МФТИ, ФПМИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2020

Семинар №3. Сортировки (1)

1. С помощью сортировки слиянием определите количество инверсий в перестановке. Перестановкой длины n называется массив из n попарно различных целых чисел от 1 до n. Пара чисел a_i и a_j образуют инверсию, если $i < j$, но $a_i > a_j$.

2. Пусть в алгоритме быстрой сортировки в качестве пивота всегда детерминированно выбирается центральный элемент массива. Для произвольного n за $O(n)$ постройте перестановку, на котором такая сортировка занимает $\Omega(n^2)$ времени.

3. Пусть некоторая перестановка задана в виде массива.

а) За одну операцию можно поменять местами два соседних элемента. Докажите, что минимальное количество операций, необходимое для сортировки массива, равно числу инверсий.

б) За одну операцию можно поменять местами два любых элемента. Докажите, что чётность числа инверсий изменяется после каждой операции.

4. На прямой заданы n отрезков координатами своих концов $[a_i, b_i]$. Найдите

а) длину их объединения (асимптотика: $O(n \log n)$);

б) длину их пересечения (асимптотика: $O(n)$);

в) максимальное количество отрезков, которое можно выбрать так, чтобы выбранные отрезки попарно не пересекались (асимптотика: $O(n \log n)$).

5. Напомним, что процедура $\mathrm{Partition}(A, x)$ переупорядочивает элементы массива A так, что сначала идут все элементы, не превосходящие x, в некотором порядке, а затем — все элементы, большие x. Покажите, как реализовать $\mathrm{Partition}(A, x)$ с привлечением $O(1)$ дополнительной памяти.

6. Пусть A — массив длины n, а B — его отсортированная версия. Найдите за $O(n \log n)$ перестановку σ, такую что $b_i = a_{\sigma(i)}$ для всех i. В массиве A могут быть повторяющиеся элементы.