Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2023
Листок 11: Математическая индукция, версия с условиями и решениями

Принцип математической индукции — это способ рассуждения, позволяющий доказать некоторое свойство для *всех* натуральных чисел. Доказательство по индукции состоит в том, что сначала проверяется данное свойство для числа 0 (*база индукции*), а затем показывается, что если свойство выполнено для числа n, то оно верно и для числа $n+1$ (*шаг индукции*/*индуктивный переход*).

Таким образом, база индукции гарантирует истинность интересующего нас свойства для 0. Индуктивный переход гарантирует, что из истинности свойства для 0 вытекает истинность и для 1; из истинности свойства для 1 вытекает истинность для 2, и так далее. В результате мы заключаем, что данное свойство выполнено для каждого натурального числа.

Более формально принцип индукции можно сформулировать несколькими эквивалентными способами:

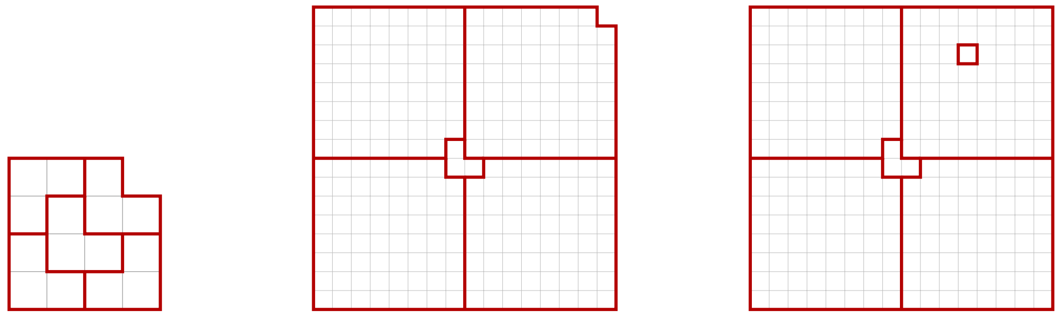
а) (Классическая индукция) Если для некоторого свойства A выполнено $A(0)$, а также для любого n из $A(n)$ следует $A(n+1)$, то для любого натурального n выполнено $A(n)$.
б) (Порядковая, ординальная, трансфинитная индукция) Если для любого n из $A(0), \ldots, A(n-1)$ следует $A(n)$, то для любого n выполнено $A(n)$.
в) (Фундированность) В любом непустом множестве натуральных чисел есть наименьшее число.
г) (Невозможность бесконечного спуска) Не существует бесконечной строго убывающей последовательности натуральных чисел.
д) (Принцип стабилизации) Любая бесконечная нестрого убывающая последовательность натуральных чисел стабилизируется (т. е. с какого-то момента) все числа в ней одинаковы.

1. В каком смысле формулировки а)–д) эквивалентны друг другу? Покажите, как логически вывести эти формулировки друг из друга.

Решение. Покажем, как указанные свойства выводятся друг из друга по циклу:

а)$\Rightarrow$ б). Подставив во второе условие $n = 0$, получаем, что $A(0)$ должно быть верно. Далее, обозначим через $A'(n)$ свойство «$A(0), A(1), \ldots, A(n)$ верны». Имеем, что $A'(0)$ выполнено и из $A'(n)$ следует $A'(n+1)$. Значит $A'(n)$ выполнено при всех n, а значит и $A(n)$ выполнено для всех n.

б)$\Rightarrow$ в). Пусть X — непустое множество, не имеющее наименьшего элемента. Пусть $A(n)$ означает, что n меньше любого элемента X. Покажем, что из $A(0), \ldots, A(n)$



(а) Разбиение 4×4 (б) Индуктивный переход без угловой клетки (в) Индуктивный переход без произвольной клетки

Рис. 1: Разрезание квадрата на уголки

следует $A(n+1)$. Действительно, если $A(n+1)$ неверно, то $n+1 \geqslant x$ для некоторого $x \in X$. Поскольку x не наименьшее, то $x > y$ для некоторого $y \in X$. Значит, y находится среди $0, 1, \ldots, n$ и $A(y)$ неверно, что противоречит предположению. Значит, $A(n)$ выполнено всегда. Но если в качестве n взять элемент X, то получится, что он меньше сам себя. Это противоречие показывает, что искомого непустого X не существует.

