МФТИ

Алгоритмы и структуры данных, осень 2022

Семинар №14. Триангуляция Делоне

1. Докажите, что если в множестве n точек, то для него существует не более $2^{C_n^2}$ триангуляций.

2. Докажите, что для для бесконечно многих n существует набор из n точек на плоскости, у которого есть по крайней мере $2^{n-o(n)}$ триангуляций.

3. Для данной триангуляции определите, является ли она триангуляцией Делоне за $O(n)$, где n — число сайтов.

4. С помощью триангуляции Делоне найдите две ближайшие точки в множестве за $O(n \log n)$.

5. С помощью триангуляции Делоне для каждой точки множества найдите ближайшую к ней за $O(n \log n)$.

6. Дано множество точек на плоскости. Пусть круг, построенный на отрезке $p_i p_j$ как диаметре, не содержит других точек множества внутри себя или на своей границе, то отрезок $p_i p_j$ обязательно является ребром триангуляции Делоне.

7. Найдите евклидово минимальное остовное дерево за $O(n \log n)$. То есть на плоскости даны n точек, стоимость ребра между i-й и j-й точками равна расстоянию между ними; требуется найти минимальное остовное дерево.

8. Пусть дано множество из n точек на плоскости, которое нужно разбить на k непустых кластеров. Расстояние между двумя кластерами — минимальное расстояние между парами точек в этих кластерах. Кластерное расстояние — минимальное из расстояний между парами кластеров.

а) Докажите, что если кластерное расстояние достигается на паре точек $p_i p_j$, то этот отрезок обязательно является ребром триангуляции Делоне.

б) Найдите разбиение на k кластеров с максимальным кластерным расстоянием за $O(n \log n)$.

9. Пусть уже известна триангуляция Делоне для данного множества сайтов. Постройте его диаграмму Вороного за $O(n \log n)$. Что нужно потребовать от триангуляции, чтобы диаграмму можно было построить за $O(n)$?