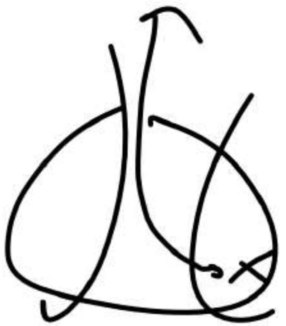
Лекция 12

25.11

Splay-дерево

S - мн-во чисел

insert
erase
find



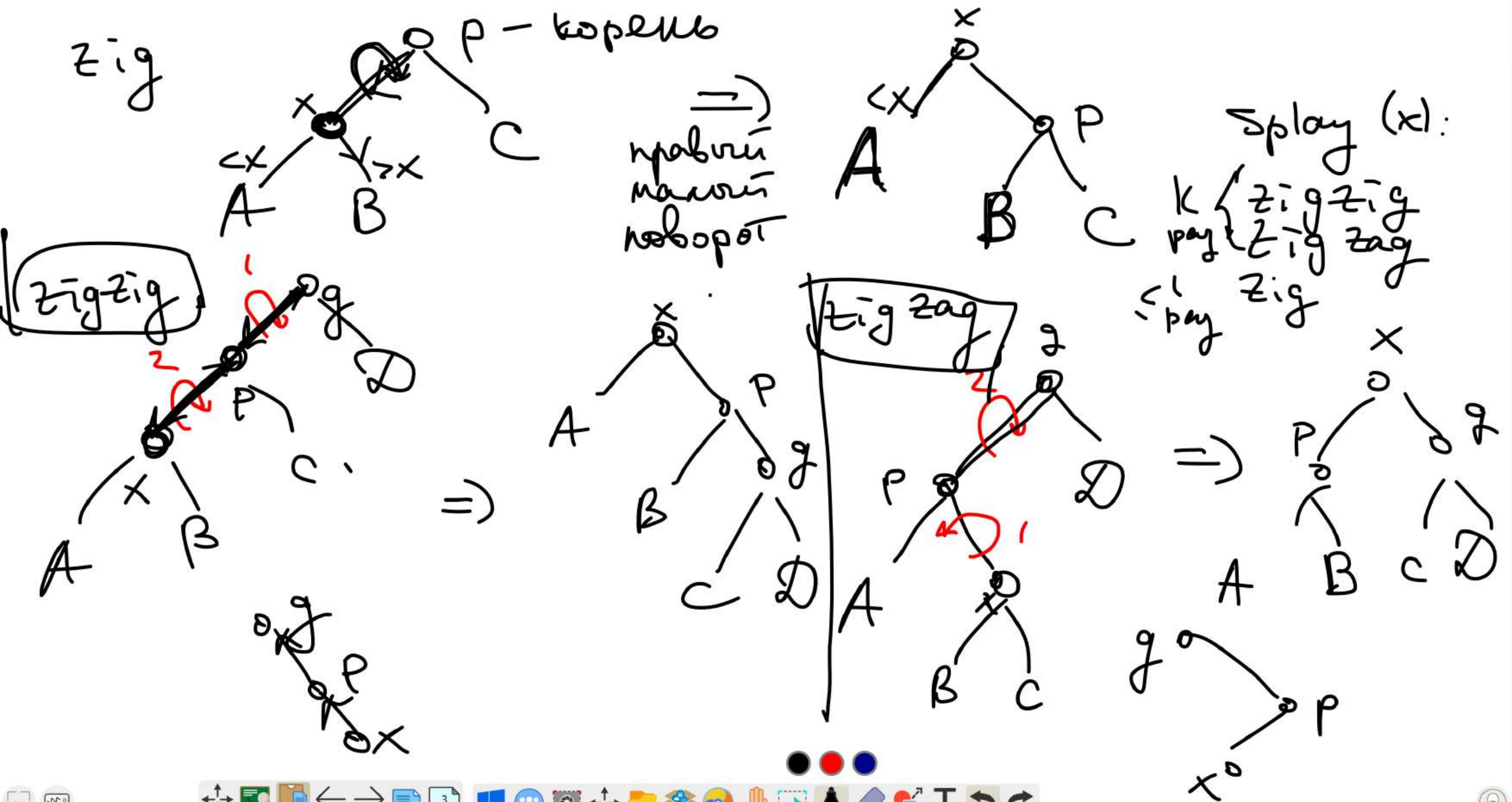
B-дерево

splay-дерево:

