عنوان کتاب: حل المسائل کتاب سیگنال و سیستم اپنهایم

نویسنده : -

زبان: فارسی

تعداد صفحات : ۴۷۹

فصل اول

۱٫۱) اعداد مختلط زیر را به شکل قائم $(x+jy)$ بنویسید

$\frac{1}{2}e^{j\pi}$ ، $\frac{1}{2}e^{-j\pi}$ ، $e^{j\pi/2}$ ، $e^{-j\pi/2}$ ، $e^{j5\pi/2}$ ، $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$ ، $\sqrt{2}e^{j9\pi/4}$ ، $\sqrt{2}e^{-j9\pi/4}$ ، $\sqrt{2}e^{-j/4}$:

حل:

با تبدیل کردن مختصات قطبی به کارتزین داریم:

$$\begin{aligned}
&{}^{1}\!/_{2}\, e^{j\pi} = {}^{1}\!/_{2} \cos\pi = -{}^{1}\!/_{2} \\
&e^{\pi/2j} = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = j \\
&e^{5j\pi/2} = j \\
&\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{j}} = \sqrt{2}e^{3\pi/6} = 1+j \\
&\sqrt{2}e^{-3\pi/4} = 1-j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}^{1}\!/_{2}\, e^{-jn} = {}^{1}\!/_{2} \cos(-n) = -{}^{1}\!/_{2} \\
&e^{-j\pi/2} = \cos(\pi/2) - j\sin \pi/2 = -j \\
&\sqrt{2}e^{j\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos j\, n/4\right) + j\sin(n/4) = 1+j \\
&\sqrt{2}e^{\frac{-3\pi j}{4}} = \sqrt{2}e^{-\frac{j\pi}{4}} = 1-j
\end{aligned}$$

۱٫۲) اعداد مختلط زیر را به شکل قطبی بنویسید ($re^{j\theta}$، با $-\pi < \theta \leq \pi$)

۲،۵- ، $-3j$، $\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$، $1+j$، $(1-j)^2$، $j(1-j)$ ، $(1+j)/(1-j)$،
$(\sqrt{2}+j\sqrt{2})/(1+j\sqrt{3})$.

حل:

با تبدیل کردن مختصات کارتزین به قطبی داریم:

$$5 = 5e^{jo} \quad ،$$

$$-2=2e^{j\pi} \quad ،$$

$$-3=3e^{-j\pi/2}$$

$$1/2=j\sqrt{3/2}=e^{-j\pi/8} \quad ،$$

$$\frac{1+j}{1-j}=e^{j\pi/2} \quad ,$$

$$\frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}j}=e^{-j\pi/B}$$

۱،۳) P_∞ و E_∞ را برای هر یک از سیگنالهای زیر پیدا کنید.

الف) $x_1(t)=e^{-2t}u(t)$

ب) $x_2(t)=e^{j}\left(2t+\pi/4\right)$

ج) $x_3(t)=\cos t$

د) $x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

هـ) $x_2[n]=e^{j}(n\pi/2+\pi/8)$

و) $x_3[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

حل:

الف) چون $E_\infty < \infty$،

$$E_\infty = \int_0^\infty e^{-at} dt = \frac{1}{4} \Rightarrow P_\infty = 0$$

ب) $|x_2(t)| = 1$, $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$. بنابراین

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = \infty \text{ ،}$$

$$p_\infty = \underset{N\to\infty}{Limt} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x_2(t)| dt = \underset{N\to\infty}{Limit} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt = 1$$

ج) $x_3(t) = \cos t$ بنابراین:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_3(t)|^{+} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(t) dt = \infty$$

$$p_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos^2 t\, dt - \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \frac{1+\cos(t)}{2} dt = \frac{1}{2}$$

د) چون $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ و $|x_1[n]|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ پس

چون $E_\infty < \infty$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_1[n]|^2 = \sum_{\circ}^{+\infty} (1/4)^n = 4 \quad \text{،} \quad p_\infty = \circ$$

هـ) $x_2[n] = e^{-j(2\pi/3 + \pi/6)}$ و $|x_2[n]|^2 = 1$ بنابراین

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_2[n]|^2 = \infty \quad , \quad p_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |x_2[n]|^2 = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} 1 = 1$$

و) چون $x_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$ از اینرو

$$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_3[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos^2\left(\frac{n}{4} n\right) = \infty$$

$$p_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{N+1} \left(\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

۱,٤) فرض کنید $x[n]$ سیگنالی باشد که در $n < 2$ و $n > 4$ صفر است. هر یک از سیگنالهای زیر در چه بازه هایی صفر هستند؟

الف) $x[n-3]$

ب) $x[n+4]$

ج) $x[-n]$

د) $x[-n+2]$

هـ) $x[-n-2]$

حل:

الف) سیگنال $x[n]$ ۳ واحد به سمت راست شیفت یافته است، سیگنال شیفت یافته برای $n < 1$ و $n > 7$ برابر صفر است.

ب) سیگنال $x[n]$ ٤ واحد به سمت چپ شیفت یافته است، سیگنال شیفت یافته برای $n < -6$ و $n > ۰$ برابر صفر است.

ج) سیگنال $x[n]$ معکوس شده است. پس سیگنال معکوس شده بر $n < -4$ و $n > 2$ صفر است.

د) سیگنال $x[n]$ معکوس شده و ۲ واحد به سمت راست شیفت یافته است، سیگنال جدید برای $n < -2$ و $n > 4$ صفر است.

هـ) سیگنال $x[n]$ معکوس شده و آن هم ۲ واحد به سمت شیفت یافته است.

۱,٥) فرض کنید $x(t)$ سیگنالی باشد که در $t < 3$ صفر شده است. سیگنالهای زیر به ازای چه مقادیری از t صفر خواهند بود؟

الف) $x(1-t)$

ب) $x(1-t)+x(2-t)$

ج) $x(1-t)x(2-t)$

د) $x(3t)$

هـ) $x(t/3)$

حل:

الف) $x(1-t)$ از معکوس نمودن و شیفت دادن به اندازه ۱ واحد به راست بـه دسـت مـی آیـد پـس $x(1-t)$ برای $t>-2$ صفر می باشد.

ب) طبق (۱.الف) می دانیم $x(1-t)$ برای $t>-2$ صفر خواهد بود. بطور مشابه $x(2-t)$ نیز برای $t>-1$ صفر می شود در این صورت $x(1-t)+x(2-t)$ برای $t>-2$ صفر خواهد بود.

ج) $x(3)$ از انقباض خطی $x(t)$ با ضریب ۳ بدست می آید. $x(3t)$ بر $t<1$ صفر خواهد بود.

د) $x\left(t/3\right)$ از انبساط خطی $x(t)$ با ضـریب ۳ بدسـت مـی آیـد پـس $x\left(t/3\right)$ بـرای $t<9$ صـفر خواهد شد.

