Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Вычисление длины кривой пятого порядка

Студент ФН2-61Б (Группа) (Подпись, дата) Ч. Ш. о. Асланов (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы (Подпись, дата) О. В. Пугачев (И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

Введение

Для практических задач довольно часто нужно рассчитывать длину различных кривых. Например, расчет траектории кораблей/самолетов/космичесих аппаратов и других видов транспорта, длина кабеля/провода при прокладке и другие задачи.

Постановка задачи

Замкнутая кривая задана уравнением

$$\begin{cases} f(x,y) = xy(2-x)(2-y)(3-x-y) = 1; \\ x \in (0;2); \\ y \in (0;2). \end{cases} \tag{1}$$

Численно решая задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dot{y} = 0; \\ x(0) = y(0) = 1, \end{cases} \tag{2}$$

вычислить длину кривой с погрешностью не более 10^{-5}, оценивая погрешность по правилу Рунге.

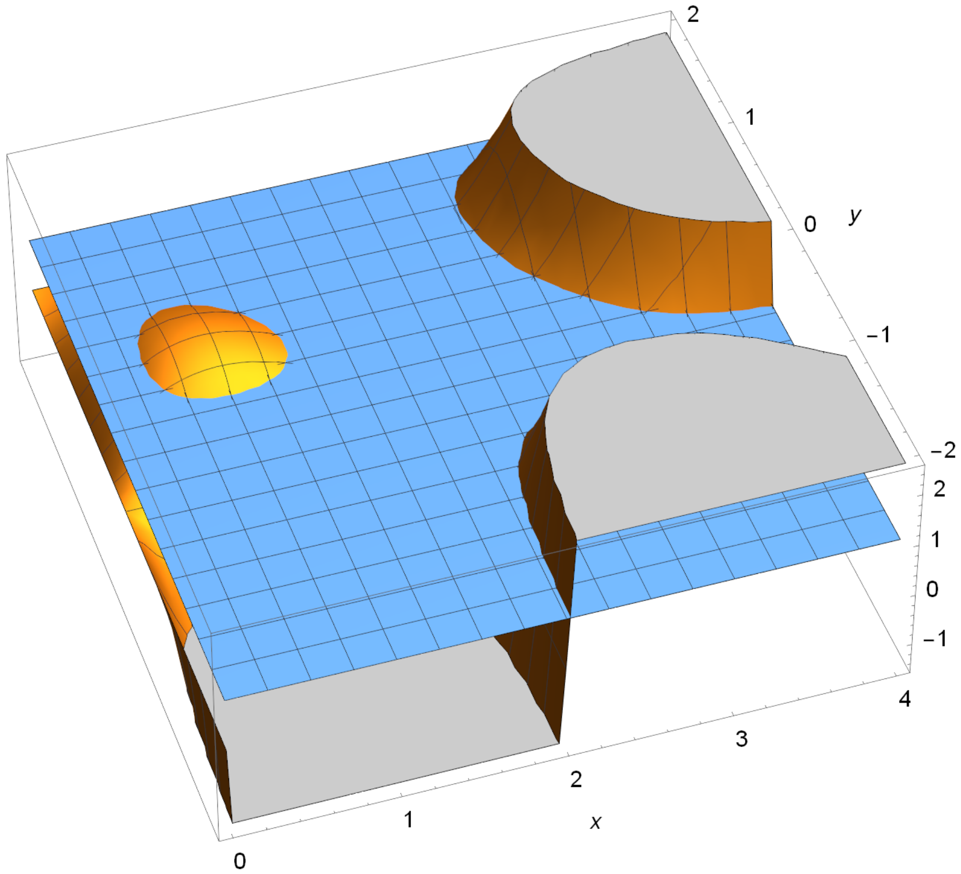