Двоичное дерево поиска

find (x) → splay (x)

x поднимает в корень


zig
p – корень
правый
малый
поворот
Splay (x):
k { zigzig
раз { zigzag
1 раз zig
zigzig
zigzag
A
B
C
D

insert (x):
вставляем x так же, как в наивном дереве поиске. splay (x)

$\underline{T(\text{insert}) \le T(\text{splay})}$

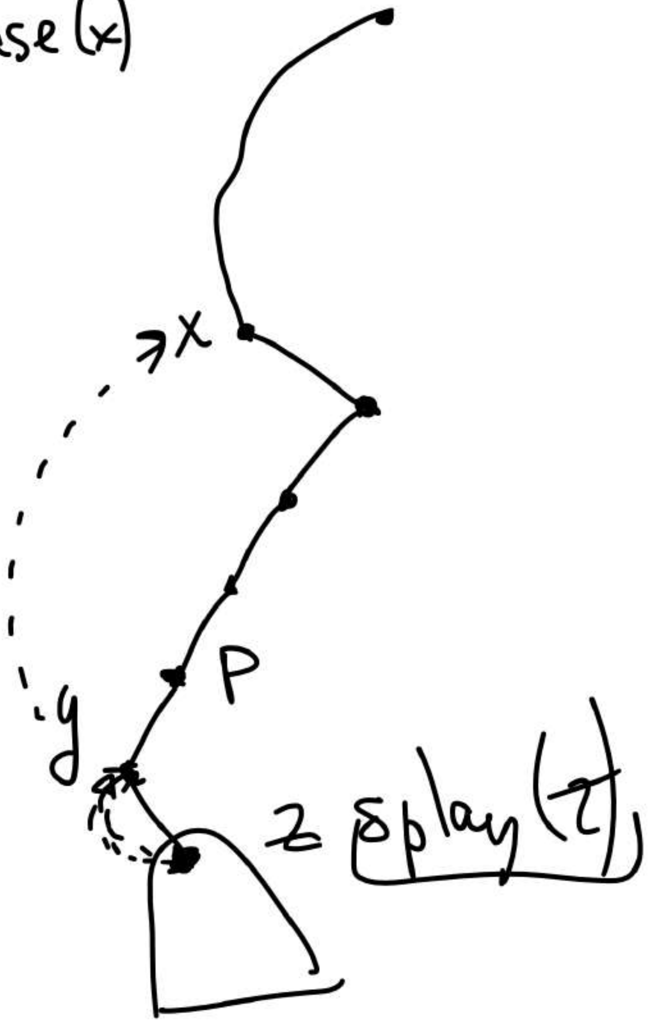
find (x):
находим;
splay (x)

erase (x): удаляем x так же, как в наивном дереве поиске:

splay (z)

$T(\text{erase}) \le$
$\le T(\text{splay})$

erase(x)



$T(op) \le T(splay)$

Утв. $T(splay) = \underline{O}(\log n)$

аморт. сложность

Опр. Метод потенциалов.

П

Пусть $S(x)$ – кол-во верш. в поддереве x (x тоже входит в поддерево.

$$r(x) = \log_2 S(x) \ge 0$$

$$\Phi = \sum_{x \in V} r(x)$$ – потенциал splay-дерева

Пусть t_i – реальное время обработки i-го запроса

Φ_j – потенциал после j-го запроса.