١,٦) در مورد متناوب بودن یا نبودن سیگنال های زیر تحقیق کنید.

الف) $x(t)=2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$

ب) $x_2[n]=u[n]-u[-n]$

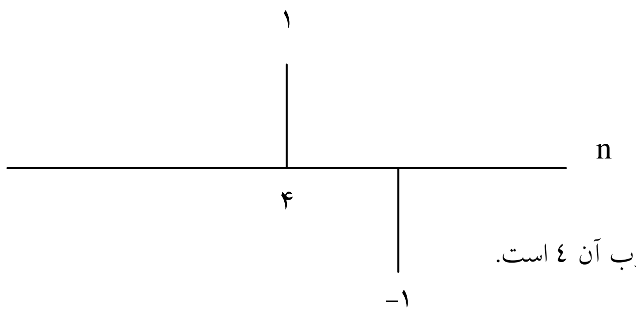
ج) $x_3[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta[n-4k]-\delta[n-1--4k]\}$

حل:

الف) $x_1(t)$ متناوب نیست زیرا برای $t>0$ صفر شده است.

ب)به ازای همه مقادیر n، $x[n]=1$ است و تابع متناوب با دوره تناوب ۱ می باشد.

ج) $x_3[n]$ در شکل (١,٦ج)رسم شده است.



بنابراین دوره تناوب آن ٤ است.

۱,۷) برای سیگنالهای زیر مقادیر متغیر مستقل را که به ازای آنها بخش زوج سیگنال صفرست پیدا کنید.

الف) $x_1[n]=u[n]-u[n-4]$

ب) $x_2(t)=\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

ج) $x_3[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$

د) $x_4(t)=e^{-5t}u(x+2)$

حل:

الف)

$$\mathcal{E}v\{x_1[n]\}=\frac{1}{2}\{x_1[n]+x_1[-n]\}=\frac{1}{2}\{u[n]-u[n-4]+u[-n]-u[-n-4]\}$$

بنابراین $\mathcal{E}v\{x_1[n]\}$ برای $|n|>3$ برابر صفر است.

ب) چون سیگنال $x_2(t)$ سیگنالی فرد است،پس $\mathcal{E}v\{x_2(t)\}$ به ازای تمام مقادیر t صفر است.

ج)

$$\mathcal{E}v\{x_3(t)\}^{-}\ 1/2\{x_1[n]+x_1[-n]\}=1/2\left(1/2\right)^n u[n-3]-\left(1/2\right)^{-n}u[-n-3]$$

ازینرو $\mathcal{E}v\{x_1[n]\}$ برای $|n|>3$ برابر صفر خواهد بود.

د)

$$\mathcal{E}v\{x_4(t)\}=1/2\left(x_4(t)\right)+\left(x_4(t)+x_4(-t)\right)=1/2\left\{e^{-5t}u(t+2)-e^{+5t}u(-t+2)\right]$$

بنابراین $\mathcal{E}v\{x_4(t)\}$ فقط برای $|t|\to\infty$ برابر صفر است.

۱,۸) قسمت حقیقی سیگنالهای زیر را بـه صـورت $Ae^{-at}\cos(\omega t+\phi)$ بنویـسید، A، a، ω و ϕ اعداد حقیقی اند و بایستی $A>0$ و $-\pi<\phi\leq\pi$ باشد.

الف) $x_1(t)=-2$

ب) $x_2(t)=\sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t+2\pi)$

ج) $x_3(t)=e^{-t}\sin(3t+\pi)$

د) $x_4(t) = je^{(-2+j100)t}$

حل:

الف)

$$\operatorname{Re} ad\{x_1(t)\}y = -2 = 2e^{0t}\cos(ot+\pi)$$

ب)

$$\operatorname{Re}\{x_2(t)\} = \sqrt{2}\cos(\pi/4)\cos(3t+2n) = \cos 3t = e^{ut}\cos(3t+o)$$

ج)

$$\operatorname{Re}\{x_3(t)\} = e^{-t}\sin(3t+n) = e^{-t}\cos(3t+\pi/2)$$

د)

$$\operatorname{Re}\{x_4(t)\} = -e^{-2t}\sin(100t) = e^{-2t}\sin(100t+n) + e^{-2t}\cos(100t+\pi/2)$$

۱,۹) در مورد متناوب بودن یا نبودن سیگنال های زیر تحقیق کنید. برای سیگنالهای متناوب دوره تناوب اصلی را بیابید.

الف) $x_1(t) = je^{j10t}$

ب) $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$

ج) $x_3[n] = e^{jv\pi n}$

د) $x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$

هـ) $x_5[n] = 3e^{j3(n+1/2)/5}$

حل:

الف) $x_1(t)$ یک نمایی مختط متناوب است.

$$x_1(t) = je^{j10t} = e^{j(10t+\pi/2)}$$

دوره تناوب اصلی آن هم برابر است با $\dfrac{2R}{10} = \dfrac{R}{5}$

ب) $x_2(t)$ یک نمایی مختط ضرب شده به یک تأخیر نمایی است، ازینرو $x_2(t)$ نامتناوب است.

ج) $x_3[n]$ یک سیگنال نمایی مختلط با دوره تناوب اصلی $2 = \dfrac{2\pi}{\pi}$ می باشد.

د) $x_4[n]$ سیگنال متناوب با دوره تناوب زیر است :

$$N = m\left(\frac{2\pi}{3\pi/5}\right) = m\left(\frac{10}{3}\right)$$

که با انتخاب $m=3$ ارائه می شود، دوره تناوب اصلی را ۱۰ بدست می آوریم.

$$N = 3\left(\frac{10}{3}\right) = 10$$

هـ) $x_5[n]$ سیگنالی متناوب نیست. $x_5[n]$ نمایی مختلط با $w_\circ = 35$ اسـت. نمـی تـوانیم عـددی حقیقی بدست آوریم که بطور مثال $m\left(\frac{2\pi}{\omega_\circ}\right)$ نیز عددی حقیقی باشد پس $x_3[n]$ متناوب نیست.

$$x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$$

۱,۱۰) دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$ را بیابید.

حل:

پریود جمله ی اول برابر است با $RHS = \frac{2\pi}{10} = \pi/5$ برحسب رادیان

پریود جمله دوم برابر است با $RHS = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$ برحسب رادیان

بنابراین سیگنال کلی با دوره تناوب ک. م بین RHS های سیگنالها خواهد بود. که این مقـدار برابـر است با $\pi = (\pi/5), \pi/2$ ک. م. م

$$x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{n}} - e^{j\frac{2\pi}{5}n}$$

۱,۱۱) دوره تناوب اصلی سیگنال $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$ را بیابید.