Рис. 1. График поверхности $z = f(x,y)$ и плоскости $z = 1$

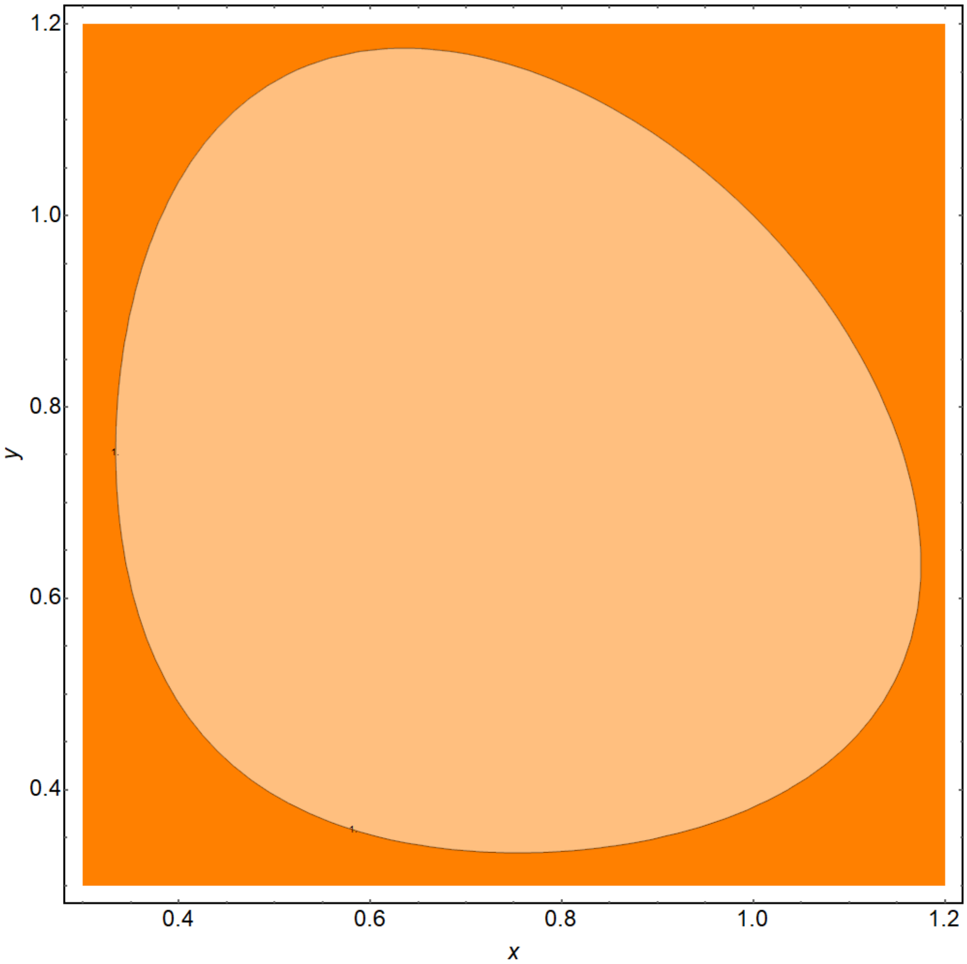

Рис. 2. Замкнутая линия уровня $f(x, y) = 1$

1. Преобразование уравнения

Преобразуем уравнение (2). Пусть

$$\dot{x} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \;\; \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

тогда с учетом (1) и (2) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-2)(6+2x(y-1)-y(10-3y)); \\ \dot{y} = -y(y-2)(6+2y(x-1)-x(10-3x)); \\ x(t) \in (0;2), \;\; y(t) \in (0;2); \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Введем обозначение:

$$\dot{x} = R(x,y) = x(x-2)(6+2x(y-1)-y(10-3y)). \tag{4}$$

Заметим, что $-R(y,x)$ это правая часть уравнения с $\dot{y}$. Тогда систему (3) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = R(x,y); \\ \dot{y} = -R(y,x); \\ R(x,y) = x(x-2)(6+2x(y-1)-y(10-3y)); \\ x(t) \in (0;2), \;\; y(t) \in (0;2); \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Данную систему будем решать численно.

