

## Полярные преобразования

**Определение.** Полярной точки  $P$  относительно окружности  $\omega$  называется прямая, проходящая через точку  $P'$  инверсную точке  $P$  относительно окружности, и перпендикулярная прямой  $PP'$ . **Определение.** Полюсом прямой  $l$  относительно окружности  $\omega$  называется точка, являющаяся инверсным образом относительно этой окружности основания перпендикуляра, опущенного из центра  $\omega$  на  $l$ . **Определение.** Полярным преобразованием относительно окружности  $\omega$  называется преобразование, которое ставит каждой точке в соответствие её полярю, а каждой прямой в соответствие её полюс.

Основное свойство полярного преобразования ( *полярная двойственность* ): если полюс прямой  $l$  лежит на прямой  $k$ , то полюс прямой  $k$  лежит на прямой  $l$ . И наоборот. Если полярю точки  $A$  проходит через  $B$ , то полярю точки  $B$  проходит через  $A$ .

*Упражнение.* Докажите, что три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры проходят через одну точку.

1. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Касательные к каждой его вершине пересекают продолжения противоположных сторон в точках  $A_1, B_1, C_1$ /Доказать, что эти точки лежат на одной прямой.
2. а) Представим, что мы доказали теорему Паскаля. Докажите теорему Брианшона. б) Представим, что мы доказали теорему Дезарга в одну сторону. Докажите её теперь в другую сторону. в) А что если применить полярное преобразование к теореме Паппа?
3. Дан полукруг  $S$  с центром  $O$  и диаметром  $AB$ . На  $AB$  выбрана точка произвольная точка  $P$ . Пусть  $M$  и  $N$  такие точки полукруга  $S$ , что  $\angle APM = \angle BPN = \alpha$ . Докажите, что точки пересечения прямых  $MN$  и  $AB$  не зависят от  $\alpha$