в)$\Rightarrow$ г). Все элементы бесконечной сторого убывающей последовательности образовали бы множество, не имеющее наименьшего элемента.

г)$\Rightarrow$ д). Если нестрого убывающая последовательность не стабилизируется, то в ней можно выбрать строго убывающую подпоследовательность.

д)$\Rightarrow$ а). Пусть для некоторого n не выполнено $A(n)$. Поскольку $A(0)$ верно, то $n \neq 0$. Более того, $A(n-1)$ не выполнено, т. к. из $A(n-1)$ следовало бы $A(n)$. Аналогично неверны $A(n-2)$, $A(n-3)$ и т. д. При этом 0 не может встретиться в цепочке $n, n-1, n-2, n-3, \ldots$ Значит, это бесконечно убывающая (не стабилизирующаяся) последовательность.

2. Докажите, что при любом n квадрат размера $2^n \times 2^n$ без одной угловой клетки можно разбить на уголки из трёх клеток. Докажите, что то же верно для квадрата $2^n \times 2^n$ без одной любой клетки.

Решение. Разбиение квадрата 4×4 показано на рис. 1а. Но на самом деле в качестве базы можно взять один уголок внутри квадрата 2×2 или даже пустое множество внутри квадрата 1×1. Переход делается так: квадрат $2^{n+1}\times2^{n+1}$ без угловой клетки разрезается на 4 аналогичных фигуры вдвое меньшего размера и один уголок в центре, как показано на рис. 1б. Каждая из этих фигур может быть далее разрезана по предположению индукции.

Квадрат без произвольной клетки разрезается аналогично. У квадрата 2×2 любая клетка угловая, поэтому база справедлива. Переход показан на рис. 1в.

3. Подсчитайте число частей, на которые разбивается плоскость в следующих случаях:

а) На плоскости имеется n прямых в общем положении (никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке). На сколько областей делят плоскость эти прямые?

б) На плоскости имеется n окружностей в общем положении (любые две из них пересекаются в двух разных точках, никакие три не пересекаются в одной точке). На сколько областей делят плоскость эти окружности?

Решение. Вначале докажем формулу для арифметической прогрессии $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Подставив $n=1$, получаем верное равенство $1=\frac{1\cdot 2}{2}$. Далее, проведём шаг индукции: $1+2+\dots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Перейдём к собственно задаче.

а) Пусть n прямых делят плоскость на $L(n)$ частей. Добавим $(n+1)$-ю прямую. Она пересечётся с каждой из n существующих прямых в своей точке и, таким образом, будет поделена на $n+1$ фрагмент. Каждый из этих фрагментов поделит некоторую существующую часть плоскости надвое. Таки образом, число частей увеличится на $n+1$, откуда $L(n+1)=L(n)+n+1$. Учитывая, что $L(1)=2$, имеем $L(n)=2+2+3+4+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}+1$.

б) Аналогично каждая из n существующих окружностей пересечёт $(n+1)$-ю в своих двух точках, фрагментов будет $2n$ и $R(n+1)=R(n)+2n$. Поскольку $R(1)=2$, имеем $R(n)=2+2+4+6+\dots+2(n-1)=n(n-1)+2$.

4. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентной формулой:

а) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_1+a_2+\dots+a_n+n+1$;

б) $a_1=1$, $a_{n+1}=n\cdot a_1+(n-1)\cdot a_2+\dots+1\cdot a_n+\left[\frac{n+3}{2}\right]$.
Докажите, что все элементы последовательности нечётны.

Решение.

а) Применим принцип порядковой индукции. Нечётность a_1 дана, далее предположим, что все a_i при $i\leqslant n$ нечётны. Тогда в формуле для a_{n+1} складываются n нечётных чисел и $n+1$. По модулю 2 получится $2n+1$, т. е. нечётное число. Впрочем, можно поступить и без явной индукции: из формулы можно вывести, что $a_{n+1}=2a_n+1$.

