf{COL} \in \mathbf{NP}$. С $\mathsf{EXACTCOL}$ есть проблема: неясно, можно ли доказать нераскрашиваемость в $k-1$ цвет.
3. Найти клику размера 10 можно, перебрав все наборы из 10 вершин. Убедиться в отсутствии клик размера 11 можно, перебрав все наборы из 11 вершин.
4. Машина, вычисляющая сводящую функцию, может проверить принадлежность x к CBS.
5.

а) Положите $f = id$.
б) Композиция полиномиально вычислимых функций — полиномиально вычислима.
в) Сводящая функция может запустить процедуру распознавания A и вернуть некий фиксированный элемент из B (или не из B).
г) Для распознавания A можно распознать B, сведя к нему A.
д) Можно привлечь недетерминированные машины Тьюринга.
е) Подойдёт та же сводящая функция.

6.

а) Воспользуйтесь транзитивностью сводимости.
б) К любому языку, отличному от $\varnothing$ и Σ^*, сводятся все языки из $\mathbf{P}$.
в) Все языки из $\mathbf{NP}$ сводятся к A, а потому разрешимы за полином.

7. Сведение $\mathsf{SAT} \leqslant_p \mathsf{3SAT}$: постройте дерево разбора формулы φ, результат каждой операции замените на свежую переменную, от листьев к корню; равенства можно представить с помощью 3-КНФ. Сведение $\mathsf{CNFSAT} \leqslant_p \mathsf{3SAT}$: выполнимость формулы $(a \vee b \vee c \vee d \vee e)$ эквивалентна выполнимости формулы $(a \vee b \vee x) \wedge (\neg x \vee c \vee y) \wedge (\neg y \vee d \vee e))$.
8. Сведите $\mathsf{3SAT}$ к $\mathsf{EXACTONE3SAT}$: преобразуйте скобку $(a \vee b \vee c)$ в $(\neg a \vee z_1 \vee z_2) \wedge (\neg b \vee z_3 \vee z_4) \wedge (\neg c \vee z_5 \vee z_6) \wedge (z_1 \vee z_3 \vee z_5)$.
9. Это языки из $\mathbf{P}$, они сводятся к $\mathsf{2SAT}$.
10.

а) Сведите $\mathsf{EXACTONE3SAT}$ к $\mathsf{SUBSETSUM}$. В десятичной записи каждого числа участвуют только нули и единицы. Каждой переменной и каждой скобке соответствует свой выделенный разряд. Каждой переменной соответствуют два числа, у которых единицы стоят в разряде, соответствующем этой переменной, а также в разрядах, соответствующих скобкам, в которые входит сама переменная (для первого числа), и скобкам, в которые входит отрицание переменной (для второго числа). Нужно набрать $N = 1 \ldots 1$.
б) Положите $w_i = n_i = c_i$, $W = N = C$.
в) Дополните сведение $\mathsf{EXACTONE3SAT}$ к $\mathsf{SUBSETSUM}$: добавьте в начало всех чисел новый разряд, в котором стоит 1 в каждом числе, а старший разряд в N равен числу переменных n. Тогда придётся выбрать $a_i \in \{0, 1\}$.