حل:

دوره تناوب جمله اول برحسب RHS ۱ است.

هرگاه (m=۲) باشد، دوره تناوب جمله دوم بر حسب RHS $7 = m\left(\frac{2\pi}{4\pi/7}\right)$ است.

هرگاه (m=۲)، دوره تناوب جمله ی سوم برحسب RHS برابر $m\frac{2\pi}{2\pi/5}=5$ است.

$\{5\ ,\ 7\ ,\ 1\}=35$ ک. م. م.

۱,۱۲) سیگنال گسسته در زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n]=1-\sum_{k=3}^{\infty}\delta[n-1-k]$$

اعداد M و $n_\circ$ را طوری تعیین کنید که بتوان $x[n]$ را به صورت زیر بیان کرد

$$x[n]=u[Mn-n_\circ]$$

حل:

سیگنال $x[n]$ در شکل ۱۱۲.ح نشان داده شده است که از معکوس کردن $u[n]$ و انتقال بـه انـدازه ۳ واحد به راست بدست می آید. بنابراین $x[n]=u[-n+3]$ که در آن :

$$M=-1\ ,\ n_\circ=-3$$

۱,۱۳) سیگنال پیوسته در زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t)=\delta(t+2)-\delta(t-2)$$

E_∞سیگنال زیر را بدست آورید.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

حل:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)dc=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau+2)-\delta(\tau-2)dt$$

$$=\begin{cases}\circ & t<-2\\ 1 & -2\le t\le 2\\ \circ & t>2\end{cases}$$

بنابراین $E\infty=\int_{-2}^{2}dt=4$

۱,۱٤) سیگنال متناوب

$$x(t)=\begin{cases}1, & \circ\le t\le 1\\ -2, & 1<t<2\end{cases}$$

دارای تناوب $T=2$ است. مشتق این سیگنال به «قطار ضربه» زیر مربوط می شود:

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)$$

می توان نشان داد که:

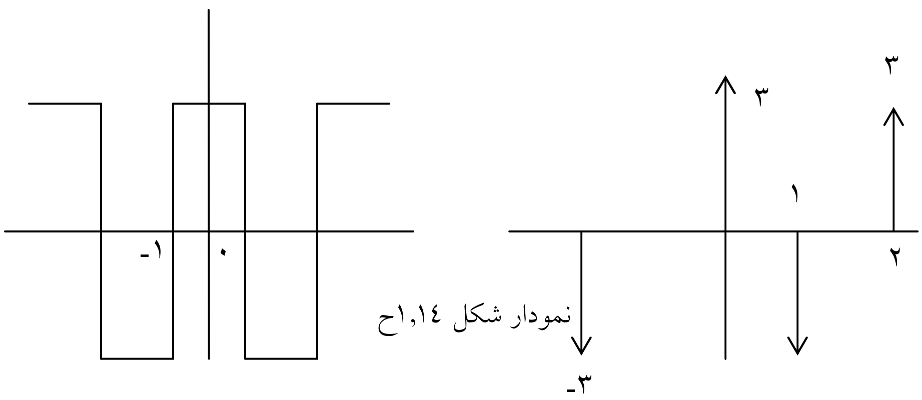
$$\frac{dx(t)}{dt}=A_1 g(t-t_1)+A_2 g(t-t_2)$$

مقادیر A_1، t_1، A_2، و t_2 را محاسبه کنید.

حل:

سیگنال $x(t)$ و مشتق آن در شکل ۱,۱۴ح نشان داده شده است.

بنابراین:



نمودار شکل ۱,۱۴ح

$$g(t)=3\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)-3\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k-1)$$

$A_1=3$ و $t_1=0$ و $A_2=-3$ و $t_2=1$ را ارائه می کند.

۱,۱۵) سیستم S با ورودی $x[n]$ را در نظر بگیرید. این سیستم از اتصال سری سیستم S_1 و S_2 به دست آمده است. روابط ورودی – خروجی S_1 و S_2 به صورت زیرست.

$$S_2: y_1[n]=2x_1[n]+4x_1[n-1]$$

$$S_2: y_2[n]=x_2[n-2]+\frac{1}{2}x_2[\pi-3]$$

سیگنالهای $x_1[n]$ و $x_2[n]$ ورودی ها هستند.

الف) رابطه ورودی ـ خروجی سیستم S را بیابید.

ب) آیا با تعویض ترتیب سیستمهای S_1 و S_2 رابطه ورودی ـ خروجی S تغییر می کند یا نه؟

حل:

سیگنال $x_2[n]$ که ورودی S۲ است بر حسب $y_1[n]$ می باشد بنابراین:

الف)

$$\begin{aligned} y_2[n] &= x_2[n-2] + \tfrac{1}{2} x_2[n-3] \\ &= y_1[n-2] + \tfrac{1}{2} y_1[n-3] \\ &= 2x_1[n-2] + 4x_1[n-3] + \tfrac{1}{2}\left(2x_1[n-3] + 4x_1[n-4]\right) \\ &= 2x_1[n-2] + 5x_1[n-3] + 2n_1[n-4] \end{aligned}$$

رابطه خروجی – ورودی برای S برابر است با

$$y[n] = 2[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$$

ب) رابطه خروجی – ورودی اگر مرتبه ی S۱ و S۲ با سری هایی به هم مربوط شوند تغییر نمی کند و فقط معکوس می شود. این شکل را به راحتی با فرض اینکه S۱، S۲ را تعقیب می کند می توانیم رسم کنیم. در این مورد، سیگنال $x_1[n]$ که ورودی S۱ است مانند $y_2[n]$ می باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} y_1[n] &= 2x_1[n] + 4x_1[n-1] \\ &= 2y_2[n] + 4y_2[n-1] \\ &= 2\left(x_2[n-2] + \tfrac{1}{2} x_2[n-3]\right) + 4\left(x_2[n-3] + \tfrac{1}{2} x_2[n-4]\right) \\ &= 2x_2[n-2] + 5x_2[n-3] + 2x_2[n-2] \end{aligned}$$

رابطه ورودی و خروجی برای S بار دیگر به صورت:

$$y[n] = 2x[n-2] + Sx[n-3] + 2n[n-4]$$

است .

۱,۱۶) سیستم گسسته در زمان را با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید. رابطه ورودی ـ خروجی این سیستم به صورت زیر است.

$$y[n]=x[n]x[n-2]$$

الف) آیا سیستم بدون حافظه است؟

ب) خروجی را به ازای ورودی $A\delta[n]$ تعیین کنید، A یک عدد حقیقی یا مختلط است.

ج) آیا سیستم وارونپذیر است؟

حل:

الف) سیستم بدون حافظه نیست زیرا $y[n]$ به مقادیر لحظه ی قبلی $x[n]$ بستگی دارد.

