XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** В последовательности натуральных чисел *a*0, *a*1, … для каждого натурального *n* число *an*−1*an*+1 делится на число *an*2. Оказалось, что для некоторого натурального *k* числа *ak* и *a*1 взаимно просты. Докажите, что *a*0 делится на *a*1. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**2.** В треугольнике *ABC* на сторонах *AB*, *BC* и *CA* отмечены точки *X*, *Y* и *Z* соответственно. Отрезки *AY*, *BZ* и *CX* пересекаются в точке *P*. Докажите, что *AB*+*BC*+*CA* > 2(*PX*+*PY*+*PZ*). (Фольклор)

**3.** У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 12 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 4 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности было по 2 квадрата каждого цвета. (Nairi Sedrakyan, Mathematical Reflections, 5, 2015)

**4.** По кругу стоят несколько гирь, среди которых есть гири разного веса (веса не обязательно целые). В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на три. (А. Шаповалов)

**5.** В треугольнике *ABC*, где *AB*< *AC* < *BC*, *AD* ⎯ высота, *AM* ⎯ медиана. Точка *E* симметрична точке *B* относительно точки *D*. Перпендикуляр к *BC* в точке *E* пересекает отрезок *AC* в точке *P*. Докажите, что если *BP* и *AM* перпендикулярны, то треугольник *ABC* ⎯ прямоугольный. (Саудовская Аравия, отбор на Gulf, 2015)

**6.** На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**7.** Решите в натуральных числах уравнение *n*2*m*5−2*n*5*m* = 2015+4*nm*. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**8.** Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2017 две клетки так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток? Ответ требуется дать в виде числа в десятичной записи. (К. Сухов, А. Антропов)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** В последовательности натуральных чисел *a*0, *a*1, … для каждого натурального *n* число *an*−1*an*+1 делится на число *an*2. Оказалось, что для некоторого натурального *k* числа *ak* и *a*1 взаимно просты. Докажите, что *a*0 делится на *a*1. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**2.** Дан ромб *ABCD*. Внутри треугольника *BCD* отмечена точка *P*. Прямая, проходящая через *A* параллельно *PB*, пересекает прямую *CD* в точке *X*; прямая, проходящая через *A* параллельно *PD*, пересекает прямую *BC* в точке *Y*. Докажите, что прямая *AP* делит отрезок *XY* пополам. (Форум artofproblemsolving)

**3.** У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности был квадрат каждого цвета. (Nairi Sedrakyan, Mathematical Reflections, 5, 2015)

**4.** По кругу стоят несколько гирь, среди которых есть гири разного веса (веса не обязательно целые). В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3. (А. Шаповалов)

**5.** В треугольнике *ABC*, где *AB*< *AC < BC*, *AD* ⎯ высота, *AM* ⎯ медиана. Точка *E* симметрична точке *B* относительно точки *D*. Перпендикуляр к *BC* в точке *E* пересекает отрезок *AC* в точке *P*. Докажите, что если *BP* и *AM* перпендикулярны, то треугольник *ABC* ⎯ прямоугольный. (Саудовская Аравия, отбор на Gulf, 2015)

**6.** На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**7.** Хан сказал Чаку натуральные числа *n* и *d*. Чак выписал все натуральные числа, а после этого подчеркнул все числа, дающие такой же остаток при делении на *d*, как и число . Нашлось такое натуральное число *m* ≠ *n*, что число  подчёркнуто. Докажите, что найдется такое натуральное число *k*, отличное от *m* и *n*, что число  подчёркнуто. (П. Ферма, формулировка изменена)

**8.** Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2015 одну клетку так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток? Ответ требуется дать в виде числа в десятичной записи. (К. Сухов, А. Антропов)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**2.** Докажите, что для любых положительных чисел *a*, *b* и *c* по крайней мере одно из чисел (*a*+*b*+*c*)2–8*bc*, (*a*+*b*+*c*)2–8*ca* и (*a*+*b*+*c*)2–8*ab* положительно. (Открытое соревнование Эстонии по математике, 2015)

**3.** В очередь на экзамен к профессору Прохладному выстроилась группа из 20 студентов, а заходить в аудиторию им страшно. Поэтому студенты стали тянуть жребий: они написали на бумажках числа от 1 до 20, сложили в ёмкость, и наугад разобрали бумажки. Студент, получивший бумажку с числом 1, пошел в аудиторию. Затем оставшиеся 19 студентов повторили процесс: написали на бумажках числа от 1 до 19, сложили в ёмкость, и наугад разобрали бумажки. Студент, получивший бумажку с числом 1, пошел в аудиторию. Всего жребий тянули 20 раз, пока все студенты не зашли в аудиторию. Чудесным образом оказалось, что для каждого студента все вытянутые им номера различны. Украшение группы Ольга в первый раз вытащила число 14. Какой по счету она пошла отвечать? (Эстонские олимпиады)

