МЛиТА, 2-й сем.

отчётность – экзамен

3 из 10 – за семестр

7 из 10 – за экзамен

мин. треб.

1 из 3 — 3 из 7 – вопросы в билете

1 из 2 — 2 из 7 – опрос экзаменатора

2 из 7 – доп. вопросы

(при ≥ 4 из 5)

1. „Продвинутая" теория мн-в
2. Классич. теория вычислимости
3. λ-исчисление
4. Формальная арифм.

① Что после „и так далее"?

$$0 = \varnothing$$

$$1 = \{\varnothing\} = \{0\}$$ синглетон

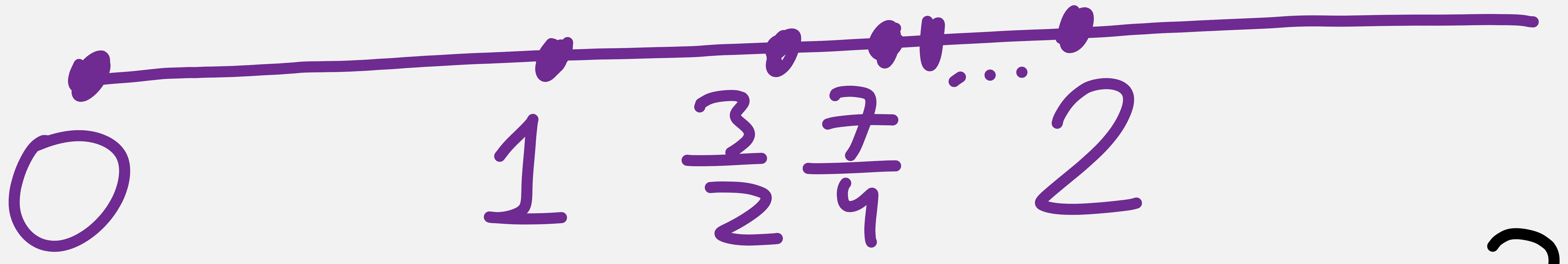
$$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

$$\ldots$$

$$n+1=\{0,1,2,\ldots,n\}=n\cup\{n\}$$

$$\omega=\{0,1,2,\ldots\}$$



$$\omega+1=\omega\cup\{\omega\}=\{0,1,2,\ldots,n,\ldots;\omega\}$$

$$\omega+2=(\omega+1)\cup\{\omega+1\}=\omega\cup\{\omega,\omega+1\}$$

$$\vdots$$

$$\omega+\omega=\omega\cdot 2=\{0,1,2,\ldots\}\cup\{\omega,\omega+1,\omega+2,\ldots\}$$

$$\omega\cdot 2+1$$
$$\omega\cdot 2+2$$
$$\vdots$$
$$\omega\cdot 3$$
$$\vdots$$
$$\omega\cdot 4$$
$$\vdots$$
$$\omega\cdot\omega=\omega^2$$

$$\omega^2+1$$
$$\omega^2+2$$
$$\vdots$$
$$\omega^2+\omega$$
$$\vdots$$
$$\omega^2+\omega\cdot 2$$
$$\vdots$$
$$\omega^2+\omega^2=\omega^2\cdot 2$$

$$\vdots$$
$$\omega^2\cdot 3$$
$$\vdots$$
$$\omega^3$$
$$\vdots$$
$$\omega^4$$
$$\vdots$$
$$\omega^\omega$$

$$\vdots$$
$$\omega^\omega+1$$
$$\vdots$$
$$\omega^\omega+\omega$$
$$\vdots$$
$$\omega^\omega+\omega\cdot 2$$
$$\vdots$$
$$\omega^\omega+\omega^2$$
$$\vdots$$
$$\omega^\omega+\omega^\omega=\omega^\omega\cdot 2$$

$\vdots$

$$\omega^{\omega} \cdot \omega = \omega^{\omega+1}$$

$\vdots$

$$\omega^{\omega} \cdot \omega^{\omega} = \omega^{\omega \cdot 2}$$

$\vdots$

$$\omega^{\omega \cdot 3}$$

$\vdots$

$$\omega^{\omega^2}$$

$\vdots$

$$\omega^{\omega^{\omega}}$$

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$$

$$\varepsilon_0 = \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}_{\omega} \quad \text{PA3}$$

$$\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$$

Теор. $\exists$ аддитивная, но не линейная ф-ия $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall \alpha \ \exists x \ f(x) \neq \alpha \cdot x$$

② Где граница задач, решаемых на компьютере?