2. Построение метода решения задачи Коши и последующее вычисление длины

Для численного решения используем неявный метод Адамса 4 порядка. Для построения разностной схемы воспользуемся следующими формулами, приведенными в [2]:

$$y_n - y_{n-1} = \tau \sum_{i=0}^{m} \overline{\gamma}_i \nabla^i f_n;$$

$$\nabla^i f_n = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j f_{n-j};$$

$$\overline{\gamma}_i = -\int_0^1 \frac{u}{i} \prod_{k=1}^{i-1} (1 - \frac{u}{k}) du, \quad i > 0, \quad \overline{\gamma}_0 = 1.$$

Применив данные формулы ($m = 4$), получим:

$$\begin{cases} x_{n+4} = x_{n+3} + \frac{\tau}{720}\Big(251R(x_{n+4}, y_{n+4}) + 646R(x_{n+3}, y_{n+3}) - \\ -264R(x_{n+2}, y_{n+2}) + 106R(x_{n+1}, y_{n+1}) - 19R(x_n, y_n)\Big); \\ y_{n+4} = y_{n+3} - \frac{\tau}{720}\Big(251R(y_{n+4}, x_{n+4}) + 646R(y_{n+3}, x_{n+3}) - \\ -264R(y_{n+2}, x_{n+2}) + 106R(y_{n+1}, x_{n+1}) - 19R(y_n, x_n)\Big); \end{cases} \tag{6}$$

Исходя из начального условия $x(0) = 1 \Rightarrow x_0 = 1$. Аналогично $y_0 = 1$. Для начала расчета по формулам (6) необходимо также найти x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3. Найдем их с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4}{6}; \\ y_{n+1} = y_n + \frac{q_1 + 2(q_2 + q_3) + q_4}{6}, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$k_1 = \tau R(x_n, y_n);$$

$$q_1 = -\tau R(y_n, x_n);$$

$$k_2 = \tau R(x_n + 0.5k_1, y_n + 0.5q_1);$$

$$q_2 = -\tau R(y_n + 0.5q_1, x_n + 0.5k_1);$$

$$k_3 = \tau R(x_n + 0.5k_2, y_n + 0.5q_2);$$
$$q_3 = -\tau R(y_n + 0.5q_2, x_n + 0.5k_2);$$
$$k_4 = \tau R(x_n + k_3, y_n + q_3);$$
$$q_4 = -\tau R(y_n + q_3, x_n + k_3);$$

Вычислив значения x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 по (7), можно приступить к расчету (6). (6) представляет собой нелинейную систему из двух уравнений. Для решения применим метод Ньютона с параметром:

$$p \cdot F(X^{(k)}) + F'(X^{(k)})(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = 0;$$

где

$$X^{(k)} = (x_k; y_k)^T; \;\; F'(X^{(k)}) - \text{матрица Якоби системы } F(X) = 0.$$

Тогда

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - p \cdot (F'(X^{(k)}))^{-1} F(X^{(k)}).$$

Параметр $p = 1$ по умолчанию, и может варьироваться, в случае, если $X^{(k+1)}$ выходит за границу допустимой области.
(допустимая область: $[x_n - 2\tau; x_n + 2\tau] \times [y_n - 2\tau; y_n + 2\tau]$)

Матрица Якоби для (6) будет иметь вид:

$$J_{Adams} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{251}{360}\tau a & \dfrac{251}{360}\tau r(x,y) \\ -\dfrac{251}{360}\tau r(y,x) & 1 - \dfrac{251}{360}\tau a \end{pmatrix},$$

где

$$a = (6 - 3x^2(y-1) + y(3y-10) + x(y(14-3y) - 10));$$
$$r(x,y) = -x(x-2)(x+3y-5).$$

При малых τ получим диагональное преобладание матрицы, а сама матрица будет стремиться к единичной. Следовательно, при малых τ $\det A \neq 0$. Так как размерность всего 2, обратную матрицу будем считать по формуле:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \;\; A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

В качестве критерия останова метода Ньютона будем использовать следующее логическое условие:

$$||X^{(k+1)} - X^{(k)}|| \leq \varepsilon \;\text{ OR }\; \Big(F_1(X^{(k+1)}) \leq \varepsilon \;\text{ AND }\; F_2(X^{(k+1)}) \leq \varepsilon\Big). \tag{8}$$

Для остановки же основного алгоритма используем условие попадания конечной точки ($n > 10$) в область $D = [1-2\tau; 1+2\tau] \times [1-2\tau; 1+2\tau]$. Таким образом „замкнем“ кривую.

