МФТИ, сложность вычислений, осень 2023

Семинар 04. **NP**-полные языки (2)

Определение. Паросочетанием в графе $G = (V, E)$ называется множество $M \subset E$, такое что все рёбра из M попарно не имеют общих вершин. Другими словами, в графе (V, M) степени всех вершин не превосходят 1.

Утверждение. Пусть $\mathsf{LP} = \{(A, b) \mid$ для матрицы целых/рациональных чисел A размера $n \times m$ и столбца целых/рациональных чисел b размера $n \times 1$ существует столбец рациональных чисел x размера $m \times 1$, такой что $Ax \leqslant b$ (неравенство покомпонентно)$\}$. Тогда $\mathsf{LP} \in \mathbf{P}$.

---

1. Докажите, что язык $\mathsf{HALT} = \{n \mid$ машина Тьюринга с номером n (в некоторой фиксированной нумерации) останавливается на входе $n\}$ является **NP**-трудным, но не является NP-полным.

2. Докажите, что язык $\mathsf{BIPARTIRE\text{-}MATCHING} = \{G \mid G$ — двудольный граф, в котором есть совершенное паросочетание$\}$ лежит в $\mathbf{P}$.

3. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{SPECIAL\text{-}3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — выполнимая формула в 3КНФ, в которой каждый литерал встречается не более двух раз, а также для каждой переменной два соответствующих ей литерала входят не более трёх раз$\}$.

4. Докажите, что язык $\mathsf{TRIPARTIRE\text{-}MATCHING} = \{H \mid H$ — трёхдольный 3-однородный гиперграф, в котором есть совершенное сочетание$\}$ является **NP**-полным. Другими словами, вершины H разбиты на три доли, а его рёбра — это некоторые тройки вершин (по одной из каждой доли). Сочетание — набор рёбер, в котором никакие два ребра не имеют общих вершин.

5. Докажите, что язык $\mathsf{ZOE} = \{A \mid A$ — матрица $n \times m$ из нулей и единиц, причём существует столбец x размера $m \times 1$ из нулей и единиц, такой что $Ax = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — столбец из всех единиц$\}$ является **NP**-полным.

6. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{01LP} = \{(A, b) \mid$ для системы $Ax \leqslant b$ существует решение x, состоящее из нулей и единиц$\}$. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{ILP} = \{(A, b) \mid$ для системы $Ax \leqslant b$ существует целочисленное решение $x\}$.

7. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{3COL} = \{G \mid \chi(G) \leqslant 3\}$.

8. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{EXACT3COL} = \{G \mid \chi(G) = 3\}$.

1. Сведите SAT к HALT: машина перебирает все наборы переменных и входит в цикл, если ни один из наборов не выполняет формулу.
2. Достаточно вспомнить алгоритма Куна и найти максимальное паросочетание. Альтернативно, можно свети задачу к потоковой: ввести исток и сток, провести рёбра из истока в вершины левой доли, а также рёбра из вершин правой доли в сток. Пропускные способности всех рёбер равны единице. Тогда любой поток в такой сети декомпозируется в объединение путей, содержащих по одному ребра исходного графа, причём эти рёбра не пересекаются по концам. Остаётся найти в сети максимальный поток.
3. Сведём 3SAT к SPECIAL-3SAT. Если какая-то переменная p встречается слишком много раз, введём для неё несколько свежих переменных: $x_1, \ldots, x_k$. Свяжем их значения, добавив в формулу скобки $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge \ldots \wedge (\neg x_{k-1} \vee x_k) \wedge (\neg x_k \vee x_1)$. Каждое вхождение p заменим на одно из x_i, а каждое вхождение $\neg p$ — на одно из $\neg x_i$.
4. Сведите SPECIAL-3SAT к TRIPARTIRE-MATCHING. Каждой переменной сопоставьте двух мальчиков, двух девочек и четырёх собачек, которые соединены четырьмя треугольниками. Мальчики и девочки, соответствующие переменным, больше не входят ни в какие треугольники. Тогда каждый такой гаджет можно покрыть ровно двумя способами, что моделирует поведение булевой переменной. Остаётся две свободные собачки, которые можно отдать мальчикам и девочкам, отвечающим за скобки. В конце могут остаться беспризорные животные, с которыми нужно отдельно разобраться. Подробнее см. книгу Дасгупты, стр. 250.
5. Можно свести TRIPARTIRE-MATCHING к ZOE: каждое ребро в графе представить битовым вектором, кодирующим входящие в него вершины, из всех такой столбцов составить матрицу A. Тогда Ax является суммой нескольких столбцов A, которая должна равняться $\mathbf{1}$, то есть каждая вершина должна быть покрыта ровно одним треугольником.
6. Проще всего свести ZOE к 01LP. Альтернативно, сведите 3SAT к 01LP. Выполнимость конъюнкции равносильна выполнимости системы неравенств. В каждой скобке дизъюнкцию можно заменить на сложение, а равенство превратить в неравенство.
7. Сведите 3SAT к 3COL. Считаем, что граф покрашен в три цвета: истинный, ложный и красный (не являющийся логическим). Для каждой переменной p_i заведём "гантелю" — две вершины, соединённые ребром, которые отвечают литералам p_i и $\neg p_i$. Чтобы их значения были логическими, соединим все вершины всех гантелей с выделенной вершиной отдельно стоящего треугольника ("палитрой"), которая красится в красный цвет. Затем нужно построить такой граф-гаджет, что он принимает две вершины логических цветов, а на выходе располагается вершина цвета дизъюнкции этих логических значений. Затем каждую скобку нужно превратить в сцепку двух таких гаджетов. Каждая конечная вершина должна быть истинной, для этого соединим её с красной и ложной вершиной палитры. Подробнее см. книгу Мусатова, стр. 35.
8. Проследите за сводимостью 3SAT к 3COL. Она же докажет **NP**-трудность языка EXACT3COL.