МФТИ, ФИВТ

Алгоритмы и структуры данных, весна 2021

Семинар №6–7. Простейшие алгоритмы на графах (2)

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. Докажите, что в связном графе нет мостов, если и только если его можно сильно ориентировать (то есть так ориентировать все рёбра, что по-прежнему из любой вершины можно будет попасть в каждую). Как находить такую ориентацию?

2. Пусть G — неориентированный граф. Требуется каким-нибудь образом ориентировать все рёбра графа. Пусть c_v — число вершин, достижимых из v при данной ориентации. Найдите ориентацию всех рёбер, максимизирующую $\min\limits_{v \in V(G)} c_v$. Асимптотика: $O(n+m)$.

3. Для каждой вершины v графа G за суммарное время $O(n+m)$ определите число компонент в графе $G - v$ (то есть после удаления v и всех инцидентных ей рёбер).

4. В стране X — выборы в парламент. Каждый из n избирателей голосует следующим образом: он сообщает, каких двух представителей он хотел бы видеть в парламенте, а каких двух — не хотел бы. Всего представителей (кандидатов) k. Итог выборов устраивает конкретного избирателя, если в парламент вошёл хотел бы один желаемый для него представитель и не вошёл хотя бы один нежелаемый. За $O(n+k)$ определите, можно ли огласить результат выборов, который бы устроил всех избирателей.

5. Пусть G — связный неориентированный граф. Пара вершин называется *ненадёжной*, если существует ребро, удаление которого приводит к исчезновению всех путей между этими вершинами. Найдите число пар ненадёжных вершин за $O(n+m)$.

6. Дан связный неориентированный граф $G = (V, E)$. Множество вершин A в нём назовём *отказоустойчивым*, если после удаления любого ребра графа G из любой вершины $V \setminus A$ найдётся путь хотя бы в одну из вершин A. Найдите минимальное по мощности отказоутойчивое A. Как найти количество таких минимальных A?

7. (Dynamic Connectivity Problem) В изначально пустом графе — n вершин. К нему поступает q запросов двух видов:

i) добавить неориентированное ребро между вершинами u_i и v_i;

ii) сообщить, есть ли путь между вершинами u_i и v_i.

Ответьте на все запросы за $O((n+q)\sqrt{q})$.

8. Раскраска рёбер графа в два цвета называется *почти сбалансированной*, если для каждой вершины $|c_1(v) - c_2(v)| \leqslant 1$, где $c_i(v)$ — число рёбер цвета i, инцидентных вершине v. Найдите почти сбалансированную раскраску рёбер данного графа G за $O(n+m)$.

9. Имеется набор доминошек, каждая из которых состоит из двух половинок. На половинках написаны числа от 0 до 6. Две доминошки можно состыковать, если на соприкасающихся половинках написаны одинаковые числа. Дано n доминошек с известными числами на них. Можно ли выложить все доминошки в один ряд на стол так, чтобы соседние корректно стыковались между собой? Асимптотика: $O(n)$.

10. Задан список из n городов. Название каждого города представляет собой строку, состоящую из маленьких латинских букв. За линейное время от размера входных данных определите, существует ли такая перестановка городов, что первая буква i-го города равна последней букве $(i-1)$-го для всех подходящих i.