**4.** По кругу стоят несколько гирь, среди которых есть гири разного веса (веса не обязательно целые). В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3. (А. Шаповалов)

**5.** В треугольнике *ABC*, где *AB*< *AC < BC*, *AD* ⎯ высота, *AM* ⎯ медиана. Точка *E* симметрична точке *B* относительно точки *D*. Перпендикуляр к *BC* в точке *E* пересекает отрезок *AC* в точке *P*. Докажите, что если *BP* и *AM* перпендикулярны, то треугольник *ABC* ⎯ прямоугольный. (Саудовская Аравия, отбор на Gulf, 2015)

**6.** На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**7.** Хан сказал Чаку натуральные числа *n* и *d*. Чак выписал все натуральные числа, а после этого подчеркнул все числа, дающие такой же остаток при делении на *d*, как и число . Нашлось такое натуральное число *m* ≠ *n*, что число  подчёркнуто. Докажите, что найдется такое натуральное число *k*, отличное от *m* и *n*, что число  подчёркнуто. (П. Ферма, формулировка изменена)

**8.** Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2015 одну клетку так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток? Ответ требуется дать в виде числа в десятичной записи. (К. Сухов, А. Антропов)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** По кругу стоят 100 точек, покрашенных в 100 разных цветов. На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:

(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.

(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.

(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.

Может ли через несколько таких операций остаться 99 точек? (Фольклор)

**2.** Даны натуральные числа *n* и *d*. Чак выписал все натуральные числа, дающие такой же остаток при делении на *d*, как и число . Нашлось такое натуральное число *m*, не равное *n*, что число  выписано. Докажите, что найдется такое натуральное число *k*, отличное от *m* и *n*, что число  также выписано. (П. Ферма)

**3.** По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3. (А. Шаповалов)

**4.** На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общую точку (хотя бы конец). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть, независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**5.** У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 12 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 4 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности было по 2 квадрата каждого цвета. (Nairi Sedrakyan, Mathematical Reflections, 5, 2015)

**6.** В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**7.** Положительные числа *x*, *y* и *a* удовлетворяют соотношению *x*6+*y*6 = *ax*2*y*2. Докажите, что *x*4+*y*4 ≤ *a*2/2. (Lucian Tutescu, Liviu Smarandache, Recreatii matematice, 2014, II, задача VIII.176)

**8.** В выпуклом четырехугольнике *ABCD* сторона *BC* больше диагонали *AC*. Точка *M* — середина диагонали *AC*. Точка *K* — основание перпендикуляра, опущенного из точки *B* на отрезок *AM*, а точка *L* — основание перпендикуляра, опущенного из точки *D* на отрезок *CM*. Оказалось, что *AK* = *LM*. Докажите неравенство *AB*+*CD* > *AD*. (А. Пастор)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** По кругу стоят красная, синяя и зелёная точки. На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:

(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.

(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.

(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.

После нескольких таких операций осталось снова 3 точки. Докажите, что это снова красная, синяя и зелёная точки. (Фольклор)

**2.** Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 66? (С. Берлов)

**3.** По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3. (А. Шаповалов)

**4.** На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общую точку (хотя бы конец). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть, независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**5.** Все натуральные числа окрашены в красный и белый цвета (оба цвета присутствуют). Известно, что, если число *a* белое, то число *a*+10 также белое. А если число *b* красное, то число *b*+15 также красное. При каком наименьшем натуральном *n* можно наверняка утверждать, что среди чисел от 1 до *n* есть хотя бы 400 белых чисел? (Romania, Olimpiada de matematica, etapa judeteana, 12.03.2011, clasa VI)

**6.** В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**7.** Положительные числа *x*, *y* и *a* удовлетворяют соотношению *x*3+*y*3 = *axy*. Докажите, что *x*+*y* ≤ *a*. (Lucian Tutescu, Liviu Smarandache, Recreatii matematice, 2014, II, задача VIII.176)

**8.** Дан треугольник *ABC* с наибольшей стороной *AC*. Из точки *A* опущена высота, ее основание *H* лежит на стороне *BC*. Докажите, что *AB* > 2*BH*. ()

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными? (Беларусь-2012)

**2.** Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 66? (С. Берлов)

**3.** По кругу стоят 5 гирь. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в этой тройке. Докажите, что все гири весят одинаково. (А. Шаповалов)