ب) خروجی سیستم به صورت $y[n]=\delta[n]\delta[A-2]=0$ خواهد بود.

ج) طبق نتیجه ی قسمت (ب)، می توانیم نتیجه بگیریم که خروجی سیستم همیشه برای ورودیهای $8[n-k]$ و $k\in z$ صفر خواهد بود. بنابراین سیستم معکوس پذیر نیست.

۱,۱۷) یک سیستم پیوسته در زمان با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$، با رابطه زیر در نظر بگیرید.

$$y(t)=x(\sin(t))$$

الف) آیا سیستم علّی است؟

ب) آیا این سیستم خطی است؟

حل:

الف) سیستم کازال نیست زیرا خروجی $y(t)$ در برخی لحظات ممکن است به مقادیرلحظات آینده ی $x(t)$ بستگی داشته باشد. مثلا $y(-\pi)=x(0)$.

ب) دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را در نظر بگیرید.

$$x_1(t)\rightarrow y_1(t)=x_1(\sin(t))$$
$$x_2(t)\rightarrow y_2(t)=x_2(\sin(t))$$

فرض کنید $x_3(t)$ ترکیب خطی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ باشد. $x_3(t)$ برابر است با:

$$x_3(t)=\alpha x_1(t)+b\,x_2(t)$$

که α و b اسکالرهای دلخواه هستند. اگر $x_3(t)$ ورودی سیستم داده شده باشد بنابراین خروجی متاظر $y_3(t)$ برابر است با:

$$\begin{aligned}y_3(t)&=x_3(\sin t)\\&=ax_1(\sin t)+bx_2(\sin(t))\\&=\alpha_1 y_1(t)+by_2(t)\end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

۱,۱۸) یک سیستم پیوسته در رمان با ورودی $x(t)$ وخروجی $y(t)$، با رابطه زیر در نظر بگیرید.

$$y[n]=\sum_{k=n-n_\circ}^{n+n_\circ} x[k]$$

که در آن $n_\circ$ یک عدد صحیح مثبت کراندارست.

الف) آیا این سیستم خطی است؟

ب) آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟

ج) اگر بدانیم $x[n]$ کراندارست (یعنی به ازای هر n، $|x[n]|<B$ که B عددی صحیح است)، می توان نشان داد که $y[n]$ نیز کراندارست و کران آن C است. نتیجه می گیریم که سیستم پایدار است. C را بر حسب B و $n_\circ$ بیابید.

حل:

الف) دو ورودی دلخواه $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را در نظر بگیرید:

$$x_1[n]\rightarrow y_1[n]=\sum_{k=n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_1[k]$$

$$x_2[n]\rightarrow y_2[n]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_2[k]$$

فرض کنید $x_3[n]$ ترکیب خطی $n_1[n]$ و $n_2[n]$ باشد در این صورت

$$x_3[n]=\alpha x_1[n]+b\,x_2[n]$$

که α و b اسکالرهای دلخواهی هستند. اگر $x_3[n]$ ورودی سیستم داده شده باشند در این صورت خروجی متناظر $y_3[n]$ برابر است با

$$y_2[n]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_3[k]$$
$$=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ}\left(\alpha n_1[k]+bx_2[k]\right)=\alpha\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ}x_1[k]+b\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ}x_2[k]$$
$$=\alpha y_1[n]+by=[n]$$

بنابراین سیستم خطی است.

ب) ورودی دلخواه $x_2[n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1[n]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ}x_1[k]$ خروجی متناظر باشد ورودی دومی برابر صورت $x=[n]$ که از شیفت زمانی $x_1=[n]$ حاصل می گردد را در نظر بگیرید.

$$x_2[n]=x_1[n-n_1]$$

خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$y_2[n]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ}x_2[k]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ}x_1[k-n_1]=\sum_{n-n_1-n_\circ}^{n-n_1+n_\circ}n_1[k]$$

بنابراین توجه کنید که

$$y_1[n-n_1]=\sum_{n-n_1-n_\circ}^{n-n_1-n_\circ}x_1[k]$$

بنابراین

$$y_2[n]=y_1[n-n_1]$$

این نشان می دهد که سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

ج) اگر $|x[n]|<\beta$ در این صورت

$$y[n]\le(2n_\circ+1)\beta$$

بنابراین $C\le(2n_\circ+1)\beta$

۱,۱۹) به ازای روابط ورودی ـ خروجی داده شده تعیین کنید سیستم خطی است، تغییرناپذیر با زمان است، یا هر دو.

الف) $y(t)=t^2x(t-1)$ ب) $y[n]=x^2[n-2]$

ج) $y[n]=x[n+1]-x[n-1]$ د) $y[n]=\vartheta x\{x[n]\}$

حل:

i) الف) دو ورودی دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ رادر نظر بگیرید:

$$x_1(t) \to y_1(t) = t^2 x_1(t-1)$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = t^2 x_2(t-1)$$

فرض کنید $x_3(t)$ یک ترکیب خطی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ یعنی:

$$x_3(t) = t_2 x_3(t-1)$$

خروجی متناظر $y_3(t)$:

$$= t^2\left(\alpha n_1(t-1) + bx_2(t-1)\right) = \alpha y_1(t) tby_2(t)$$

بنابراین سیستم خطی است.

ii) ورودی دلخواه $x_1(t)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید.

$$y_1(t) = t^2 x_1(t-1)$$

خروجی متناظر باشد، ورودی $x_2(t)$ از شیفت یافتن $x_1(t)$ در زمان بدست خواهد آمد:

$$x_2(t) = x_1(t-t\ )$$

خروجی متناظر این سیگنال برابر است با:

$$y_2(t) = t^2 x_2(t-1) = t^2 x_1(t-1-t_\circ)$$

همچنین بخاطر داشته باشید که

$$y_1(t-t_\circ) = (t-t_\circ)^2 x_1(t-1-t_\circ) \neq y_2(t)$$

بنابراین سیستم تغییرپذیر با زمان است.

