МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, осень 2023
Контрольная работа №1, вариант 1

На выполнение работы отводится 80 минут. Каждая задача оценивается в 10 баллов. Никакими материалами пользоваться нельзя. При решении можно использовать изученные на лекциях и семинарах теоремы, если явно на них сослаться.

1. Рассмотрим машины Тьюринга с одной лентой, ограниченной слева, и двумя командами сдвига: на одну ячейку направо или в начало ленты.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида и вычисления на них. В частности, укажите, на какие ячейки нужно записывать вход и как считывать выход.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (4 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

2. Пусть $A \in \mathbf{NP}$, при этом A понимается как множество булевых матриц размера $n \times n$. (В частности, A состоит только из слов, длина которых является полным квадратом.) Докажите, что множество матриц, полученных какой-то перестановкой строк матрицы из множества A, также лежит в $\mathbf{NP}$.

3. Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1 \text{ и } s \text{ не содержит 3 одинаковых символов подряд}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

4. Пусть $\mathsf{IMPORTANT\text{-}VERTEX} = \{(G, s, t, k, u) \mid$ любой простой путь из s в t в графе G, имеющий длину не менее k, проходит через вершину $u\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

5. Пусть $\mathsf{TWO\text{-}INDSETS} = \{(\mathsf{G}, \mathsf{k}) \mid$ в графе G есть независимое множество размера $2k$ и не пересекающееся с ним независимое множество размера $k\}$. Докажите, что этот язык является $\mathbf{NP}$-полным.

6. Пусть $\mathsf{GRAPHKERNEL} = \{G \mid$ в ориентированном графе G есть ядро, т. е. множество S, такое что внутри S рёбер нет, а из любой вершины вне S идёт ребро в одну из вершин в $S\}$. Докажите, что этот язык является $\mathbf{NP}$-полным.

7. Рассмотим задачу $\mathsf{HITTING\text{-}SET}$: по набору множеств $(S_1, \ldots, S_n)$ и числу k проверить, найдётся ли k-элементное множество, имеющее непустое пересечение с каждым из S_i. Покажите, как, имея доступ к решателю этой задачи, можно и найти соответствующее множество, если оно есть.

8. Докажите, что если $\mathbf{NP} = \mathbf{EXP}$, то $\mathbf{NEXP} = \mathbf{EEXP}$.

МФТИ, ФПМИ, сложность вычислений, осень 2023
Контрольная работа №1, вариант 2

На выполнение работы отводится 80 минут. Каждая задача оценивается в 10 баллов. Никакими материалами пользоваться нельзя. При решении можно использовать изученные на лекциях и семинарах теоремы, если явно на них сослаться.

1. Рассмотрим машины Тьюринга с одной лентой, ограниченной слева, и двумя командами сдвига: на 2 ячейки направо или на 3 ячейки налево.

а) (3 балла) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида и вычисления на них. В частности, укажите, на какие ячейки нужно записывать вход и как считывать выход.

б) (3 балла) Докажите, что стандартную одноленточную машину Тьюринга можно смоделировать на машине такого вида с не более чем полиномиальным замедлением.

в) (4 балла) Докажите, что машину такого вида можно смоделировать на классической одно- или многоленточной машине Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.

2. Пусть $A \in \mathbf{NP}$, при этом A понимается как множество булевых матриц размера $n \times n$. (В частности, A состоит только из слов, длина которых является полным квадратом.) Докажите, что множество матриц, полученных прибавлением к последней строке матрицы из множества A каких-то других её строк (которые остаются неизменными), также лежит в $\mathbf{NP}$.

3. Определим класс $\mathbf{NP}'$ следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычислимый за время $\mathrm{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s(V(x, s) = 1 \text{ и } s \text{ является палиндромом}).$$

Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

4. Пусть $\mathsf{IMPORTANT\text{-}EDGE} = \{(G, s, t, k, u, v) \mid$ любой простой путь из s в t в графе G, имеющий длину не менее k, проходит через ребро $(u, v)\}$. Лежит ли этот язык в $\mathbf{P}$, $\mathbf{NP}$, $\mathbf{coNP}$? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки — сформулируйте и поясните интуицию.

5. Пусть $\mathsf{TWO\text{-}CLIQUES} = \{(\mathsf{G}, \mathsf{k}) \mid$ в графе G есть клика размера $2k$ и не пересекающаяся с ней клика размера $k\}$. Докажите, что этот язык является $\mathbf{NP}$-полным.

6. Пусть $\mathsf{GRUNDYNUM} = \{G \mid$ для ориентированного графа G существует функция Гранди, т. е. такая функция $f \colon V \to \mathbb{N}$, что $f(v) = \min(\mathbb{N} \setminus \{f(u) \mid (u, v) \in E\})\}$. Докажите, что этот язык является $\mathbf{NP}$-полным.

7. Рассмотим задачу $\mathsf{SINGLE\text{-}HITTING\text{-}SET}$: по набору множеств $(S_1, \ldots, S_n)$ и числу k проверить, найдётся ли k-элементное множество, имеющее пересечение ровно в 1 элемент с каждым из S_i. Покажите, как, имея доступ к решателю этой задачи, можно и найти соответствующее множество, если оно есть.

8. Докажите, что если $\mathbf{coNP} = \mathbf{EXP}$, то $\mathbf{coNEXP} = \mathbf{EEXP}$.