- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m : kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$  переменой местами двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ALMOST3COL =  $\{G \mid \text{все вершины графа } G,$  кроме, возможно, одной, можно правильным образом раскрасить в 3 цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка  $SCSS = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$ . (Задача о наименьшей надстроке в алфавите  $\Sigma$ ).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x,x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ONE-THIRD-3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно треть переменных равна 1}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка BETWEENNESS =  $\{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1,2,\ldots,|A|\} \, \forall (a,b,c) \in C \ (f(a) < f(b) < f(c)$  или f(a) > f(b) > f(c)).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 2-VISITS-HAMCYCLE =  $\{G \mid B \text{ неориентированном графе } G$  существует цикл, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более чем дважды $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка BETWEENNESS =  $\{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1,2,\ldots,|A|\} \, \forall (a,b,c) \in C \ (f(a) < f(b) < f(c)$  или  $f(a) > f(b) > f(c)\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Бодренков Антон (М05-316а), группа 122, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$  является палиндромом, y является подсловом  $z\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \dots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \dots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ALMOST3COL =  $\{G \mid \text{все вершины графа } G, \text{кроме, возможно, одной, можно правильным образом раскрасить в 3 цвета}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка EXACTONE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi$  формула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Гаврилин Александр, группа 122, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMCYCLEFIXEDARC =  $\{(G,e) \mid$  в ориентированном графе G найдётся гамильтонов цикл, проходящий через ребро  $e\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY =  $\{(G, H) \mid \text{из графа } G \text{ можно получить граф } H$  последовательностью стягиваний рёбер $\}$ . (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid H \text{ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то <math>G \in A$ , при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMTREFOIL =  $\{(G, s, t, u) \mid$  в неориентированном графе G есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины s, t и u, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка NOMONOCHROMTRIANGLE =  $\{G \mid \text{рёбра графа } G \text{ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника}.$
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка TWO-THIRDS-3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны <math>1\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка NOMONOCHROMTRIANGLE =  $\{G \mid \text{рёбра графа } G \text{ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника}.$
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid \text{существует граф } G \in A$ , в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных H, при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUE-AFTER-EXPANSION =  $\{(G, k) \mid B \}$  неориентированный граф G можно добавить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе была клика размера k
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка NOMONOCHROMTRIANGLE =  $\{G \mid \text{рёбра графа } G \text{ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника}.$
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Калимуллин Евгений, группа 122, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$$
 для любого  $s'$ , отличающегося от  $s$ 

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык **2ALMOSTEULER** =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $3COLPARTITION = \{(G, k) \mid \text{вершины неориентированного графа } G$  можно разбить на k групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, можно раскрасить в 3 цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка EXACTONE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку **EXACTTWO3SAT** =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s перестановкой по циклу, т. е.

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid \text{в разложение } k$  на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUE-AFTER-EXPANSION =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированный граф G можно добавить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе была клика размера  $k\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BETWEENNESS =  $\{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1,2,\ldots,|A|\} \, \forall (a,b,c) \in C \ (f(a) < f(b) < f(c)$  или f(a) > f(b) > f(c)).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$ 

- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BIPARTITESUBGRAPH =  $\{(G, k) \mid$  в графе G найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы k вершин $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$  является палиндромом, y является подсловом  $z\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный)}.$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid \text{в разложение } k$  на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DUMBBELL =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть подграф, состоящий из двух клик размера k, соединённых одним ребром $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXMINVERTEXCOVER =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \ldots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ALMOST3COL =  $\{G \mid \text{все вершины графа } G, \text{кроме, возможно, одной, можно правильным образом раскрасить в 3 цвета}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CLAQUE =  $\{(G,k) \mid \text{в графе } G \text{ есть полный двудольный подграф с долями размера по } k\}. (Иными словами, найдутся <math>V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ имеет подслово, лежащее в } A$  и являющееся палиндромом} также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s стиранием каких-то двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDIFFERENT-SAT =  $\{\varphi \mid \text{формула } \varphi \text{ от переменных } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ такова,}$  что для некоторого i выполнимы и  $\varphi|_{x_i=1}$ , и  $\varphi|_{x_i=0}\}$ .
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка BETWEENNESS =  $\{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1,2,\ldots,|A|\} \, \forall (a,b,c) \in C \, (f(a) < f(b) < f(c)$  или f(a) > f(b) > f(c)).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка TWO-THIRDS-3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны <math>1\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXINDSET =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid \text{в графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $P \neq NTIME(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \,$  и  $yx \in A\}$  (здесь yx означает конкатенацию) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s удвоением какого-то подслова).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DOUBLEINDSET  $= \{(G, k) \mid$ в графе G существуют два непересекающихся независимых множества размера  $k\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY =  $\{(G, H) \mid \text{из графа } G \text{ можно получить граф } H$  последовательностью стягиваний рёбер $\}$ . (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ имеет подслово, лежащее в } A$  и являющееся палиндромом $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$ 

- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $3COLPARTITION = \{(G, k) \mid \text{вершины неориентированного графа } G$  можно разбить на k групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, можно раскрасить в 3 цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка  $SCSS = \{(R,k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$ . (Задача о наименьшей надстроке в алфавите  $\Sigma$ ).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ имеет подслово, лежащее в } A$  и являющееся палиндромом} также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DOUBLEINDSET  $= \{(G, k) \mid$  в графе G существуют два непересекающихся независимых множества размера  $k\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXLEAFSPANTREE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть остовное дерево c не менее чем k листьями $\}$ . (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi$  формула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid \text{существует граф } G \in A$ , в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных H, при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е.}$ 

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HYPERGRAPH-VCOVER =  $\{(V, S, k) \mid S$  система 3-элементных подмножеств V, такая что для некоторого множества  $C \subset V$  из k элементов любое множество из S содержит хотя бы один элемент C}
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка 1-PLANARITY =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра<math>\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x, x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка NONCONSTSAT =  $\{\varphi : y \text{ формулы } \varphi \text{ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны 1}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXMINVERTEXCOVER =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем k вершин $\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDIFFERENT-SAT =  $\{\varphi \mid \text{формула } \varphi \text{ от переменных } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ такова,}$  что для некоторого i выполнимы и  $\varphi|_{x_i=1}$ , и  $\varphi|_{x_i=0}\}$ .
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка 1-PLANARITY =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра}.$
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M \text{ представлено как объединение } M_{i_j}, \text{ при этом не больше } q \text{ элементов } M \text{ принадлежат более, чем одному из множеств } M_{i_j}\}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s',$  отличающегося от s

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \dots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \dots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка TWO-THIRDS-3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны <math>1\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка TILING =  $\{(T,1^N) \mid \text{квадрат } N \times N \text{ можно замостить плитками из набора } T\}$ . (Плитка есть элемент  $C^4$  для некоторого множества цветов C. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень } 3\}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$  заменой одного бита на противоположный).

- **4.** (5 баллов) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 2-VISITS-HAMCYCLE =  $\{G \mid B \text{ неориентированном графе } G$  существует цикл, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более чем дважды $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CROSSWORD =  $\{(W, A) \mid \text{ существует кроссворд из словаря } W$  с маской  $A\}$ . (W множество слов в некотором алфавите  $\Sigma$ , A матрица размера  $n \times n$  из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток (i, j), для которых  $A_{ij} = 1$ , в  $\Sigma$ , такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в W).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

**3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$ 

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{вершины неориентированного графа } G$  можно разбить на k групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, имеет гамильтонов цикл $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi$  формула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid \text{существует граф } G \in A$ , в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных H, при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (5 баллов) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \dots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \dots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDSETFIXEDVERTEX =  $\{(G, k, v) \mid$  в неориентированном графе G есть независимое множество размера k, содержащее вершину  $v\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка SETBASIS =  $\{(C,k) \mid C \text{ есть набор подмножеств конечного множества } S$  и существует набор B из k подмножеств S, такой что любое  $c \in C$  можно получить как пересечение некоторого числа множеств из B}.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s стиранием каких-то двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ODDMAXCLIQUE =  $\{G \mid \mathbf{B} \text{ графе } G \text{ есть максимальная (неувеличиваемая) клика из нечётного числа вершин<math>\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXMINVERTEXCOVER =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x,x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1$$
 и  $V(x,s')=1$  для любого  $s'$ , отличающегося от  $s$  перестановкой по циклу, т. е.

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid \text{в разложение } k$  на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 3COLEXCLUSION =  $\{(G, k) \mid \text{из неориентированного графа } G$  можно удалить не более k рёбер, так что оставшийся подграф можно раскрасить в 3 цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CROSSWORD =  $\{(W,A) \mid \text{ существует кроссворд из словаря } W$  с маской  $A\}$ . (W множество слов в некотором алфавите  $\Sigma$ , A матрица размера  $n \times n$  из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток (i,j), для которых  $A_{ij}=1$ , в  $\Sigma$ , такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в W).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x,x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s удвоением одного бита).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMTREFOIL =  $\{(G, s, t, u) \mid$  в неориентированном графе G есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины s, t и u, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXLEAFSPANTREE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть остовное дерево c не менее чем k листьями $\}$ . (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \,$  и  $yx \in A\}$  (здесь yx означает конкатенацию) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMPATHCYCLE =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть непересекающиеся путь и цикл, такие что s является началом пути, t его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXLEAFSPANTREE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть остовное дерево c не менее чем k листьями $\}$ . (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

**3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s стиранием каких-то двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CONNECTEDDOMSET =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть связное доминирующее множество размера не больше  $k\}$ . (Связным доминирующим множеством D в графе G называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне D связана ребром с одной из точек D).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s стиранием одного бита).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMTREFOIL =  $\{(G, s, t, u) \mid$  в неориентированном графе G есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины s, t и u, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY =  $\{(G, H) \mid \text{из графа } G \text{ можно получить граф } H$  последовательностью стягиваний рёбер $\}$ . (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G,k) \mid$ в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXMINVERTEXCOVER =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка SETBASIS =  $\{(C,k) \mid C \text{ есть набор подмножеств конечного множества } S$  и существует набор B из k подмножеств S, такой что любое  $c \in C$  можно получить как пересечение некоторого числа множеств из B}.
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DUMBBELL =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть подграф, состоящий из двух клик размера k, соединённых одним ребром $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка 1-PLANARITY =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра<math>\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \,$  и  $yx \in A\}$  (здесь yx означает конкатенацию) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$

- **4.** (5 баллов) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка NONCONSTSAT =  $\{\varphi : y \text{ формулы } \varphi \text{ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны 1}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BIPARTITESUBGRAPH =  $\{(G, k) \mid$  в графе G найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы k вершин $\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Христофорова Дарья, группа 123, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BIPARTITESUBGRAPH =  $\{(G, k) \mid$  в графе G найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**8 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$ 

- **4.** (**8 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите NP-полноту языка DISJOINTCLIQUES =  $\{(G, k) \mid \text{ среди вершин графа } G$  можно выделить k попарно непересекающихся клик различных размеров $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень <math>3\}$ .
- 7. (8 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $P \neq NTIME(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ имеет подслово, лежащее в } A$  и являющееся палиндромом} также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s заменой одного бита на противоположный).

