Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2015
Арифметическая иерархия

Множество $A \subset \mathbb{N}$ принадлежит классу Σ_k, если существует разрешимое множество $R \subset \mathbb{N}^{k+1}$, такое что $x \in A$ тогда и только тогда, когда

$$\exists y_1 \forall y_2 \dots \mathbf{Q} y_k \ (x, y_1, y_2, \dots, y_k) \in R,$$

где $\mathbf{Q} = \forall$ при чётном k и $\mathbf{Q} = \exists$ при нечётном k.

Аналогично множество $B \subset \mathbb{N}$ принадлежит классу Π_k, если существует разрешимое множество $R \subset \mathbb{N}^{k+1}$, такое что $x \in B$ тогда и только тогда, когда

$$\forall y_1 \exists y_2 \dots \mathbf{Q} y_k \ (x, y_1, y_2, \dots, y_k) \in R,$$

где $\mathbf{Q} = \exists$ при чётном k и $\mathbf{Q} = \forall$ при нечётном k.

1. Докажите, что $A \in \Sigma_k$ тогда и только тогда, когда $\overline{A} \in \Pi_k$.

2. Докажите, что $\Sigma_k \subset \Sigma_{k+1}$, $\Sigma_k \subset \Pi_{k+1}$, $\Pi_k \subset \Sigma_{k+1}$, $\Pi_k \subset \Pi_{k+1}$.

3. Докажите, что классы Σ_k и Π_k не изменятся, если в определении разрешить замену одного квантора на несколько одноимённых ему.

4. Пусть $A \in \Sigma_k$ и $B \in \Sigma_k$. Докажите, что $A \cup B$ и $A \cap B$ лежат в Σ_k.

5. Пусть $A \in \Pi_k$ и $B \in \Pi_k$. Докажите, что $A \cup B$ и $A \cap B$ лежат в Π_k.

6. Пусть $A \in \Sigma_k$ и $B \in \Pi_k$. Докажите, что $A \cup B$ и $A \cap B$ лежат в $\Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}$.

7. Пусть $A \in \Sigma_k$. Докажите, что $A \times A \in \Sigma_k$ (тут используется вычислимое кодирование пар).

8. Укажите, каким классам арифметической иерархии принадлежат следующие множества. Докажите, что ни они сами, ни их дополнения не перечислимы.

а) Множество программ, определённых в бесконечном количестве точек

б) Множество программ, множество значений которых бесконечно;

в) Множество программ, которые останавливаются на всех числах из некоторой арифметической прогрессии;

г) Множество программ, в области определения которых ни одно число не делится на другое;

д) Множество программ, которые на всех достаточно больших n останавливаются не более, чем за n^2 шагов;

е) Множество программ, которые определены и принимают одно и то же значение для всех достаточно больших n;

ж) Множество программ, которые вычисляют некоторую биекцию.

Множество X называется m-полным в классе $\mathcal{C}$, если $X \in \mathcal{C}$ и для всех $Y \in \mathcal{C}$ выполнено $Y \leqslant_m X$.

9. Докажите, что если X является m-полным в $\mathcal{C}$, $Z \in \mathcal{C}$ и $X \leqslant_m Z$, то Z является m-полным в $\mathcal{C}$.

10. Опишите все m-полные множества в классе разрешимых множеств.

11. Докажите, что если X является m-полным в Σ_k, то $\overline{X}$ является m-полным в Π_k.

12. Докажите m-полноту следующих множеств в классе перечислимых множеств:

а) Множество пар (p, x), таких что программа p останавливается на входе x;

б) Множество самоприменимых программ;

в) Множество программ, которые останавливаются в нуле;

г) Множество программ, принимающих различные значения на своей области определения.

13. Докажите m-полноту множества всюду определённых программ в классе Π_2.

14. Докажите, что существует перечислимое неразрешимое множество, не являющееся m-полным в классе перечислимых. (Указание: постройте его таким образом, чтобы как любая программа, пытающаяся разрешить его, так и любая программа, пытающаяся свести в нему некоторое перечислимое множество K, ошибались).