

## Три центра гомотетий

1. В параллелограмме  $ABCD$  на диагонали  $AC$  отмечена точка  $K$ . Окружность  $s_1$  проходит через точку  $K$  и касается прямых  $AB$  и  $AD$  ( $s_1$  вторично пересекает диагональ  $AC$  на отрезке  $AK$ ). Окружность  $s_2$  проходит через точку  $K$  и касается прямых  $CB$  и  $CD$  ( $s_2$  вторично пересекает диагональ  $AC$  на отрезке  $KC$ ). Докажите, что при всех положениях точки  $K$  на диагонали  $AC$  прямые, соединяющие центры окружностей  $s_1$  и  $s_2$ , будут параллельны между собой.

2. Окружность  $\omega_A$  вписана в угол  $A$  треугольника  $ABC$ . Аналогично определены окружности  $\omega_B$  и  $\omega_C$ , причём все эти окружности не пересекаются. Окружность  $\omega$  касается внешним образом окружностей  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$  в точках  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  соответственно. Докажите, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.

3. Из вершины  $A$  треугольника  $ABC$  проведён луч  $AM$ , лежащий внутри треугольника ( $M$  лежит на  $BC$ ). Обозначим через  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  вписанная и невписанная окружности треугольника  $AMB$  соответственно (берётся окружность, касающаяся стороны  $MB$ ). Аналогично для треугольника  $ACM$  определены окружности  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Докажите, что общая внешняя касательная к окружностям  $\gamma_1$  и  $\omega_1$ , отличная от  $BC$ , и общая внешняя касательная к окружностям  $\gamma_2$  и  $\omega_2$ , отличная от  $BC$ , пересекаются на прямой  $BC$ .

4. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

5. Дан описанный четырёхугольник  $ABCD$ . Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  и центр невписанной окружности треугольника  $CDA$ , касающейся стороны  $AC$ , лежат на одной прямой.

6. В треугольник  $ABC$  вписана окружность, которая касается сторон  $AB$  и  $BC$ , а также описанной около треугольника  $ABC$  окружности внутренним образом в точке  $B'$ . а) Докажите, что прямая  $BB'$  и две ей аналогичные пересекаются в одной точке. Какая ещё прямая проходит через эту точку? б)\* Докажите, что это точка, изогонально сопряжённая точке Нагеля. А какая точка изогональна сопряжена точке Жергонна?

7.\* Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\omega$ , а его диагонали пересекаются в точке  $K$ . Точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  — середины дуг  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  (не содержащих других вершин четырёхугольника) соответственно. Точки  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABK$ ,  $BCK$ ,  $CDK$ ,  $DAK$  соответственно. Докажите, что прямые  $M_1I_1$ ,  $M_2I_2$ ,  $M_3I_3$ ,  $M_4I_4$  пересекаются в одной точке.