Докажите, что  $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$ . (Не забудьте доказать оба включения).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \ldots, n_k) \mid \text{ набор чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 3COLFIXEDVERTICES =  $\{(G, u, v) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно раскрасить в 3 цвета, так чтобы вершины <math>u$  и v были одного цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHWIDTH =  $\{(G,k) \mid \text{ ширина графа } G \text{ не превосходит } k\}$ . (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция  $f \colon V \to \{1,2,\ldots,|V|\}$ , такая что для всех  $(u,v) \in E$  выполнено |f(u)-f(v)| < k).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G,k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

,

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка NONCONSTSAT =  $\{\varphi : y \text{ формулы } \varphi \text{ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны 1}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BIPARTITESUBGRAPH =  $\{(G, k) \mid$  в графе G найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы k вершин $\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G,k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $\mathsf{HALF3COL} = \{G \mid \mathtt{B} \ \mathsf{графe} \ G \ \mathsf{можно} \ \mathsf{выбрать} \ \mathsf{половину} \ \mathsf{или} \ \mathsf{большe} \ \mathsf{вершин} \ \mathsf{u} \ \mathsf{раскрасить} \ \mathsf{uндуцируемый} \ \mathsf{uмu} \ \mathsf{подграф} \ \mathsf{b} \ \mathsf{три} \ \mathsf{цветa} \}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка TILING =  $\{(T, 1^N) \mid \text{квадрат } N \times N \text{ можно замостить плитками из набора } T\}$ . (Плитка есть элемент  $C^4$  для некоторого множества цветов C. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid \text{существует граф } G \in A$ , в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных H, при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин H} (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка SETSPLITTING =  $\{(S,(A_1,\ldots,A_k))\mid \forall i\ A_i\subset S\$ и существует разбиение  $S=S_1\sqcup S_2$ , такое что  $\forall i,A_i\cap S_1\neq\varnothing$  и  $A_i\cap S_2\neq\varnothing\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка BETWEENNESS =  $\{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1,2,\ldots,|A|\} \, \forall (a,b,c) \in C \, (f(a) < f(b) < f(c)$  или  $f(a) > f(b) > f(c))\}.$
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Долгополый Николай, группа 124, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - 6) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \,$  и  $yx \in A\}$  (здесь yx означает конкатенацию) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка BARBELL =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть подграф, состоящий из двух клик размера k, соединённых простым путём из k рёбер $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLAQUE =  $\{(G,k) \mid$ в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x=x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x_0=x_1x_2\dots x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1 x_2 \dots x_{k-1}, cycle(x) = x_2 \dots x_{k-1} x_k x_1$  или  $inv(x) = (1 - x_1) x_2 \dots x_{k-1} x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- 4. (5 баллов) Определим язык DIFF-DEGREES  $= \{k \mid$ в разложение k на простые множители все множители входят в попарно различных степенях }. Лежит ли этот язык в Р, NP, соNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 6-2-1-SPLITTING =  $\{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^*\mid\exists I,J,K(I\sqcup J\sqcup K=\{1,\ldots,m\}\land M\}\}$
- $6\sum_{i\in I}n_i=2\sum_{j\in J}n_j=\sum_{k\in K}n_k)\}$  6. (5 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXMINVERTEXCOVER =  $\{(G,k)\mid$  в неориентированном графе G есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем k вершин $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT  $= \{ \varphi \mid$  $\varphi$  — формула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала }.
- 8. (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid H \text{ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то <math>G \in A$ , при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid \text{в разложение } k$  на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 2-VISITS-HAMPATH =  $\{(G, s, t) \mid$  в неориентированном графе G существует путь из s в t, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более, чем дважды $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть полный двудольный подграф c долями размера по k $\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HYPERGRAPH-VCOVER =  $\{(V, S, k) \mid S$  система 3-элементных подмножеств V, такая что для некоторого множества  $C \subset V$  из k элементов любое множество из S содержит хотя бы один элемент C}
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $SCSS = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$ . (Задача о наименьшей надстроке в алфавите  $\Sigma$ ).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \,$  и  $yx \in A\}$  (здесь yx означает конкатенацию) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- 5. (5 баллов) Докажите **NP**-полноту языка 5-3-1-SPLITTING =  $\{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^*\mid\exists I,J,K(I\sqcup J\sqcup K=\{1,\ldots,m\}\land 5\sum_{i\in I}n_i=3\sum_{j\in J}n_j=\sum_{k\in K}n_k)\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXCLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемая клика из не более чем k вершин $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Манжула Елизавета, группа 124, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2 \dots x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2 \dots x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2 \dots x_{k-1}x_k$ .
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m \dot{:} kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием каких-то двух битов}).$ 

- **4.** (8 баллов) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \ldots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите NP-полноту языка SETSPLITTING =  $\{(S,(A_1,\ldots,A_k))\mid \forall i\ A_i\subset S$  и существует разбиение  $S=S_1\sqcup S_2$ , такое что  $\forall i,A_i\cap S_1\neq\varnothing$  и  $A_i\cap S_2\neq\varnothing\}$
- **6.** (8 баллов) Докажите **NP**-полноту языка  $SCSS = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$ . (Задача о наименьшей надстроке в алфавите  $\Sigma$ ).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi$  формула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x, x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е.}$$

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DOUBLEINDSET  $= \{(G, k) \mid$ в графе G существуют два непересекающихся независимых множества размера  $k\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка TILING =  $\{(T, 1^N) \mid \text{квадрат } N \times N \text{ можно замостить плитками из набора } T\}$ . (Плитка есть элемент  $C^4$  для некоторого множества цветов C. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s стиранием одного бита).

- **4.** (5 баллов) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DISJOINTINDSETS =  $\{(G, k) \mid \text{ среди вершин графа } G$  можно выделить k попарно непересекающихся независимых множеств различных размеров $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка TILING =  $\{(T, 1^N) \mid \text{квадрат } N \times N \text{ можно замостить плитками из набора } T\}$ . (Плитка есть элемент  $C^4$  для некоторого множества цветов C. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \,$  и  $yx \in A\}$  (здесь yx означает конкатенацию) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{вершины неориентированного графа } G$  можно разбить на k групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, имеет гамильтонов цикл $\}$ 
  - **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $\mathsf{SQRT} = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c) \mid x^2 \equiv a \mod b\}.$
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$  является палиндромом, y является подсловом  $z\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s удвоением какого-то подслова).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ODDMAXCLIQUE =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ есть максимальная (неувеличиваемая) клика из нечётного числа вершин<math>\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHWIDTH =  $\{(G, k) \mid \text{ ширина графа } G \text{ не превосходит } k\}$ . (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция  $f \colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$ , такая что для всех  $(u, v) \in E$  выполнено |f(u) f(v)| < k).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Шевцова Маргарита, группа 124, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDIFFERENT-SAT =  $\{\varphi \mid \text{формула } \varphi \text{ от переменных } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ такова, что для некоторого } i$  выполнимы и  $\varphi|_{x_i=1}$ , и  $\varphi|_{x_i=0}\}$ .
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CONNECTEDDOMSET =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть связное доминирующее множество размера не больше  $k\}$ . (Связным доминирующим множеством D в графе G называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне D связана ребром c одной из точек D).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x, x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUEPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно разбить на } k$  групп, внутри каждой из которых проведены все рёбра $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка SETBASIS =  $\{(C, k) \mid C \text{ есть набор подмножеств конечного множества } S$  и существует набор B из k подмножеств S, такой что любое  $c \in C$  можно получить как пересечение некоторого числа множеств из B}.
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень } 3\}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s стиранием каких-то двух битов).

Докажите, что NP' = NP. (Не забудьте доказать оба включения).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G,S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ALMOSTHAMCYCLE =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ связен и в нём существует простой цикл, проходящий через все вершины, кроме ровно одной}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$$

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G,S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDEPPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно разбить на } k$  групп, внутри каждой из которых не проведено рёбер $\}$ 
  - **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $\mathsf{SQRT} = \{(a,b,c) \mid \exists x \in (0,c) \ x^2 \equiv a \mod b\}.$
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \,$  и  $yx \in A\}$  (здесь yx означает конкатенацию) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMPATHCYCLE =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть непересекающиеся путь и цикл, такие что s является началом пути, t его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHWIDTH =  $\{(G, k) \mid \text{ ширина графа } G \text{ не превосходит } k\}$ . (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция  $f \colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$ , такая что для всех  $(u, v) \in E$  выполнено |f(u) f(v)| < k).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Иванов-Сухолитко Александр, группа 125, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$$
 для любого  $s'$ , отличающегося от  $s$ 

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUEPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно разбить на } k$  групп, внутри каждой из которых проведены все рёбра $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CROSSWORD =  $\{(W,A) \mid \text{ существует кроссворд из словаря } W$  с маской  $A\}$ . (W множество слов в некотором алфавите  $\Sigma$ , A матрица размера  $n \times n$  из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток (i,j), для которых  $A_{ij}=1$ , в  $\Sigma$ , такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в W).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ONE-THIRD-3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно треть переменных равна <math>1\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка EXACTONE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k>1\mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка NOMONOCHROMTRIANGLE =  $\{G \mid \text{рёбра графа } G \text{ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника}.$
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (5 баллов) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k>1\mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDSET-AFTER-EXCLUSION =  $\{(G, k) \mid \text{из неориентированного графа } G$  можно исключить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе было независимое множество размера k
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка EXACTTW03SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x, x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$

Докажите, что NP' = NP. (Не забудьте доказать оба включения).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUE-AFTER-EXPANSION =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированный граф G можно добавить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе была клика размера  $k\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка SETBASIS =  $\{(C, k) \mid C \text{ есть набор подмножеств конечного множества } S$  и существует набор B из k подмножеств S, такой что любое  $c \in C$  можно получить как пересечение некоторого числа множеств из B}.
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 2-VISITS-HAMCYCLE =  $\{G \mid B \text{ неориентированном графе } G$  существует цикл, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более чем дважды $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CONNECTEDDOMSET =  $\{(G, k) \mid B \text{ графе } G \text{ есть связное доминирующее множество размера не больше <math>k\}$ . (Связным доминирующим множеством D в графе G называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне D связана ребром C одной из точек D).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 6-2-1-SPLITTING =  $\{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^*\mid\exists I,J,K(I\sqcup J\sqcup K=\{1,\ldots,m\}\land 6\sum_{i\in I}n_i=2\sum_{j\in J}n_j=\sum_{k\in K}n_k)\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3}.$
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x, x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s переменой местами двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 2-VISITS-HAMPATH =  $\{(G, s, t) \mid$  в неориентированном графе G существует путь из s в t, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более, чем дважды $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY =  $\{(G, H) \mid \text{из графа } G \text{ можно получить граф } H$  последовательностью стягиваний рёбер $\}$ . (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 6-2-1-SPLITTING =  $\{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^*\mid\exists I,J,K(I\sqcup J\sqcup K=\{1,\ldots,m\}\land 6\sum_{i\in I}n_i=2\sum_{j\in J}n_j=\sum_{k\in K}n_k)\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка EXACTTW03SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s удвоением какого-то подслова).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $\mathsf{HALF3COL} = \{G \mid \mathsf{B} \; \mathsf{графe} \; G \; \mathsf{можно} \; \mathsf{выбрать} \; \mathsf{половину} \; \mathsf{или} \; \mathsf{больше} \; \mathsf{вершин} \; \mathsf{u} \; \mathsf{раскрасить} \; \mathsf{индуцируемый} \; \mathsf{ими} \; \mathsf{подграф} \; \mathsf{B} \; \mathsf{три} \; \mathsf{цвета} \}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXINDSET =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DISJOINTCLIQUES =  $\{(G, k) \mid \text{ среди вершин графа } G$  можно выделить k попарно непересекающихся клик различных размеров $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка RURALPOSTMAN =  $\{(G, l, E', b) \mid G = (V, E) \text{граф}, l \colon E \to \mathbb{N} \text{длины рёбер}, E' \subset E, b \in \mathbb{N}$  и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из E'.
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m \dot{:} kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т.е.}$ 

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \ldots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка EXACTONE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s перестановкой по циклу, т. е.

