

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2023
Контрольная работа №1(9), тренировочный вариант

Контрольная пройдёт вместо лекции, в Б. Хим., начало в 17:05. Время на выполнение работы — 40 минут. Все задачи оцениваются по принципу зачёт/незачёт, если не указано иное. Задачи 1–3 тестовые: нужен только ответ, верный ответ оценивается в 0.8 баллов, нет переписывания. Задачи 4–5 обычные: нужно полное решение, верное решение оценивается в 1 балл, в случае неверного решения на следующей к/р будет предложена аналогичная задача за 0.8 балла. Задача 6 будет дана на дом.

1. Для каждого из следующих частично упорядоченных множеств укажите, будут ли они фундированы, а также будут ли линейно упорядочены. (*Дается 1.2 балла, если ответ полностью верный, 0.8 балла при одной ошибке, 0.4 балла при двух ошибках.*)

- а) Рациональные числа со стандартным порядком
- б) Двоичные слова с отношением «быть подсловом» ($x \leq y$, если x — подслово y)
- в) Бесконечные подмножества целых чисел с отношением подмножества ($x \leq y$, если $x \subset y$)
- г) Многочлены с натуральными коэффициентами с отношением «не больше в окрестности нуля» ($p \leq q$, если существует ε , такое что при всех $0 < x < \varepsilon$ выполнено $p(x) \leq q(x)$)
- д) Числа вида $k - \frac{1}{n+1}$ для $k, n \in \mathbb{N}$ со стандартным порядком

2. Для каждого из этих свойств выберите один из вариантов: (1) оно эквивалентно фундированности, (2) оно эквивалентно вполне упорядоченности, (3) оно следует из фундированности, но не эквивалентно ей (4) из него следует вполне упорядоченность, но не наоборот (5) ничего из предыдущего. (*Дается 1.6 балла, если ответ полностью верный, 1.2 балла при одной ошибке, 0.8 балла при двух ошибках, 0.4 балла при трёх ошибках.*)

- а) Любое непустое подмножество имеет наименьший элемент.
- б) Любое бесконечное подмножество имеет минимальный элемент.
- в) Любое двухэлементное или бесконечное подмножество имеет наименьший элемент.
- г) В множестве нет бесконечной строго убывающей последовательности, но есть бесконечная строго возрастающая
- д) Если некоторое свойство верно для любого минимального элемента, а также для любого x из истинности свойства для x следует его истинность для любого непосредственно следующего за x (т.е. такого z , что не существует y , для которого $x < y < z$), то свойство выполнено для любого элемента.

3. Какие из этих свойств верны для любого вполне упорядоченного множества X ?

- а) Любое подмножество X является вполне упорядоченным (для индуцированного порядка, т.е. такого же, как на исходном множестве)
- б) Если начальный отрезок одновременно имеет вид $[0, a)$ и $[0, b]$, то b непосредственно следует за a
- в) Начальный отрезок, не совпадающий со всем множеством, не изоморфен всему множеству (для индуцированного порядка).
- г) Если a и b различные предельные элементы и $a < b$, то есть несчётное число элементов x , таких что $a < x < b$
- д) Все предыдущие свойства неверны.

4. Докажите, что не существует бесконечной последовательности слов из 0 и 1, такой что каждое следующее либо является собственным подсловом предыдущего, либо имеет более короткую максимальную по длине цепочку, в которой нет двух единиц подряд.

5. Рассмотрим множество всех циклических слов из 0 и 1 (т.е. имеющих вид x^k для некоторого x и $k > 1$) с прямым лексикографическим порядком. Явным образом докажите каждое из трёх утверждений: в этом множестве есть бесконечно убывающая последовательность, оно не фундировано (при этом множество, не имеющее минимального элемента, не должно быть множеством значений бесконечно убывающей последовательности), а принцип трансфинитной индукции неверен.

6. (*Будет выдана на дом*). Пусть A — вполне упорядоченное множество вида $\omega \cdot L + R$, где R — конечное множество, $B \subset A$ и известно, что для любых $x, y \in B$, таких что $x < y$, найдётся $z \notin B$, т.ч. $x < z < y$, и для любых $x, y \notin B$, таких что $x < y$, найдётся $z \in B$, т.ч. $x < z < y$. Пусть известно, что A изоморфно B . Сколько элементов может быть в R ? (Для всех возможных значений приведите примеры A и B , для остальных докажите невозможность).