МФТИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2022

Домашнее задание №11. Теория чисел

Везде, где не сказано иное, предполагается, что используемые числа помещаются в стандартные типы данных; погрешностями округления пренебречь.

1. (1 балл) За $O(n)$ найдите количество делителей у всех чисел среди $1, 2, \ldots, n$.

2. (1 балл) В этой задаче можно пользоваться фактом, что $\sum\limits_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ простое}}} \frac{1}{p} = O(\log\log n)$. За $O(n \log\log n)$ найдите все простые числа, лежащие в отрезке $[n^2, n^2 + n]$.

3. (5 баллов) По данным a, b, n, m найдите $\sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor$ по модулю m за $O(\log a + \log b)$. *Указание:* воспользуйтесь алгоритмом Евклида.

4. (2 балла) Найдите число решений уравнения $x^n + y^n = z^n$ в кольце вычетов $\mathbb{Z}_m$. Асимптотика: $O(N \log N)$, где $N = \max\{n, m\}$.

5. (3 балла) Пусть n — чётно. Номер трамвайного билета — это строка из n допустимых цифр (допустимыми являются некоторые десятичные цифры $d_1, \ldots, d_k$, то есть не обязательно все цифры от 0 до 9). За $O(n \log n)$ найдите число счастливых билетов, то есть таких билетов, в которых сумма первых $n/2$ цифр равна сумме остальных.

6. (5 баллов) Пусть даны два набора чисел: $a_0, \ldots, a_{k-1}$ и $b_0, \ldots, b_{k-1}$, где $k = 2^n$ для некоторого n. Определим $c_z = \sum\limits_{i \oplus j = z} a_i \cdot b_j$ и $d_z = \sum\limits_{i \vee j = z} a_i \cdot b_j$. Найдите массивы c и d за $O(k \log k)$. *Указание:* рассмотрите многочлены от n переменных, каждая из которых входит в каждый моном не более чем в первой степени; перемножьте их и поймите, как нужно избавиться от получившихся квадратов (какие x нужно подставить); выполните многомерное преобразование Фурье.

7. (3 балла) Даны строки $s = s_0 \ldots s_{n-1}$ и $p = p_0 \ldots p_{m-1}$, а также число k. Говорим, что p входит в s на позиции i со степенью смешения k, если для каждого $j \in [0, m-1]$ существует такое ℓ, отличающееся от $i + j$ не более чем на k, что $p_j = s_\ell$. Найдите число таких вхождений за $O(|\Sigma| \cdot n \log n)$.