МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2021

Домашнее задание №2. Сортировки, кучи

1. (1 балл) В массиве чисел $a_1, \ldots, a_n$ за одну операцию можно поменять местами любые два соседних элемента. Можно ли отсортировать массив (то есть расположить все числа в порядке неубывания) таким образом, чтобы каждый элемент поучаствовал в чётном числе перестановок? Определите ответ за $O(n \log n)$.

2. (1 балл) Дан массив чисел $a_1, \ldots, a_n$, причём $a_i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ при всех i. Отсортируйте этот массив за $O(n + \sqrt{k})$.

3. (1 балл) В этой задаче использовать разрешается не более одной кучи. Разработайте структуру данных S, которая бы позволяла обрабатывать любой запрос из нижеперечисленных за $O(\log n)$, где n — текущий размер структуры:

- `insert` x: вставить целое число x в S;
- `getMin`: сообщить минимальное число в S;
- `getMax`: сообщить максимальное число в S;
- `extractMin`: удалить минимальное число из S.

4. (2 балла) Дано два отсортированных массива: $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$. Определим $A+B$ как множество всевозможных попарных сумм вида $a_i + b_j$ с повторениями. Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{2, 3, 4\}$, то $A + B = \{3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7\}$. По данному числу k вам надо найти k-ю порядковую статистику в $A + B$ (заметьте, что $A + B$ вам не дан). Требуемая асимптотика: $O(k \log k)$. Разрешается использовать не больше $O(k)$ дополнительных ячеек памяти.

5. (3 балла) В алгоритме поиска медианы за линейное время весь массив бьётся на блоки по 5 элементов. А что если разбивать на блоки по $2k + 1$ элементов (где k — константа)? Найдите время работы алгоритма в таком случае. Объясните выбор $k = 2$ в классическом алгоритме.

6. (4 балла) Разработайте структуру данных S, которая бы позволяла хранить множество целых чисел, добавлять в него элементы и удалять $|S| / 2$ наибольших элементов из множества. Асимптотика: $O(1)$ амортизированно (то есть q последовательных запросов к изначально пустому S должны обрабатываться за $O(q)$).