

Examen Final

1. **Node hubs.** The students of the MEI PTDMA course have to design an algorithm to provide a list of contacts pointing to a strong influential group in a social network. To pass the course it is enough to design an App that identifies a smallest *node hub* in the social network. A node hub is a subset of participants whose removal leaves a *fully connected* vertex subset. For this exercise you can assume that the social network is an undirected connected graph and that a vertex subset X is *fully connected* if and only if, for every pair of distinct vertices in X , either they are connected by an edge or they are both connected by an edge to a third vertex in X .
- (a). Design a constant factor approximation algorithm for the problem. Justify its correctness and efficiency.

Suposem que tenim un graf $G = (V, E)$ en el que volem trobar el *node hub*. Així, el nostre problema es pot formalitzar com:

$$\min_{\substack{S \subseteq V \\ S \text{ node hub} \\ \text{a } G}} \{|S|\}$$

A més, podem definir:

$$S \text{ node hub} \Leftrightarrow \forall x, y \in (V - S)(d_G(x, y) \leq 2)$$

Ara, definim el *graf de distàncies 2* com:

$$G_2 = (V, E_2) \quad E_2 = \{(u, v) \in V \mid d_G(u, v) > 2\}$$

En aquest nou graf, podem definir:

$$S \text{ vertex cover} \Leftrightarrow \forall (u, v) \in E_2 (u \in S \vee v \in S)$$

Així, demostrarem que S és *node hub* a G si i només si S conforma un *vertex cover* a G_2 . Formalment:

$$S \text{ node hub a } G \Leftrightarrow S \text{ vertex cover a } G_2$$

Primer demostrarem $S \text{ node hub a } G \Rightarrow S \text{ vertex cover a } G_2$.

Si S és *node hub* a G , tindrem $\forall x, y \in (V - S)(d_G(x, y) \leq 2)$. Per tant, quan generem el graf G_2 tindrem que tots aquests vèrtex seran vèrtex aïllats. Així, totes les arestes que quedin seran entre vèrtex de S , de manera que S conformarà un *vertex cover*.

Ara demostrarem S node hub a $G \Leftrightarrow S$ vertex cover a G_2 .

Això ho demostrarem per reducció a l'absurd. Suposem que S no forma un *node hub* a G . Això implica que $\exists x, y \in (V - S)(d_G(x, y) > 2)$. Així, al graf G_2 tindrem que per a aquesta parella (x, y) hi ha una aresta, i com que $x, y \in (V - S)$, $x, y \notin S$. Així, com a mínim hi haurà una aresta a G_2 que no estarà recoberta per S , de manera que S no serà un vertex cover a G_2 .

Així doncs, queda demostrat que:

$$S \text{ node hub a } G \Leftrightarrow S \text{ vertex cover a } G_2$$

Per tant, podem expressar el problema com:

$$\min_{\substack{S \subseteq V \\ S \text{ vertex cover} \\ \text{a } G_2}} \{|S|\}$$

Que és un problema conegut amb un algoritme de programació lineal entera que ens ofereix una 2-aproximació a la solució òptima.

- (b). Prove that the decision version of the problem when parameterized by the size of the node hub belongs to FPT.

Si utilitzem la definició del problema de *node hub*, tenim:

$$\begin{aligned} \text{NODEHUB} \\ = \{ \langle G, k \rangle \mid \exists S \subseteq V, |S| = k \forall x, y \in (V - S)(d_{V-S}(x, y) \leq 2) \} \end{aligned}$$

Tot i això, ja hem demostrat anteriorment que:

$$S \text{ node hub a } G \Leftrightarrow S \text{ vertex cover a } G_2$$

Per tant, per a decidir *NODEHUB* només cal construir G_2 i decidir si té algun vertex cover de mida k . La construcció de G_2 la podem realitzar en temps $O(n + m)$, mentre que coneixem un algoritme que decideix *VERTEX COVER* en temps $O((n + m)2^k)$. Així, podem decidir *NODEHUB* en temps $O((n + m)2^k) = O(n^2 2^k)$.

En global, el cost de l'algoritme és $O(n^2 2^k)$, polinòmic en la mida de l'entrada i exponencial en el valor del paràmetre. Per aquest motiu, podem concloure que el problema de *NODEHUB* pertany a FPT, és a dir:

$$\text{NODEHUB} \in \text{FPT}$$