

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. В ориентированном графе введём отношение на вершинах: $u \sim v$, если и только если существует простой путь из u в v , а также существует простой путь из v в u . Докажите, что \sim является отношением эквивалентности, то есть
 - а) (*рефлексивность*) для любой вершины v верно $v \sim v$;
 - б) (*симметричность*) если $u \sim v$, то $v \sim u$;
 - в) (*транзитивность*) если $u \sim v$, $v \sim w$, то $u \sim w$.
2. Приведите пример графа и двух вершин в нём, таких что они были бы эквивалентны (в терминах предыдущей задачи), но между ними бы не существовало непересекающихся путей в обе стороны.
3. Дано ориентированное корневое дерево. Назовём вершину u предком вершины v , если из u есть путь в v . За $O(n + q)$ ответьте на q запросов вида “является ли u_i предком v_i ”?
4. Ориентированный граф называется *турниром*, если между каждой парой вершин есть ровно одно ребро. Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь (то есть простой путь, проходящий по всем вершинами). Как найти этот путь за линейное от размера графа время?
5. Неориентированный граф называется *двудольным*, если его хроматическое число не превосходит двух (то есть все вершины можно раскрасить в два цвета, так чтобы каждое ребро соединяло вершины разных цветов). Докажите, что двудольность графа равносильна каждому из перечисленных свойств:
 - а) вершины графа можно разбить на две доли, так что рёбра соединяют только вершины из разных долей;
 - б) в графе нет циклов нечётной длины.
6. *Деревом* называется связный граф без циклов. Докажите, что дерево является двудольным графом.
7. Найдите число путей в данном ориентированном ациклическом графе за $O(n + m)$.
- 8*. На прямой расположены бомбочки в точках x_1, \dots, x_n . У каждой из них есть свой радиус поражения r_i : если взрывается i -я бомбочка, она поражает весь отрезок $[x_i - r_i, x_i + r_i]$. Задетые бомбочки тоже взрываются и вызывают цепную реакцию. Определите наименьшее количество бомбочек, которые нужно поджечь вручную, чтобы взорвались все бомбочки. Асимптотика: $O(n \log n)$.