б) Тут уже рекуррентную формулу сократить не получится. Поэтому вновь используем порядковую индукцию. Разберём отдельно 2 случая: чётного и нечётного n. Если n чётное, то половина коэффициентов при a_i будут чётными, половина нечётными. По предположению индукции все a_i нечётные, так что сумма будет по модулю 2 равна $\frac{n}{2}$. При этом для чётного n выполнено $\left[\frac{n+3}{2}\right]=\frac{n}{2}+1$, так что по модулю 2 имеем $a_{n+1}=n+1$, т. е. нечётно.
Если же n нечётное, то нечётных коэффициентов при a_i будет $\frac{n+1}{2}$, а $\left[\frac{n+3}{2}\right]=\frac{n+1}{2}+1$. Отсюда по модулю 2 выполнено $a_{n+1}=n+2$, т. е. снова нечётно.

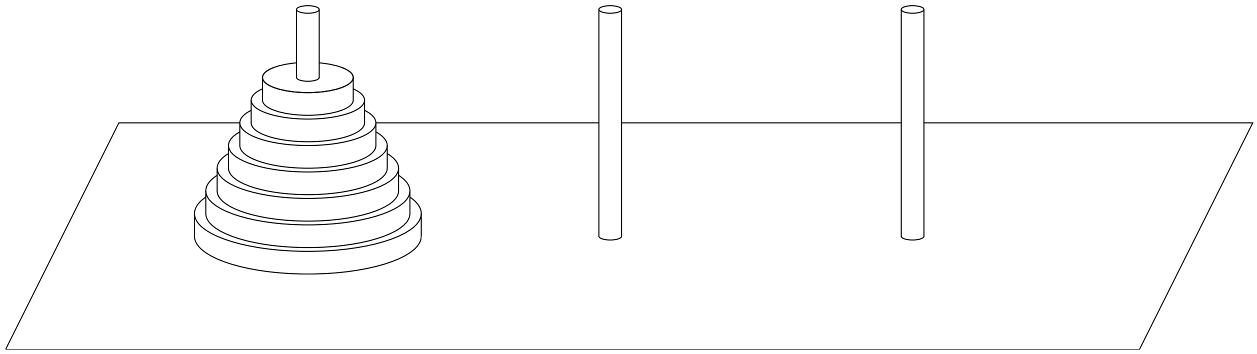


Рис. 2: Ханойские башни для 7 колец

5. Докажите, что уравнение $8a^4+4b^4+2c^4=d^4$ не имеет решений в положительных целых числах.

Решение. В этой задаче удобно воспользоваться принципом наименьшего элемента. Пусть решения есть. Рассмотрим решение с наименьшим d. Поскольку левая часть чётная, выполнено $d^4 \vdots 2$. Значит, $d \vdots 2$. Пусть $d = 2d_1$. Имеем $4a^4+2b^4+c^4 = 8d_1^4$. Аналогично получаем $c \vdots 2$, $c = 2c_1$ и $2a^4 + b^4 + 8c_1^4 = 4d_1^4$. Повторив процедуру ещё дважды, приходим к равенству $8a_1^4 + 4b_1^4 + 2c_1^4 = d_1^4$, т. е. найдено меньшее решение, что противоречит минимальности d.

6. Ханойские башни. Игра «Ханойские башни» состоит из трёх штырей и n колец разного размера. Изначально все кольца надеты на один штырь и упорядочены по размеру (самое большое внизу, см. рис. 2). За ход разрешается перенести верхнее кольцо с одного штыря на другой, при этом нельзя класть кольцо большего размера на кольцо меньшего.

а) Докажите, что за некоторое число ходов можно перенести все кольца с одного штыря на другой.

б) Докажите, что это можно сделать за 2^n-1 ход.

в) Докажите, что меньшего числа ходов не хватит.

Решение.

а) Одно кольцо перенести, очевидно, можно. Докажем шаг индукции. Пусть мы научились переносить n колец. Тогда $n+1$ кольцо можно перенести так. Сначала перенести верхние n колец на второй штырь. Затем перенести самое большое кольцо на третий штырь. Наконец, перенести оставшиеся n колец со второго штыря на третий (см. рис. 3). Поскольку на самое большое кольцо можно класть любое из колец, правила нарушены не будут.

