

Всюду в этом листке (если не оговорено иное)  $n$  означает количество вершин в графе, а  $m$  — количество рёбер.

**1.** В городе есть  $n$  пунктов обмена валюты. В связи с глобальным мировым кризисом, вызванным коронавирусом, каждый обменник готов принять только одну валюту и конвертировать её в другую (тоже строго определённую) по своему курсу. Определите, можно ли обладая изначальной суммой в 1 рубль бесконечно обогатиться? Асимптотика:  $O(n^2)$ .

**2.** Помогут ли алгоритмы Флойда или Форда—Беллмана для поиска простого пути максимального веса между двумя вершинами?

**3.** Пусть в графе нет отрицательных циклов. Попробуем модифицировать алгоритм Дейкстры для работы с отрицательными весами рёбер.

а) Почему нельзя просто увеличить веса всех рёбер на большую константу, чтобы сделать их все неотрицательными?

б) Пусть каждой вершине  $v$  приписан некий потенциал  $\varphi(v)$ . Заменим вес ребра  $(u, v)$  на  $cost(u, v) + \varphi(u) - \varphi(v)$ . Как изменяются кратчайшие пути в графе с новыми весами? С помощью одного запуска алгоритма Форда-Беллмана введите подходящие потенциалы (то есть такие, что все новые веса неотрицательны). Затем за  $n$  запусков алгоритма Дейкстры найдите кратчайшие расстояния между всеми парами вершин. Полученный алгоритм — алгоритм Джонсона.

**4.** Пусть  $G = (V, E)$  — ориентированный граф. Транзитивным замыканием  $G$  называется граф  $G^* = (V, E^*)$ , где  $E^* = \{(u, v) \mid \text{в графе } G \text{ есть путь из } u \text{ в } v\}$ . Найдите  $G^*$  за  $O(n^3/w)$ , где  $w$  — длина машинного слова.

**5.** Приведите пример графа, на котором значения, находимые алгоритмом Флойда, экспоненциально быстро растут.

**6.** Дан ориентированный взвешенный граф на  $n$  вершинах, а также перестановка его вершин  $p_1, \dots, p_n$ . Для каждого  $i$  определите сумму расстояний между всеми парами вершин в графе, получающемся из исходного после удаления вершин  $p_1, \dots, p_i$  со всеми инцидентными им рёбрам. Асимптотика:  $O(n^3)$ .

**7.** Пусть задан массив  $a_1, \dots, a_n$ , а также дано  $q$  ограничений к нему. Каждое ограничение имеет вид  $a_l + \dots + a_r < k$  или  $a_l + \dots + a_r > k$ . Параметры  $l, r, k$  могут быть разными в разных ограничениях. Определите, совместны ли эти ограничения, то есть существует ли хотя бы один загаданный массив в такими свойствами?