Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2015
Нумерации вычислимых функций

Функция $U\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ называется *универсальной вычислимой*, если она вычислима и для любой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ найдётся такое число $n$, что при всех $x$ выполнено $U(n,x)=f(x)$. Универсальная вычислимая функция $U\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ называется *главной*, если для любой вычислимой функции $V\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ найдётся вычислимая функция $s\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, такая что $U(s(n),x)=V(n,x)$ при всех $n$ и $x$.

**1.** Докажите, что универсальная вычислимая функция, задающаяся универсальной машиной Тьюринга, является главной.

**2.** Пусть в определении главной универсальной функции существование $s$ требуется не для всех функций $V$, а только для универсальных. Покажите, что класс главных универсальных функций не изменится.

**3.** Покажите, что универсальная функция является главной тогда и только тогда, когда по номерам двух функций можно получить номер их композиции.

Если $f(x)=U(n,x)$, то $n$ называется номером функции $f$. Одна функция может иметь много номеров. В частности, при нумерации, заданной универсальной машиной, номера каждой функции — это коды всех программ, вычисляющих эту функцию. Нумерация, задаваемая главной универсальной функцией, также называется главной. *Теорема Успенского–Райса* утверждает, что при главной нумерации множество номеров функций, обладающих некоторым нетривиальным свойством $\mathcal{A}$, не разрешимо.

**4.** Сформулируйте теорему Успенского–Райса в терминах универсальной машины Тьюринга.

**5.** Докажите, что при главной нумерации множество номеров нигде не определённой функции не разрешимо. Является ли оно перечислимым? Коперечислимым?

**6.** Придумайте (неглавную) нумерацию, в которой нигде не определённая функция имеет ровно один номер.

**7.** Докажите, что при главной нумерации множество номеров функций, определённых в нуле, не разрешимо. Является ли оно перечислимым?

**8.** Придумайте (неглавную) нумерацию, в которой множество номеров функций, определённых в нуле, разрешимо.

**9.** Является ли множество номеров всюду определённых функций перечислимым? А его дополнение? Зависит ли это от главности нумерации?

**10.** Являются ли перечислимыми или коперечислимыми множества номеров машин Тьюринга, которые:

а) Всюду определены и принимают одно и то же значение;

б) Принимают одно и то же значение на своей области определения;

в) Вычисляют инъективные функции;

г) Вычисляют сюръективные функции;

д) На любом входе $x$ останавливаются не более, чем за $100x^3 + 100$ шагов;

е) На любом входе $x$ используют не более, чем $100x^3 + 100$ ячеек на ленте?

*Теорема Клини* о неподвижной точке утверждает, что для любой главной универсальной функции $U$ и для любой всюду определённой вычислимой функции $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ найдётся такой номер $n$, что при всех $x$ выполнено $U(n, x) = U(h(n), x)$. Иначе говоря, программы под номерами $n$ и $h(n)$ вычисляются одну и ту же функцию. Номер $n$ или функцию $f_n$ называют неподвижной точкой преобразования $h$.

**11.** В этой задаче даётся конструктивное доказательство теоремы Клини:

а) Пусть $f(n) = U(n, n)$. Покажите, что существует всюду определённая вычислимая функция $g$, такая что если $f(n)$ определена, то $f(n) \sim g(n)$.

б) Пусть $t(x) = h(g(x))$. Покажите, что неподвижной точкой $h$ будет $g(t)$.

**12.** Докажите, что есть две машины Тьюринга, номер одной из которых является квадратом другой, вычисляющие одну и ту же функцию.

**13.** Пусть $f_{s(n)}(x) = f_n(x) + 1$. Почему такое преобразование тотально вычислимо? Какая функция будет его неподвижной точкой?

**14.** Докажите, что существует машина Тьюринга, печатающая на пустой ленте текст своей собственной программы.

**15.** Докажите, что существуют две несовпадающие машины Тьюринга, такие что первая печатает текст программы второй, а вторая печатает текст программы первой.

**16.** Докажите, что существуют две несовпадающие машины Тьюринга, такие что первая печатает текст программы второй, а вторая печатает текст программы первой задом наперёд.

**17.** Докажите, что для любой вычислимой функции $f(x)$ существует машина Тьюринга, которая на любом входе $x$ печатает собственный текст и значение $f(x)$.

**18.** Докажите, что для любого $n$ найдутся $n$ разных машин Тьюринга, такие что на любом входе каждая печатает номер следующей (а последняя - номер первой).

**19.** Докажите, что для любой вычислимой функции $g$ найдётся $n$, такое что при любом $x$ выполнено $f_n(x) = n + g(x)$.