б) Одно кольцо можно перенести за $2^1-1=1$ ход. Докажем шаг индукции. Если n колец можно перенести за 2^n-1 ход, то в ходе описанных в предыдущем пункте действий будет потрачен $(2^n-1)+1+(2^n-1) = 2^{n+1}-1$ ход, что и требовалось.

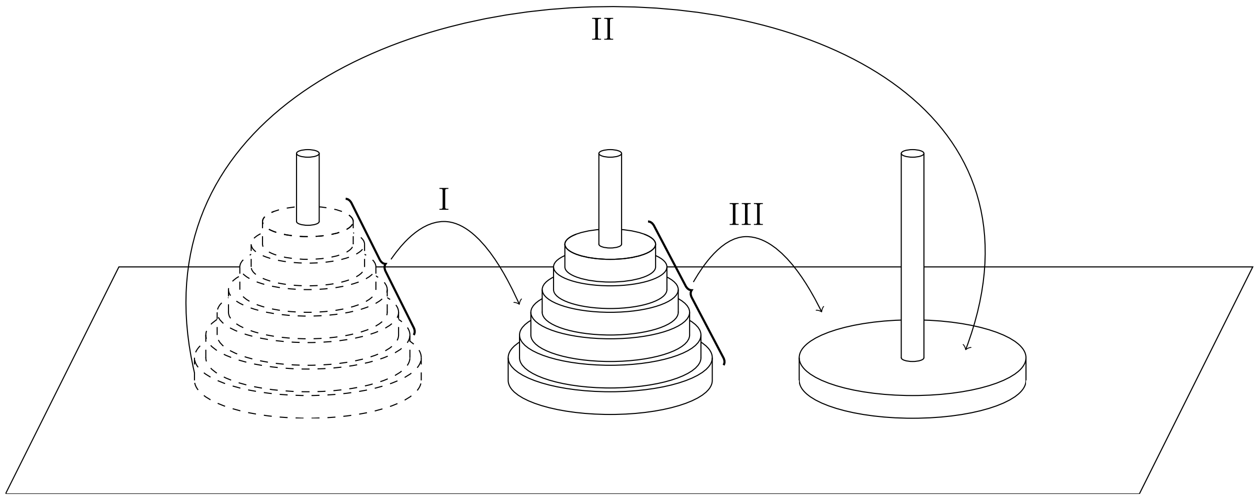


Рис. 3: Решение ханойских башен

в) На одно кольцо меньше одного хода потратить нельзя. Пусть на n колец обязательно нужно затратить $2^n - 1$ ход. Рассмотрим некоторое решение для $n + 1$ кольца. Рассмотрим момент, когда было перенесено самое большое кольцо. В этот момент ни одного кольца не должно быть над этим кольцом (иначе оно не верхнее), а также на том штыре, куда оно переносится (иначе большее кладётся на меньшее). Значит, все оставшиеся n колец были перенесены на один штырь, на что было потрачено не меньше, чем $2^n - 1$ ход. После переноса самого большого кольца эти n колец должны быть вновь перенесены, на что будет вновь потрачено не меньше, чем $2^n - 1$ ход. Всего будет потрачено не меньше, чем $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ ход, что и требовалось.

7. В некоторой стране каждый город соединён с любым другим дорогой с односторонним движением.

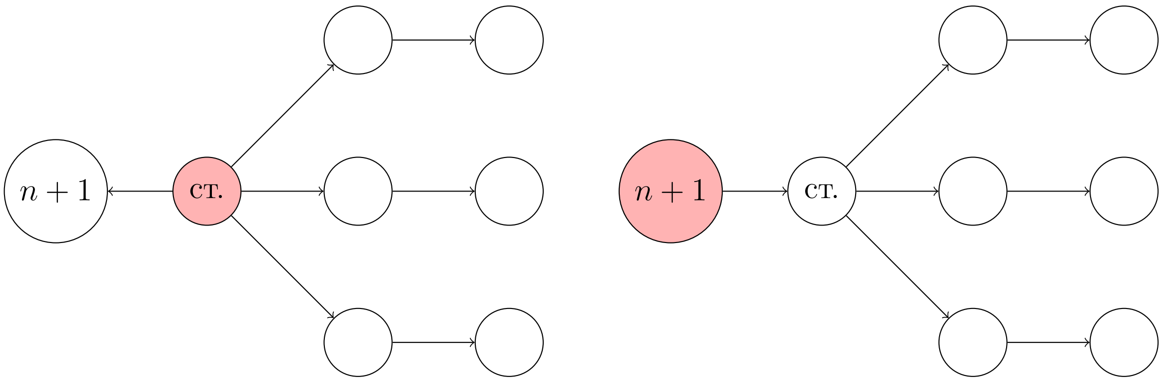
а) Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать в любой другой по дорогам;

б) Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать в любой другой по дорогам не более чем с одной пересадкой.

