Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2015
Семинар 18: вычислимые функции; разрешимые и перечислимые множества

Пусть Σ — некоторый конечный алфавит (обычно $\Sigma = \{0, 1\}$). Частично определённая функция $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ называется *вычислимой*, если найдётся машина Тьюринга, которая из конфигурации q_1x за конечное число шагов переходит в конфигурацию $q_0f(x)$, если $f(x)$ определена, и не останавливается на конфигурации q_1x, если $f(x)$ не определена. Вычислимая функция нескольких аргументов определяется аналогично (для начальной конфигурации $q_1x_1\#x_2\#\dots\#x_n$). При решении задач этого семинара не обязательно доказывать всё для машины Тьюринга, достаточно проводить рассуждения для абстрактных алгоритмов.

1. Докажите, что не все функции вычислимы.

2. Докажите, что композиция вычислимых функций вычислима.

3. Докажите, что любая функция с конечной областью определения вычислима.

4. Верно ли, что обратная функция к любой всюду определённой вычислимой инъекции вычислима? А к вычислимой инъекции, определённой всюду, кроме одной точки? А к произвольной вычислимой инъекции?

5. Дайте определение вычислимой функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

6. Докажите, что существует биективное вычислимое в обе стороны кодирование пар, т.е. такая вычислимая биекция $h\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что вычислимы функции $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых выполнено $l(h(x, y)) = x$ и $r(h(x, y)) = y$.

7. Докажите, что следующие два определения эквивалентны:

а) Функция $F\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима, если существует алгоритм, который преобразует пару входов n и m в $F(n, m)$, если $F(n, m)$ определено, и не останаваливающийся на паре (n, m) в противном случае.

б) Функция $F\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима, если вычислима функция $G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, определённая формулой $G(x) = F(l(x), r(x))$, где l и r — обратные функции к вычислимому кодированию пар.

8. Докажите, что если $F\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима, то при любом n функция $F_n(x) = F(n, x)$ вычислима.

Множество $A \subset \Sigma^*$ называется *разрешимым*, если существует алгоритм, распознающий по произвольному слову x, верно ли, что $x \in A$. Разрешимость подмножеств $\mathbb{N}$ определяется аналогично.

Формализуем распознающий алгоритм как машину Тьюринга, имеющую не одно, а два завершающих состояния: q_a и q_r. Если машина пришла в состояние q_a, то независимо от содержимого ленты её ответ интерпретируется как положительный, если она пришла в состояние q_r, то как отрицательный. Будем также говорить, что машина приняла или отвергла данное слово.

9. Докажите, что множество разрешимо тогда и только тогда, когда вычислима его характеристическая функция

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A; \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$$

10. Докажите, что не все множества разрешимы. Может ли подмножество разрешимого множества быть неразрешимым?

11. Докажите, что следующие два определения эквивалентны:

а) Множество $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ разрешимо, если существует алгоритм, распознающий по произвольной паре натуральных n и m, верно ли, что $(n, m) \in B$.

б) Множество $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ разрешимо, если разрешимо множество $\{h(n, m) \mid (n, m) \in B\}$, где h — биективное вычислимое в обе стороны кодирование пар.

12. Докажите, что объединение, пересечение, разность и прямое произведение разрешимых множеств разрешимы.

13. Может ли объединение двух неразрешимых множеств быть разрешимым? А пересечение?

14. Докажите, что любое конечное множество разрешимо.

15. Докажите, что множество разрешимо тогда и только тогда, когда оно либо пусто, либо является множеством значений некоторой всюду определённой неубывающей вычислимой функции.

16. Докажите, что сумма разрешимых множеств разрешима. (Суммой множеств A и B называется множество $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$).

17. Может ли быть так, что $A \cup B$, $B \cup C$ и $C \cup A$ разрешимы, а $A \cup B \cup C$ не разрешимо?

Множество $A \subset \Sigma^*$ называется *перечислимым*, если существует алгоритм, перечисляющий все его элементы в каком-то порядке.

18. Формализуйте это определение в терминах машин Тьюринга.

19. Докажите, что перечислимость множества A равносильно каждому из следующих свойств:

а) Вычислима полухарактеристическая функция множества A:

$$\bar{\chi}_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A; \\ \text{не определена}, & n \notin A; \end{cases}$$

б) A является областью определения вычислимой функции;

в) A является областью значений вычислимой функции;

г) A пусто или является областью значений всюду определённой вычислимой функции;

д) A конечно или является областью значений всюду определённой вычислимой инъекции;

е) A является областью значений вычислимой инъекции;

ж) A перечисляется алгоритмом, печатающим каждое число по одному разу;

з) A является проекций разрешимого подмножества $\Sigma^* \times \Sigma^*$ на первую координату.

20. Докажите, что не все множества перечислимы. Может ли подмножество перечислимого множества быть неперечислимым?

21. Докажите, что объединение, пересечение, прямое произведение и сумма перечислимых множеств перечислимы.

22. (Теорема Поста) Докажите, что множество A разрешимо тогда и только тогда, когда и A, и $\bar{A}$ перечислимы.

23. Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её график $\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ перечислим. Докажите, что для любого перечислимого множества пар U найдётся вычислимая функция f, такая что $\Gamma_f \subset U$, а область определения f совпадает с проекцией U на первую координату.

24. Докажите, что образ и прообраз перечислимого множества относительно вычислимой функции перечислимы.

25. Пусть X и Y — перечислимые множества. Докажите, что существуют такие перечислимые множества X' и Y', что $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, $X' \cap Y' = \varnothing$ и $X' \cup Y' = X \cup Y$.