Окружность Аполлония

Окружность Аполлония ω_A неравнобедренного треугольника ABC — это геометрическое место точек M, для которых $MB : MC = AB : AC$. Аналогично определяются окружности Аполлония ω_B и ω_C. ω — описанная окружность треугольника ABC.

1. Диаметр ω_A — основания внутренней и внешней биссектрис угла A, центр ω_A лежит на касательной к ω в точке A, радикальная ось ω_A и ω — симедиана, проведённая из вершины A. Ну и да, поймите, что это значит, что $\omega_A \perp \omega$.

2. Точка, изогонально сопряжённая точке Торричелли, принадлежит всем трём окружностям Аполлония.

3. Обозначим точку пересечения касательной, проведённой в точке A к описанной окружности треугольника ABC, и стороны BC через A'. Угадайте, что такое точки B' и C'. Докажите, что прямая $A'B'C'$ перпендикулярна прямой OL, где O — центр описанной окружности ABC, а L — его точка Лемуана.

4. Точки пересечения окружностей Аполлония будем называть точками Аполлония P и Q (считая, что их две). Докажите, что педальные треугольники этих и только этих точек — правильные треугольники.

5. Докажите, что если пересечь прямые AP, BP и CP вторично с ω в точках A', B' и C', то получится правильный треугольник $A'B'C'$.

6. Даны точки A_1, A_2, A_3, A_4 общего положения такие, что

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3.$$

Обозначим через O_i центр описанной окружности треугольника A_{jkl}, где $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Докажите, что прямые A_iO_i пересекаются в одной точке или параллельны.

7. В треугольнике ABC AL_a и AM_a — внутренняя и внешняя биссектрисы угла A. Пусть ω_a — окружность, симметричная описанной окружности треугольника AL_aM_a относительно середины BC. Окружность ω_b определена аналогично. Докажите, что ω_a и ω_b касаются тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.