Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2023
Листок 11: Математическая индукция, версия только с условиями

Принцип математической индукции — это способ рассуждения, позволяющий доказать некоторое свойство для *всех* натуральных чисел. Доказательство по индукции состоит в том, что сначала проверяется данное свойство для числа 0 (*база индукции*), а затем показывается, что если свойство выполнено для числа n, то оно верно и для числа $n+1$ (*шаг индукции*/*индуктивный переход*).

Таким образом, база индукции гарантирует истинность интересующего нас свойства для 0. Индуктивный переход гарантирует, что из истинности свойства для 0 вытекает истинность и для 1; из истинности свойства для 1 вытекает истинность для 2, и так далее. В результате мы заключаем, что данное свойство выполнено для каждого натурального числа.

Более формально принцип индукции можно сформулировать несколькими эквивалентными способами:

а) (Классическая индукция) Если для некоторого свойства A выполнено $A(0)$, а также для любого n из $A(n)$ следует $A(n+1)$, то для любого натурального n выполнено $A(n)$.
б) (Порядковая, ординальная, трансфинитная индукция) Если для любого n из $A(0), \ldots, A(n-1)$ следует $A(n)$, то для любого n выполнено $A(n)$.
в) (Фундированность) В любом непустом множестве натуральных чисел есть наименьшее число.
г) (Невозможность бесконечного спуска) Не существует бесконечной строго убывающей последовательности натуральных чисел.
д) (Принцип стабилизации) Любая бесконечная нестрого убывающая последовательность натуральных чисел стабилизируется (т. е. с какого-то момента) все числа в ней одинаковы.

1. В каком смысле формулировки а)–д) эквивалентны друг другу? Покажите, как логически вывести эти формулировки друг из друга.

2. Докажите, что при любом n квадрат размера $2^n \times 2^n$ без одной угловой клетки можно разбить на уголки из трёх клеток. Докажите, что то же верно для квадрата $2^n \times 2^n$ без одной любой клетки.

3. Подсчитайте число частей, на которые разбивается плоскость в следующих случаях:

а) На плоскости имеется n прямых в общем положении (никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке). На сколько областей делят плоскость эти прямые?

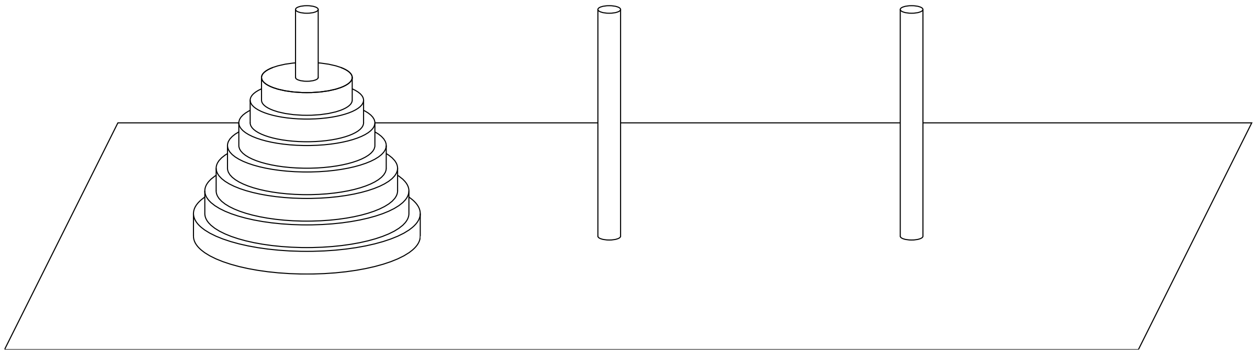

Рис. 1: Ханойские башни для 7 колец

б) На плоскости имеется n окружностей в общем положении (любые две из них пересекаются в двух разных точках, никакие три не пересекаются в одной точке). На сколько областей делят плоскость эти окружности?

4. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентной формулой:

а) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + n + 1$;

б) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n + \left[\frac{n+3}{2}\right]$.
Докажите, что все элементы последовательности нечётны.

5. Докажите, что уравнение $8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4$ не имеет решений в положительных целых числах.

6. Ханойские башни. Игра «Ханойские башни» состоит из трёх штырей и n колец разного размера. Изначально все кольца надеты на один штырь и упорядочены по размеру (самое большое внизу, см. рис. 1). За ход разрешается перенести верхнее кольцо с одного штыря на другой, при этом нельзя класть кольцо большего размера на кольцо меньшего.

а) Докажите, что за некоторое число ходов можно перенести все кольца с одного штыря на другой.

б) Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ ход.

в) Докажите, что меньшего числа ходов не хватит.

7. В некоторой стране каждый город соединён с любым другим дорогой с односторонним движением.

а) Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать в любой другой по дорогам;

б) Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать в любой другой по дорогам не более чем с одной пересадкой.

8. На краю пустыни имеется резервуар с неограниченным запасом бензина и неограниченное число канистр. Машина может заправлять бензобак из резервуара, возить пустые канистры, сливать бензин из бензобака в канистру и оставлять эту канистру в любой точке пустыни на хранение или заправлять машину из канистры, оставленной на хранение ранее. Возить канистры с бензином запрещается. На полном бензобаке машина может проехать 100 км. Докажите, что машина сможет проехать сколь угодно далеко.

9. Бесконечная клетчатая плоскость раскрашена в 4 цвета, так чтобы любой квадрат 2×2 содержал все цвета. Докажите, что в любом прямоугольнике размера $2m \times 2n$ угловые клетки покрашены в различные цвета.

10. Имеется шеренга из n солдат-новобранцев. По команде старшины: «Нале-ВО!» — каждый солдат поворачивается налево или направо (некоторые путают). После этого каждую секунду солдаты, стоящие лицом друг к другу, разворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно развороты прекратятся.

11. Пусть задана некоторая функция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что $g(b) > b$. Рассмотрим функцию $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, определяемую так:

$$G(n,b) = \begin{cases} (ag(b)+c-1, g(b)), & n = ab+c, 0 < c < b; \\ ((a-1)g(b)+g(b)-1, g(b)), & n = ab; \\ (0,0), & b = 0 \vee n = 0. \end{cases}$$

Докажите, что для любых n и b при достаточно большом k верно $G^k(n,b) = (0,0)$.

12. Купец и чёрт. Купец совершил с чёртом сделку: каждый день купец меняет у чёрта денежную купюру на любое число более мелких. Получать деньги из других источников купец не может. Как только купец не сможет выполнить договор, он продаст чёрту душу. Докажите, что рано или поздно так и случится. (Имеется лишь конечное число номиналов купюр. Каждый день купцу нужно что-то тратить на еду. Купец и чёрт бессмертны.)

13. На столе лежит конечное число фишек с натуральными числами. Некто каждую минуту либо убирает со стола фишку с нулём, либо заменяет одну из фишек на любое количество фишек с меньшими числами. Докажите, что рано или поздно этот процесс закончится.

Список литературы

[1] Шень А. Математическая индукция — М.: МЦНМО, 2007