

## Регулярки

### Задача 1.

Задайте регулярными выражениями следующие множества слов:

1. слова в алфавите  $\{a, b\}$ , такие что на третьем месте от начала слова стоит буква  $a$ , а на четвёртом месте от конца — буква  $b$ ;
2. слова в алфавите  $\{a, b\}$ , в которых число букв  $a$  чётно;
3. слова в алфавите  $\{a, b\}$ , не содержащие подстроки  $ab$ ;
4. слова в алфавите  $\{a, b, c\}$ , в которых за буквой  $a$  обязательно следует буква  $c$ ;
5. слова в алфавите  $\{a, b, c\}$ , не содержащие подстроки  $ab$ ;
6. слова в алфавите  $\{a, b, c\}$ , не содержащие подстроки  $abb$ ;
7. слова в алфавите  $\{a, b\}$ , в которых число букв  $a$  чётно, как и число букв  $b$ ;
8. слова в алфавите  $\{a, b, c\}$ , в которых нет одинаковых подряд идущих букв

### Задача 2.

Напишите регулярные выражения, задающие следующие языки над алфавитом  $\{a, b\}$ :

1.  $\{w \mid |w| \leq 3\}$ ;
2.  $\{w \mid |w| \geq 4\}$ ;
3.  $\{w \mid |w_b| \geq 2\}$ ;
4.  $\{w \mid |w| = 2 \vee |w_a| = 3\}$ ;
5.  $\{w \mid |w| = 3 \vee |w_a| \geq 5\}$ .

### Задача 3.

Опишите множества слов, задаваемые следующими регулярными выражениями:

1.  $(a + c)^*$ ;
2.  $(a + b)^*a$ ;
3.  $b(b + c)^*$ ;
4.  $a(a + b)^*a$ ;
5.  $a^*ba^*ba^*ba^*$ ;
6.  $(a + b)^*b(a + b)(a + b)$ ;
7.  $b^*(a + (ab^+)^*)$ .

### Задача 4.

Докажите следующие равенства:

1.  $(1 + e + ee + \dots + e^{n-1})(e^n)^* = e^*$  для любого  $n \geq 1$ ;
2.  $(e^*f)^*e^* = (e + f)^*$ ;
3.  $1 + e(fe)^*f = (ef)^*$ .

### Задача 5.

Упростите регулярные выражения:

1.  $(a + b + ab)^*$ ;
2.  $(a^*b)^* + (b^*a)^*$ ;
3.  $(a + b)^*ab(a + b)^* + (a + b)^*a + b^*$ ;
4.  $1 + aa^* + bb^*$ ;

### Задача 6.

Докажите, что если язык  $L$  задается регулярным выражением, то и язык  $L^R$  тоже задается регулярным выражением.

## НКА и ДКА

### Задача 1.

Найдите НКА, распознающие следующие множества слов:

1. слова в алфавите  $\{a, b\}$ , такие что на третьем месте от начала слова стоит буква  $a$ , а на четвёртом месте от конца — буква  $b$ ;
2. слова в алфавите  $\{a, b\}$ , в которых число букв  $a$  чётно;
3. слова в алфавите  $\{a, b\}$ , не содержащие подстроки  $ab$ ;
4. слова в алфавите  $\{a, b, c\}$ , не содержащие подстроки  $ab$ ;
5. слова в алфавите  $\{a, b, c\}$ , не содержащие подстроки  $aba$ ;
6. слова в алфавите  $\{a, b\}$ , в которых число букв  $a$  чётно, а число букв  $b$  нечётно;
7. слова в алфавите  $\{a, b, c\}$ , в которых за буквой  $a$  обязательно следует буква  $c$ ;
8. слова в алфавите  $\{a, b, c\}$ , в которых рядом с буквой  $a$  не может идти буква  $b$ ;
9. слова из букв  $a$  и  $b$ , такие что разность числа букв  $a$  и числа букв  $b$  делится на 3.

### Задача 2.

Найдите НКА, распознающие следующие языки над алфавитом  $\{a, b\}$ :

1.  $\{w \mid |w| \leq 3\}$ ;
2.  $\{w \mid |w| \geq 4\}$ ;
3.  $\{w \mid |w_b| \geq 2\}$ ;
4.  $\{w \mid |w| = 2 \vee |w_a| = 3\}$ ;
5.  $\{w \mid |w| = 3 \vee |w_a| \geq 5\}$ ;
6.  $\{w \mid |w_a| \geq 2 \vee |w_b| \geq 4\}$ ;
7.  $\{w \mid |w_a| \leq 2 \wedge |w| \leq 5\}$ ;
8.  $\{w \mid |w_a| \leq 4 \wedge |w_b| \geq 2\}$ .

### Задача 3.

Найдите НКА, распознающие следующие множества слов:

1.  $\{a, bb\}^*$  ( $\Sigma = \{a, b\}$ );
2.  $\{a, b\}^+ - a^* - b^*$  ( $\Sigma = \{a, b\}$ );
3.  $\{bc^{2n}ac^{2m} \mid m, n \geq 0\} \cup \{bc^{2n+2} \mid n \geq 0\}$  ( $\Sigma = \{a, b, c\}$ ).