Решение.

а) Если городов всего два, то из одного в другой идёт дорога. Проведём шаг индукции. Пусть для n городов существует искомый город (назовём его «столичным»).[1]

[1]Ориентированные графы, в которых между каждой парой вершин проведено одно ребро, называются турнирами. Вершина, из которой есть путь в любую другую вершину, также называют «царём».



(а) Старый город остаётся столичным (б) Новый город становится столичным

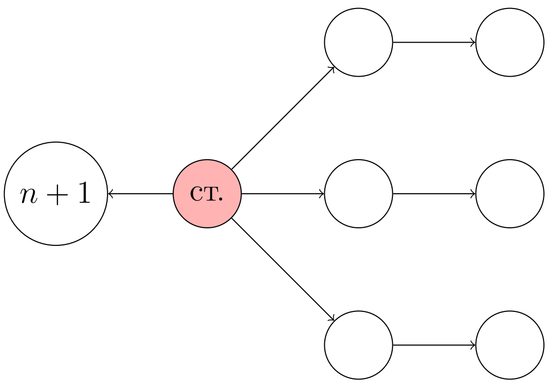
Рис. 4: Переход индукции для достижимости

Добавим $(n+1)$-й город. Если из столичного дорога ведёт дорога в новый, то столичный сохраняет свой статус. Если же из нового идёт дорога в столичный, то новый становится столичным: до любого другого из него можно доехать так: сначала до прежнего столичного, а потом по старой дороге из прежнего столичного (см. рис. 4).

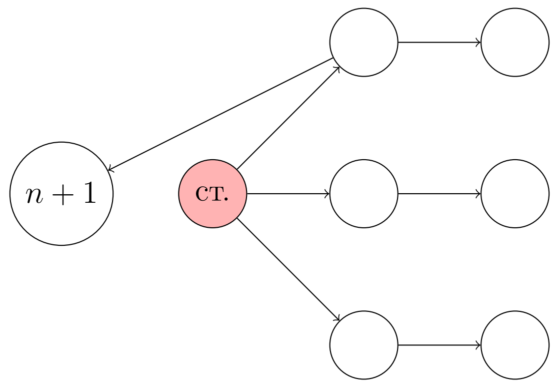
б) База индукции также очевидна. По-прежнему будем называть столичным искомый город, а «губернским» — тот, в который идёт дорога из столичного. Если в новый город идёт дорога из столичного или из хотя бы одного губернского, то столичный остаётся столичным. Иначе из нового города идут дороги и в столичный, и во все губернские. Тогда новый город становится столичным: без пересадок из него можно доехать в старый столичный и во все старые губернские, а во все остальные — с одной пересадкой через один из старых губернских (см. рис. 5).

8. На краю пустыни имеется резервуар с неограниченным запасом бензина и неограниченное число канистр. Машина может заправлять бензобак из резервуара, возить пустые канистры, сливать бензин из бензобака в канистру и оставлять эту канистру в любой точке пустыни на хранение или заправлять машину из канистры, оставленной на хранение ранее. Возить канистры с бензином запрещается. На полном бензобаке машина может проехать 100 км. Докажите, что машина сможет проехать сколь угодно далеко.

