МФТИ
Алгоритмы и структуры данных, осень 2022
Семинар №13. Диаграмма Вороного

1. Футбольный матч проходит на прямоугольном поле. В каждой команде — по n игроков. Областью ответственности каждого игрока назовём множество точек, которые располагаются к этому игроку ближе, чем ко всем остальным. Счёт каждой команды — это суммарная площадь всех областей ответственности игроков этой команды. Определите, какая команда имеет больший счёт, за $O(n \log n)$.
2. С помощью диаграммы Вороного найдите две ближайшие точки в множестве за $O(n \log n)$.
3. С помощью диаграммы Вороного для каждой точки множества найдите ближайшую к ней за $O(n \log n)$.
4. На плоскости даны n точек. Найдите круг максимального радиуса, внутри которого нет точек множества, а на его границе находится по крайней мере три точки множества. Асимптотика: $O(n \log n)$.
5. На плоскости дан круг, внутри которого расположено n башен. Самолёт должен сбросить по бомбе на каждую из башен. У каждой бомбы один и тот же радиус поражения r. Найдите минимальное r такое, что поразится весь исходный круг. Асимптотика: $O(n \log n)$.
6. Для каждого $n \geqslant 3$ приведите пример множества из n сайтов, для которого диаграмма Вороного содержит $2n - 5$ вершин и $3n - 6$ рёбер.
7. Докажите, что построение диаграммы Вороного для множества из n сайтов требует времени $\Omega(n \log n)$.
8. Дано какое-то замощение плоскости выпуклыми (обобщёнными) многоугольниками, а также n сайтов вместе с биекцией между сайтами и гранями. Определите за $O(n)$, является ли данное замощение диаграммой Вороного данного множества сайтов с таким распределением между сайтами и ячейками диаграммы.
9*. (Кто решит, тот гений) Пусть дано какое-то замощение плоскости выпуклыми (обобщёнными) многоугольниками. За $O(n)$ проверьте, является ли оно диаграммой Вороного для некоторого набора сайтов.