

МФТИ, ФПМИ
Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022
Семинар №10. Минимальные остовы

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. Напомним, что остовным подграфом графа $G = (V, E)$ называется произвольный граф $H = (V, E')$, такой что $E' \subset E$. Найдите число остовных подграфов данного графа.
2. Может ли у несвязного графа быть остов (остовное дерево)?
3. *Красотой* остова будем считать вес наибольшего ребра в нём. Предложите алгоритм поиска остова с минимальной красотой. Что делать, если нужно, наоборот, максимизировать вес минимального ребра?
4. Докажите, что при использовании в СНМ только эвристики сжатия путей асимптотика ответа на каждый запрос есть $O^*(\log n)$.
5. Оцените асимптотику следующего алгоритма поиска минимального остова. Запустим алгоритм Борувки на $\log \log n$ шагов. На оставшемся графе (со сжатыми компонентами) запустим алгоритм Прима (с использованием кучи Фибоначчи).
6. Докажите, что если в графе веса всех рёбер попарно различны, то минимальный остов в нём единствен. Покажите, что это условие не является обязательным.
7. В данном графе найдите все рёбра, которые
 - а) могут
 - б) обязанылежать в минимальном остовном дереве.
8. Предположим, что в арсенале имеется некоторая эффективная процедура подсчёта числа остовных деревьев в графе (интересующиеся могут изучить матричную теорему о деревьях). Предложите способ, как с её помощью можно насчитать число минимальных остовов.
9. Среди всех минимальных остовов графа G найдите тот, в котором степень вершины v минимальна. Считайте, что веса всех рёбер графа — целые неотрицательные числа.