Теор. Неразрешима пробл. остановки:

по прогр. и входу понять, становится ли эта прогр. на —̃ .

Теор. В любом „нормальном" языке прогр. есть прогр., печат. собств. текст (куайн)

---

3 Что будет, если построить теорию вычисл. на базе ф-ий, а не мн-в?

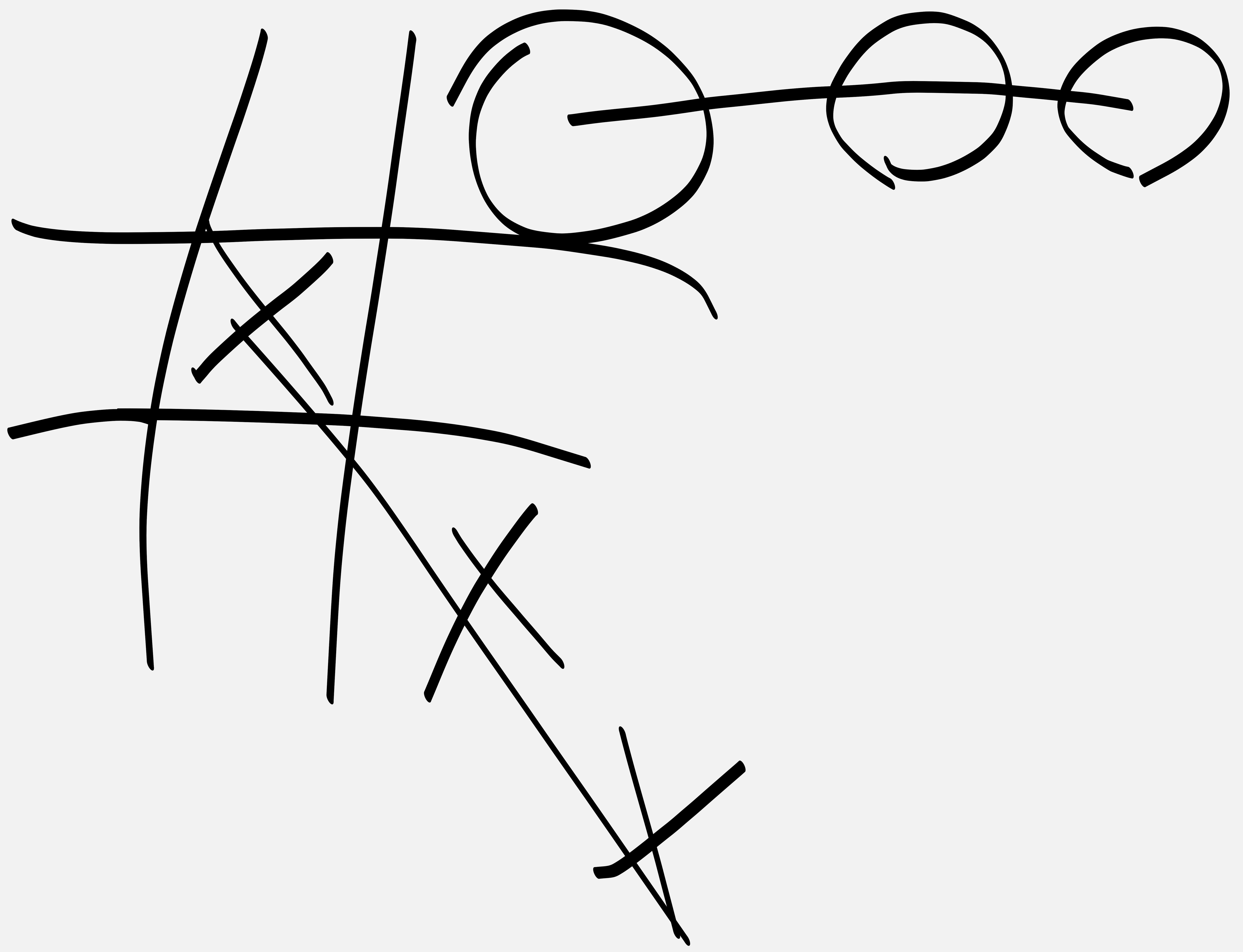
__Теор.__ Есть унив. способ написать рекурсию (Y-комбинатор)

