

Проективная геометрия

1. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения продолжений сторон AB и CD , BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L , а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N . Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF .

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть E, F — точки пересечения продолжений противоположных сторон AB и CD , AD и BC соответственно, M — произвольная точка внутри четырёхугольника. Пусть S — точка пересечения прямых AD и EM , P — точка пересечения прямых AB и FM . Докажите, что прямые BS , PD и MC пересекаются в одной точке.

Теорема 1. Для любых двух четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ существует единственное проективное преобразование, переводящее A в A_1 , B в B_1 , C в C_1 и D в D_1 .

3. На прямой a лежат точки A_1, A_2, A_3 , а на прямой b — точки B_1, B_2, B_3 . Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в точке C_3 , прямые A_2B_3 и A_3B_2 пересекаются в точке C_1 , прямые A_3B_1 и B_1A_3 пересекаются в точке C_2 . Докажите, что точки C_1, C_2 и C_3 лежат на одной прямой. (теорема Палла)

4. На сторонах угла взяты точки A, B . Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1 , другая — в точках A_2, B_2 . Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q . Докажите, что M — середина PQ .

5. Даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке C_3 , прямые B_1C_1 и B_2C_2 — в точке A_3 , прямые C_1A_1 и C_2A_2 — в точке B_3 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки A_3, B_3 и C_3 лежат на одной прямой. (теорема Дезарга)

6. Даны перспективные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Оказалось, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $B_2C_2A_2$ тоже перспективны. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $C_2A_2B_2$ тоже перспективны.

7. Даны точки A и B на прямой ℓ . Можно ли одной линейкой построить середину отрезка между A и B ?

8. Две прямые пересекаются в луже. Также дана точка вне лужи. Постройте одной линейкой прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых и данную точку.

9. Две точки расположены так, что к ним нельзя приложить линейку из-за лужи. Также дана прямая, не пересекающая лужу. Постройте одной линейкой точку пересечения прямой через две данные точки и данной прямой.

10. Дан пятиугольник. Его диагонали также образуют пятиугольник. Докажите, что два полученных пятиугольника проективно эквивалентны.