

МФТИ, ФПМИ
Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022
Семинар №13. Потоки (2)

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. В двудольном графе каждая вершина v имеет некую стоимость c_v . Предложите алгоритм поиска вершинного покрытия этого графа минимальной суммарной стоимости.
2. (Матан) В курсе лекций по математическому анализу планируется рассказать n тем. Каждая тема i обладает некоторой полезностью для студентов $u_i \in \mathbb{Z}$. Также среди тем могут быть некие зависимости: для изучения одной темы нужно прослушать какую-то другую. Зависимости могут быть циклическими, в таком случае следует прослушать все темы цикла целиком (независимо от порядка). Определите набор тем для преподавания с целью максимизации суммарной полезности.
3. (Алгоритм Диница с масштабированием) Путь в алгоритме поиска максимального потока с помощью масштабирования вместо алгоритма Эдмондса—Карпа используется алгоритм Диница. Докажите, что время работы становится $O(|V| |E| \log C)$.
4. Докажите, что если F — максимальный поток в сети, а ℓ — кратчайшее расстояние в рёбрах от s до t , то $\ell \leq |V| \cdot \sqrt{2C/F}$. Выведите отсюда вторую теорему Карзанова: число итераций алгоритма Диница не превосходит $O(C^{1/3} |V|^{2/3})$.
5. В двудольном графе найдите такое $X \subset L$, что $|X| - |N(X)|$ максимально.
6. Дан неориентированный граф. Нужно ориентировать все его рёбра так, чтобы максимальная исходящая степень была минимально возможной.