

Везде, где не сказано иное, предполагается, что используемые числа помещаются в стандартные типы данных; погрешностями округления пренебречь.

1. Пусть $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ и $b = (b_0, b_1, \dots, b_{m-1})$ — два вектора. Для каждого $i \in [0, n - m]$ найдите $a_i b_0 + a_{i+1} b_1 + \dots + a_{i+m-1} b_{m-1}$, то есть скалярное произведение (a_i, \dots, a_{i+m-1}) и b . Асимптотика: $O(n \log n)$.
2. Пусть $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ и $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$ — два вектора. Для каждого $i \in [0, n - 1]$ найдите $a_i b_0 + a_{i+1} b_1 + \dots + a_{i+n-1} b_{n-1}$, считая, что $a_{k+n} = a_k$ для любого k .
3. Пусть $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ — текст, а $p = p_0 p_1 \dots p_{m-1}$ — шаблон. Скажем, что p почти входит в s , начиная с позиции i , если p отличается от $s_i s_{i+1} \dots s_{i+m-1}$ не более чем в k символах. Предложите способ найти все почти-вхождения p в s за:
 - а) $O(kn + n \log n)$;
 - б) $O(|\Sigma| \cdot n \log n)$.
4. Дана строка a из n битов. Найти количество троек (i, j, k) , таких что $i < j < k$, $a_i = a_j = a_k = 1$ и $k - j = j - i$.
5. Найдите число правильных структур AVL-дерева (то есть без учёта значений ключей) на n вершинах глубины h . Асимптотика: $O(nh \log n)$.
6. Пусть $a_n = \sum_{i=0}^{s-1} b_i a_{n-s+i}$ — линейная рекуррента. По начальным членам a_0, \dots, a_{s-1} и коэффициентам b_1, \dots, b_s найдите a_n за
 - а) $O(s^3 \log n)$;
 - б) $O(s^2 \log n)$;
 - в) $O(s \log s \log n)$.
7. Многочлен от двух переменных x, y можно задать таблицей коэффициентов $(n + 1) \times (m + 1)$, если его степень по x равна n , а по y — m . Предложите способ перемножения двух таких многочленов за $O(nm \log(nm))$.
8. Дан набор различных положительных чисел a_1, \dots, a_n , каждое из которых не превосходит m . Для каждого i существует сколь угодно много предметов веса a_i .
 - а) В пакет можно сложить сколько угодно предметов каких угодно весов (из имеющихся), но только при условии, что их суммарный вес положителен и не превосходит m . Проверьте, верно ли, что любой собранный пакет имеет один из весов a_1, \dots, a_n . Иными словами, верно ли, что других весов набрать нельзя? Асимптотика: $O(m \log m)$.
 - б) В предположении, что условие пункта а) выполнено, найдите все i , такие что нельзя собрать пакет веса a_i без использования предмета i . Асимптотика: $O(m \log m)$.
9. Дан белый клетчатый квадрат размером $n \times n$, окружённый чёрным цветом. За один ход можно выбрать любой белый квадрат размером $m \times m$ для произвольного нечётного m , который окружён клетками чёрного цвета, и закрасить в нём центральный столбец и центральную строку чёрной краской. (После этого квадрат либо исчезает, либо порождает 4 квадрата меньших размеров). По данным n и k определите число различных последовательностей действий длины k . Асимптотика: $O(k \log k \log n)$.