ب) i) دو روی دلخواه $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را در نظر بگیرید؛

$$x_1[n] \to y_1[n] = x_1^2[n-2]$$

$$x_2[n] \to y_2[n] = x_2^2[n-2]$$

$x_3[n]$ را ترکیب خطی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در نظر بگیرید؛

$$x_1[n] \to y_1[n] = x_1^2[n-2]$$

$$x_2[n] \to y_2[n] = x_2^2[n-2]$$

فرض کنید $x_3[n]$ ترکیب خطی $x_3[n]$ و $x_2[n]$ باشد: یعنی

$$x_3[n] = \alpha n_1[n] + b\,x_2[n]$$

که b,α اسکالرهای دلخواهی هستد اگر $x_3[n]$ ورودی سیستم داده شده باشند در این صورت خروجی متناظر برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3^2[n-2] \\ &= (\alpha x_1[n-2]+bx_2[n-2])^2 \\ &= a^2x_1^2[n-2]+b^2.x_2^2[n-2]+2abx_1[n-2]x_2[n-2] \\ &\neq ay_1[n]+by_2[n] \end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی نیست.

ii) ورودی دلخواهی مانند $x_1[n]$ در نظر بگیرید. فرض کنید

$$y_1[n]=x_1^2[n-2]$$

خروجی متناظر باشد. ورودی دوم $x_2[n]$ در زمان بدست می آید:

$$x_2[n]=x_1[n-n_\circ]$$

خروجی متناظر برابر است با:

$$y_2[n]=x_2^2[n-2]=n_1^2[n-2-n_\circ]$$

توجه داشته باشید که:

$$y_1[n-n_\circ]=n_1^2[n-2-n_\circ]$$

بنابراین:

$$y_2[n]=y_1[n-n_\circ]$$

که نشان می دهد سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

ج) i) دو ورودی دلخواه $n_1[n]$ و $n_2[n]$ را در نظر بگیرید.

$$x_1[n]\rightarrow y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1]$$
$$x_2[n]\rightarrow y_2[n]=x_2[n+1]-x_2[n-1]$$

فرض کنید $x_3[n]$ ترکیب خطی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ باشد یعنی

$$x_3[n]=\alpha x_1[n]+b\ x_2[n]$$

که a , b اعداد دلخواهی هستند. اگر $x_3[n]$ ورودی سیستم داده باشد. در این صورت خروجی متناظر $y_3[n]$ برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3[n+1]-x_3[n-1] \\ &= a.x_1[n+1]+bx_1[n+1]-ax_1[n-1]-bx_2[n-1] \\ &= a(x_1[n+1]+x_1[n-1])+b(x_2[n+1]-x_2[n-1]) \\ & ay_1[n]+by = y[n] \end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است

ii) ورودی $x_1[n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنیـد $y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1]$ خروجـی متنـاظر باشد. ورودی دوم $x_2[n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنیـد $y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1]$ در حـوزه زمانی بدست می آید.

اگر $x_2[n]=x_1[n-n_\circ]$ خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$y_2[n]=x_2[n+1]-x_2[n-1]=x_1[n+1=n_\circ]-n_1[n-1-n_\circ]$$

همچنین بیاد داشته باشید که

$$y[n-n_\circ]=x_1[n+1-n_\circ]-n_1[n-1-n_\circ]$$

بنابراین

$$y_2[2]=y_1[n-n_\circ]$$

و بیان می کند که سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

i) دو ورودی $x_1[t]$ و $x_2[t]$ را در نظر بگیرد.

$$\begin{aligned} x_1(t) &\to y_1(t)=od\{x_1(t)\} \\ x_2(t) &\to y_2(t)=od\{x_1(t)\} \end{aligned}$$

فرض کنید که $x_3(t)$ ترکیب خطی $x_1[t]$ و $x_2[t]$ باشد یعنی

$$x_3(t)=\alpha x_1(t)+bx_2(t)$$

که a , b اعداد دلخواهی هستند. اگر $x_3(t)$ به عنـوان ورودی سیـستم داده شـده تلقـی شـود درایـن صورت خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= od\{x_3(t)\}=od\{\alpha x_1(t)+bx_2(t)\} \\ &= a\ od\{x_1(t)\}+b\ od\{x_2(t)\}=ay_1(t)+by_2(t) \end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

ii) سیگنال دلخواه $x_1(t)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید.

$$y_1(t)=od\{x_1(t)\}=\frac{x_1(t)-x_1(-t)}{2}$$

خروجی متناظر باشد. سیگنال $x_2(t)$ را بعنوان سیگنال ورودی تمام که از انتقال $x_1(t)$ از زمان بدست می آید، در نظر بگیرید:

$$x_2(t)=x_1(t-t_\circ)$$

خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$y_2(t)=od\{x_2(t)\}=\frac{x_2(t)-x_2(-t)}{2}$$
$$=\frac{x_1(t-t_\circ)-x_1(-t-t_\circ)}{2}$$

همچنین توجه کنید که:

$$y_1(t-t_\circ)=\frac{x_1(t-t_\circ)-x_1(-t_\circ+t_\circ)}{2}\neq y_2(t)$$

بنابراین سیستم، تغییرناپذیر با زمان نیست.

۱,۲۰) یک سیستم خطی پیوسته در زمان S با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ دارای رابطه ورودی ـ خروجی زیر است

$$x(t)=e^{j2t}\xrightarrow{S}y(t)=e^{j3t}$$
$$x(t)=e^{j-2t}\xrightarrow{S}y(t)=e^{-j3t}$$

الف) خروجی متناظر با $x_1(t)=\cos(2t)$ محاسبه کنید.

ب) خروجی متناظر با $x_2(t)=\cos\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)$ را بیابید.

حل:

الف) داده شده

$$\begin{cases}x(t)=e^{2jt}\rightarrow y(t)=e^{j3t}\\ x(t)=e^{-j2t}\rightarrow y(t)=e^{-j3t}\end{cases}$$

از آنجا که سیستم خطی است:

$$x_1(t)=1/2\left(e^{j2t}+e^{-j2t}\right)\rightarrow y_1(t)=1/2\left(e^{j3t}+e^{-j3t}\right)$$

بنابراین

$$x_1(t)=\cos(2t)\rightarrow y_1(t)=\cos(3t)$$

ب) می دانیم:

$$x_2(t)=\cos\left(2\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)=\frac{e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{j2t}}{2}$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن داریم:

$$x_1(t)=\tfrac{1}{2}\left(e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{-2jt}\right)\rightarrow y_1(t)=\tfrac{1}{2}\left(e^{-j}e^{3jt}+e^{j}e^{-j3t}\right)=\cos(3t-1)$$

بنابراین

$$x_1(t)=\cos\left(2\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)\rightarrow y(t)=\cos(3t-1)$$

۱,۲۱) شکل م ۱-۲۱ سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ را نشان می دهد. سیگنالهای زیر را رسم و مقداردهی کنید.