### Задача 4.

Постройте ДКА для языков, указанных в задаче 1.

### Задача 5.

Найдите ДКА, распознающие множества слов, задаваемые следующими регулярными выражениями:

1.  $(a + b)^* b(a + 1)b(a + b)^*$  ;
2.  $a^*ba^+ba^*(ba^* + 1)$ .

## МПДКА, Лемма о разрастании

### Задача 1.

Проверить, являются ли автоматными следующие языки:

1.  $\{a^n cb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ;
2.  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w_a| = |w_b|\}$ ;
3.  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w_a| \geq |w_b|\}$ ;
4.  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w_a| \neq |w_b|\}$ ;
5.  $\{a^m b^n \mid m < n, m \in P\}$ ; ( $P$  — множество простых чисел);
6.  $\{a^m b^n \mid m < n \vee m \in P\}$ .

### Задача 2.

Построить минимальный полный детерминированный конечный автомат для языков, задаваемых следующими регулярными выражениями:

1.  $(a(ab + ba)^*b(a + ba)^*)^+$ ;
2.  $(1 + (a + b)^*b)(a + b)^*$ .

### Задача 3.

Как связаны число состояний в минимальном ПДКА для некоторого регулярного языка и соответствующем автомате для его дополнения. Что изменится, если убрать требование полноты?

## КС-грамматики

**Задача 1.** Написать контекстно-свободные грамматики, задающие следующие множества слов:

- (a)  $\{w \in \{a, b\}^* | w = w^R\}$ ,
- (b)  $\{a^n b^m | n > m\}$ ,
- (c)  $\{w \in \{a, b\}^* | |w|_a = |w|_b\}$ ,
- (d)  $\{a^n b^m | n - m \neq 2\}$ ,
- (e)  $\{a^n b^{2n+1} | n \in \mathbb{N}\}$
- (f)  $\{a^k b^{k+m} a^m | k, m \in \mathbb{N}\}$ ,
- (g)  $\{w \in \{a, b\}^* | |w|_a \neq |w|_b\}$ ,
- (h)  $\{w \in \{a, b\}^* | |w|_a = 2|w|_b\}$ ,
- (i)  $\{w \in \{a, b\}^* | |w|_a - |w|_b = 1\}$ ,
- (j)  $\{w \in \{a, b, c\}^* | |w|_a - |w|_b = 1\}$ .

**Задача 2.** Описать языки, распознаваемые следующими граммами:

- (a)  $S \rightarrow FF, F \rightarrow FF, F \rightarrow ab$ ,
- (b)  $S \rightarrow FS, S \rightarrow FF, F \rightarrow aFb, F \rightarrow \varepsilon$ ,
- (c)  $F \rightarrow ab, F \rightarrow aFb, F \rightarrow FF$ ,
- (d)  $S \rightarrow SaS \mid aSb \mid b$ ,
- (e)  $F \rightarrow a, F \rightarrow bF, F \rightarrow cFF$ .

## КПтели

### Задача 1.

Написать конечный преобразователь, который ( $x$  — двоичное число):

1. стирает первый символ слова, если это символ  $a$
2.  $-/-$  + определен только на словах, оканчивающихся на  $b$
3. стирает второе вхождение символа  $a$
4. удваивает все символы, кроме последнего
5.  $x \rightarrow x + 2$
6.  $x \rightarrow \max(x - 1, 0)$
7.  $x \rightarrow x * 3$
8.  $x \rightarrow 2x + 1$
9.  $(x, y) \rightarrow x + y$

**Определение Контекстная замена**  $X \rightarrow Y \parallel U\_V$ , где  $X, Y, U, V$  — произвольные регулярные выражения, смысл: " $UXV \rightarrow UYV$ "

### Задача 2.

Написать конечный преобразователь, который задает контекстную замену:

1.  $a \rightarrow b \parallel c\_d$
2.  $b^*a \rightarrow ab \parallel c\_a$
3.  $b^*a \rightarrow b \parallel c\_ca$

## Зачёт

### Задача 1.

1. Докажите, что для любых двух языков  $L_1$  и  $L_2$  выполнено равенство  $(L_1 \cdot L_2)^R = L_2^R \cdot L_1^R$
2. Существует ли такой язык  $L$ , что  $(L^R)^* \neq (L^*)^R$  ?

### Задача 2

Докажите, что если  $L$  — автоматный язык, то

1. Язык префиксов слов этого языка автоматен;
2. Язык суффиксов слов этого языка автоматен.

### Задача 3

Докажите, что нельзя построить автомат для языка  $\{a^n b^n\}$

### Задача 4

Описать язык, задаваемый грамматикой  $S \rightarrow cST|T, T \rightarrow aTb|d$

### Задача 5

Построить КС-грамматику над  $\{a, b, c\}$ , такую что количество букв  $a, b$  совпадает и каждой  $a$  предшествует  $c$

### Задча 6

Построить МП-автомат для задачи 5

### Задача 7

Задать КПтеlem преобразование  $a^+b \rightarrow ac \parallel ac_c$