**4.** На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общую точку (хотя бы конец). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**5.** Все натуральные числа окрашены в красный и белый цвета (оба цвета присутствуют). Известно, что, если число *a* белое, то число *a*+10 также белое. А если число *b* красное, то число *b*+15 также красное. При каком наименьшем натуральном *n* можно наверняка утверждать, что среди чисел от 1 до *n* есть хотя бы 400 белых чисел? (Romania, Olimpiada de matematica, etapa judeteana, 12.03.2011, clasa VI)

**6.** В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**7.** Натуральные числа *a* и *b* таковы, что число  ⎯ целое. Докажите, что число  ⎯ также целое. (Олимпиада Львовской области, 8 класс, 2014)

**8.** Дан треугольник *ABC* с наибольшей стороной *AC*. Из точки *A* опущена высота, ее основание *H* лежит на стороне *BC*. Докажите, что *AB* > 2*BH*. ()

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

**1.** На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными? (Беларусь-2012)

**2.** Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 4? (С. Берлов)

**3.** По кругу стоят 5 гирь. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в этой тройке. Докажите, что все гири весят одинаково. (А. Шаповалов)

**4.** На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общий конец. Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**5.** Все натуральные числа окрашены в красный и белый цвета (оба цвета присутствуют). Известно, что, если число *a* белое, то число *a*+10 также белое. А если число *b* красное, то число *b*+15 также красное. При каком наименьшем натуральном *n* можно наверняка утверждать, что среди чисел от 1 до *n* есть хотя бы 400 белых чисел? (Romania, Olimpiada de matematica, etapa judeteana, 12.03.2011, clasa VI)

**6.** Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000? (Беларусь-2008)

**7.** Натуральные числа *a* и *b* таковы, что число  ⎯ целое. Докажите, что число  ⎯ также целое. (Олимпиада Львовской области, 8 класс, 2014)

**8.** Дан треугольник *ABC* с наибольшей стороной *AC*. Из точки *A* опущена высота, ее основание *H* лежит на стороне *BC*. Докажите, что *AB* > 2*BH*. ()

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**2.** Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000? (Беларусь-2008)

**3.** По кругу стоят красная, синяя и зелёная точки (именно в таком порядке по часовой стрелке). На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:

(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.

(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.

(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.

После нескольких таких операций осталось снова 3 точки. Докажите, что это снова красная, синяя и зелёная точки (именно в таком порядке по часовой стрелке). (Фольклор)

**4.** На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными? (Беларусь-2012)

**5.** Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 4? (С. Берлов)

**6.** В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**7.** По кругу стоят 100 натуральных чисел. В каждой тройке подряд стоящих чисел одно из этих чисел равно полусумме двух других. Докажите что все числа равны. (А. Шаповалов)

**8.** У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани (возможно, разных кубиков). Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности встретились все 24 цвета. (Nairi Sedrakyan, Mathematical Reflections 5 (2015))

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**2.** Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000? (Беларусь-2008)

**3.** По кругу стоят красная, синяя и зелёная точки. На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:

(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.

(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.

(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.

Может ли случиться, что после нескольких таких операций останутся точки только двух цветов? (Фольклор)

**4.** На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными? (Беларусь-2012)

**5.** Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 2? (С. Берлов)

**6.** В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**7.** Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, ..., 99 по одному разу так, чтобы в каждой тройке подряд стоящих чисел одно из них равнялось полусумме двух других? (А. Шаповалов)

**8.** У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани (возможно, разных кубиков). Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности встретились все 24 цвета. (Nairi Sedrakyan, Mathematical Reflections 5 (2015))

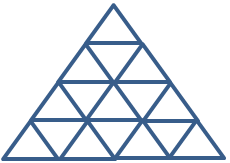
XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными? (Беларусь-2012)

**2.** Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000? (Беларусь-2008)

**3.** Треугольник разделён на 16 треугольничков отрезками, параллельными сторонам. В какое наибольшее количество цветов можно раскрасить эти треугольнички, чтобы для любой пары различных цветов нашлись треугольнички этих цветов, имеющие общую сторону? (С. Волчёнков по мотивам задачи С. Токарева про квадрат)

**4.** На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника? (С. Берлов)

**5.** Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 2? (С. Берлов)

**6.** Какое наименьшее натуральное значение может принимать разность двух пятизначных чисел: ВЯТКА – КИРОВ ? (С. Волчёнков)

**7.** По кругу стоят 4 гири. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в этой тройке. Докажите, что все гири весят одинаково. (Упрощение задачи А. Шаповалова)

**8.** Из 27 одинаковых стеклянных кубиков сложен куб 3×3×3. Прожектор, установленный в кубике, может освещать 3 кубика, расположенных в одном ряду с прожектором в каждом из трёх направлений (всего 7 кубиков, включая прожектор). Какого наименьшего количества прожекторов хватит для освещения всех кубиков? (Фольклор)