الف) $x(t-1)$

ب) $x(2-t)$

ج) $x(2t+1)$

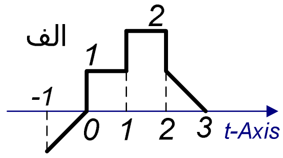
د) $\left(x4-\frac{t}{2}\right)$

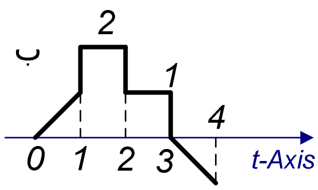
هـ) $[x(t)+x(-t)u(t)]$

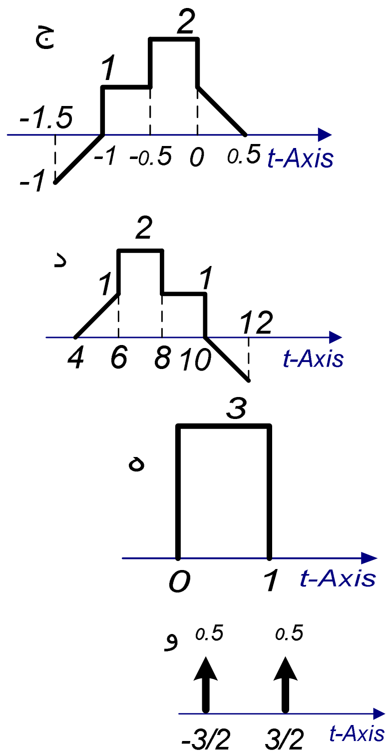
و) $\left(x(t)\,\delta\left(t+\frac{3}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)$

حل:

سیگنالها در شکل ح ۱,۲۱ رسم شده اند.

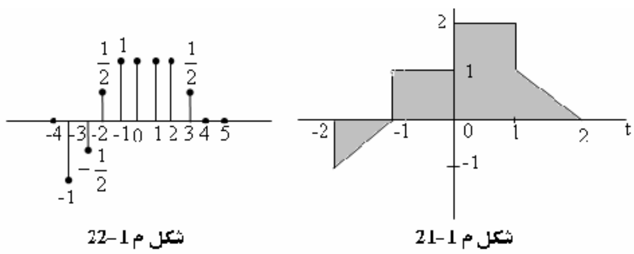






شکل ح ۱,۲۱

۱,۲۲) شکل م ۱–۲۲ سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ را نشان می دهد. سیگنالهای زیر را به دقت رسم و مقدارگذاری کنید.



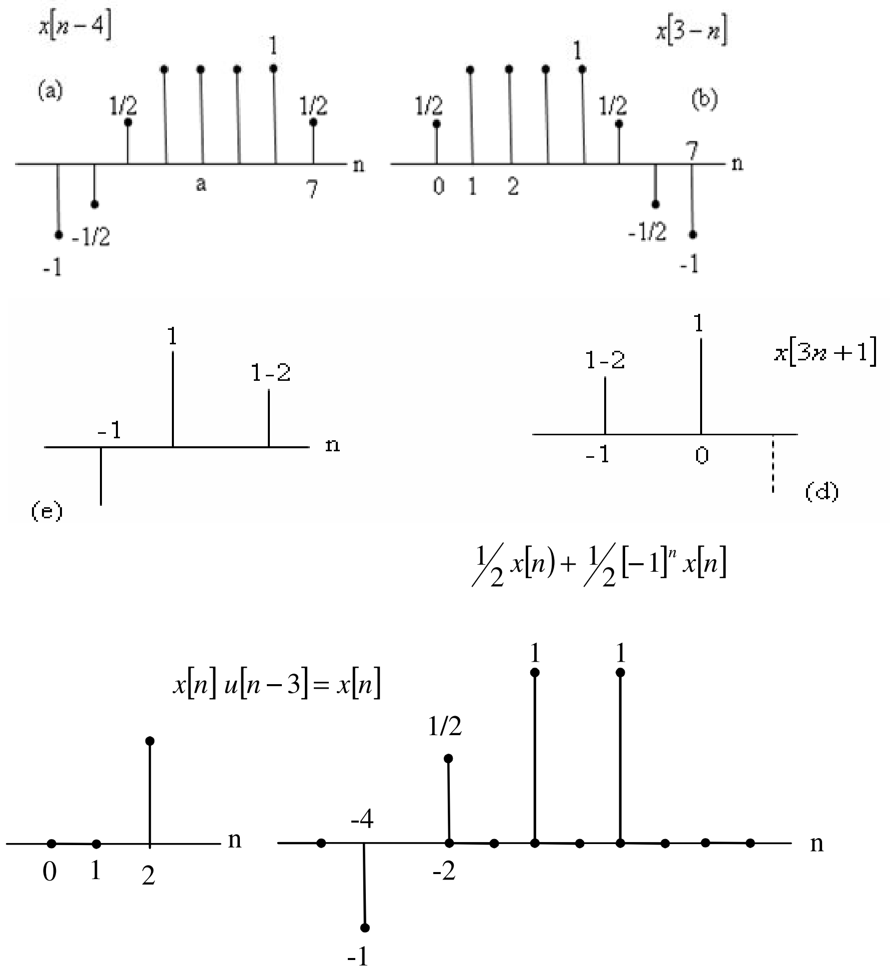
الف) $x[n-4]$

د) $x[3n+1]$

ز) $\frac{1}{2}x[n]+\frac{1}{2}(-1)^n x[n]$

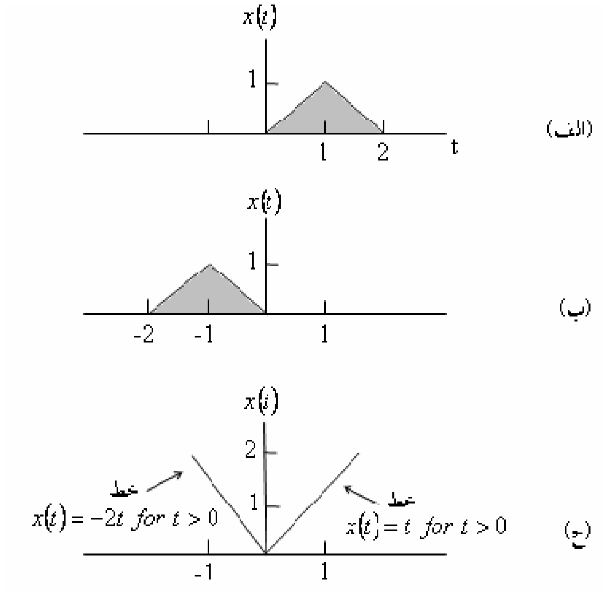
ح) $x\left[(n-1)^2\right]$

سیگنالها در شکل ح ۱,۲۲ نشان داده شده است.



