МФТИ, ФИВТ
Алгоритмы и структуры данных, весна 2021
Семинар №2. Динамическое программирование (2)

Во всех задачах этого листка, при необходимости, можно считать, что все арифметические операции выполняются за $O(1)$.

1. Решите задачу о рюкзаке в следующих модификациях:
а) i-й предмет можно брать от 0 до cnt_i раз (разрешается добавить в асимптотику зависимость от значений cnt_i);
б) каждый предмет можно брать неограниченное число раз (асимптотика: $O(n \cdot W)$, где W — вместимость рюкзака);
в) от каждого предмета можно отпилить произвольную часть (то есть увеличить общий вес на $\alpha \cdot w_i$, а к стоимости добавить $\alpha \cdot c_i$, где $\alpha \in [0, 1]$). Асимптотика: $O(n \log n)$.

2. Дан тетраэдр и муравей, находящийся в одной из его вершин. За один ход нужно переместиться вдоль любого ребра. Для заданного n за $O(\log n)$ определить количество путей длины n, возвращающих муравья в исходную вершину.

3. Есть слоистый граф из l слоёв, в каждом по n вершин. Из i-го слоя есть все рёбра в $(i+1)$-й, причём вес ребра в j-ю вершину большего слоя не зависит от истока этого ребра, и этот вес не меняется от слоя к слою (этот вес задаётся явным образом). Нужно найти количество путей из первого слоя в последний, сумма весов рёбер в которых кратна M. Асимптотика: $O(nM + M^3 \log l)$.

4. Задана двумерная целочисленная сетка с неотрицательными координатами. Из $(0, 0)$ нужно попасть в $(k, 0)$. Ходить из точки (x, y) можно только в точки $(x + 1, y - 1), (x + 1, y), (x + 1, y + 1)$. Есть n горизонтальных отрезков с ординатой $\leqslant Y$, выше которых нельзя подниматься. Их концы (a_i, b_i) по оси Ox таковы, что $a_1 = 0, b_n = k, a_{i+1} = b_i$. Найти количество валидных путей за $O(n \cdot Y^3 \log k)$.

5. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ задана следующими соотношениями: $a_0 = 13$, $a_1 = 8$, а также $a_n = 5a_{n-1} + 2a_{n-2} + n^2$ для всех $n \geqslant 2$. По заданному k найдите a_k за $O(\log k)$.

6. Назовём число *гладким*, если в его десятичной записи абсолютная разность любых двух рядом стоящих цифр не меньше l и не больше r. Дано число n. Сколько существует гладких натуральных чисел, состоящих из n цифр? Асимптотика: $O(\log n)$.

7. Дано подвешенное дерево на n вершинах со взвешенными рёбрами (у каждого ребра есть стоимость). Для каждой вершины v найти самую удалённую вершину в её поддереве. То же для наддерева. Асимптотика: $O(n)$.

8. Задан массив чисел $a_1, \ldots, a_{nt}$ длины $n \cdot t$. Известно, что для любого $i > n$ верно, что $a_i = a_{i-n}$. Найдите длину самой длинной неубывающей подпоследовательности заданного массива за $O(n^3 \log t)$.