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка RURALPOSTMAN =  $\{(G, l, E', b) \mid G = (V, E) \text{граф}, l : E \to \mathbb{N} длины рёбер, <math>E' \subset E, b \in \mathbb{N}$  и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из E'.
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DOUBLEINDSET =  $\{(G, k) \mid$  в графе G существуют два непересекающихся независимых множества размера  $k\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXCLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемая клика из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Боровец Андрей (М05-316а), группа 126, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

```
x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 для любого s', отличающегося от s удвоением одного бита).
```

- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка SETSPLITTING =  $\{(S,(A_1,\ldots,A_k))\mid \forall i\ A_i\subset S\$ и существует разбиение  $S=S_1\sqcup S_2$ , такое что  $\forall i,A_i\cap S_1\neq\varnothing$  и  $A_i\cap S_2\neq\varnothing\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка EXACTONE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$ 

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GAPHAMPATH =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть два непересекающихся простых пути, такие что s является началом одного из них, t концом другого, а каждая вершина входит ровно в один $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка NOMONOCHROMTRIANGLE =  $\{G \mid \text{рёбра графа } G \text{ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника<math>\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s перестановкой по циклу, т. е.

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка SETBASIS =  $\{(C,k) \mid C \text{ есть набор подмножеств конечного множества } S$  и существует набор B из k подмножеств S, такой что любое  $c \in C$  можно получить как пересечение некоторого числа множеств из B}.
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXINDSET =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDSETFIXEDVERTEX =  $\{(G, k, v) \mid$  в неориентированном графе G есть независимое множество размера k, содержащее вершину  $v\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка RURALPOSTMAN =  $\{(G, l, E', b) \mid G = (V, E) \text{граф}, l \colon E \to \mathbb{N} \text{длины рёбер}, E' \subset E, b \in \mathbb{N}$  и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из E'.
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ имеет подслово, лежащее в } A$  и являющееся палиндромом} также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s стиранием каких-то двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \dots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \dots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ALMOSTHAMCYCLE =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ связен и в нём существует простой цикл, проходящий через все вершины, кроме ровно одной}$ 
  - **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $\mathsf{SQRT} = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c) \mid x^2 \equiv a \mod b\}.$
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi$  формула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$  является палиндромом, y является подсловом  $z\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s удвоением одного бита).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HALFHAMCYCLE =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ связен и в нём существует простой цикл, проходящий хотя бы через половину вершин}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY =  $\{(G, H) \mid \text{из графа } G \text{ можно получить граф } H$  последовательностью стягиваний рёбер $\}$ . (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 3COLEXCLUSION =  $\{(G, k) \mid \text{из неориентированного графа } G$  можно удалить не более k рёбер, так что оставшийся подграф можно раскрасить в 3 цвета $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \,$  и  $yx \in A\}$  (здесь yx означает конкатенацию) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DUMBBELL =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть подграф, состоящий из двух клик размера k, соединённых одним ребром $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 1-PLANARITY =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра<math>\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2...x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2...x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m \dot{:} kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUEFIXEDVERTEX =  $\{(G, k, v) \mid$  в неориентированном графе G есть клика размера k, содержащая вершину  $v\}$ 
  - **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $\mathsf{SQRT} = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c) \ x^2 \equiv a \mod b\}.$
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $\mathsf{SQRT} = \{(a,b,c) \mid \exists x \in (0,c) \ x^2 \equiv a \mod b\}.$
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ имеет подслово, лежащее в } A$  и являющееся палиндромом $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s удвоением какого-то подслова).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ONE-THIRD-3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно треть переменных равна 1}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть полный двудольный подграф c долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi$  формула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k0$ ,  $x' = x_1x_2 \dots x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2 \dots x_{k-1}x_kx_1$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2 \dots x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid \text{существует граф } G \in A$ , в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных H, при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMPATHCYCLE =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть непересекающиеся путь и цикл, такие что s является началом пути, t его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHWIDTH =  $\{(G, k) \mid \text{ ширина графа } G \text{ не превосходит } k\}$ . (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция  $f \colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$ , такая что для всех  $(u, v) \in E$  выполнено |f(u) f(v)| < k).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2 \dots x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2 \dots x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2 \dots x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid H \text{ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то <math>G \in A$ , при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$ 

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ONE-THIRD-3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно треть переменных равна 1}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $SCSS = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$ . (Задача о наименьшей надстроке в алфавите  $\Sigma$ ).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M \text{ представлено как объединение } M_{i_j}, \text{ при этом не больше } q \text{ элементов } M \text{ принадлежат более, чем одному из множеств } M_{i_j}\}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Чернятин Александр, группа 126, индивидуальные задачи по к/р №1

- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень <math>3\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMADDITION =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированный граф G можно добавить не более k рёбер, так чтобы в результирующем графе был гамильтонов цикл $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $SCSS = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$ . (Задача о наименьшей надстроке в алфавите  $\Sigma$ ).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Асриян Александр (М05-307а), группа 127, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- 1. (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m \dot{:} kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$ 

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (8 баллов) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите NP-полноту языка 3COLEXCLUSION =  $\{(G, k) \mid \text{из неориентированного графа } G$  можно удалить не более k рёбер, так что оставшийся подграф можно раскрасить в 3 цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CONNECTEDDOMSET =  $\{(G, k) \mid B \text{ графе } G \text{ есть связное доминирующее множество размера не больше } k\}$ . (Связным доминирующим множеством D в графе G называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне D связана ребром с одной из точек D).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (**8 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUEPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно разбить на } k$  групп, внутри каждой из которых проведены все рёбра $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CROSSWORD =  $\{(W,A) \mid \text{ существует кроссворд из словаря } W$  с маской  $A\}$ . (W множество слов в некотором алфавите  $\Sigma$ , A матрица размера  $n \times n$  из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток (i,j), для которых  $A_{ij}=1$ , в  $\Sigma$ , такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в W).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi$  формула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ имеет подслово, лежащее в } A$  и являющееся палиндромом} также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (**8 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите NP-полноту языка CLIQUEFIXEDVERTEX =  $\{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе G есть клика размера k, содержащая вершину  $v\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка RURALPOSTMAN =  $\{(G, l, E', b) \mid G = (V, E) \text{граф}, l : E \to \mathbb{N} длины рёбер, <math>E' \subset E, b \in \mathbb{N}$  и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из E'.
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (**8 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Егоров Максим (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid H \text{ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то <math>G \in A$ , при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)...

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 5-3-1-SPLITTING =  $\{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^*\mid\exists I,J,K(I\sqcup J\sqcup K=\{1,\ldots,m\}\land 5\sum_{i\in I}n_i=3\sum_{j\in J}n_j=\sum_{k\in K}n_k)\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка MAXLEAFSPANTREE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть остовное дерево с не менее чем k листьями $\}$ . (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDSET-AFTER-EXCLUSION =  $\{(G, k) \mid \text{из неориентированного графа } G$  можно исключить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе было независимое множество размера k
  - **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка  $SQRT = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c) \ x^2 \equiv a \mod b\}.$
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUEFIXEDVERTEX =  $\{(G, k, v) \mid \mathbf{B} \text{ неориентированном графе } G$  есть клика размера k, содержащая вершину  $v\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка NOMONOCHROMTRIANGLE =  $\{G \mid \text{рёбра графа } G \text{ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника}.$
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$ 

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (8 баллов) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите NP-полноту языка INDSET-AFTER-EXCLUSION =  $\{(G, k) \mid \text{из неориентированного графа } G$  можно исключить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе было независимое множество размера k
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXCLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемая клика из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень } 3\}.$
- **8.** (8 баллов) Докажите, что  $P \neq NTIME(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Картушин Леонид (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка SETBASIS =  $\{(C,k) \mid C \text{ есть набор подмножеств конечного множества } S$  и существует набор B из k подмножеств S, такой что любое  $c \in C$  можно получить как пересечение некоторого числа множеств из B.
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s стиранием каких-то двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка NONCONSTSAT =  $\{\varphi : y \text{ формулы } \varphi \text{ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны 1}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHWIDTH =  $\{(G, k) \mid \text{ ширина графа } G \text{ не превосходит } k\}$ . (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция  $f \colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$ , такая что для всех  $(u, v) \in E$  выполнено |f(u) f(v)| < k).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid \text{в графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень } 3\}.$
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$ 

- **4.** (8 баллов) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**8 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDEPPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно разбить на } k$  групп, внутри каждой из которых не проведено рёбер $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXLEAFSPANTREE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть остовное дерево с не менее чем k листьями $\}$ . (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (**8 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HYPERGRAPH-VCOVER =  $\{(V, S, k) \mid S$  система 3-элементных подмножеств V, такая что для некоторого множества  $C \subset V$  из k элементов любое множество из S содержит хотя бы один элемент C}
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BIPARTITESUBGRAPH =  $\{(G, k) \mid$  в графе G найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы k вершин $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Муратиди Александр (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ODDMAXCLIQUE =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ есть максимальная (неувеличиваемая) клика из нечётного числа вершин<math>\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXLEAFSPANTREE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть остовное дерево c не менее чем k листьями $\}$ . (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Набоков Рудольф (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$$
 для любого  $s'$ , отличающегося от  $s$ 

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (8 баллов) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**8 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ALMOST3COL =  $\{G \mid \text{все вершины графа } G, \text{кроме, возможно, одной, можно правильным образом раскрасить в 3 цвета}$
- **6.** (**10 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка BIPARTITESUBGRAPH =  $\{(G, k) \mid$  в графе G найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы k вершин $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (**8 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s стиранием каких-то двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DISJOINTINDSETS =  $\{(G, k) \mid \text{ среди вершин графа } G$  можно выделить k попарно непересекающихся независимых множеств различных размеров $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка TILING =  $\{(T, 1^N) \mid \text{квадрат } N \times N \text{ можно замостить плитками из набора } T\}$ . (Плитка есть элемент  $C^4$  для некоторого множества цветов C. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Прасковьин Арсений, группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid \text{в разложение } k$  на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка BARBELL =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть подграф, состоящий из двух клик размера k, соединённых простым путём из k рёбер $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка TILING =  $\{(T,1^N) \mid \text{квадрат } N \times N \text{ можно замостить плитками из набора } T\}$ . (Плитка есть элемент  $C^4$  для некоторого множества цветов C. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Прокофьев Илья (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k 1$ ,  $x' = x_1 x_2 \dots x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_k x_1 x_2 \dots x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2 \dots x_{k-1} x_k$ .
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ имеет подслово, лежащее в } A$  и являющееся палиндромом} также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$ 