شکل ح ۱,۲۲

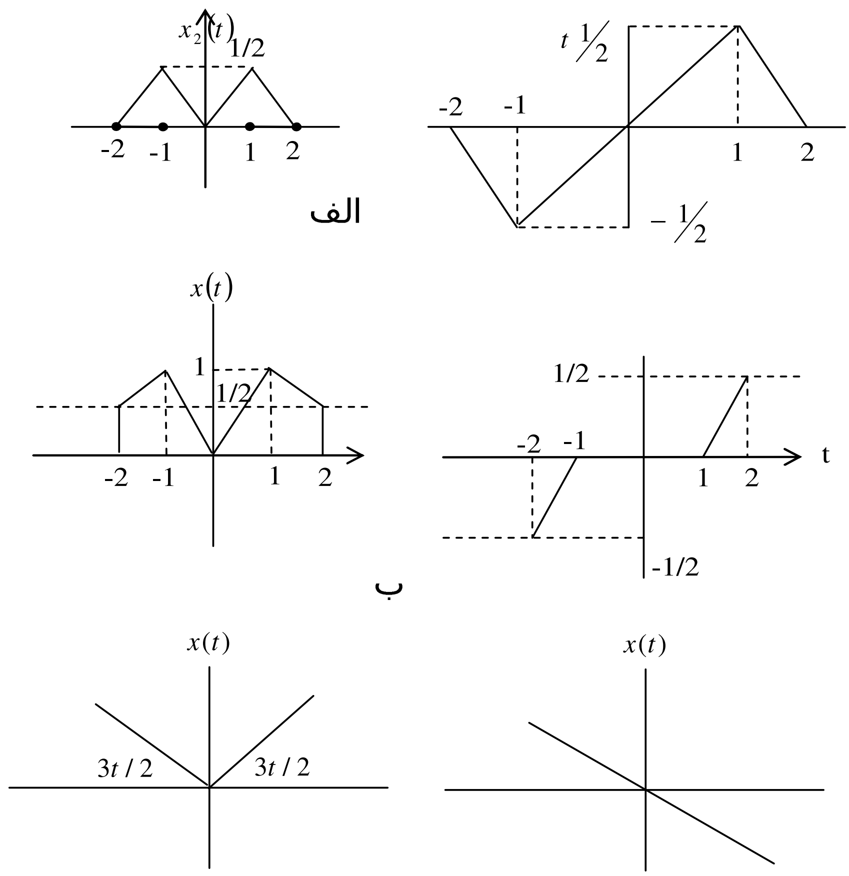
۱,۲۳) بخشهای زوج و فرد سیگنالهای شکل م ۱-۲۳ را تعیین، و آنها را رسم و به دقت مقدارگـذاری کنید.



شکل م ۱–۲۳

حل:

قسمتهای زوج و فرد سیگنال در شکل ح۱٫۲۳ رسم شده است.



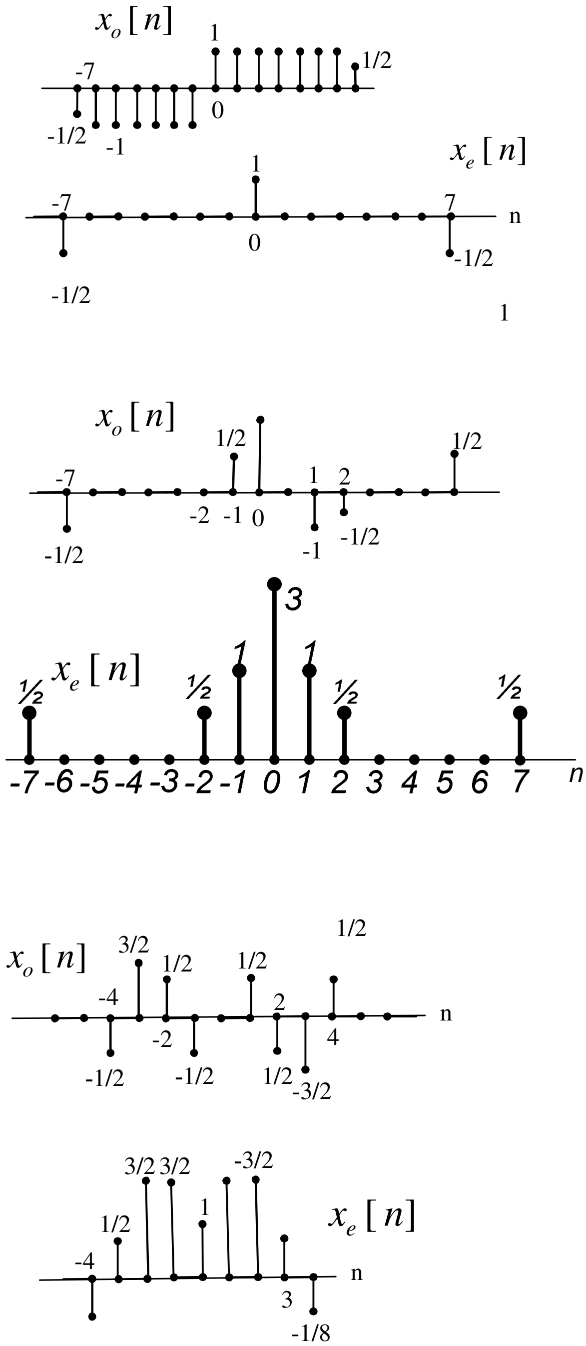
شکل مسئله ح۱٫۲۳

۱٫۲٤) بخشهای زوج و فرد سیگنالهای شکل م ۱–۲٤ را تعیین، و آنها را رسم و به دقـت مقدارگـذاری کنید.

الف

ب

ج



شکل مسئله ح١,٢٤

۱,۲۵) تعیین کنید کدام یک از سیگنالهای پیوسته در زمان زیر متناوب است، دوره تناوب پایه سیگنالهای متناوب را بیابید.

الف) $x(t)=3\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)$

ب) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$ ج) $x(t)=\left[\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)\right]^2$

د) $x(t)=\xi\{\cos(4\pi t)u(t)\}$

هـ) $x(t)=\xi\{\sin(4\pi t)u(t)\}$

و) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-(2t-n)}$

حل:

الف) پریودیک ، $2\pi/4=\pi/2$ = تناوب

ب) پریودیک، $N=2\pi/\pi=2$

ج) $x(t)=[t]=[1+\cos(4t-2\pi)]/2$ متناوب؛ تناوب $\frac{2\pi}{4}=\pi/2$

د) $x(t)=\cos(4nt)/2$ متناوب؛ $\frac{2\pi}{4\pi}=1/2$ = تناوب

هـ) $x(t)=[\sin(4nt)u(t)-\sin(4\pi t)u(-t)]/2$ پریودیک نیست.

و) پریودیک نیست.

۱,۲۶) تعیین کنید آیا سیگنالهای گسسته در زمان زیر متناوب اند یانه. در صورت متناوب بودن دوره تناوب اصلی آنها را تعیین کنید.

الف) $x[n]=\sin\left[\frac{6\pi}{7}\pi+1\right]$

ب) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{8}-\pi\right)$

ج) $x[n]=\cos\left[\frac{\pi}{8}\pi^2\right]$

د) $x[n]=\cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]\cos\left[\frac{\pi}{4}\pi\right]$

هـ) $x[n]=2\cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]+\sin\left[\frac{\pi}{8}n\right]-2\cos\left[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6}\right]$

حل:

الف) پریودیک با پریود ۷-

ب) غیر پریودیک.