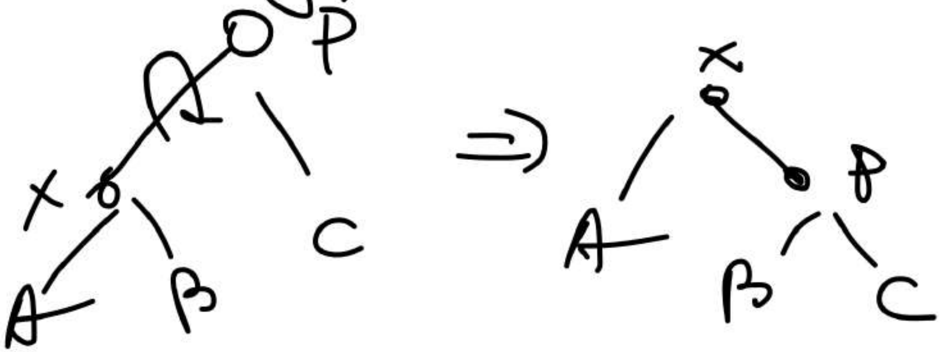
после splay   до splay

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} = t_i + \Delta \Phi_i$$

<u>Докажем</u>, что $a(\text{splay}(x)) \le 1 + 3(r'(x) - r(x)) \le$

$$\le 1 + 3\log_2 n = O(\log n)$$

$$a(zig) = 1 + r'(x) + r'(p) - r(x) - r(p) \le$$



$$r'(p) \le r(p)$$

$$\le 1 + r'(x) - r(x) \le$$

$$\le 1 + 3\,(r'(x) - r(x)).$$

$$a(zigzig) = 2 + r'(x) + r'(p) + r'(g) - r(x) - r(p) - r(g) \le$$

$$r(p) \ge r(x)$$

$$r'(p) \le r'(x)$$

$$\le 2 + r'(x) + r'(g) - 2r(x)$$

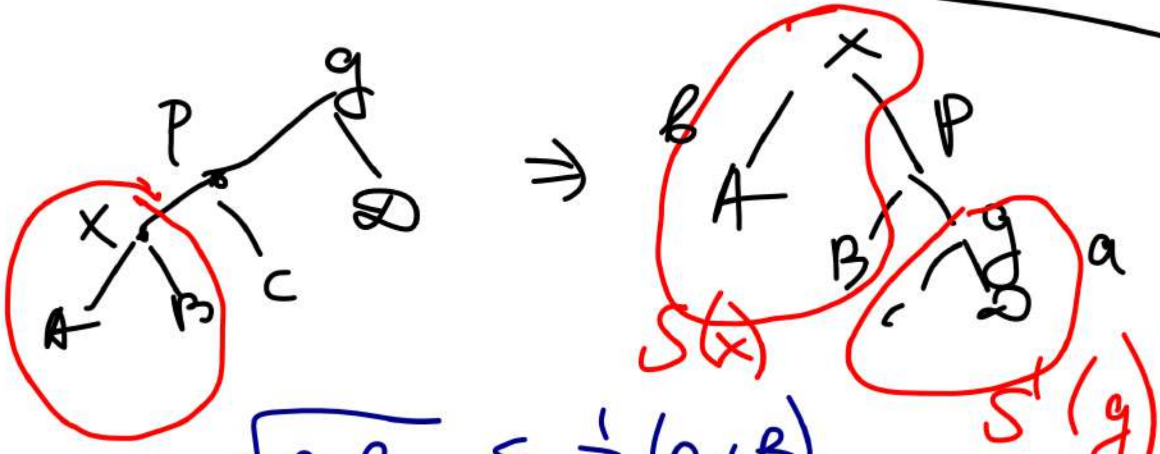
$$a(\text{zig zig}) \le 2 + r'(x) + r'(y) - 2r(x) \le 3\,(r'(x) - r(x))$$

Докажем, что

$$\Leftrightarrow \quad r'(y) + r(x) - 2r'(x) \le -2 \ ?$$

$$\underbrace{r'(y) - r'(x)} + r(x) - r'(x) \le -2 \ ?$$

$$\log_2 \frac{s'(y)}{\underbrace{s'(x)}_{a}} + \log_2 \frac{s(x)}{\underbrace{s'(x)}_{b}} \ ? \le 2$$



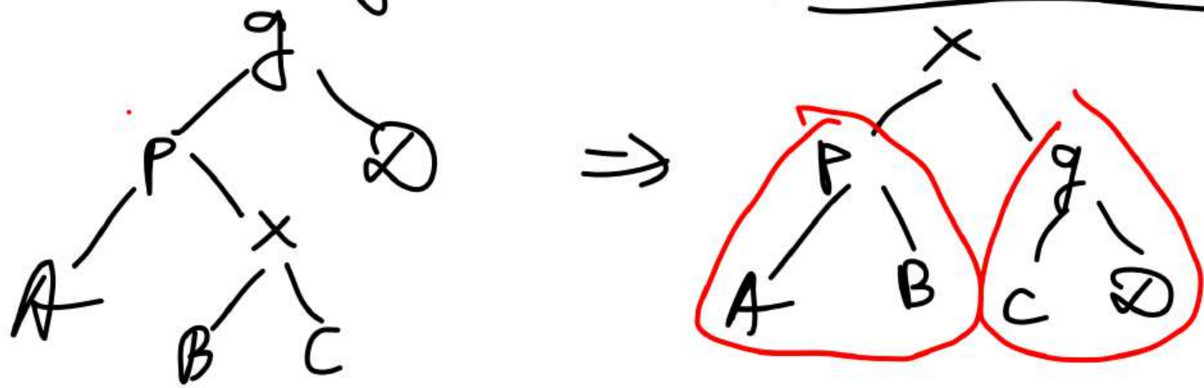
$$\underbrace{a + b \le 1}_{a,\,b \ge 0}$$

