

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, осень 2023
Контрольная работа №3, тренировочный вариант

Контрольная состоится 20 декабря в 13:55 в Б.Хим. На выполнение работы отводится 80 минут. Каждая задача оценивается в 10 баллов. Никакими материалами пользоваться нельзя. При решении можно использовать изученные на лекциях и семинарах теоремы, если явно на них сослаться. Если задача решена на контрольной менее, чем на 8 баллов, то задача на ту же тему будет выдана для решения на дом из расчёта 5 баллов, так что суммарное число будет ограничено 8 баллами. При заранее заявленном пропуске по любой причине задачи на дом будут выдаваться из расчёта в 8 баллов. Также на дом будут даны две новых задачи на 10 баллов.

16. Пусть $\forall n |A \cap \{0, 1\}^n| \geq 2^n - n$. Докажите, что $A \in \mathbf{DTIME}(n^2)/n^2$.

17. Пусть PARBRA — множество правильных последовательностей из круглых и квадратных скобок. Докажите, что этот язык лежит в \mathbf{NC} . Как можно точнее укажите класс \mathbf{NC}^k или \mathbf{AC}^k , к которому он принадлежит.

18. Пусть $A \in \mathbf{RP}$, а $B \in \mathbf{P}$, причём $A \subset \{0, 1\}^*$, $B \subset \mathbf{N}$. Рассмотрим $A^B = \{a^b \mid a \in A, b \in B\}$, где под a^b понимается конкатенация b копий строки a . Докажите, что $A^B \in \mathbf{RP}$.

19. Придумайте вероятностный алгоритм для приближённого решения задачи MAXNAE3SAT с точностью $\frac{3}{4}$ и дерандомизируйте его методом условных математических ожиданий или методом k -независимых случайных величин. (Задача MAXNAE3SAT : по формуле в виде 3-КНФ найти набор, при котором в максимальном числе дизъюнктов не все литералы принимают одно значение).

Бонус 5 баллов в к/р или д/з: дерандомизируйте ту же задачу вторым из двух методов.

20. (На дом, максимум 10 баллов). Пусть \mathbf{BPP}_p есть аналог класса \mathbf{BPP} для машин, имеющих доступ к монетке, которая выпадает орлом с вероятностью p . Докажите, что существует вычислимое p , такое что $\mathbf{BPP}_p \neq \mathbf{BPP}$.

(Возможны также другие задачи про вероятностные классы, не связанные с неравномерной монеткой).

21. (На дом, максимум 10 баллов). Докажите \mathbf{NP} -трудность $\#\text{MAXCLIQUE}$ — задачи подсчёта числа максимальных по включению клик. Лежит ли соответствующая задача распознавания в \mathbf{P} ? При необходимости можно использовать \mathbf{NP} -трудность задачи вычисления перманента матрицы.