

1. На плоскости даны  $n$  точек. Найдите такую минимальную по включению выпуклую фигуру  $F$ , что все  $n$  точек лежат внутри  $F$ , причём каждая из точек лежит на расстоянии хотя бы  $r$  от границы  $F$ . Как найти периметр такой фигуры? Асимптотика:  $O(n \log n)$ .
2. На плоскости в некоторых точках стоят  $n$  детей. Они хотят сделать селфи. Для этого им нужно определить человека, с положения которого все остальные видны под минимальным углом. Помогите им определить фотографа за  $O(n \log n)$ .
3. Постройте выпуклое расслоение данного множества из  $n$  точек за  $O(n^2)$ . Выпуклое расслоение строится по слоям:  $i$ -м слоем выступают точки, лежащие в вершинах выпуклой оболочки множества точек, из которого выброшены точки меньших слоёв. Иными словами, 1-й слой — это вершины выпуклой оболочки; 2-й слой — это вершины выпуклой оболочки после выкидывания вершин 1-го слоя; и так далее.
4. На плоскости даны  $n$  точек в общем положении (никакие три не лежат на одной прямой). За  $O(n^2 \log n)$  найдите сумму площадей выпуклых оболочек по всем подмножествам точек, содержащих хотя бы три из них.
5. Известно, что если  $x_1 \neq x_2$ , то существует ровно одна парабола вида  $y = x^2 + bx + c$ , проходящая через заданные точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . На плоскости даны  $n$  точек. Вася проводит параболы описанного вида через каждую пару точек с различными абсциссами. Найдите количество различных нарисованных парабол, внутри которых (между ветвями которых) нет других точек. Асимптотика:  $O(n \log n)$ .
6. Дан набор чисел  $a_1, \dots, a_n$ , не обязательно положительных. Определим  $f(l, r) = a_l + 2a_{l+1} + \dots + (r - l + 1)a_r$ . Найдите  $\max_{l \leq r} f(l, r)$  за  $O(n \log n)$ .
7. Дано корневое дерево, в каждой вершине которого написаны два числа: в  $i$ -й вершине написаны числа  $a_i$  и  $b_i$ . Из произвольной вершины  $i$  можно перепрыгнуть в любую вершину  $j$ , лежащую в поддереве  $i$ , тогда стоимость прыжка равна  $a_i \cdot b_j$ . Для каждой вершины определите минимальную суммарную стоимость прыжков, чтобы добраться из неё до какого-либо листа дерева. Асимптотика:  $O(n \log^2 n)$ .
8. Пусть  $a, b, c$  — три массива длины  $n$ . Пусть  $dp_0 = 0$ . Пусть  $dp_i = \max_{j < i} \{a_j b_i + dp_j \cdot c_i\}$ . Найдите все значения  $dp$  за  $O(n \log n)$ .