$$\sqrt{ab} \le \tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$ab \le \tfrac{1}{4}(a+b)^2 \le \tfrac{1}{4} \xrightarrow{\log_2} \log_2 a + \log_2 b \le -2 \ ?$$

$$a(\text{zig zag}) = 2 + \underline{r'(x) + r'(p) + r'(g) - r(x) - r(p) - r(g)}$$

$$r(p) \geq r(x)$$



$$\leq 2 + r'(p) + r'(g) - 2r(x) \leq 2\left(r'(x) - r(x)\right) \leq 3\left(r'(x) - r(x)\right)$$

Д-м, что

$$r'(p) + r'(g) - 2r'(x) \leq -2 \; ?$$

$$\log_2 \underbrace{\frac{s'(p)}{s'(x)}}_{a} + \log_2 \underbrace{\frac{s'(g)}{s'(x)}}_{b} \leq -2 \; ?$$

$a + b \leq 1$

$a, b \geq 0$

$\log_2 a + \log_2 b \leq -2$

25.11.2021 19:55 10/16

$a(zig) \le 1 + 3(r'(x) - r(x))$

$a(zigzig) \le 3(r'(x) - r(x))$

$a(zig\ zag) \le 3(r'(x) - r(x))$

$a(splay)$

zig-zig

zig zag

$\Phi_0 = 0$

$r_0(x)$ - ранг x до всех поворотов

$r_1(x)$ - ранг x после 1-го поворота

$r_2(x)$ - — — — 2

⋮

$\to r_k(x)$ - после посл.

