МФТИ, сложность вычислений, осень 2023
Семинар 05. **NP**-полные языки (3)

Определение. Пусть G — граф. Тогда его числом независимости $\alpha(G)$ называют максимальное такое k, что в G есть подмножество из k вершин, попарно **не**соединённых рёбрами между собой.
Определение. Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество $C \subset V$ называется вершинным покрытием в G, если любое ребро из E хотя бы одним из своих концов лежит в C.

---

1. Рассмотрим язык $\{\varphi \mid \varphi$ — выполнимая формула в 3КНФ, в которой для каждой переменной два соответствующих ей литерала входят не более двух раз$\}$. Докажите, что он лежит в $\mathbf{P}$.
2. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{INDSET} = \{(G, k) \mid \alpha(G) \geqslant k\}$. Докажите **NP**-трудность языка $\{G \mid \alpha(G) = \frac{1}{3}|V(G)|\}$.
3. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{CLIQUE} = \{(G, k) \mid \omega(G) \geqslant k\}$. Докажите **NP**-полноту языка $\{G \mid \omega(G) \geqslant \frac{9}{10}|V(G)|\}$.
4. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{VERTEXCOVER} = \{(G, k) \mid$ в графе G есть вершинное покрытие на (не более чем) k вершинах$\}$.
5. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{3INDSET} = \{(G, k) \mid$ в графе G есть независимое множество размера хотя бы k, причём степени всех вершин в G не превосходят $3\}$.
6. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{HITTING\text{-}SET} = \{(n, S_1, S_2, \ldots, S_n, k) \mid$ существует k-элементное множество H, имеющее непустые пересечения с каждым из $S_i\}$. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{COVERING\text{-}SET} = \{(n, S_1, S_2, \ldots, S_n, k) \mid \exists\, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n : S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_k} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} S_j\}$.
7. Докажите **NP**-полноту языка $\mathsf{EXACTTWO3SAT} = \{\varphi \mid \varphi$ — формула в 3-КНФ, в которой при некотором наборе значений переменных в каждой скобке выполнено ровно 2 литерала$\}$.
8. Постройте сводимость $\mathsf{DHAMPATH}$ к SAT.
9. Докажите **NP**-полноту языку $\mathsf{LPATH} = \{(G, k) \mid$ в неориентированном графе G есть простой путь длины $k\}$.
10. Приведите три языка A, B, C, такие что $A \subset B \subset C$, и при этом $B \in \mathbf{P}$, но A и C — **NP**-полные.
11. Докажите, что если $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, то задача поиска выполняющего набора (или доказательства его отсутствия) у произвольной формулы φ разрешима за $\mathrm{poly}(|\varphi|)$.
12. Язык L называется унарным, если $L \subset \{1\}^*$. Докажите, что если L — **NP**-трудный унарный язык, то $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
13. По аналогии с **NP**-полнотой определите **coNP**-полноту. Докажите, что если A — **NP**-полный, то $\overline{A}$ — **coNP**-полный. Выведите отсюда **coNP**-полноту языка $\mathsf{TAUT} = \{\varphi \mid$ пропозициональная формула φ является тавтологией$\}$.

1. Если какая-то переменная содержится только без отрицаний или только с отрицаниями, её значение можно выставить однозначно. Иначе считаем, что каждая переменная входит дважды: один раз с отрицанием, один раз без отрицания. Создадим граф, вершины которого соответствуют оставшимся скобкам, а рёбра соединяют скобки, в которых есть противоположные литералы (p и $\neg p$). Каждое ребро позволяет выполнить любой из своих концов. Тогда выполнимость формулы равносильна существованию такой ориентации всех рёбер построенного графа, что у каждой вершины исходящая степень не равна нулю. В свою очередь, последнее условие равносильно отсутствию древесных компонент связности в графе.

2. Сведите 3SAT к INDSET. Каждой скобке сопоставьте треугольник, помеченный литералами. Соедините рёбрами противоположные литералы. Заметьте, что это сведение обеспечивает и сведение к случаю $\alpha(G) = \frac{1}{3}|V(G)|$.

3. Сведите INDSET к CLIQUE. Для получения большой клики нужно либо укрупнить имеющуюся (если она недостаточно большая), либо ввести новые изолированные вершины (если исходная клика была слишком большой).

4. Сведите INDSET к VERTEXCOVER.

5. Рассмотрим такое сведение 3SAT к INDSET: для каждой переменной p введём гантель p, $\neg p$, для каждой скобки введём треугольник, соединим вершины треугольника с противоположными литералами внутри гантелей. Просим найти независимо множество размера $n + m$ (по одной вершине в гантели и по одной — в треугольнике).

Теперь, чтобы уменьшить степени вершин, вместо гантели возьмём длинный цикл, на которой будут чередоваться p и $\neg p$. Первая пара вершин будет соответствовать первой скобке, вторая — второй, и так далее. Тогда все степени будут не больше 3.

6. Сведите VERTEXCOVER к обоим языкам.

7. Сведите 3SAT к EXACTTWO3SAT: преобразуйте скобку $(a \vee b \vee c)$ в $(a \vee z_1 \vee z_2) \wedge (b \vee z_3 \vee z_4) \wedge (c \vee z_5 \vee z_6) \wedge (z_1 \vee z_3 \vee z_5)$.

8. Для i-й вершины и числа j введите переменную, отвечающую за то, что i-я вершина имеет номер j в гамильтоновом пути.

9. UHAMPATH можно свести к LPATH.

10. Может помочь взятие языков по типу $\{(a, x) \mid x \in B\}$ для произвольного языка B.

11. Ищем выполняющий набор φ. Фиксируем $x_1 = 0$ или $x_1 = 1$, затем проверяем выполнимость оставшейся формулы за полином. Если хотя бы одна выполнима, можно спуститься только в эту ветку.

12. Пусть g — сводящая функция от SAT к L. Выполнимость φ равносильна выполнимости $\varphi|_{x_j=0} \vee \varphi|_{x_j=1}$. Если $g(\varphi|_{x_j=0}) = g(\varphi|_{x_j=1})$, то эти подформулы эквиваленты по выполнимости, а потому одну из них можно удалить из дизъюнкции. Таким образом, фиксируя по одной переменной каждый раз, а затем удаляя формулы с дублирующимся значением g, можно свести вопрос о выполнимости φ к вопросу о выполнимости дизъюнкции полиномиального числа формул вида $\varphi|_{x_1=\alpha_1, \dots, x_n=\alpha_n}$, где все переменные фиксированы.

13. Если f сводит B к A, то она же сводит $\overline{B}$ к $\overline{A}$. Отсюда следует **coNP**-полнота языка $\overline{\mathsf{SAT}} = \{\varphi \mid$ пропозициональная формула φ невыполнима$\}$. Наконец, $\overline{\mathsf{SAT}}$ можно свести с TAUT.