

1. Дано подвешенное корневое бинарное дерево. Как за линейное время проверить, что оно является деревом поиска?
2. Как в дереве поиска искать максимальный и минимальный элементы? Как находить наименьший элемент, больший  $x$ , лежащий в дереве? Может понадобиться хранить дополнительное поле в каждой вершине.
3. Пусть  $F_0 = 1, F_1 = 1$ , а  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  при  $n \geq 2$ . Пусть  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Докажите, что

$$F_{n-1} = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}} \text{ при } n \geq 1.$$

4. Докажите, что при выполнении операции **insert** в AVL-дереве можно остановиться (не подниматься вверх), когда  $\Delta(v) = 0$ . Докажите, что если  $\Delta(v)$  стало равным 1 или  $(-1)$ , то это означает, что глубина поддерева с корнем в  $v$  (то есть  $h(v)$ ) увеличилась. Докажите, что достаточно выполнить один поворот.
5. Докажите, что при выполнении операции **erase** в AVL-дереве можно остановиться (не подниматься вверх), когда  $\Delta(v) = \pm 1$ . Докажите, что если  $\Delta(v)$  стало равным 0, то это означает, что глубина поддерева с корнем в  $v$  (то есть  $h(v)$ ) уменьшилась. Всегда ли достаточно выполнить один поворот?
6. Пусть даны два AVL-дерева  $T_1$  и  $T_2$ , причём все ключи  $T_1$  из них строго меньше всех ключей  $T_2$ . Предложите алгоритм построения AVL-дерева, множество ключей которого совпадает с объединением множеств ключей  $T_1$  и  $T_2$ , за время  $O(\log(|T_1| + |T_2|))$ .
7. В изначально пустое множество по одному добавляются или удаляются элементы. После выполнения каждого запроса сообщать медиану текущей версии множества. Асимптотика:  $O(\log n)$  на запрос, где  $n$  — текущий размер множества.
8. Есть два множества отрезков на прямой, в них поступают запросы добавления. После каждого нужно сказать: сколько существует пар (отрезок из первого множества, отрезок из второго множества) таких, что они пересекаются? Асимптотика ответа на запрос:  $O(\log n + \log m)$ , где  $n, m$  — размеры множеств.
9. К изначально пустому множеству чисел  $S$  поступают запросы трёх типов: а) добавить  $x$  в  $S$ ; б) удалить  $x$  из  $S$ ; в) найти сумму элементов  $S$ , значения которых лежат в отрезке  $[l, r]$ . Ответьте на все запросы за  $O(q \log q)$ .