

МФТИ, ФПМИ
Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022
Семинар №11. Паросочетания

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. Докажите, что следующие условия на граф G равносильны:
 - а) G двудолен (то есть множество вершин можно разбить на множества L и R , внутри которых нет рёбер);
 - б) в G нет нечётных циклов;
 - в) $\chi(G) \leq 2$ ($\chi(G)$ — хроматическое число графа G).
2. Докажите теорему Холла: в двудольном графе существует паросочетание размера $|L|$, если и только если $\forall A \subset L : |N(A)| \geq |A|$. Здесь $N(A) = \{b \in R \mid \exists a \in A : \{a, b\} \in E\}$.
3. Докажите, что в d -регулярном двудольном графе существует паросочетание, насыщающее все вершины левой доли. Граф называется d -регулярным, если степени всех его вершин равны d .
4. Пусть $G = (V, E)$ — граф. Докажите, что если $C \subset V$ — вершинное покрытие, то $V \setminus C$ — независимое множество. Выведите отсюда, что дополнение к минимальному вершинному покрытию является максимальным независимым множеством.
5. Пусть G — ациклический ориентированный граф. Предложите алгоритм поиска наименьшего количества вершинно непересекающихся путей, которые покрывают все вершины G . Асимптотика: $O(nm)$.
Указание: раздвойте вершины графа. Сведите задачу к поиску максимального паросочетания.
6. В графе $G = (V, E)$ множество $C \subset E$ называется рёберным покрытием, если каждая вершина из V инцидентна по крайней мере одному ребру из C . Предложите алгоритм поиска минимального рёберного покрытия в двудольном графе за $O(nm)$.
7. Докажите теорему Дилворта: если G — ациклический транзитивный орграф, то наименьшее количество вершинно непересекающихся путей, необходимых для покрытия всех вершин G , равно мощности максимального независимого множества в нём.
8. На шахматной доске размера $n \times n$ некоторые клетки сломаны, фигуры ставить в них нельзя. За $O(n^3)$ определите, можно ли расставить на эту доску n ладей, которые бы не били друг друга.
9. Вы играете в обобщённого дурака. За $O(1)$ можно определить, бьёт ли одна карта другую. У вас в руке n карт. Сейчас ход противника, и он нападает на вас своими n картами. Определите за $O(n^3)$, можете ли вы отбиться. Бить одной картой разные карты противника запрещается.
10. Пусть M_1 — нерасширяемое (максимальное по включению) паросочетание в G , а M_2 — наибольшее паросочетание в G . Докажите, что $|M_2| \leq 2|M_1|$. Разработайте линейный алгоритм поиска какого-нибудь нерасширяемого паросочетания в произвольном графе.
11. Считаем, что теорема Кёнига доказана: число вершин в минимальном вершинном покрытии двудольного графа равно числу рёбер в максимальном паросочетании. Покажите, как найти минимальное вершинное покрытие (а заодно и максимальное независимое множество), сведя эту задачу к 2SAT.