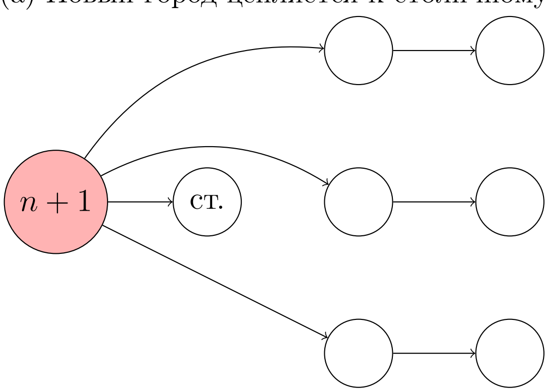
Решение. Докажем по индукции такой более общий факт: потратив 2^{n-1} объёмов бензобака, можно проехать $25n$ км и оставить там полбензобака бензина на хранение. База ($n = 1$) говорит, что заправив полный бак, можно оставить полбака на расстоянии 25 км. Это делается так: машина заправляет полный бак, едет 25 км, сливает там полбака в канистру, едет 25 км обратно. Покажем, как происходит шаг индукции. Повторив процедуру дважды, получаем, что потратив 2^n баков, можно проехать $25n$ км и оставить там целый бак. В последний момент, когда машина побывала в самой дальней точке, она может дозаправиться до полного бака, проехать ещё 25 км, оставить



(а) Новый город цепляется к столичному

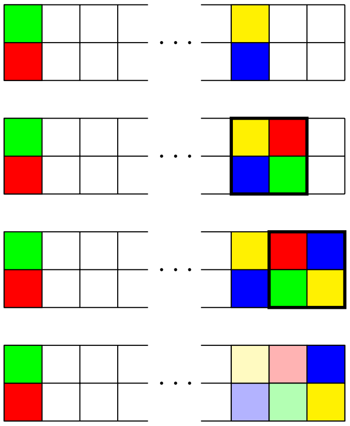


(б) Новый город цепляется к губернскому

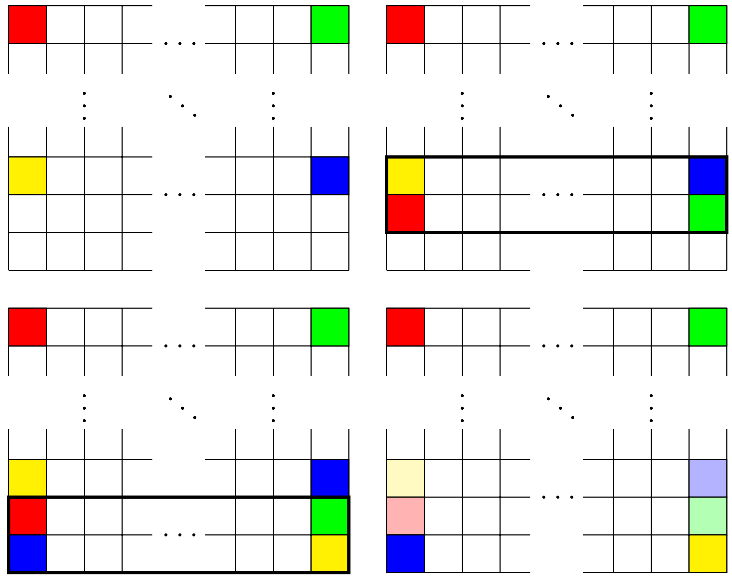


(в) Новый город становится столичным

Рис. 5: Переход индукции для достижимости с одной пересадкой



(а) Доказательство для $2 \times 2n$



(б) Доказательство для $2m \times 2n$

Рис. 6: Раскраска прямоугольника

полбака и вернутся, затем заправить оставшееся и только после этого вернутся к старту по прежней схеме. Таким образом, полбака оставлено в $25(n+1)$ км от старта, что и требовалось.

9. Бесконечная клетчатая плоскость раскрашена в 4 цвета, так чтобы любой квадрат 2×2 содержал все цвета. Докажите, что в любом прямоугольнике размера $2m \times 2n$ угловые клетки покрашены в различные цвета.

Решение. Сначала проведём индукцию по n, т. е. докажем истинность утверждения для прямоугольника $2 \times 2n$. База (для квадрата 2×2) дана в условии. Проведём шаг. Пусть для прямоугольника $2 \times 2(n-1)$ утверждение доказано. Пусть клетки с координатами $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,2n-2)$ и $(2,2n-2)$ покрашены в цвета a, b, c, d соответственно. Тогда клетки с координатами $(1,2n-1)$ и $(2,2n-1)$ должны быть покрашены в цвета a и b (в каком-то порядке) в силу утверждения для квадрата 2×2, а клетки с координатами $(1,2n)$ и $(2,2n)$ — снова в цвета c и d (в каком-то порядке). Таким образом, угловые клетки прямоугольника $2 \times 2n$ покрашены в различные цвета (см. рис. 6а).