- **4.** (8 баллов) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите **NP**-полноту языка 5-3-1-SPLITTING =  $\{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^*\mid\exists I,J,K(I\sqcup J\sqcup K=\{1,\ldots,m\}\land 5\sum_{i\in I}n_i=3\sum_{j\in J}n_j=\sum_{k\in K}n_k)\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHWIDTH =  $\{(G, k) \mid \text{ ширина графа } G \text{ не превосходит } k\}$ . (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция  $f \colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$ , такая что для всех  $(u, v) \in E$  выполнено |f(u) f(v)| < k).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (**8 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Сагателян Акоб (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m : kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$$
 для любого  $s'$ , отличающегося от  $s$ 

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMCYCLEFIXEDARC =  $\{(G, e) \mid$  в ориентированном графе G найдётся гамильтонов цикл, проходящий через ребро  $e\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY =  $\{(G, H) \mid \text{из графа } G \text{ можно получить граф } H$  последовательностью стягиваний рёбер $\}$ . (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Смирнов Михаил (М05-316а), группа 127, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \ldots, n_k) \mid \text{ набор чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $3COLPARTITION = \{(G, k) \mid \text{вершины неориентированного графа } G$  можно разбить на k групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, можно раскрасить в 3 цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CONNECTEDDOMSET =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть связное доминирующее множество размера не больше  $k\}$ . (Связным доминирующим множеством D в графе G называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне D связана ребром с одной из точек D).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ODDMAXINDEP =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ есть максимальное (неувеличиваемое) независимое множество из нечётного числа вершин<math>\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка RURALPOSTMAN =  $\{(G, l, E', b) \mid G = (V, E) \text{граф}, l \colon E \to \mathbb{N}$ длины рёбер,  $E' \subset E, b \in \mathbb{N}$  и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из E'.
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$  является палиндромом, y является подсловом  $z\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1$$
 и  $V(x,s')=1$  для любого  $s'$ , отличающегося от  $s$  перестановкой по циклу, т. е.

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid \text{в разложение } k$  на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMTREFOIL =  $\{(G, s, t, u) \mid$  в неориентированном графе G есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины s, t и u, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка  $SCSS = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$ . (Задача о наименьшей надстроке в алфавите  $\Sigma$ ).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что **coNP**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

**3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GAPHAMPATH =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть два непересекающихся простых пути, такие что s является началом одного из них, t концом другого, а каждая вершина входит ровно в один $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXCLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемая клика из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid \text{существует граф } G \in A$ , в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных H, при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$$
 для любого  $s'$ , отличающегося от  $s$  перестановкой по циклу, т.е.

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (8 баллов) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \ldots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите **NP**-полноту языка INDSETFIXEDVERTEX =  $\{(G, k, v) \mid$  в неориентированном графе G есть независимое множество размера k, содержащее вершину  $v\}$
- **6.** (8 баллов) Докажите **NP**-полноту языка NOMONOCHROMTRIANGLE =  $\{G \mid \text{рёбра графа } G \text{ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника}.$
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$  является палиндромом, y является подсловом  $z\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$$
 для любого  $s'$ , отличающегося от  $s$ 

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)..

- **4.** (5 баллов) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GAPHAMPATH =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть два непересекающихся простых пути, такие что s является началом одного из них, t концом другого, а каждая вершина входит ровно в один $\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY =  $\{(G, H) \mid \text{из графа } G \text{ можно получить граф } H$  последовательностью стягиваний рёбер $\}$ . (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMCYCLEFIXEDARC =  $\{(G, e) \mid$  в ориентированном графе G найдётся гамильтонов цикл, проходящий через ребро  $e\}$
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CROSSWORD =  $\{(W,A) \mid \text{ существует кроссворд из словаря } W$  с маской  $A\}$ . (W множество слов в некотором алфавите  $\Sigma$ , A матрица размера  $n \times n$  из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток (i,j), для которых  $A_{ij}=1$ , в  $\Sigma$ , такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в W).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid H \text{ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то <math>G \in A$ , при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDIFFERENT-SAT =  $\{\varphi \mid \text{формула } \varphi \text{ от переменных } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ такова,}$  что для некоторого i выполнимы и  $\varphi|_{x_i=1}$ , и  $\varphi|_{x_i=0}\}$ .
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка EXACTONE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 1-PLANARITY =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра<math>\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi$  формула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка BETWEENNESS =  $\{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1,2,\ldots,|A|\} \, \forall (a,b,c) \in C \, (f(a) < f(b) < f(c)$  или f(a) > f(b) > f(c)).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

**3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1$  и V(x,s')=1 для любого s', отличающегося от s перестановкой по циклу, т. е.

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHWIDTH =  $\{(G, k) \mid \text{ ширина графа } G \text{ не превосходит } k\}$ . (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция  $f \colon V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$ , такая что для всех  $(u, v) \in E$  выполнено |f(u) f(v)| < k).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть полный двудольный подграф c долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HYPERGRAPH-VCOVER =  $\{(V, S, k) \mid S$  система 3-элементных подмножеств V, такая что для некоторого множества  $C \subset V$  из k элементов любое множество из S содержит хотя бы один элемент C}
- **6.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 1-PLANARITY =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра<math>\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$ 

- **4.** (**8 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе } G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**8 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ODDMAXCLIQUE =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ есть максимальная (неувеличиваемая) клика из нечётного числа вершин<math>\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXLEAFSPANTREE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть остовное дерево с не менее чем k листьями $\}$ . (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G).
- **7.** (8 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M \text{ представлено как объединение } M_{i_j}, \text{ при этом не больше } q \text{ элементов } M \text{ принадлежат более, чем одному из множеств } M_{i_j}\}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid \text{в разложение } k$  на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BIPARTITESUBGRAPH =  $\{(G, k) \mid$  в графе G найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы k вершин $\}$ .
- **7.** (8 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Дивильковский Максим, группа 129, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid H \text{ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то <math>G \in A$ , при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)...

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDEPPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно разбить на } k$  групп, внутри каждой из которых не проведено рёбер $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m : kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMADDITION =  $\{(G,k) \mid$  в неориентированный граф G можно добавить не более k рёбер, так чтобы в результирующем графе был гамильтонов цикл $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CLAQUE =  $\{(G,k) \mid \text{в графе } G \text{ есть полный двудольный подграф с долями размера по } k\}. (Иными словами, найдутся <math>V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m \dot{:} kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HALFHAMCYCLE =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ связен и в нём существует простой цикл, проходящий хотя бы через половину вершин}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка NOMONOCHROMTRIANGLE =  $\{G \mid \text{рёбра графа } G \text{ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника}.$
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень <math>3\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi \phi$  формула в виде 2-КНФ, такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ заменой одного бита на противоположный}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка TWO-THIRDS-3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны <math>1\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень <math>3\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G,k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Малышева Ольга (М05-316а), группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)..

Докажите, что NP' = NP. (Не забудьте доказать оба включения).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 2-VISITS-HAMCYCLE =  $\{G \mid B \text{ неориентированном графе } G$  существует цикл, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более чем дважды $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHWIDTH =  $\{(G,k) \mid \text{ ширина графа } G \text{ не превосходит } k\}$ . (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция  $f \colon V \to \{1,2,\ldots,|V|\}$ , такая что для всех  $(u,v) \in E$  выполнено |f(u)-f(v)| < k).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Моряков Данила (М05-316а), группа 129, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)...

- **4.** (5 баллов) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k>1\mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DISJOINTINDSETS =  $\{(G, k) \mid \text{среди вершин графа } G \text{ можно выделить } k$  попарно непересекающихся независимых множеств различных размеров $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка TILING =  $\{(T,1^N) \mid \text{квадрат } N \times N \text{ можно замостить плитками из набора } T\}$ . (Плитка есть элемент  $C^4$  для некоторого множества цветов C. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid \text{в разложение } k$  на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DISJOINTCLIQUES =  $\{(G, k) \mid \text{ среди вершин графа } G \text{ можно выделить } k$  попарно непересекающихся клик различных размеров $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка EXACTONE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi$  формула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка EXACTONE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDSET-AFTER-EXCLUSION =  $\{(G, k) \mid \text{из неориентированного графа } G$  можно исключить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе было независимое множество размера  $k\}$ 
  - **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка  $SQRT = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c) \ x^2 \equiv a \mod b\}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)...

- **4.** (5 баллов) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка BARBELL =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть подграф, состоящий из двух клик размера k, соединённых простым путём из k рёбер $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXCLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемая клика из не более чем k вершин $\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют состояние и хотя бы 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**8 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s стиранием одного бита).

- **4.** (**8 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- 5. (8 баллов) Докажите NP-полноту языка CLIQUEFIXEDVERTEX =  $\{(G, k, v) \mid$ в неориентированном графе G есть клика размера k, содержащая вершину  $v\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXINDSET =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - 6) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CROSSWORD =  $\{(W, A) \mid \text{ существует кроссворд из словаря } W$  с маской  $A\}$ . (W множество слов в некотором алфавите  $\Sigma$ , A матрица размера  $n \times n$  из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток (i, j), для которых  $A_{ij} = 1$ , в  $\Sigma$ , такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в W).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (**8 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid H \text{ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то <math>G \in A$ , при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**8 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$ 

- **4.** (8 баллов) Определим язык DIFF-DEGREES =  $\{k \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят в попарно различных степенях  $\}$ . Лежит ли этот язык в  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{coNP}$ ? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите **NP**-полноту языка 2-VISITS-HAMPATH =  $\{(G, s, t) \mid$  в неориентированном графе G существует путь из s в t, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более, чем дважды $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка RURALPOSTMAN =  $\{(G, l, E', b) \mid G = (V, E) \text{граф}, l \colon E \to \mathbb{N}$ длины рёбер,  $E' \subset E, b \in \mathbb{N}$  и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из  $E'\}$ .
- 7. (8 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Середкин Сергей (М05-316а), группа 129, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m : kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка TWO-THIRDS-3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{ есть формула в формате 3-КНФ (рассмотрите 2 случая: когда в каждой скобке ровно 3 литерала и когда не более трёх), у которой есть выполняющий набор, в котором ровно две трети переменных равны <math>1\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка SETBASIS =  $\{(C,k) \mid C \text{ есть набор подмножеств конечного множества } S$  и существует набор B из k подмножеств S, такой что любое  $c \in C$  можно получить как пересечение некоторого числа множеств из B}.
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку **EXACTTWO3SAT** =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HALF3COL =  $\{G \mid \mathbf{B} \text{ графе } G \text{ можно выбрать половину или больше вершин и раскрасить индуцируемый ими подграф в три цвета<math>\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXINDSET =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M \text{ представлено как объединение } M_{i_j}, \text{ при этом не больше } q \text{ элементов } M \text{ принадлежат более, чем одному из множеств } M_{i_j}\}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка BETWEENNESS =  $\{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1,2,\ldots,|A|\} \, \forall (a,b,c) \in C \ (f(a) < f(b) < f(c)$  или f(a) > f(b) > f(c)).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку **EXACTTWO3SAT** =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CONNECTEDDOMSET =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть связное доминирующее множество размера не больше  $k\}$ . (Связным доминирующим множеством D в графе G называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне D связана ребром с одной из точек D).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M \text{ представлено как объединение } M_{i_j}, \text{ при этом не больше } q \text{ элементов } M \text{ принадлежат более, чем одному из множеств } M_{i_j}\}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**8 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s стиранием каких-то двух битов).