В результате, будет получен массив из $N + 1$ точек

$$P = \{(1, 1), ..., (x_N, y_N)\}. \tag{9}$$

Получив массив точек (9) длину кривой L вычислим как сумму расстояний между соседними точками массива:

$$L = \sqrt{(x_N - 1)^2 + (y_N - 1)^2} + \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \tag{10}$$

3. Численные результаты

Таблица 1

ε = 1e-09			
шаг	кол-во точек	количество умножений	длина
1e-05	182 159	46 996 205	2.66774
2e-05	91 080	23 497 823	2.66775
1e-06	1 821 591	469 969 661	2.66773
2e-06	910 796	234 984 551	2.66773
1e-07	18 215 913	4 699 704 737	2.66773
2e-07	9 107 957	2 349 852 089	2.66773

Оценка погрешности по правилу Рунге для (6):
$\tau = 2 \cdot 10^{-5}$: $\overline{\varepsilon}$ ≈2.4e-07 $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$: $\overline{\varepsilon}$ ≈2.4e-08 $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$: $\overline{\varepsilon}$ ≈2.4e-09

Таблица 2

ε = 1e-10			
шаг	кол-во точек	количество умножений	длина
1e-05	182 159	98 095 615	2.66773
2e-05	91 080	60 086 326	2.66773
1e-06	1 821 591	939 939 322	2.66773
2e-06	910 796	469 969 102	2.66773
1e-07	18 215 913	9 399 409 474	2.66773
2e-07	9 107 957	4 699 704 178	2.66773

Оценка погрешности по правилу Рунге для (6):
$\tau = 2 \cdot 10^{-5}$: $\overline{\varepsilon}$ ≈1.8e-07 $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$: $\overline{\varepsilon}$ ≈2.4e-08 $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$: $\overline{\varepsilon}$ ≈2.4e-09

Таблица 3

ε = 1e-11			
шаг	кол-во точек	количество умножений	длина
1e-05	182 159	176 335 950	2.66773
2e-05	91 080	103 964 514	2.66773
1e-06	1 821 591	1 409 908 983	2.66773
2e-06	910 796	704 953 653	2.66773
1e-07	18 215 913	14 099 114 211	2.66773
2e-07	9 107 957	7 049 556 267	2.66773

Оценка погрешности по правилу Рунге для (6):
$\tau = 2 \cdot 10^{-5}$: $\bar{\varepsilon} \approx$8.5e-09 $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$: $\bar{\varepsilon} \approx$2.4e-08 $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$: $\bar{\varepsilon} \approx$2.4e-09

Таблица 4

ε = 1e-12			
шаг	кол-во точек	количество умножений	длина
1e-05	182 159	266 239 985	2.66773
2e-05	91 080	149 980 622	2.66773
1e-06	1 821 591	1 920 902 789	2.66773
2e-06	910 796	1 070 847 554	2.66773
1e-07	18 215 913	18 798 818 948	2.66773
2e-07	9 107 957	9 399 408 356	2.66773

Оценка погрешности по правилу Рунге для (6):
$\tau = 2 \cdot 10^{-5}$: $\bar{\varepsilon} \approx$2.5e-10 $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$: $\bar{\varepsilon} \approx$1.8e-08 $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$: $\bar{\varepsilon} \approx$2.4e-09

Таблица 5

ε = 1e-13			
шаг	кол-во точек	количество умножений	длина
1e-05	182 159	358 874 050	2.66773
2e-05	91 080	196 521 010	2.66773
1e-06	1 821 591	2 703 310 690	2.66773
2e-06	910 796	1 509 627 595	2.66773
1e-07	18 215 913	23 498 523 685	2.66773
2e-07	9 107 957	11 749 260 445	2.66773

