

1. Пусть дан массив чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Последовательность индексов $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ называется возрастающей подпоследовательностью данного массива, если $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}$. Найдите наибольшую возрастающую подпоследовательность за $O(n \log n)$.
2. К массиву неотрицательных чисел a_1, a_2, \dots, a_n поступает q запросов двух типов: а) изменить значение в точке (то есть по pos и $x \geq 0$ выполнить $a_{pos} := x$); б) по числу k сообщить минимальное значение r , такое что $a_1 + a_2 + \dots + a_r \geq k$. Обработайте все запросы за $O((n + q) \log n)$.
3. Пусть все вычисления происходят в \mathbb{Z}_p для некоторого заданного простого p . Задан массив a_1, \dots, a_n . За $O((n + q) \log n + q \log p)$ обработайте q запросов вида: а) обновить число в точке; б) сообщить произведение чисел на подотрезке. Можно считать, что операция обращения числа по модулю выполняется за $O(\log p)$. Используйте только прямое дерево Фенвика.
4. Пусть $f(i) = i \wedge (i + 1)$. Опишите все i , для которых $f(i) = i$.
5. Пусть $g(i) = i \vee (i + 1)$. Для каких i выполняется равенство $g(i) = i + 1$?
6. Дан массив чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Поступает q запросов одного из двух видов: а) увеличить число в некоторой точке (то есть по pos и $x \geq 0$ нужно увеличить a_{pos} на x); б) сообщить максимум на префиксе. Используйте только прямое дерево Фенвика. Обработайте все запросы за $O((n + q) \log n)$.
7. (Фенвик Фенвиков) На плоскости даны n точек, в каждой точке написано своё число a_i . Обработайте q запросов двух типов: а) изменить число, записанное в i -й точке; б) найти сумму чисел, записанных в точках в прямоугольнике $(0, 0) \div (l, r)$. Асимптотика: $O((n + q) \log^2 n)$ времени и $O(n \log n)$ тактов.
8. Дан массив a_0, \dots, a_{n-1} . За $O((n + q) \log n)$ ответьте на q запросов двух типов: а) прибавление на отрезке (по l, r, val увеличить все числа a_l, \dots, a_r на val); б) сумма на отрезке (по l, r найти $a_l + \dots + a_r$).
Указание: введите массив $b_i = a_i - a_{i-1}$.
9. Дана таблица чисел a_{ij} размера $n \times n$. За $O((n^2 + q) \log^2 n)$ ответьте на q запросов двух типов: а) прибавление на подматрице; б) сумма на подматрице. Указание: введите массив $b_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j} - a_{i,j-1} + a_{i-1,j-1}$.
10. Дана таблица целых чисел $a_{i,j,k}$ по всем $0 \leq i, j, k < n$. Поступает q запросов одного из двух видов: а) прибавить константу в подкубе (то есть по $i_1, j_1, k_1, i_2, j_2, k_2, val$ нужно увеличить $a_{i,j,k}$ на val по всем $i_1 \leq i \leq i_2, j_1 \leq j \leq j_2, k_1 \leq k \leq k_2$); б) найти сумму в подкубе. Обработайте все запросы за $O((n^3 + q) \log^3 n)$.