---

4 Можно ли доказать непрот. форм. арифметики?

~~Геор.~~ Гёделя: нельзя (если она на самом деле непротиворечива)

$\neg$



и так далее

Несколько форм мат. индукции на $\mathbb{N}$:

1) $\left(\varphi(0) \wedge \forall n\,(\varphi(n) \to \varphi(n+1))\right) \to \forall n\, \varphi(n)$

2) „Порядковая"

$$\forall n\,(\forall m < n\, \varphi(m) \to \varphi(n)) \to \forall n\, \varphi(n)$$

3) Принцип невозм. беск. спуска

$$\nexists\, a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$$

3') Принцип стабилиз.

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \Rightarrow \exists N\, \forall n > N\; a_n = a_N$$

4) Принцип наим. эл-та (фундированность)

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \ \forall y \in A \ x \leq y$$

Опр. Ч.у.м. S наз-ся фундированным, если $\forall A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$ $\exists x \in A$, x миним. в A

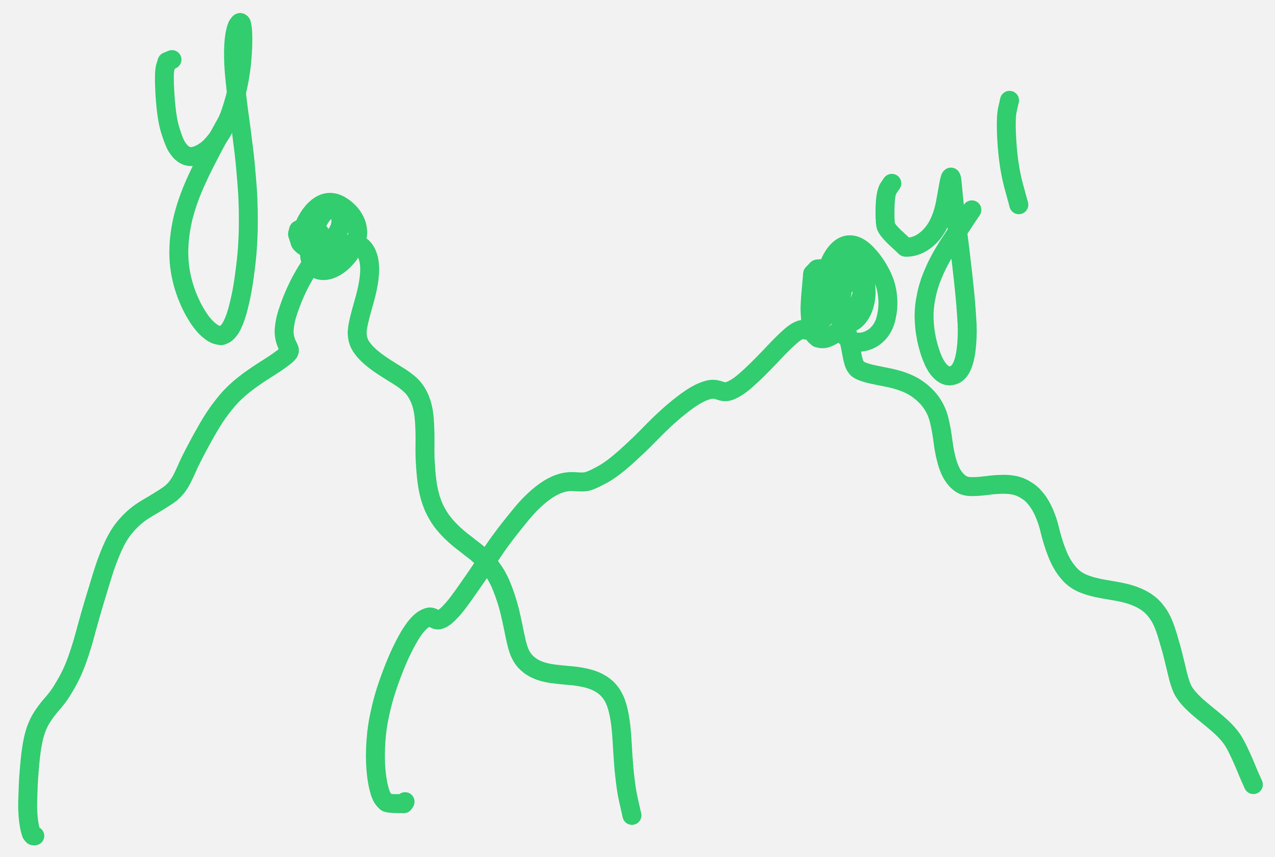
$\forall y \in A \ \neg(y < x)$

Вполне упорядоченное мн-во – фундиров. лин. упор. мн-во

(Well-ordered set)

ПРИМЕРЫ	НЕФУНДИР.	ФУНДИР.
Ч.У.М.	$\mathbb{R}^2$ С ПОКООРД. ПОРЯДКОМ	ЛЮБОЕ КОНЕЧНОЕ (НО НЕ Л.У.М.) $\langle \mathbb{N}, \vdots \rangle$
Л.У.М	$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2$ С ЛЕКС. ПОР.	$\mathbb{N}$ $\varnothing$ $\{k - \frac{1}{n} \mid k, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ 