$a = t + \Delta\Phi$

$n \quad \Delta\Phi \approx -n + \log n$

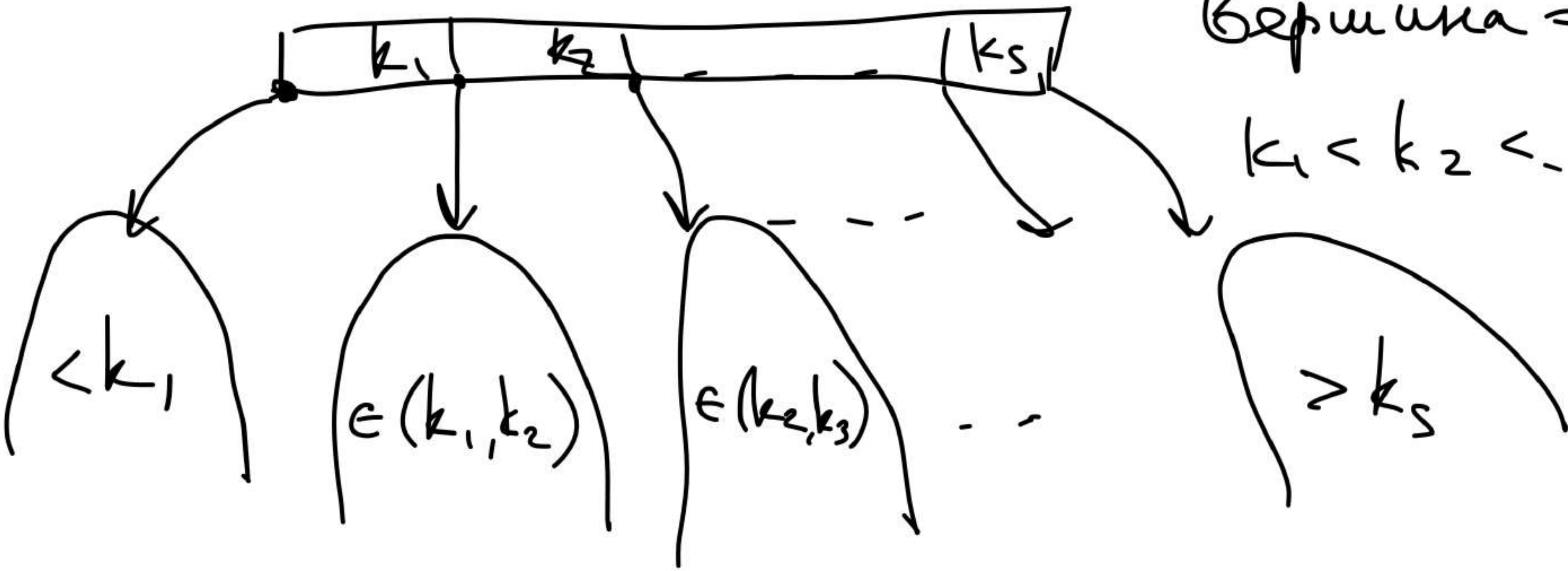
$$a(splay) \le 1 + 3r_k(x) - 3r_0(x)$$

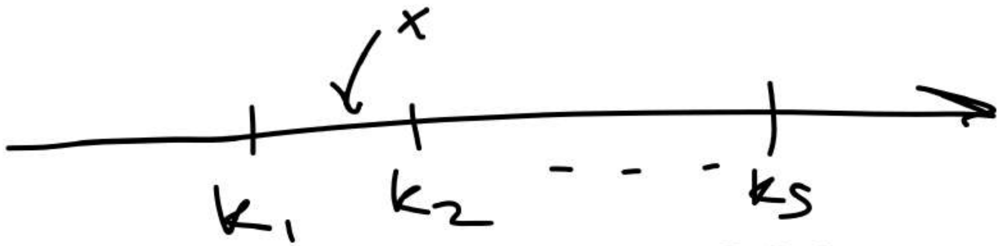
$$a(splay) \le 3(r_1(x) - r_0(x)) + 3(r_2(x) - r_1(x)) + \dots + 3(r_{k-1}(x) - r_{k-2}(x)) + 1 + 3(r_k(x) - r_{k-1}(x))$$

B - дерево

Вершина = узел

$k_1 < k_2 < \ldots < k_s$





25.11.2021 19:55 12/16

<u>Опр</u> B-дерево: дерево поиска:
с параметром t

$(t \geq 2)$

1) в любой некорневой вершине кол-во ключей $\in [t-1, 2t-1]$

2) в корне кол-во ключей $\in [1, 2t-1]$

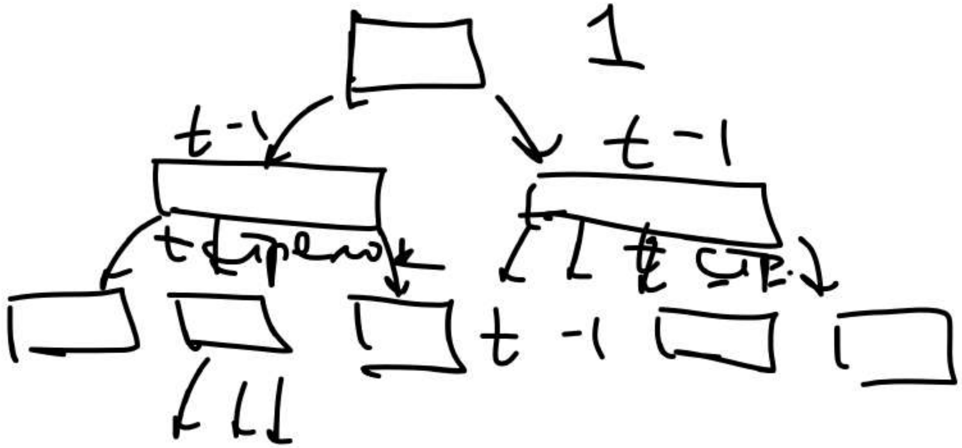
3) все листья — на одной глубине.

ENG 19:55

УТ Если в B-дереве n ключей, то его глубина $= O(\log_t n)$

$$\boxed{t \approx 1000}$$

Дано Пусть B-дерево имеет глубину h. Какое в нём может быть min число ключей?



$$\begin{array}{l} 1 \\ 2(t-1) \\ 2t(t-1) \\ 2t^2(t-1) \\ \dots \\ 2t^{h-1}(t-1) \end{array}$$

$$\Sigma = 1 + 2(t-1) + 2t(t-1) + \dots + 2t^{h-1}(t-1) = 1 + 2(t-1)\cdot\left[1 + t + t^2 + \dots + t^{h-1}\right]$$

$$\sum = 1 + 2\cancel{(t-1)}\left[\underbrace{1+t+t^2+\ldots+t^{h-1}}_{\frac{t^h-1}{\cancel{t-1}}}\right] =$$

min возм. кол-во ключей

$$= 1 + 2(t^h - 1) \leq n \qquad \log_t(n)$$

$$t^h - 1 \leq \frac{n-1}{2}$$

$$t^h \leq \frac{n+1}{2} \Rightarrow h \leq \log_t\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Зачем это дерево? Чтобы хранить очень большие базы данных.