МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022

Домашнее задание №5. Динамическое программирование (1)

1. (1 балл) На прямой дощечке вбито n гвоздиков. Любые два гвоздика можно соединить ниточкой (но нельзя соединять гвоздик сам с собой). Требуется соединить некоторые пары гвоздиков ниточками так, чтобы к каждому гвоздику была привязана хотя бы одна ниточка, а суммарная длина всех ниточек была минимальна. Асимптотика: $O(n \log n)$.

2. (2 балла) Нужно перевезти n объектов, стоящих в ряд, их веса равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Корабль за одну переправу может перевезти лишь грузов суммарного веса не больше t. В каждый момент времени грузить на корабль разрешается только первый или последний объект, который ещё не был погружен. Иными словами, за одну переправу можно перевезти некий префикс и некий суффикс необработанных объектов. За $O(n^2)$ определите минимальное число переправ корабля для перевозки всех объектов.

3. (3 балла) Предложите метод решения задачи о рюкзаке с восстановлением ответа, использующий $O(W\sqrt{n})$ памяти и $O(nW)$ времени. Здесь n — число объектов, а W — вместимость рюкзака.

4. (4 балла) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые положительные числа, причём $a_i \geqslant 2a_{i-1}$ для всех $i \geqslant 2$. Требуется найти количество способов представить число W в виде суммы слагаемых из мультимножества $(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, a_n)$, то есть каждое число можно брать не более двух раз. Порядок слагаемых в сумме не учитывается. Покажите, как можно найти ответ за $O(K \log K + F_{\log_2(W/K)})$ для произвольного K. Здесь F_k — k-е число Фибоначчи. Найдите оптимальное значение K и время работы для $W = 10^{18}$.