- **4.** (8 баллов) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите **NP**-полноту языка HAMCYCLEFIXEDARC =  $\{(G, e) \mid$  в ориентированном графе G найдётся гамильтонов цикл, проходящий через ребро  $e\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка RURALPOSTMAN =  $\{(G, l, E', b) \mid G = (V, E) \text{граф}, l \colon E \to \mathbb{N}$ длины рёбер,  $E' \subset E, b \in \mathbb{N}$  и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из E'.
- **7.** (**8 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid \mathbf{B} \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень 3}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Федоренко Екатерина, группа 129, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$$

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \ldots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMTREFOIL =  $\{(G, s, t, u) \mid$  в неориентированном графе G есть подграф в форме «трилистника», т. е. трёх цепочек, выходящих из одной точки, такой что концами этих цепочек являются вершины s, t и u, при этом любая вершина графа должна быть и в этом подграфе $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка 1-PLANARITY =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра<math>\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ имеет подслово, лежащее в } A$  и являющееся палиндромом} также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_is_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (8 баллов) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите **NP**-полноту языка HAMPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{вершины неориентированного графа } G$  можно разбить на k групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, имеет гамильтонов цикл $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXCLIQUE =  $\{(G, k) \mid B \}$  неориентированном графе G есть неувеличиваемая клика из не более чем K вершинK.
- **7.** (8 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Щепановский Александр, группа 129, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$  является палиндромом, y является подсловом  $z\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)...

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка NONCONSTSAT =  $\{\varphi : y \text{ формулы } \varphi \text{ есть выполняющий набор, в котором некоторые переменные равны 0, а некоторые другие равны 1}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXINDSET =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку **EXACTTWO3SAT** =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Алекберов Ислам (М05-316а), группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXCLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемая клика из не более чем k вершин $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$  является палиндромом, y является подсловом  $z\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s

заменой всех символов в каком-то подслове на противоположные)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка  $3COLPARTITION = \{(G, k) \mid \text{ вершины неориентированного графа } G$  можно разбить на k групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, можно раскрасить в 3 цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка 1-PLANARITY =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра<math>\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x,x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$ 

в котором есть независимое множество размером в половину графа)...

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUE-AFTER-EXPANSION =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированный граф G можно добавить 10 рёбер, так чтобы в результирующем графе была клика размера  $k\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY =  $\{(G, H) \mid \text{из графа } G \text{ можно получить граф } H$  последовательностью стягиваний рёбер $\}$ . (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1$  для любого s', отличающегося от s стиранием одного бита).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HALFHAMCYCLE =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ связен и в нём существует простой цикл, проходящий хотя бы через половину вершин}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXMINVERTEXCOVER =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем k вершин $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 2-VISITS-HAMPATH =  $\{(G, s, t) \mid$  в неориентированном графе G существует путь из s в t, посещающий каждую вершину хотя бы раз, но не более, чем дважды $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень <math>3\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Боймуродов Хабибулло, группа 151, индивидуальные задачи по  $\kappa/p$  №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ODDMAXINDEP =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ есть максимальное (неувеличиваемое) независимое множество из нечётного числа вершин<math>\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHWIDTH =  $\{(G,k) \mid \text{ ширина графа } G \text{ не превосходит } k\}$ . (Иными словами, существует такая взаимно однозначная функция  $f \colon V \to \{1,2,\ldots,|V|\}$ , такая что для всех  $(u,v) \in E$  выполнено |f(u)-f(v)| < k).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDEPPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно разбить на } k$  групп, внутри каждой из которых не проведено рёбер $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BIPARTITESUBGRAPH =  $\{(G, k) \mid$  в графе G найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы k вершин $\}$ .
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше  $k\}$ .

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ALMOSTHAMCYCLE =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ связен и в нём существует простой цикл, проходящий через все вершины, кроме ровно одной}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXLEAFSPANTREE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть остовное дерево c не менее чем k листьями $\}$ . (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DISJOINTCLIQUES =  $\{(G, k) \mid \text{среди вершин графа } G \text{ можно выделить } k$  попарно непересекающихся клик различных размеров $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка TILING =  $\{(T,1^N) \mid \text{квадрат } N \times N \text{ можно замостить плитками из набора } T\}$ . (Плитка есть элемент  $C^4$  для некоторого множества цветов C. Эта четвёрка трактуется как цвета верхней, левой, нижней и правой граней. При замощении цвета соответствующих граней соседних плиток должны совпадать. Плитки нельзя поворачивать и переворачивать).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists x \, |x| = |y| \,$  и  $yx \in A\}$  (здесь yx означает конкатенацию) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDIFFERENT-SAT =  $\{\varphi \mid \text{формула } \varphi \text{ от переменных } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ такова,}$  что для некоторого i выполнимы и  $\varphi|_{x_i=1}$ , и  $\varphi|_{x_i=0}\}$ .
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка NOMONOCHROMTRIANGLE =  $\{G \mid \text{рёбра графа } G \text{ можно покрасить в красный и синий цвета, так чтобы не было ни красного, ни синего треугольника}.$
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Масленникова София, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CONNECTEDDOMSET =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть связное доминирующее множество размера не больше  $k\}$ . (Связным доминирующим множеством D в графе G называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне D связана ребром с одной из точек D).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КНФ, такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .

- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CLAQUE =  $\{(G,k) \mid \text{в графе } G \text{ есть полный двудольный подграф с долями размера по } k\}. (Иными словами, найдутся <math>V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \dots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \dots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{вершины неориентированного графа } G$  можно разбить на k групп, таких что подграф, индуцированный каждой группой, имеет гамильтонов цикл $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CLAQUE =  $\{(G,k) \mid \text{в графе } G \text{ есть полный двудольный подграф с долями размера по } k\}. (Иными словами, найдутся <math>V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Прохорчук Екатерина, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи -22 ноября.

**3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$$

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык 2ALMOSTEULER =  $\{G \mid \text{после удаления не более чем двух рёбер в графе <math>G$  найдётся эйлеров цикл $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 3COLFIXEDVERTICES =  $\{(G, u, v) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно раскрасить в 3 цвета, так чтобы вершины <math>u$  и v были одного цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXLEAFSPANTREE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть остовное дерево c не менее чем k листьями $\}$ . (Остовным деревом в графе G называется подграф G, который является деревом и содержит все вершины G).
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid y \text{ можно получить из } x \in A$ , вычеркнув не более половины символов  $\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GAPHAMPATH =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть два непересекающихся простых пути, такие что s является началом одного из них, t концом другого, а каждая вершина входит ровно в один $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка RURALPOSTMAN =  $\{(G, l, E', b) \mid G = (V, E) \text{граф}, l : E \to \mathbb{N} длины рёбер, <math>E' \subset E, b \in \mathbb{N}$  и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из E'.
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что **coNP**  $\neq$  **NTIME**( $n^2$ ). (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BETWEENNESS =  $\{(A,C) \mid C \subset A^3, \exists f \colon A \to \{1,2,\ldots,|A|\} \, \forall (a,b,c) \in C \, (f(a) < f(b) < f(c)$  или f(a) > f(b) > f(c)).
- **7.** (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**8 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть вершинное покрытие размером в половину графа)..

- **4.** (8 баллов) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**8 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ODDMAXINDEP =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ есть максимальное (неувеличиваемое) независимое множество из нечётного числа вершин<math>\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень <math>3\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid$ в графе G найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень  $3\}$ .
- **8.** (**8 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Стешенко Александр, группа 151, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid \text{существует граф } G \in A$ , в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных H, при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

```
x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).
```

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка BARBELL =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть подграф, состоящий из двух клик размера k, соединённых простым путём из k рёбер $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка 1-PLANARITY =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ можно нарисовать на плоскости, так чтобы каждое ребро пересекало не более одного другого ребра<math>\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s стиранием одного бита).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ALMOSTHAMCYCLE =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ связен и в нём существует простой цикл, проходящий через все вершины, кроме ровно одной}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G,k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

**3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ перестановкой по циклу, т. е.}$ 

$$s = s_1 \dots s_k, s' = s_{i+1} \dots s_k s_1 \dots s_i)...$$

- **4.** (5 баллов) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка SETSPLITTING =  $\{(S, (A_1, \dots, A_k)) \mid \forall i \ A_i \subset S$  и существует разбиение  $S = S_1 \sqcup S_2$ , такое что  $\forall i, A_i \cap S_1 \neq \emptyset$  и  $A_i \cap S_2 \neq \emptyset$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге если не меняют состояние, то на одной ленте сдвигают указатель, а на другой не сдвигают (что на какой ленте, может меняться от шага к шагу).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s',$$
 отличающегося от  $s$  обращением какого-то подслова, т. е. 
$$s=s_1\dots s_{i-1}s_is_{i+1}\dots s_{j-1}s_js_{j+1}\dots s_k, s'=s_1\dots s_{i-1}s_js_{j-1}\dots s_{i+1}s_is_{j+1}\dots s_k).$$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HALFHAMCYCLE =  $\{G \mid \text{граф } G \text{ связен и в нём существует простой цикл, проходящий хотя бы через половину вершин}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXMINVERTEXCOVER =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем k вершин $\}$ .
- 7. (10 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (**5 баллов**) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Срок сдачи -22 ноября.

- **1.** (8 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (2 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (8 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid \text{существует граф } G \in A$ , в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных H, при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин H} (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (8 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением одного бита}).$ 

- **4.** (**8 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (8 баллов) Докажите **NP**-полноту языка 6-2-1-SPLITTING =  $\{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^*\mid\exists I,J,K(I\sqcup J\sqcup K=\{1,\ldots,m\}\land 6\sum_{i\in I}n_i=2\sum_{j\in J}n_j=\sum_{k\in K}n_k)\}$
- **6.** (**10** баллов) Докажите **NP**-полноту языка CROSSWORD =  $\{(W, A) \mid \text{ существует кроссворд из словаря } W$  с маской  $A\}$ . (W множество слов в некотором алфавите  $\Sigma$ , A матрица размера  $n \times n$  из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток (i, j), для которых  $A_{ij} = 1$ , в  $\Sigma$ , такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в W).
- 7. (8 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_j}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Ахмедов Амонуллохон, группа 152, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid H \text{ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то <math>G \in A$ , при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ переменой местами двух битов}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык SHORTPATHS =  $\{(G, s, t, k) \mid$ в ориентированном графе G любой простой путь из s в t имеет длину не больше  $k\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка INDSETFIXEDVERTEX =  $\{(G, k, v) \mid$  в неориентированном графе G есть независимое множество размера k, содержащее вершину  $v\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXINDSET =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid \exists y(x,y) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (5 баллов) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s',$  отличающегося от s заменой одного бита на противоположный).

