МФТИ, ФПМИ
Алгоритмы и структуры данных, 2-й семестр, весна 2022
Домашнее задание №9. Остовы, паросочетания, потоки

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

1. (1 балл) За $O(n+m)$ найдите произвольные $\frac{7}{8}n$ рёбер, которые можно дополнить до минимального остова.
2. (3 балла) В двудольном графе вершины обеих долей пронумерованы последовательными целыми числами, начиная с единицы. Для каждой вершины i левой доли задан отрезок $[l_i, r_i]$. Это означает, что i соединена со всеми вершинами правой доли, номера которых попадают в отрезок $[l_i, r_i]$. Предложите алгоритм поиска максимального паросочетания в таком графе за $O(n \log n)$.
3. (3 балла) Докажите, что если G — ациклический транзитивный орграф, то наименьшее количество независимых множеств, на которые можно разбить все вершины G, равно размеру самого длинного пути в G.
4. Игра в города на неориентированном графе G определяется следующим образом. Изначально фишка расположена в одной из вершин (назовём её стартовой). Игроки ходят по очереди, на каждом ходу нужно сдвинуть фишку вдоль любого исходящего ребра в вершину, в которой фишка ещё ни разу не была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

а) (3 балла) Докажите, что первый выигрывает, если и только если стартовая вершина лежит во всех максимальных паросочетаниях.

б) (2 балла) Пусть G — двудольный. Как за $O(n^2m)$ для всех вершин сразу определить, является ли она выигрышной, если взять её в качестве стартовой? Как сделать то же за $O(nm)$?

5. (2 балла) Дан ориентированный граф. Найдите в нём (или определите, что так сделать нельзя) некоторое множество циклов, которые попарно не пересекаются, но покрывают всё множество вершин. Цикл из одной вершины не считается циклом (а из двух — считается). Асимптотика: $O(nm)$. *Указание:* раздвойте вершины.
6. (2 балла) Пусть G — двудольный граф. За суммарное время $O(nm)$ определите для каждого ребра, верно ли, что оно

а) может;

б) обязано;

в) не может

лежать в максимальном паросочетании.
7. (4 балла) В прямоугольной таблице $n \times m$ некоторые клетки заблокированы. Определите, можно ли разбить оставшиеся клетки на циклические маршруты длины хотя бы 3 (соседними клетками считаются разделяющие сторону)? Все неудалённые клетки должны участвовать ровно в одном маршруте ровно один раз. Начало каждого маршрута должно совпадать с его концом. Выберите оптимальный алгоритм и оцените его асимптотику как можно точнее.
8. (2 балла) В графе G несколько коровок хотят попасть из вершины 1 в вершину n. Вершины графа (кроме 1-й и n-й) соответствуют кочкам в болоте, поэтому они весьма нестабильны. В целях безопасности каждую кочку может посетить не более одной коровы. Определите максимальное количество коровок, которые смогут переправиться через болото. Выберите оптимальный алгоритм и оцените его асимптотику как можно точнее.
9. (5 баллов) Мальчик Вася любит играть в игры и танцевать. В каждый из n ближайших дней он может выбрать, что он будет делать: играть или танцевать. Если он играет в i-й день, то он получается удовольствие a_i, а если танцует — b_i. Мама Васи накладывает дополнительное ограничение: среди любых k подряд идущих дней должно быть хотя бы x дней, когда Вася играет, и хотя бы y дней, когда Вася танцует. Помогите Васе выполнить все требования, максимизировав удовольствие. Асимптотика: $O(n^3)$.