# Examen Final

2. **Node hubs**. The students of the MEI PTDMA course have to design an algorithm to provide a list of contacts pointing to a strong influential group in a social network. To pass the course it is enough to design an App that identifies a smallest *node hub* in the social network. A node hub is a subset of participants whose removal leaves a *fully connected* vertex subset. For this exercise you can assume that the social network is an undirected connected graph and that a vertex subset $X$ is *fully connected* if and only if, for every pair of distinct vertices in $X$, either they are connected by an edge or they are both connected by an edge to a third vertex in $X$.

   (a). Design a constant factor approximation algorithm for the problem. Justify its correctness and efficiency.

   Suposem que tenim un graf $G = (V, E)$ en el que volem trobar el *node hub*. Així, el nostre problema es pot formalitzar com:

$$\min_{\substack{S \subseteq V \\ S\ node\ hub \\ a\ G}} \{|S|\}$$

   A més, podem definir:

$$S\ node\ hub \Leftrightarrow \forall x, y \in (V - S)(d_G(x, y) \leq 2)$$

   Ara, definim el *graf de distàncies 2* com:

$$G_2 = (V, E_2) \qquad E_2 = \{(u, v) \in V | d_G(u, v) > 2\}$$

   En aquest nou graf, podem definir:

$$S\ vertex\ cover \Leftrightarrow \forall (u, v) \in E_2 (u \in S \vee v \in S)$$

   Així, demostrarem que $S$ és *node hub* a $G$ si i només si $S$ conforma un *vertex cover* a $G_2$. Formalment:

$$S\ node\ hub\ a\ G \Leftrightarrow S\ vertex\ cover\ a\ G_2$$

   Primer demostrarem $S\ node\ hub\ a\ G \Rightarrow S\ vertex\ cover\ a\ G_2$.

   Si $S$ és *node hub* a $G$, tindrem $\forall x, y \in (V - S)(d_G(x, y) \leq 2)$. Per tant, quan generem el graf $G_2$ tindrem que tots aquests vèrtex seran vèrtex aïllats. Així, totes les arestes que quedin seran entre vèrtex de $S$, de manera que $S$ conformarà un *vertex cover*.

Ara demostrarem $S\ node\ hub\ a\ G \Leftarrow S\ vertex\ cover\ a\ G_2$.

Això ho demostrarem per reducció a l'absurd. Suposem que $S$ no forma un *node hub* a $G$. Això implica que $\exists x, y \in (V - S)(d_G(x, y) > 2)$. Així, al graf $G_2$ tindrem que per a aquesta parella $(x, y)$ hi ha una aresta, i com que $x, y \in (V - S)$, $x, y \notin S$. Així, com a mínim hi haurà una aresta a $G_2$ que no estarà recoberta per *S*, de manera que *S* no serà un vertex cover a $G_2$.

Així dons, queda demostrat que:

$$S\ node\ hub\ a\ G \Leftrightarrow S\ vertex\ cover\ a\ G_2$$

Per tant, podem expressar el problema com:

$$\min_{\substack{S \subseteq V \\ S\ vertex\ cover \\ a\ G_2}} \{|S|\}$$

Que és un problema conegut amb un algoritme de programació lineal entera que ens ofereix una 2-aproximació a la solució òptima.

(b). Prove that the decision version of the problem when parameterized by the size of the node hub belongs to FPT.

Si utilitzem la definició del problema de *node hub*, tenim:

$$NODEHUB = \{\langle G, k\rangle | \exists S \subseteq V, |S| = k \forall x, y \in (V - S)(d_{V-S}(x, y) \leq 2)\}$$

Si fixem el subconjunt $S \subseteq V$, el problema *NODEHUB* és clarament a $P$, ja que podem decidir si *S* és un *node hub* realitzant una cerca en profunditat acotada per a cada parella de vèrtex de $(V - S)$. El cost de decidir *NODEHUB* fixada la mida de *S* és $O(n^2)$.

Per a decidir *NODEHUB* podem seguir l'estratègia següent: A cada pas, per a cada aresta $(u, v)$ seleccionem un dels dos nodes. Així, realitzarem una exploració d'un arbre binari de profunditat *k*, amb $2^k$ fulles, on cada fulla es pot decidir en temps $O(n^2)$.

En global, el cost de l'algoritme és $O(2^k n^2)$, polinòmic en la mida de l'entrada i exponencial en el valor del paràmetre. Per aquest motiu, podem concloure que el problema de *NODEHUB* pertany a FPT, és a dir:

$$NODEHUB \in FPT$$