

1. (2 балла) Для получения полного балла за задачу достаточно доказать эквивалентность любых четырёх условий, среди которых будут а) и б). Пусть G — связный граф хотя бы на трёх вершинах. Здесь все циклы и пути подразумеваются **рёберно-простыми**. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- а) в графе G нет мостов;
- б) между любыми двумя вершинами есть два не пересекающихся по рёбрам пути;
- в) любые две вершины принадлежат некоторому циклу;
- г) любая вершина и любое ребро принадлежат некоторому циклу;
- д) любые два ребра принадлежат некоторому циклу;
- е) для любых двух вершин u, v и любого ребра e найдётся путь из u в v , проходящий через ребро e ;
- ё) для любых двух вершин u, v и любого ребра e найдётся путь из u в v , не проходящий через ребро e ;
- ж) для любых трёх вершин u, v, w найдётся путь из u в v , проходящий через w .

2. (2 балла) Для получения полного балла за задачу достаточно доказать эквивалентность любых четырёх условий, среди которых будут а) и б). Пусть G — связный граф хотя бы на трёх вершинах. Здесь все циклы и пути подразумеваются **вершинно-простыми**. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- а) в G нет точек сочленения;
- б) между любыми двумя вершинами есть два не пересекающихся по (промежуточным) вершинам пути;
- в) любые две вершины графа G принадлежат некоторому циклу;
- г) любая вершина и любое ребро принадлежат некоторому циклу;
- д) любые два ребра принадлежат некоторому циклу;
- е) для любых двух вершин u, v и любого ребра e найдётся путь из u в v , проходящий через ребро e ;
- ё) для любых трёх вершин u, v, w найдётся путь из u в v , проходящий через w ;
- ж) для любых трёх вершин u, v, w найдётся путь из u в v , не проходящий через w .

3. (2 балла) Дан связный неориентированный граф G . Нужно ориентировать как можно больше его рёбер, так чтобы по-прежнему из каждой вершины был путь в каждую. Асимптотика: $O(n + m)$.

4. (1 балла) Пусть φ — формула в виде 2-КНФ с n переменными и m скобками. За $O(n \cdot (n + m))$ определите для каждой переменной верно ли, что её значение одинаково во всех выполняющих наборах φ . Иными словами, обязательно ли значение переменной фиксировано, если $\varphi = 1$?