Теперь проведём индукцию по m при фиксированном n. База (для прямоугольника $2 \times 2n$) доказана в предыдущем рассуждении. Проведём шаг. Пусть для прямоугольника $2(m-1) \times 2n$ утверждение доказано. Пусть клекти с координатами $(1,1)$, $(2m-2,1)$, $(1,2n)$ и $(2m-2,2n)$ покрашены в цвета a, b, c, d соответственно. Тогда клетки с координатами $(2m-1,1)$ и $(2m-1,2n)$ должны быть покрашены в цвета a и b (в каком-то порядке) в силу утверждения для прямоугольника $2 \times 2n$, а клетки с координатами $(2m,1)$ и $(2m,2n)$ — снова в цвета c и d (в каком-то порядке). Таким образом, угловые клетки прямоугольника $2m \times 2n$ покрашены в различные цвета, что и требовалось (см. рис. 6б).

10. Имеется шеренга из n солдат-новобранцев. По команде старшины: «Нале-ВО!» — каждый солдат поворачивается налево или направо (некоторые путают). После этого каждую секунду солдаты, стоящие лицом друг к другу, разворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно развороты прекратятся.

Решение. Обозначим солдата, смотрящего налево, через 0, а смотрящего направо — через 1. Таким образом, конфигурация представляет собой n-битовое число в двоичной записи. Каждую секунду биты 10 заменяются на 01, отчего это число уменьшается. Поскольку бесконечное уменьшение натурального числа невозможно, рано или поздно развороты прекратятся. (См. пример на рис. 7).

Альтернативно можно решить задачу так: рассмотрим суммарное расстояние от всех солдат, смотрящих налево, до левого края. При каждом развороте в каждой паре по-прежнему остаётся один солдат, смотрящий налево, но теперь он ближе к левому краю. Значит, суммарное расстояние каждый раз уменьшается. Поскольку бесконечное уменьшение невозможно, развороты прекратятся.

11. Пусть задана некоторая функция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что $g(b) > b$. Рассмотрим функцию $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, определяемую так:

$$G(n,b) = \begin{cases} (ag(b)+c-1, g(b)), & n = ab+c, 0<c<b;\\ ((a-1)g(b)+g(b)-1, g(b)), & n = ab;\\ (0,0), & b=0 \vee n=0. \end{cases}$$

Докажите, что для любых n и b при достаточно большом k верно $G^k(n,b) = (0,0)$.

Решение. Заметим, что n и b однозначно определяют a и c: a есть неполное частное от деления n на b, а c — остаток (если $b = 0$, положим $a = c = 0$). На каждом шаге либо a остаётся неизменным, а c уменьшается на 1, либо a уменьшается на 1 (а c при этом может как угодно возрасти). Таким образом, a каждый раз нестрого уменьшается, поэтому в какой-то момент стабилизируется. После этого c также нестрого уменьшается, так что также стабилизируется. Однако стабилизация может наступить только при $a = c = 0$, что и требовалось.

Если говорить на языке ординалов, то это рассуждение является индукцией внутри ординала ω^2.

12. Купец и чёрт. Купец совершил с чёртом сделку: каждый день купец меняет у чёрта денежную купюру на любое число более мелких. Получать деньги из других источников купец не может. Как только купец не сможет выполнить договор, он продаст чёрту душу. Докажите, что рано или поздно так и случится. (Имеется лишь конечное число номиналов купюр. Каждый день купцу нужно что-то тратить на еду. Купец и чёрт бессмертны.)

