Полярные преобразования

Определение. *Полярой* точки P относительно окружности ω называется прямая, проходящая через точку P' инверсную точке P относительно окружности, и перпендикулярная прямой PP'. **Определение.** *Полюсом* прямой l относительно окружности ω называется точка, являющаяся инверсным образом относительно этой окружности основания перпендикуляра, опущенного из центра ω на l. **Определение.** *Полярным* преобразованием относительно окружности ω называется преобразование, которое ставит каждой точке в соответствие её поляру, а каждой прямой в соответствие её полюс.

Основное свойство полярного преобразования (*полярная двойственность*): если полюс прямой l лежит на прямой k, то полюс прямой k лежит на прямой l. И наоборот. Если поляра точки A проходит через B, то поляра точки B проходит через A.

Упражнение. Докажите, что три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры проходят через одну точку.

1. Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к каждой его вершине пересекают продолжения противоположных сторон в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что эти точки лежат на одной прямой.

2. a) Представим, что мы доказали, теорему Паскаля. Докажите теорему Брианшона. b) Представим, что мы доказали теорему Дезарга в одну из сторон. Докажите её теперь в обратную сторону. c) А что если применить полярное преобразование к теореме Паппа?

3. Дан полукруг S с центром O и диаметром AB. На AB выбрана точка произвольная точка P. Пусть M и N такие точки полукруга S, что $\angle APM = \angle BPN = \alpha$. Докажите, что точки пересечения прямых MN и AB не зависят от α.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC пересекаются в точке Q. a) Пользуясь теоремой Паскаля докажите, что касательные в точках A и C пересекаются на прямой PQ. b) Докажите, что поляра точки пересечения диагоналей $ABCD$ есть прямая PQ.

5. В треугольнике ABC вписанная окружность касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Прямая AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке A_2. Касательная, проведённая в точке A_2 к вписанной окружности, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что A', B' и C' коллинеарны.

6. Дан треугольник ABC. Через центр вписанной окружности M проведём перпендикуляры к прямым MA, MB и MC. a) Докажите, что точки пересечения этих прямых с соответствующими сторонами лежат на одной прямой. b) Докажите это же утверждение, если M — произвольная точка плоскости.

7. Пусть O — центр описанной окружности ω треугольника ABC. Точка E определяется как пересечение касательной к ω в точке A и прямой, проходящей через O параллельно AC. Точка F определяется как пересечения касательной к ω в точке B и прямой, проходящей через O параллельно BC. Докажите, что EF касается ω.

8. Окружность, вписанная в четырёхугольник $ABCD$, касается его сторон в точках M, N, K и L. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $MNKL$ совпадают.

9. На окружности даны точки A, B, C, U и V. Прямые AU и BV пересекаются в точке C_1, а прямые AV и BU — в точке C_2. Аналогично определяются точки B_1, B_2 и A_1, A_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

10. На описанной окружности ω треугольника ABC выбрана точка P. Через произвольную точку M проведены прямые AM, BM и CM. Они пересекают ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, отличных от точек A, B и C. Докажите, что точки пересечения прямых A_1P, B_1P и C_1P с соответственными сторонами треугольника ABC лежат на одной прямой, проходящей через точку M.