

Во всех задачах этого листка, при необходимости, можно считать, что все арифметические операции выполняются за  $O(1)$ .

1. Есть массив  $a_1, \dots, a_n$  и два игрока, которые ходят по очереди. Каждым своим ходом игрок откусывает от массива крайнее левое или крайнее правое число. Результат игрока — сумма всех откушенных им чисел. Каждый хочет максимизировать свой выигрыш. Кто выигрывает при правильной игре? Приведите алгоритм за  $O(n^2)$ .
2. Дана матрица  $n \times m$  целых чисел. Нужно пройти из левого верхнего в правый нижний угол, ходить можно только вправо или вниз. Стоимость пути — это произведение всех чисел на пути. Найти минимальное количество нулей, на которое может заканчиваться стоимость пути. Асимптотика  $O(nm)$ .
3. Дан массив чисел  $a_1, \dots, a_n$ . За одну операцию разрешается удалить любое (кроме крайних) число, заплатив за это штраф, равный произведению этого числа на сумму соседних. После этого массив “склеивается”, чтобы в нём не было дырок. Требуется удалить все числа, кроме крайних, с минимальным суммарным штрафом. Асимптотика:  $O(n^3)$ .
4. На столе лежат  $n$  камней. Играют двое. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? Асимптотика:  $O(n)$ . За один ход игрок может взять из кучи
  - а) 1 или 2 камня, если текущее  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ;
  - б) 1 или 3 камня, если текущее  $n \equiv 1 \pmod{3}$ ;
  - в) 1, 2 или 3 камня, если текущее  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .
5. Назовём число *гладким*, если в его десятичной записи абсолютная разность любых двух рядом стоящих цифр не меньше  $l$  и не больше  $r$ . Дано число  $n$ . Сколько существует гладких натуральных чисел, состоящих из  $n$  цифр? Асимптотика:  $O(n)$ .
6. На плоскости дано  $n$  кругов. Любые два либо не пересекаются, либо вложены друг в друга. Найдите наибольшую цепочку вложенных кругов. Асимптотика:  $O(n^2)$ .
7. Дана последовательность из круглых открывающих и закрывающих скобок длины  $n$ . За  $O(n^2)$  найдите число способов разбить её в конкатенацию некоторого количества правильных скобочных последовательностей.