Докажите, что  $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$ . (Не забудьте доказать оба включения).

- **4.** (5 баллов) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k>1\mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DISJOINTINDSETS =  $\{(G, k) \mid \text{среди вершин графа } G \text{ можно выделить } k$  попарно непересекающихся независимых множеств различных размеров $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка EXACTONE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнен ровно один литерал $\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G,k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что **PSPACE**  $\neq$  **DTIME** $(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

,

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y \in A, y \text{ дважды входит в } z \text{ как подслово (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMPATHCYCLE =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть непересекающиеся путь и цикл, такие что s является началом пути, t его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в пикл $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка SETBASIS =  $\{(C,k) \mid C \text{ есть набор подмножеств конечного множества } S$  и существует набор B из k подмножеств S, такой что любое  $c \in C$  можно получить как пересечение некоторого числа множеств из B}.
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M \text{ представлено как объединение } M_{i_j}, \text{ при этом не больше } q \text{ элементов } M \text{ принадлежат более, чем одному из множеств } M_{i_j}\}.$
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- 1. (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык LONGESTPATH =  $\{(G, s, t, \pi) \mid \text{ ориентированный простой путь } \pi$  соединяет вершины s и t в графе G, при этом он является самым длинным таким путём $\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка GRAPHCONTRACTABILITY =  $\{(G, H) \mid \text{из графа } G \text{ можно получить граф } H$  последовательностью стягиваний рёбер $\}$ . (При стягивании ребра (u, v) вместо него образуется новая вершина w, соединённая рёбрами с вершинами, с которыми была соединена хотя бы одна из вершин u и v).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Есеркепов Тамирлан, группа 152, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (5 баллов) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1x_2...x_{k-1}x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x1 = x_1x_2...x_{k-1}x_k1$ ,  $x' = x_1x_2...x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_kx_1x_2...x_{k-1}$  или  $inv(x) = (1-x_1)x_2...x_{k-1}x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid \text{существует граф } G \in A$ , в котором есть 2 непересекающихся индуцированных подграфа, изоморфных H, при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин H} (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$  переменой местами двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MODULARSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, m) \mid \text{из набора чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно выбрать подмножество с суммой <math>S$  по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка GAPHAMPATH =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть два непересекающихся простых пути, такие что s является началом одного из них, t концом другого, а каждая вершина входит ровно в один $\}$ 
  - **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка  $SQRT = \{(a, b, c) \mid \exists x \in (0, c) \ x^2 \equiv a \mod b\}.$
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s удвоением одного бита).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RECURSIVE-DEGREES =  $\{k > 1 \mid$  в разложение k на простые множители все множители входят либо в степени 2, либо в степени, лежащей в множестве RECURSIVE-DEGREES. (Имеется в виду, что рекурсия должна сойтись к базовому случаю).. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMPATHCYCLE =  $\{(G, s, t) \mid$ в ориентированном графе G есть непересекающиеся путь и цикл, такие что s является началом пути, t его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \ldots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 3COLFIXEDVERTICES =  $\{(G, u, v) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно раскрасить в 3 цвета, так чтобы вершины <math>u$  и v были одного цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CONNECTEDDOMSET =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть связное доминирующее множество размера не больше  $k\}$ . (Связным доминирующим множеством D в графе G называется такое множество вершин, что образованный им подграф связен, а любая точка вне D связана ребром c одной из точек D).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют ровно 1 символ из тех, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMADDITION =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированный граф G можно добавить не более k рёбер, так чтобы в результирующем графе был гамильтонов цикл $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка CROSSWORD =  $\{(W, A) \mid \text{ существует кроссворд из словаря } W$  с маской  $A\}$ . (W множество слов в некотором алфавите  $\Sigma$ , A матрица размера  $n \times n$  из нулей и единиц, кроссвордом называется отображение из клеток (i, j), для которых  $A_{ij} = 1$ , в  $\Sigma$ , такое что все слова, лежащие в максимальных горизонтальных и вертикальных отрезках из таких клеток, содержатся в W).
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, 06.11.2023, Лутфуллаев Сардор, группа 152, индивидуальные задачи по к/р №1

Количество баллов за задачу написано в скобках после номера. Баллы за задачу, бывшую на контрольной, суммируются с баллами, набранными на контрольной, при этом сумма не может превысить 8 баллов. Срок сдачи — 22 ноября.

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{x \mid (x,x) \in A\}$  (здесь A понимается как множество пар) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } V(x,s')=1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MINVCOVER =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют вершинное покрытие наименьшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HAMADDITION =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированный граф G можно добавить не более k рёбер, так чтобы в результирующем графе был гамильтонов цикл $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка BIPARTITESUBGRAPH =  $\{(G, k) \mid$  в графе G найдётся индуцированный двудольный подграф, содержащий хотя бы k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку MAX2SAT =  $\{(\varphi, k) \mid \varphi$  формула в виде 2-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений суммарное число выполненных дизъюнктов не меньше k.
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{z \mid \exists y, w \in A, y \text{ и } w \text{ входят в } z \text{ как подслова (вхождения могут перекрываться)} также лежит в <math>\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ удвоением какого-то подслова}).$

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка ODDMAXINDEP =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ есть максимальное (неувеличиваемое) независимое множество из нечётного числа вершин<math>\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка RÜRALPOSTMAN =  $\{(G, l, E', b) \mid G = (V, E) \text{граф}, l \colon E \to \mathbb{N}$ длины рёбер,  $E' \subset E, b \in \mathbb{N}$  и существует цикл длины не более b, проходящий хотя бы один раз по всем рёбрам из E'.
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку ALMOST-SET-COVERING =  $\{(M, M_1, \ldots, M_s, q) \mid M$  представлено как объединение  $M_{i_j}$ , при этом не больше q элементов M принадлежат более, чем одному из множеств  $M_{i_s}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и могут переходить в новые состояния, только если указывают на одинаковые символы алфавита (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{m \mid \exists k, l \in A(k \neq l \land m : kl)\}$  (здесь A понимается как множество натуральных чисел) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

```
x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s
```

удвоением всех символов в каком-то подслове)..

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 5-3-1-SPLITTING =  $\{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^*\mid\exists I,J,K(I\sqcup J\sqcup K=\{1,\ldots,m\}\land 5\sum_{i\in I}n_i=3\sum_{j\in J}n_j=\sum_{k\in K}n_k)\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXINDSET =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемое независимое множество из не более чем k вершин $\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{coNP} \neq \mathbf{NSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге меняют оба символа, на которые указывают.
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s удвоением одного бита).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \ldots, n_k) \mid \text{ набор чисел } n_1, \ldots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка **3COLEXCLUSION** =  $\{(G, k) \mid \text{из неориентированного графа } G$  можно удалить не более k рёбер, так что оставшийся подграф можно раскрасить в 3 цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MAXMINVERTEXCOVER =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неуменьшаемое вершинное покрытие из не менее чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо меняют символ, на который указывают, но не сдвигают указатель, либо, наоборот, не меняют символ и сдвигают указатель (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (5 баллов) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \text{существует подпоследовательность } y$ , лежащая в  $A\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s$$

удвоением всех символов в каком-то подслове)...

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык UNARYMODSUBSETSUM =  $\{((n_1, \ldots, n_k), S, 1^m) \mid$ из набора чисел  $n_1, \ldots, n_k$  можно выбрать подмножество с суммой S по модулю  $m\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка DUMBBELL =  $\{(G, k) \mid$ в графе G есть подграф, состоящий из двух клик размера k, соединённых одним ребром $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите NP-полноту языка SETBASIS =  $\{(C,k) \mid C \text{ есть набор подмножеств конечного множества } S$  и существует набор B из k подмножеств S, такой что любое  $c \in C$  можно получить как пересечение некоторого числа множеств из B}.
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку NAE3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \varphi$ ормула в виде 3-КН $\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены один или два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NTIME}(n^2)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, хранящие данные в массиве, проиндексированном двоичными словами. За один шаг машина может перейти из ячейки  $x = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$  в одну из четырёх ячеек  $x0 = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k 0$ ,  $x' = x_1 x_2 \dots x_{k-1}$ ,  $cycle(x) = x_2 \dots x_{k-1} x_k x_1$  или  $inv(x) = (1 x_1) x_2 \dots x_{k-1} x_k$ .
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{y \mid \exists z \in A, |z| \leqslant |y|^2, z$  является палиндромом, y является подсловом  $z\}$  также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:
  - $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s)=1 \text{ и } s \text{ является кодом графа (способ кодирования укажите сами),}$

в котором есть независимое множество размером в половину графа)...

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык MAXCLIQUE =  $\{(G, S) \mid \text{ вершины } S \text{ образуют клику наибольшего размера в графе <math>G\}$ . Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка CLIQUEPARTITION =  $\{(G, k) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно разбить на } k$  групп, внутри каждой из которых проведены все рёбра $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка  $SCSS = \{(R, k) \mid R \subset \Sigma^*, \exists w \in \Sigma^k \ \forall x \in R \ x \sqsubset w\}$ . (Задача о наименьшей надстроке в алфавите  $\Sigma$ ).
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку CLAQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть полный двудольный подграф с долями размера по  $k\}$ . (Иными словами, найдутся  $V_1$  и  $V_2$ , такие что  $|V_1| = |V_2| = k$  и  $V_1 \times V_2 \subset E$ ).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Pi_2^p \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые могут переходить в новые состояния, только если среди символов алфавита, на которые они указывают, есть различные (но могут не переходить и в этом случае).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время poly(|x|), со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1 \text{ для любого } s', \text{ отличающегося от } s \text{ стиранием одного бита}).$ 

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык RESTRICTED-CLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в графе G есть клика на k вершинах, а степень каждой вершины в G не превосходит  $k+10\}$ . Лежит ли этот язык в P, NP, coNP? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка HALF3COL =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ можно выбрать половину или больше вершин и раскрасить индуцируемый ими подграф в три цвета<math>\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка MINMAXCLIQUE =  $\{(G, k) \mid$  в неориентированном графе G есть неувеличиваемая клика из не более чем k вершин $\}$ .
- **7.** (**5 баллов**) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку EXACTTWO3SAT =  $\{\varphi \mid \varphi \text{формула в виде 3-KH}\Phi$ , такая что для некоторого набора значений в каждом дизъюнкте выполнены ровно два литерала $\}$ .
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\mathbf{PH} \neq \mathbf{DSPACE}(n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

- **1.** (**5 баллов**) Рассмотрим машины Тьюринга, которые имеют 2 ленты и обязательно на каждом шаге на каждой ленте либо и меняют символ, на который указывают, и сдвигают указатель, либо не делают ни того ни другого (возможно, на разных лентах делают разное).
  - а) (2 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида, а также определение вычисления на такой машине, если его требуется изменить.
  - б) (2 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.
  - в) (1 балл) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
- **2.** (**5 баллов**) Докажите, что если  $A \in \mathbf{NP}$ , то и язык  $\{H \mid H \text{ содержит гамильтонов цикл и является подграфом какого-то <math>G \in A$ , при этом число вершин G не больше квадрата числа вершин  $H\}$  (здесь произвольная строка, лежащая в A, интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности, при этом учитываются только двусторонние рёбра, а возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются.) также лежит в  $\mathbf{NP}$ .
- **3.** (**5 баллов**) Определим класс  $\mathbf{NP}'$  следующим образом:  $A \in \mathbf{NP}'$  тогда и только тогда, когда существует V(x,s), вычислимый за время  $\mathrm{poly}(|x|)$ , со следующим условием:

 $x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x,s) = 1 \text{ и } V(x,s') = 1$  для любого s', отличающегося от s переменой местами двух битов).