Решение. Будем проводить индукцию по числу номиналов купюр. Если номинал всего один, то каждый день число купюр будет уменьшаться, так что рано или поздно они закончатся. Пусть утверждение доказано для n номиналов, докажем для $n+1$. Если купюр старшего номинала нет, то утверждение следует из предположения. Иначе рано

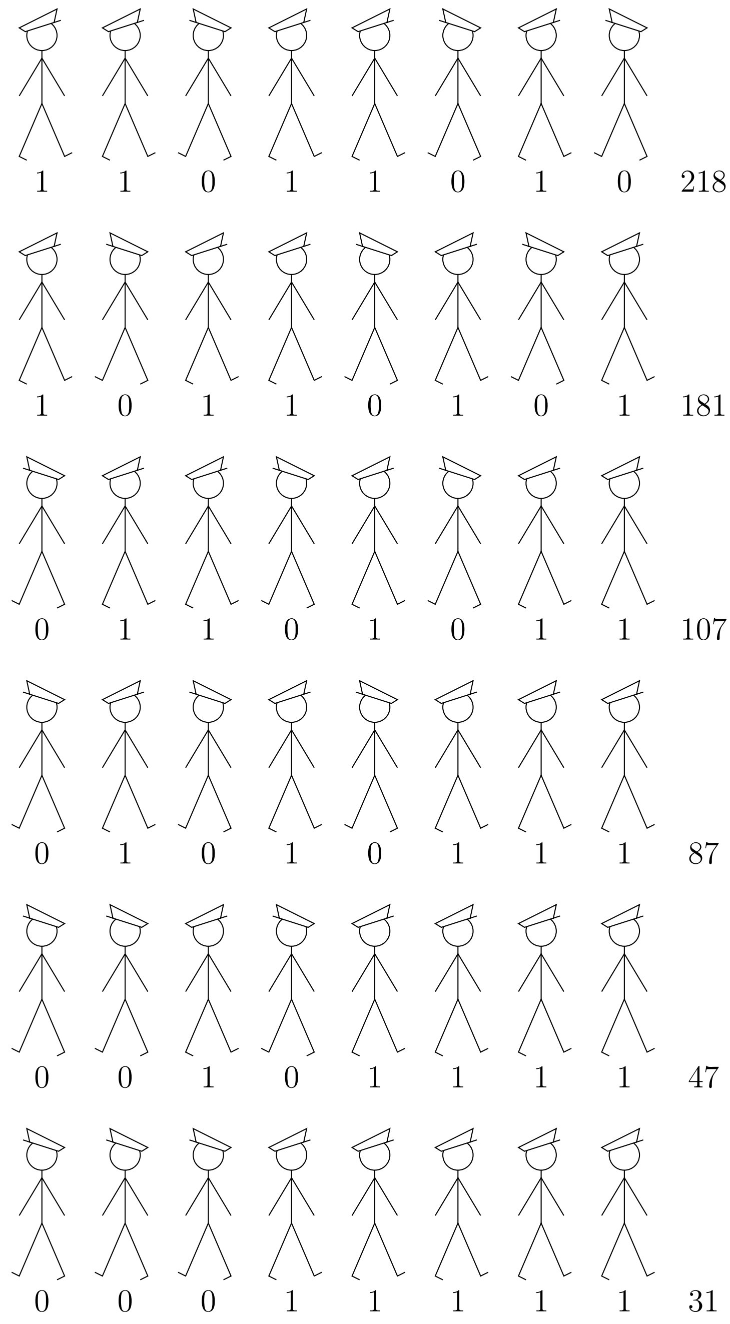


Рис. 7: Пример цепочки поворотов

или поздно придётся потратить хотя бы одну купюру старшего номинала, ведь более мелкие купюры исчерпаются по предположению индукции. Таким образом, количество купюр старшего номинала будет уменьшаться и рано или поздно обратится в ноль, после чего утверждение сведётся к уже доказанному.

Если говорить на языке ординалов, то это рассуждение является индукцией внутри ординала ω^n для некоторого n.

13. На столе лежит конечное число фишек с натуральными числами. Некто каждую минуту либо убирает со стола фишку с нулём, либо заменяет одну из фишек на любое количество фишек с меньшими числами. Докажите, что рано или поздно этот процесс закончится.

Решение. Пусть n — самое большое число из присутствующих на столе. Тогда можно считать, что на столе могут быть не любые натуральные числа, а лишь числа от 0 до n. После этого замечания задача полностью аналогична предыдущей: вместо номинала купюры будет число, написанное на фишке.

Если говорить на языке ординалов, то это рассуждение является индукцией внутри ординала ω^ω.

Список литературы

[1] Шень А. Математическая индукция — М.: МЦНМО, 2007