Теор. След. св-ва эквив.:



1) Фундированность (Ф)
2) Невозм. беск. спуска (БС)
3) Стабилизация (Ст)
4) Принцип трансфинитной инд. (ТИ)

$$\forall y\,(\forall x<y\,\varphi(x)\to\varphi(y))\to\forall y\,\varphi(y)$$

$\underline{Д\text{-во}}$

$\neg Ф \Rightarrow \neg БС$

A – мн-во, $\neq \emptyset$, не сод. мин. эл-та

$a_0 \in A$ – не мин. $\Rightarrow \exists a_1 < a_0$

a_1 – не мин. $\Rightarrow \exists a_2 < a_1$

. . . . . .

Получим $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$

$\neg БС \Rightarrow \neg Ф$

$a_0 > a_1 > a_2 > \dots$

$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ — НЕПУСТ. МН-ВО БЕЗ МИН. ЭЛ-ТА

$\neg БС \Rightarrow \neg Ст$

$a_0 > a_1 > a_2 > \dots$ — НАРУШ. И Ст ТОЖЕ

$\neg Ст \Rightarrow \neg БС$

$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$

$\forall N \; \exists n > N \quad a_n < a_N$

МОЖНО ВЫД. СТРОГО УБ. ПОДПОСЛ.

$\Phi \Rightarrow$ ТИ (Φ, $\neg$ТИ $\Rightarrow$ противор.)

Пусть $\forall y\, (\forall x<y\; \varphi(x) \to \varphi(y))$, $(*)$

но $\neg \forall y\, \varphi(y)$

$A = \{y \mid \neg\varphi(y)\} \neq \varnothing$

$m = \min A$ (сущ. по Φ)

$\forall x<m\; \varphi(x)$ (иначе m не мин.)

Тогда из $(*)$ $\varphi(m)$, противор.

