

Зачёт Сложности

July 24, 2024

1. Перечислите изученные на занятиях классы сложности, расскажите про отношения между ними
2. Рассмотрим двухленточные машины Тьюринга, которые на каждом шаге на каждой из лент либо и меняют символ, и сдвигают указатель, либо не меняют символа и остаются на месте (возможно, на разных лентах делают разное).
 - (a) Дайте формальное определение машин с таким свойством как кортежей определённого вида.
 - (b) Докажите, что на машине такого вида можно смоделировать классическую одноленточную машину Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
3. Пусть $A \in \mathbf{NP}$, при этом A понимается как множество натуральных чисел. Докажите, что множество чисел m , таких что для некоторого $k \in A$ верно $m:k^2$, также лежит в \mathbf{NP} .
4. Определим класс \mathbf{NP}' следующим образом: $A \in \mathbf{NP}'$ тогда и только тогда, когда существует $V(x, s)$, вычисляемый за время $\text{poly}(|x|)$, со следующим условием:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists s (V(x, s) = 1; s*)$$

s является кодом графа, в котором есть клика размером в половину графа

(Произвольная строка интерпретируется как код графа так: дополняется нулями до строки с длиной, равной полному квадрату, полученная строка интерпретируется как матрица смежности. Возможные петли, т. е. единицы на диагонали, игнорируются. Размеры клики и графа считаются как число вершин). Докажите, что $\mathbf{NP}' = \mathbf{NP}$. (Не забудьте доказать оба включения).

5. Пусть **ONLY-ODD-DEGREES** = $\{k \mid \text{в разложение } k \text{ на простые множители все множители входят в нечётных степенях}\}$. Лежит ли этот язык в **P**, **NP**, **coNP**? Докажите утверждения, которые можете доказать, а догадки – сформулируйте и поясните интуицию.
6. Пусть **HAMPATHCYCLE** = $\{(G, s, t) \mid \text{в ориентированном графе } G \text{ есть непересекающиеся путь и цикл, такие что } s \text{ является началом пути, } t \text{ — его концом, а каждая вершина входит либо в путь, либо в цикл}\}$. Докажите, что этот язык является **NP**-полным.
7. Докажите, что язык **HALT** = $\{n \mid \text{машина Тьюринга с номером } n \text{ (в некоторой фиксированной нумерации) останавливается на входе } n\}$ является **NP**-трудным, но не является **NP**-полным.