- **4.** (**5 баллов**) Определим язык EQUALSPLIT =  $\{(n_1, \dots, n_k) \mid \text{набор чисел } n_1, \dots, n_k \text{ можно разбить на две группы с равными суммами}. Лежит ли этот язык в$ **P**,**NP**,**coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки сформулируйте и поясните интуицию.
- **5.** (**5 баллов**) Докажите **NP**-полноту языка 3COLFIXEDVERTICES =  $\{(G, u, v) \mid \text{ вершины графа } G \text{ можно раскрасить в 3 цвета, так чтобы вершины <math>u$  и v были одного цвета $\}$
- **6.** (10 баллов) Докажите **NP**-полноту языка CUBICSUBGRAPH =  $\{G \mid B \text{ графе } G \text{ найдётся непустой подграф, в котором каждая вершина имеет степень <math>3\}$ .
- 7. (5 баллов) В явном виде опишите самосводимость в задаче поиска, соответствующей языку SUDOKU =  $\{P \mid$  позиция P в обобщённом судоку имеет решение $\}$  (Обобщённое судоку это головоломка, где в некоторых клетках доски размера  $n^2 \times n^2$  расположены числа от 1 до  $n^2$ . Требуется поставить числа по все пустые клетки, так чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом из  $n^2$  квадратов  $n \times n$ , на которые разбита доска, встречались все числа).
- **8.** (10 баллов) Докажите, что  $\Sigma_2^p \neq \mathbf{DTIME}(n^n)$ . (Нужной теоремой об иерархии можно пользоваться без доказательства).

