

Зачёт Алгоритмы

July 24, 2024

1. Разработайте структуру данных S , которая бы позволяла хранить множество целых чисел, добавлять в него элементы и удалять $|S|/2$ наибольших элементов из множества. Асимптотика: $O(1)$ амортизированно (то есть q последовательных запросов к изначально пустому S должны обрабатываться за $O(q)$).

2. Задан массив $a(0), \dots, a(2^n - 1)$. Определим $a'(mask) = \sum_{submask \subseteq mask} a(submask)$.

Докажите, что следующий код решает эту задачу на месте (результат сохраняется в исходном массиве):

```
void magic(vector<int>& a) {  
    for (int i = 0; i < n; ++i)  
        for (int mask = 0; mask < (1 << n); ++mask)  
            if (!bit(mask, i))  
                a[mask + (1 << i)] += a[mask];  
}
```

3. На гранях шестигранного кубика могут располагаться числа от 1 до n , повторы не запрещены. Два кубика считаются различными, если на кубиках различны мультимножества расположенных чисел. Скажем, что один кубик превосходит другой, если с вероятностью, строго большей $\frac{1}{2}$, при случайном равномерном бросании обоих кубиков на первом выпадает большее число. Назовём тройку кубиков хорошей, если первый кубик превосходит второй, второй превосходит третий, а третий превосходит первый. Определите число хороших упорядоченных троек кубиков за:

- (a) $O(n)$
- (b) $O(\log n)$

(с) $O(1)$

4. Дан связный неориентированный граф G . Нужно ориентировать как можно больше его рёбер, так чтобы по-прежнему из каждой вершины был путь в каждую. Асимптотика: $O(n + m)$.
5. Пусть ϕ — формула в виде 2-КНФ с n переменными и m скобками. За $O(n \cdot (n + m))$ определите для каждой переменной верно ли, что её значение одинаково во всех выполняющих наборах ϕ . Иными словами, обязательно ли значение переменной фиксировано, если $\phi = 1$?
6. Продавец аквариумов для кошек хочет объехать n городов, посетив каждый из них ровно один раз. Помогите ему найти кратчайший путь. (На вход даётся матрица смежности, на выход выдаётся длина и список городов)
7. Группа математиков проводит бои между натуральными числами. Результаты боя между двумя натуральными числами, вообще говоря, случайны, однако подчиняются следующему правилу: если одно из чисел не менее чем в два раза превосходит другое, то большее число всегда побеждает; в противном случае победить может как одно, так и другое число. Бой называется неинтересным, если его результат предопределён. Множество натуральных чисел называется мирным, если бой любой пары различных чисел из этого множества неинтересен. Силой множества называется сумма чисел в нём. Сколько существует мирных множеств натуральных чисел силы n ?
8. В компьютерной сети вашей фирмы n компьютеров. В последнее время свитч, к которому они подключены, сильно барахлит, и потому не любые два компьютера могут связаться друг с другом. Кроме того, если компьютер a обменивается информацией с компьютером b , то никакие другие компьютеры не могут в это время обмениваться информацией ни с a , ни с b . Вам необходимо вычислить максимальное количество компьютеров, которые могут одновременно участвовать в процессе обмена информацией. (На вход дана матрица смежности)
9. Есть n лампочек и m переключателей. Каждый переключатель контролирует некоторое множество лампочек, а вот каждая лампочка контролируется ровно двумя переключателями. Если изменить положение переключателя, то изменят своё состояние все контролируемые им лампочки: горящие потухнут, а негорящие зажгутся. Определите,

можно ли так нажать на некоторые (возможно, никакие) переключатели, чтобы все лампочки зажглись.

Входные данные

Первая строка содержит два целых числа n и m ($2 \leq n \leq 105, 2 \leq m \leq 105$) — число лампочек и число переключателей.

Следующая строка содержит n целых чисел r_1, r_2, \dots, r_n ($0 \leq r_i \leq 1$) — изначальные состояния лапочек. Лампочка i включена, если и только если $r_i = 1$.

В каждой из следующих m строк содержится целое число x ($0 \leq x \leq n$), а затем x различных целых чисел — количество лампочек, контролируемых очередным переключателем, а затем номера этих лампочек. Гарантируется, что каждая лампочка контролируется ровно двумя переключателями.