ТИ $\Rightarrow$ Ф

A – подмн-во без мин. эл-та

Докажем по ТИ, что $A = \varnothing$

$\varphi(x): x \notin A$

$\forall x < y \; x \notin A \Rightarrow y \notin A$ верно, т.к. иначе y – мин. эл-т A

По ТИ получ. $\forall y \; y \notin A \Rightarrow A = \varnothing$

Напоминание: $\langle A, \leq_A \rangle + \langle B, \leq_B \rangle =$

$\langle C, \leq_C \rangle$, $\quad C = A \sqcup B$

$$x \leq_C y \iff \left[\begin{array}{l} x, y \in A,\ x \leq_A y \\ x, y \in B,\ x \leq_B y \\ x \in A,\ y \in B \end{array}\right.$$

<u>Утв.</u> A, B фунд. $\Rightarrow A+B$ фунд.

A, B в.у.м. $\Rightarrow A+B$ в.у.м.

Д-во (с исп. Φ)

$K \subset C$, $K \neq \varnothing$

$K \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \exists\, m = \min_{\leq_A} \{K \cap A\}$

$$\Downarrow$$

$m = \min_{\leq_C} K$

$K \subset B \Rightarrow \exists\, q = \min_{\leq_B} K$

$$\Downarrow$$

$q = \min_{\leq_C} K$

$$\langle A, \leq_A \rangle \cdot \langle B, \leq_B \rangle = \langle C, \leq_C \rangle$$

$$C = A \times B$$

$$(a_1, b_1) \leq_C (a_2, b_2), \text{ ЕСЛИ } \left[\begin{array}{l} b_1 <_B b_2 \\ b_1 = b_2,\ a_1 \leq_A a_2 \end{array} \right.$$

(ОБР. ЛЕКСИКОГР. ПОР.)

<u>УТВ.</u> A, B ФУНД. $\Rightarrow$ $A \cdot B$ ФУНД.

A, B В.У.М. $\Rightarrow$ $A \cdot B$ В.У.М.

Д-во (через СТ)

$$(a_0, b_0) \geq_C (a_1, b_1) \geq_C (a_2, b_2) \geq_C \dots$$

$$\Rightarrow b_0 \geq_B b_1 \geq_B b_2 \geq_B \dots$$

$\Rightarrow$ (из СТ. на B) $\exists N \, \forall n > N \quad b_n = b_N$

$$\Rightarrow a_N \geq_A a_{N+1} \geq_A a_{N+2} \geq_A \dots$$

$$\Rightarrow \exists M_{\geq N} \, \forall k > M \quad a_k = a_M \Rightarrow (a_k, b_k) = (a_M, b_M)$$

Теор. о монот. ф-ии

Пусть S — в.у.м., $f: S \to S$, f строго монот.

$\forall x \forall y\ (x > y \to f(x) > f(y))$

Тогда $\forall x\ f(x) \geq x$

Д-во (из Φ) Пусть $A = \{x \mid f(x) < x\} \neq \emptyset$

Тогда сущ. $y = \min A$

$f(y) < y$. Из монот. $f(f(y)) < f(y)$

$\Rightarrow f(y) \in A$, $f(y) < \min A$

(из БС) $f(y) < y$
$\Downarrow$
$f(f(y)) < f(y) \Rightarrow f(f(f(y))) < f(f(y))$ ...

Получ. беск. уб. посл.

$y > f(y) > f(f(y)) > f(f(f(y))) > \ldots$

(из ТИ) Нужно д-ть $\cancel{\forall y}\ (\forall x < y\ (f(x) \geq x) \to (f(y) \geq y))$

Пусть не так, т.е. $\forall x < y\ f(x) \geq x$, $(*)$

но $f(y) < y$

По монот. $f(f(y))<f(y)$
Но т.к. $x=f(y)$ удовл. усл. $x<y$, при подст. в $(*)$
получ. $f(f(y))\geq f(y)$
противор.