МФТИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2022

Семинар №12. Пересечение полуплоскостей, тернарный поиск

1. Рассмотрим следующий (неверный!) алгоритм "нахождения" диаметра конечного множества S. Построим выпуклую оболочку S. Для 1-й вершины найдём самую далёкую от неё. Затем пройдём по вершинам двумя указателями: сдвигаем первую точку и двигаем вторую, пока расстояние увеличивается. Приведите пример, на котором такой алгоритм ошибается.
2. Дан многоугольник с вершинами в целых точках. Найдите количество целочисленных точек в его внутренности за $O(n \log A)$, где n — количеств вершин, а A — ограничение на абсолютное значение координат.
3. Пусть две непараллельные прямые заданы координатами каких-то своих точек, при этом координаты — целые числа, не превосходящие C по модулю. Найдите асимптотическую оценку на координаты точки пересечения этих прямых.
4. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — точки на плоскости. Диаграммой Вороного называется разбиение всей плоскости на n частей, таких что в i-й части лежат в точности все точки, расстояние от которых до p_i не больше расстояния до любой другой p_j. Постройте диаграмму Вороного за $O(n^2 \log n)$.
5. В соревновании участвуют n спортсменов, у i-го из них есть своя скорость плавания u_i, бега — v_i, и езды на велосипеде — w_i. Жюри хочет создать трассу, где участникам придётся проплыть x метров, пробежать y метров и проскакать z метров, причём единственное требование — положительность всех x, y, z. Эти x, y, z пока не фиксированы и могут устанавливаться членами жюри. За $O(n^2 \log n)$ определите, кто может финишировать раньше остальных при должном выборе x, y, z.
6. На плоскости даны точки $p_1, \ldots, p_n$. Определите, существует ли такая точка q, что из q все остальные точки видны ровно в этом порядке при просмотре слева направо (точки не должны закрывать друг друга). Асимптотика: $O(n \log n)$.
7. На плоскости в вершинах выпуклой оболочки расположены n башен, охраняющих территорию. Нужно построить командный пункт в одной из точек многоугольника так, чтобы противнику пришлось взорвать как можно больше башен, чтобы вывести пункт из выпуклой оболочки оставшихся башен. Найдите самое надёжное положение для командного пункта за $O(n \log^2 n)$, то есть такое положение, которое вынудит противника взорвать как можно больше башен.
8. Дан выпуклый многоугольник на n вершинах. Найдите максимальный радиус круга, который можно в него поместить. Найдите также максимальное r, такое что в многоугольник можно поместить два круга радиуса r. Асимптотика: $O(n \log n \log \frac{1}{\varepsilon})$, где ε — требуемая точность.
9. У робота есть последовательность команд длины n, которую он выполняет ровно m раз подряд. Каждая команда — сдвинуться влево/вправо/вниз/вверх на координатной плоскости. За $O(n \log m)$ определите минимальное расстояние от начала координат до робота за всю историю его движения.
10. На плоскости дан треугольник. Найдите его точку Торричелли за $O(\log \frac{1}{\varepsilon})$, где ε — необходимая точность.