## Содержание

Арзуманян Юлия, группа 122		Голицын Сергей, группа 127	
Ашабоков Руслан, группа 122		Егоров Максим (М05-316а), группа 127	
Богатырева Дарья, группа 122	. 3	Золотова Анастасия, группа 127	
Бодренков Антон (М05-316а), группа 122		Иванова Анастасия, группа 127	
Гаврилин Александр, группа 122		Исаченко Богдан, группа 127	
Двирняк Артём, группа 122		Картушин Леонид (M05-316a), группа 127 Кисляк Полина, группа 127	
Захряпин Всеволод, группа 122		Кисляк Полина, группа 127	
Калимуллин Евгений, группа 122		Кулешов Богдан, группа 127	
Калмыков Андрей, группа 122		Муратиди Александр (М05-316а), группа 127	
Карагулян Мгер, группа 122		Набоков Рудольф (М05-316а), группа 127	101
Карпеев Глеб, группа 122		Потапов Даниил, группа 127	
Матевосян Гамлет, группа 122	13	Прасковьин Арсений, группа 127	103
Розов Артём, группа 122		Прокофьев Илья (М05-316а), группа 127	
Сутый Дмитрий, группа 122	15	Сагателян Акоб (М05-316а), группа 127	
Сухов Михаил, группа 122		Смирнов Михаил (М05-316а), группа 127	
Тармаев Александр, группа 122		Уколов Иван, группа 127	
Черников Родион, группа 122		Утегенов Артем, группа 127	108
Ахмедов Артем, группа 123		Ханина Екатерина, группа 127.           Аникин Сергей, группа 128.	109
Беляков Глеб, группа 123		Балюк Сергей, группа 128	
Гармашев Олег, группа 123		Буркин Сергей, группа 128	
Голуб Алла, группа 123		Данилин Иван, группа 128	
Калинин Иван, группа 123		Евтеев Тихон, группа 128	
Конюшенко Иван, группа 123		Жгутов Кирилл, группа 128	
Миргалиева Алсу, группа 123		Садовина Мария, группа 128	
Мусаев Садык, группа 123	27	Чебыкин Семён, группа 128	117
Озернова Вероника, группа 123		Широков Кирилл, группа 128	118
Попов Александр, группа 123		Ачох Дамир, группа 129	119
Прозорова Лилия, группа 123		Барсуков Сергей, группа 129	
Решетникова Дарья, группа 123		Дивильковский Максим, группа 129	121
Рогов Константин, группа 123		Ефремов Андрей, группа 129	122
Середа Андрей, группа 123		Конев Сергей, группа 129	
Терентьев Алексей, группа 123		Лейбман Денис, группа 129	
Устинова Алиса, группа 123	35	Максимов Даниил, группа 129	125
Христофорова Дарья, группа 123		Малышева Ольга (M05-316a), группа 129	
Цирпка Денис, группа 123		Моряков Данила (M05-316a), группа 129	
Шульгина Лада, группа 123	30	Наумов Глеб, группа 129	
Яковенко Илья, группа 123		Осипов Дмитрий, группа 129	
Вольных Елизавета, группа 124		Панарин Александр, группа 129	
Долгополый Николай, группа 124		Перегудов Сергей, группа 129	
Дунаева Полина, группа 124		Садовничий Антон, группа 129	
Ефимова Анна, группа 124		Самойлова София, группа 129	134
Клейдман Полина, группа 124	45	Середкин Сергей (М05-316а), группа 129	135
Климза Антон, группа 124	46	Сон Денис, группа 129	136
Манжула Елизавета, группа 124		Срибняк Александр, группа 129	
Манихин Никита, группа 124		Стулов Михаил, группа 129	
Ожегова Марина, группа 124		Турдиев Бакыт, группа 129	
Плотникова Дарья, группа 124		Федоренко Екатерина, группа 129	
Салимзянов Булат, группа 124		Хачатрян Ани, группа 129	
Шевцова Маргарита, группа 124		Щепановский Александр, группа 129	
Вахлов Александр, группа 125		Алекберов Ислам (M05-316a), группа 151	
Жильцов Игорь, группа 125		Амбарян Рудольф, группа 151	
Зубов Павел, группа 125		Атабекян Эдгар, группа 151	
Иванов-Сухолитко Александр, группа 125	57	Богомазова Дарья, группа 151	
Курмаев Милан, группа 125		Боймуродов Хабибулло, группа 151	
Панков Вячеслав, группа 125		Вашкевич Егор, группа 151	
Папай Иван, группа 125		Вуйович Алекса, группа 151	
Половников Илья, группа 125		Глинистый Антон, группа 151	
Сергеечев Алексей, группа 125	62	Кидун Станислав, группа 151	152
Сластин Владимир, группа 125		Масленникова София, группа 151	
Смирнов Артем, группа 125		Мешков Владислав, группа 151	
Смышляев Федор, группа 125		Миранович Ян, группа 151	
Сучков Даниил, группа 125		Прохорчук Екатерина, группа 151	
Шевченко Никита, группа 125		Раловец Яромир, группа 151	
ADDRESS DE LA CONTRA LA CO		Сазанович Михаил, группа 151	
		Сахаров Александр, группа 151	
Ахияров Артур, группа 126			
Ахияров Артур, группа 126	70	Струповен Алексай группа 151	TOI
Ахияров Артур, группа 126	$\frac{70}{71}$	Струповец Алексей, группа 151	162
Ахияров Артур, группа 126.  Блинов Илья, группа 126.  Боровец Андрей (М05-316а), группа 126.  Воронин Иван, группа 126.	70 71 72	Струповец Алексей, группа 151	
Ахияров Артур, группа 126.  Блинов Илья, группа 126.  Боровец Андрей (М05-316а), группа 126.  Боронин Иван, группа 126.  Зенков Евгений, группа 126.	70 71 72 73	Струповец Алексей, группа 151	163
Ахияров Артур, группа 126  Влинов Илья, группа 126  Воровец Андрей (М05-316а), группа 126  Воронин Иван, группа 126  Зенков Евгений, группа 126  Золин Никита, группа 126	70 71 72 73 74	Струповец Алексей, группа 151	$\begin{array}{c} 163 \\ 164 \end{array}$
Ахияров Артур, группа 126.  Блинов Илья, группа 126.  Боровец Андрей (М05-316а), группа 126.  Боронин Иван, группа 126.  Зенков Евгений, группа 126.	70 71 72 73 74 75	Струповец Алексей, группа 151.  Суворов Алексей, группа 151.  Шулейко Антон, группа 151.  Аллаберенов Керим, группа 152.	$163 \\ 164 \\ 165$
Ахияров Артур, группа 126  Блинов Илья, группа 126  Боровец Андрей (М05-316а), группа 126  Воронин Иван, группа 126  Зенков Евгений, группа 126  Золин Никита, группа 126  Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126	70 71 72 73 74 75 76	Струповец Алексей, группа 151. Суворов Алексей, группа 151 Шулейко Антон, группа 151. Аллаберенов Керим, группа 152. Ахмедов Амонуллохон, группа 152.	$163 \\ 164 \\ 165 \\ 166$
Ахияров Артур, группа 126 Влинов Илья, группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воронин Иван, группа 126 Зенков Евгений, группа 126 Золин Никита, группа 126 Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126 Кутузов Николай, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Леонтьев Кирилл, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78	Струповец Алексей, группа 151.  Суворов Алексей, группа 151.  Шулейко Антон, группа 151.  Аллаберенов Керим, группа 152.  Ахмедов Амонуллохон, группа 152.  Бояров Алексей, группа 152.  Ву Чи Фук, группа 152.  Долта Артем, группа 152.	163 164 165 166 167 168
Ахияров Артур, группа 126 Влинов Илья, группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воронин Иван, группа 126 Зенков Евгений, группа 126 Золин Никита, группа 126 Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126 Кутузов Николай, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Марулев Платон, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 79	Струповец Алексей, группа 151  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152  Ахмедов Амонуллохон, группа 152  Бояров Алексей, группа 152  Ву Чи Фук, группа 152  Долта Артем, группа 152  Есеркепов Тамирлан, группа 152	163 164 165 166 167 168 169
Ахияров Артур, группа 126 Влинов Илья, группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воронин Иван, группа 126 Воронин Иван, группа 126 Золин Никита, группа 126 Золин Никита, группа 126 Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126 Кутузов Николай, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Марулев Платон, группа 126 Мятелин Андрей, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80	Струповец Алексей, группа 151.  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152.  Ахмедов Амонуллохон, группа 152.  Бояров Алексей, группа 152.  Ву Чи Фук, группа 152.  Долта Артем, группа 152.  Долта Артем, группа 152.  Зотов Семен, группа 152.	163 164 165 166 167 168 169 170
Ахияров Артур, группа 126  Блинов Илья, группа 126  Боровец Андрей (М05-316а), группа 126  Воронин Иван, группа 126  Зенков Евгений, группа 126  Золин Никита, группа 126  Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126  Кутузов Николай, группа 126  Ленский Кирилл, группа 126  Ленский Кирилл, группа 126  Марулев Платон, группа 126  Мятелин Андрей, группа 126  Полев Алексей, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81	Струповец Алексей, группа 151.  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152.  Ахмедов Амонуллохон, группа 152.  Бояров Алексей, группа 152.  Ву Чи Фук, группа 152.  Долта Артем, группа 152.  Долта Артем, группа 152.  Есеркепов Тамирлан, группа 152.  Зотов Семен, группа 152.  Каштелян Матвей, группа 152.	163 164 165 166 167 168 169 170
Ахияров Артур, группа 126 Влинов Илья, группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воронин Иван, группа 126 Зенков Евгений, группа 126 Золин Никита, группа 126 Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126 Кутузов Николай, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Леонтьев Кирилл, группа 126 Марулев Платон, группа 126 Мятелин Андрей, группа 126 Мятелин Андрей, группа 126 Полев Алексей, группа 126 Попова Дарья, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82	Струповец Алексей, группа 151  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152  Ахмедов Амонуллохон, группа 152  Бояров Алексей, группа 152  Ву Чи Фук, группа 152  Долта Артем, группа 152  Есеркепов Тамирлан, группа 152  Зотов Семен, группа 152  Каштелян Матвей, группа 152  Корней Степан, группа 152	163 164 165 166 167 168 169 170 171 172
Ахияров Артур, группа 126 Влинов Илья, группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воронин Иван, группа 126 Зенков Евгений, группа 126 Золин Никита, группа 126 Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126 Кутузов Николай, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Леонтьев Кирилл, группа 126 Марулев Платон, группа 126 Мятелин Андрей, группа 126 Полев Алексей, группа 126 Попова Дарья, группа 126 Прохоров Борис, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83	Струповец Алексей, группа 151.  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152.  Ахмедов Амонуллохон, группа 152.  Бояров Алексей, группа 152.  Ву Чи Фук, группа 152.  Долта Артем, группа 152.  Долта Артем, группа 152.  Есеркенов Тамирлан, группа 152.  Зотов Семен, группа 152.  Каштелян Матвей, группа 152.  Корней Степан, группа 152.  Лутфуллаев Сардор, группа 152.	$\begin{array}{c} 163 \\ 164 \\ 165 \\ 166 \\ 167 \\ 168 \\ 169 \\ 170 \\ 171 \\ 172 \\ 173 \end{array}$
Ахияров Артур, группа 126 Влинов Илья, группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воронин Иван, группа 126 Зенков Евгений, группа 126 Золин Никита, группа 126 Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126 Кутузов Николай, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Леонтьев Кирилл, группа 126 Марулев Платон, группа 126 Мятелин Андрей, группа 126 Полев Алексей, группа 126 Попова Дарья, группа 126 Прохоров Борис, группа 126 Сомов Кирилл, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84	Струповец Алексей, группа 151  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152  Ахмедов Амонуллохон, группа 152.  Бояров Алексей, группа 152  Ву Чи Фук, группа 152  Долта Артем, группа 152  Есеркепов Тамирлан, группа 152  Зотов Семен, группа 152  Каштелян Матвей, группа 152  Каштелян Матвей, группа 152  Корней Степан, группа 152  Лутфуллаев Сардор, группа 152  Мирзоев Асрорхон, группа 152	$\begin{array}{c} 163 \\ 164 \\ 165 \\ 166 \\ 167 \\ 168 \\ 169 \\ 170 \\ 171 \\ 172 \\ 173 \\ 174 \end{array}$
Ахияров Артур, группа 126  Блинов Илья, группа 126  Боровец Андрей (М05-316а), группа 126  Воронин Иван, группа 126  Зенков Евгений, группа 126  Золин Никита, группа 126  Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126  Кутузов Николай, группа 126  Ленский Кирилл, группа 126  Ленский Кирилл, группа 126  Марулев Платон, группа 126  Мятелин Андрей, группа 126  Полев Алексей, группа 126  Полова Дарья, группа 126  Прохоров Борис, группа 126  Сомов Кирилл, группа 126  Тафинцев Артём, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85	Струповец Алексей, группа 151  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152  Ахмедов Амонуллохон, группа 152  Бояров Алексей, группа 152  Ву Чи Фук, группа 152  Долта Артем, группа 152  Есеркепов Тамирлан, группа 152  Зотов Семен, группа 152  Каштелян Матвей, группа 152  Каштелян Матвей, группа 152  Корней Степан, группа 152  Лутфуллаев Сардор, группа 152  Мирзоев Асрорхон, группа 152  Мирзоев Асрорхон, группа 152  Могилёв Георгий, группа 152	$\begin{array}{c} 163 \\ 164 \\ 165 \\ 166 \\ 167 \\ 168 \\ 169 \\ 170 \\ 171 \\ 172 \\ 173 \\ 174 \\ 175 \end{array}$
Ахияров Артур, группа 126  Блинов Илья, группа 126  Боровец Андрей (М05-316а), группа 126  Воронин Иван, группа 126  Зенков Евгений, группа 126  Золин Никита, группа 126  Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126  Кутузов Николай, группа 126  Ленский Кирилл, группа 126  Леонтьев Кирилл, группа 126  Марулев Платон, группа 126  Мятелин Андрей, группа 126  Полев Алексей, группа 126  Попова Дарья, группа 126  Прохоров Борис, группа 126  Сомов Кирилл, группа 126  Сомов Кирилл, группа 126  Тафинцев Артём, группа 126  Фролов Александр, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86	Струповец Алексей, группа 151  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152  Ахмедов Амонуллохон, группа 152  Вояров Алексей, группа 152  Ву Чи Фук, группа 152  Долта Артем, группа 152  Есеркепов Тамирлан, группа 152  Зотов Семен, группа 152  Каштелян Матвей, группа 152  Каштелян Матвей, группа 152  Лутфуллаев Сардор, группа 152  Мирзоев Асрорхон, группа 152  Могилёв Георгий, группа 152  Оспанов Ален, группа 152	$\begin{array}{c} 163 \\ 164 \\ 165 \\ 166 \\ 167 \\ 168 \\ 169 \\ 170 \\ 171 \\ 172 \\ 173 \\ 174 \\ 175 \\ 176 \end{array}$
Ахияров Артур, группа 126 Влинов Илья, группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воронин Иван, группа 126 Зенков Евгений, группа 126 Золин Никита, группа 126 Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126 Кунузов Николай, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Леонтьев Кирилл, группа 126 Марулев Платон, группа 126 Мятелин Андрей, группа 126 Полов Алексей, группа 126 Попова Дарья, группа 126 Прохоров Борис, группа 126 Сомов Кирилл, группа 126 Тафинцев Артём, группа 126 Тафинцев Артём, группа 126 Фролов Александр, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87	Струповец Алексей, группа 151  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152  Ахмедов Амонуллохон, группа 152  Бояров Алексей, группа 152  Ву Чи Фук, группа 152  Долта Артем, группа 152  Есеркепов Тамирлан, группа 152  Зотов Семен, группа 152  Каштелян Матвей, группа 152  Корней Степан, группа 152  Лутфуллаев Сардор, группа 152  Мирзоев Асрорхон, группа 152  Мирзоев Асрорхон, группа 152  Могилёв Георгий, группа 152  Оспанов Ален, группа 152  Ходжиматов Далер, группа 152	$\begin{array}{c} 163 \\ 164 \\ 165 \\ 166 \\ 167 \\ 168 \\ 169 \\ 170 \\ 171 \\ 172 \\ 173 \\ 174 \\ 175 \\ 176 \\ 177 \end{array}$
Ахияров Артур, группа 126 Влинов Илья, группа 126 Воровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воронин Иван, группа 126 Зенков Евгений, группа 126 Золин Никита, группа 126 Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126 Кутузов Николай, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Леоктий Кирилл, группа 126 Марулев Платон, группа 126 Марулев Платон, группа 126 Мятелин Андрей, группа 126 Полов Алексей, группа 126 Полов Дарья, группа 126 Прохоров Борис, группа 126 Сомов Кирилл, группа 126 Тафинцев Артём, группа 126 Фролов Александр, группа 126 Чернятин Александр, группа 126 Пестакова Ксения, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 80 81 82 83 84 85 86 87 88	Струповец Алексей, группа 151 Суворов Алексей, группа 151 Шулейко Антон, группа 151 Аллаберенов Керим, группа 152 Ахмедов Амонуллохон, группа 152. Бояров Алексей, группа 152 Ву Чи Фук, группа 152 Долта Артем, группа 152 Есеркенов Тамирлан, группа 152 Зотов Семен, группа 152 Каштелян Матвей, группа 152 Кинтелян Матвей, группа 152 Курней Степан, группа 152 Лутфуллаев Сардор, группа 152 Мирзоев Асрорхон, группа 152 Мирзоев Алексей, группа 152 Оспанов Ален, группа 152 Оспанов Ален, группа 152 Содамиматов Далер, группа 152 Чан Нгок Тхань, группа 152	$\begin{array}{c} 163 \\ 164 \\ 165 \\ 166 \\ 167 \\ 168 \\ 169 \\ 170 \\ 171 \\ 172 \\ 173 \\ 174 \\ 175 \\ 176 \\ 177 \\ 178 \\ \end{array}$
Ахияров Артур, группа 126 Блинов Илья, группа 126 Боровец Андрей (М05-316а), группа 126 Воронин Иван, группа 126 Зенков Евгений, группа 126 Золин Никита, группа 126 Кунин-Богоявленский Сергей, группа 126 Кутузов Николай, группа 126 Ленский Кирилл, группа 126 Леонтьев Кирилл, группа 126 Марулев Платон, группа 126 Мятелин Андрей, группа 126 Полов Алексей, группа 126 Попова Дарья, группа 126 Прохоров Борис, группа 126 Сомов Кирилл, группа 126 Тафинцев Артём, группа 126 Тафинцев Артём, группа 126 Фролов Александр, группа 126	70 71 72 73 74 75 76 77 78 80 81 82 88 88 88 88 88 88 88	Струповец Алексей, группа 151  Суворов Алексей, группа 151  Шулейко Антон, группа 151  Аллаберенов Керим, группа 152  Ахмедов Амонуллохон, группа 152  Бояров Алексей, группа 152  Ву Чи Фук, группа 152  Долта Артем, группа 152  Есеркепов Тамирлан, группа 152  Зотов Семен, группа 152  Каштелян Матвей, группа 152  Корней Степан, группа 152  Лутфуллаев Сардор, группа 152  Мирзоев Асрорхон, группа 152  Мирзоев Асрорхон, группа 152  Могилёв Георгий, группа 152  Оспанов Ален, группа 152  Ходжиматов Далер, группа 152	163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179