Оценка погрешности по правилу Рунге для (6):
$\tau = 2 \cdot 10^{-5}$: $\bar{\varepsilon}$ ≈1.2e-11
$\tau = 2 \cdot 10^{-6}$: $\bar{\varepsilon}$ ≈8.5e-10
$\tau = 2 \cdot 10^{-7}$: $\bar{\varepsilon}$ ≈2.4e-09

Таблица 6

ε = 1e-14			
шаг	кол-во точек	количество умножений	длина
1e-05	182 159	452 098 950	2.66773
2e-05	91 080	241 879 431	2.66773
1e-06	1 821 591	3 602 351 766	2.66773
2e-06	910 796	1 969 788 621	2.66773
1e-07	18 215 913	28 608 119 247	2.66773
2e-07	9 107 957	15 408 197 109	2.66773

Оценка погрешности по правилу Рунге для (6):
$\tau = 2 \cdot 10^{-5}$: $\bar{\varepsilon}$ ≈6.7e-12
$\tau = 2 \cdot 10^{-6}$: $\bar{\varepsilon}$ ≈2.5e-11
$\tau = 2 \cdot 10^{-7}$: $\bar{\varepsilon}$ ≈1.8e-09

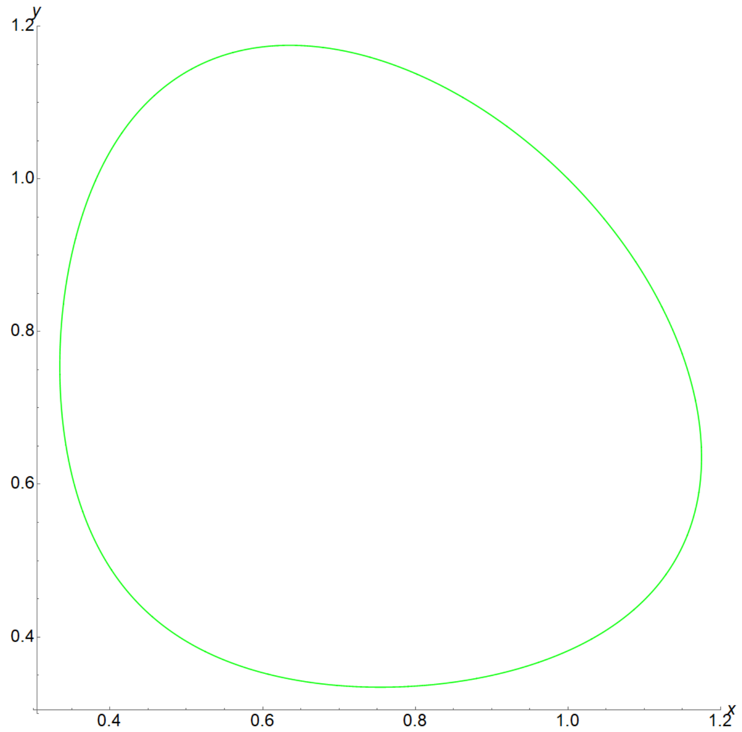

Рис. 3. Траектория при $\tau = 2 \cdot 10^{-5}, \varepsilon = 10^{-9}$

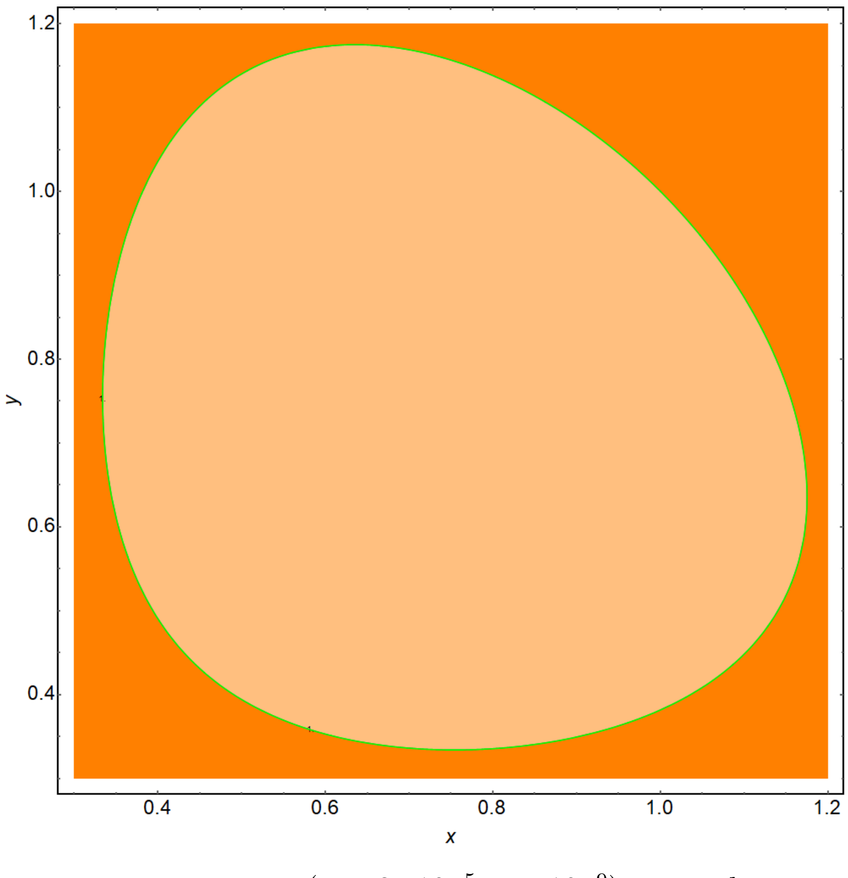

Рис. 4. Наложение траектории ($\tau = 2 \cdot 10^{-5}, \varepsilon = 10^{-9}$) на график линии уровня

Зная погрешность для (6), оценим погрешность для L:

$$L = \sqrt{(\Delta x_{N+1} + \overline{\varepsilon})^2 + (\Delta y_{N+1} + \overline{\varepsilon})^2} + \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(\Delta x_i + 2\overline{\varepsilon})^2 + (\Delta y_i + 2\overline{\varepsilon})^2}.$$

$$\Delta(L) = \Delta(f_{N+1}) + \sum_{i=1}^{N} \Delta(f_i).$$

Далее, используем линейную оценку погрешностей вычисления функций:

$$\Delta(f_i) \approx 2\overline{\varepsilon}|\frac{\partial f_i}{\partial \Delta x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial \Delta y_i}|;$$

$$\Delta(f_{N+1}) \approx \overline{\varepsilon}|\frac{\partial f_{N+1}}{\partial \Delta x_{N+1}} + \frac{\partial f_{N+1}}{\partial \Delta y_{N+1}}|.$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \Delta x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial \Delta y_i} = \frac{\Delta x_i + \Delta y_i}{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}}.$$

Отметим, что из-за особенности реализации метода Ньютона Δx_i и Δy_i по модулю меньше, чем 2τ, при этом $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \geq \varepsilon$.

В таком случае ($\tau = 2 \cdot 10^{-4}, \varepsilon = 1 \cdot 10^{-13}, N = 91080$):

$$\max|\frac{\Delta x_i + \Delta y_i}{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}}| \approx 1.414;$$

$$\Delta(L) \approx 1.414 \cdot \overline{\varepsilon} + 2\overline{\varepsilon}N \cdot 1.414;$$

$$\Delta(L) \approx 3.1 \cdot 10^{-6} < 5 \cdot 10^{-6} < 10^{-5} \Rightarrow L = 2.66773. \quad (11)$$

Заключение

Рассмотрена задача Коши, для которой было построено численное решение с помощью неявного метода Адамса 4 порядка. Вычислена длина полученной замкнутой траектории с погрешностью менее чем 10^{-5}.

Список использованных источников

1. М. П. Галанин, В. В. Лукин, О. В. Щерица, Методы вычислений. Задачи алгебры и анализа, 1-е изд., 2022.
2. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, Численные методы, 7-е изд., 2012.
3. И. К. Марчевский, О. В. Щерица, Численные методы решения задач линейной алгебры под редакцией М. П. Галанина, 2017.
4. https://learn.microsoft.com/ru-ru/cpp