ج) پریودیک با پریود ۸-

د) $x[n]=\frac{1}{2}\left[\cos\left(3\pi n/4\right)+\cos\left(\pi n/4\right)\right]$ متناوب با دوره تناوب ۸

هـ) متناوب با دوره تناوب ۱٦

۱,۲۷) در این فصل چند خاصیت عمومی سیستمها را معرفی کردیم. سیستم می تواند صفات زیر راداشته یا نداشته باشد.

(۱) بدون حافظه

(۲) تغییرناپذیر با زمان

(۳) خطی

(٤) علّی

(۵) پایدار

تحقیق کنید که سیستمهای پیوسته در زمان زیر کدام یک از این خواص را دارند و کدام یک را ندارد. دلیل بیاورید. در هر مورد $y(t)$ خروجی سیستم و $x(t)$ ورودی سیستم می باشد.

الف) $y(t)=x(t-2)+x(2-t)$ ب) $y(t)=[(\cos 3t)]x(t)$

ج) $y(t)=\int_{-\infty}^{2t}x(\tau)d\tau$

د) $y(t)=\begin{cases}0 & ,t<0\\ x(t)+x(t-2), & t\geq 0\end{cases}$ هـ) $(yt)=\begin{cases}0 & ,x(t)<0\\ x(t)+x(t-2), & x(t)\geq\end{cases}$

و) $y(t)=x(t/3)$ ز) $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

حل:

الف) خطی پایدار

ب) بی حافظه، خطی، کازال؛ پایدار

ج) خطی

د) تغیر ناپذیر با زمان، خطی، کازال پایدار

هـ) خطی، پایدار

و) تغییرناپذیر با زمان، خطی، کازال

۱,۲۸) تحقیق کنید که کدام یک از خواص بیان شده در مسئله ۱–۲۷ برای سیستمهای گسسته در زمان زیر وجود دارند. دلیل بیاورید. در هر مورد $y[n]$ خروجی و $x[n]$ ورودی سیستم است.

الف) $y[n]=x[-n]$ ب) $y[n]=x[n-2]-2x[n-8]$

ج) $y[n]=nx[n]$ د) $\xi\{x[n-1]\}$

هـ) $y[n]=\begin{cases} x[n] & , n\geq 1 \\ \circ & , n=\circ \\ x[n+1] & , n\leq -1 \end{cases}$ و) $y[n]=\begin{cases} x[n] , & n\geq 1 \\ \circ , & n=\circ \\ x[n] , & n\leq -1 \end{cases}$

ز) $y[n]=x[4n+1]$

حل:

الف) خطی، پایدار

ب) تغییرناپذیر با زمان، خطی، کازال، پایدار

ج) بی حافظه، خطی، کازال

د) خطی، پایدار

هـ) خطی، پایدار

و) بی حافظه، خطی، کازال، پایدار

۱,۲۹)

(الف) نشان دهید سیستم گسسته در زمان دارای ورودی $x[n]$، خروجی $y[n]$ و رابطه ورودی ـ خروجی $y[n]=\{Re\, x[n]\}$ جمع پذیرست. آیا این سیستم به ازای رابطه $[yn]=\mathrm{Re}\{e^{j\pi/4}x[n]\}$ جمع پذیرست؟ (در این مسئله $x[n]$ را حقیقی نیست.)

ب) خطی بودن یک سیستم مستلزم این است که سیستم دو خاصیت جمع پـذیر و همگنـی را داشـته باشد. تحقیق کنید هر یک از سیستمهای زیر خاصیت جمع پذیری و یا همگنی را دارنـد یـا نـه. دلیـل بیاورید، یعنی برای اثبات وجود هر خاصیت برهان بیاورید و برای رد آن مثال نقض بیان کنید.

$$y(t) = \frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] \quad \text{(i)} \qquad\qquad y[n] = \begin{cases} \dfrac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]}, & x[n-1] \neq 0 \\ 0, & x[n-1] = 0 \end{cases} \quad \text{(ii)}$$

حل:

الف) دو ورودی سیستم را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$n_1[n] \xrightarrow{S_1 0} y_1[n] = \mathrm{Re}\{x_1[n]\,,\ n_2[n] \xrightarrow{S} y_2[n] = \mathrm{Re}\{x_2[n]\}$$

حال ورودی سوم را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} y_3[x] &= \mathrm{Re}\{x_3[n]\} \\ &= \mathrm{Re}\{x_1[n] + x_2[n]\} \\ &= \mathrm{Re}\{x_1[n]\} + \mathrm{Re}\{x_2[n]\} \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

نتیجه می گیریم سیستم جمع پذیر است.

فرض کنیم رابطه خروجی – ورودی به $y[n] = \mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4} x[n]\right\}$ تغییـر یابـد و نیـز دو ورودی تغییـر یابد و نیز دو ورودی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_1[n] \xrightarrow{S} y_1[n] = \mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4} x_1[n]\right\}$$

,

$$x_2[n] \xrightarrow{S} y_2[n] = \mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4} x_2[n]\right\}$$

حال سیگنال سومی به صورت $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$ را بعنـوان ورودی بـه سیـستم فـرض کنیـد. خروجی برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4} x_3[n]\right\} \\ &= \cos\left(\pi \tfrac{n}{4}\right)\mathrm{Re}\{x_3[n]\} - \sin\left(n\tfrac{\pi}{4}\right) I_m\{x_3[n]\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cos\left(n\pi/4\right)\mathrm{Re}\{x_1[n]\}-\sin\left(n\pi/4\right)I_m\{x_1[n]\}\\
&+\cos\left(n\pi/4\right)\mathrm{Re}\{x_2[n]\}-\sin\left(n\pi/4\right)I_m[x_2[n]]\\
&=\mathrm{Re}\left\{e^{jn/4}x_1[n]\right\}+\mathrm{Re}\left\{e^{j\pi/4}x_2[n]\right\}\\
&=y_1[+n]+y_2[n]
\end{aligned}
$$

بنابراین نتیجه می گیریم که سیستم جمع پذیر نیست.

ب) i) دو سیگنال ورودی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_1(t)\xrightarrow{s}y_1(t)=\frac{1}{x(t)}\left[\frac{d_1x_1(t)}{dt}\right]^2\ ,\ x_2(t)\xrightarrow{s}y_2(t)=\frac{1}{x_1(t)}\left[\frac{d_2x(t)}{dt}\right]^2$$

حال سیگنال سوم را به صورت $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ خروجی متناظر سیستم عبارتست از:

$$
\begin{aligned}
y_3(t)&=\frac{1}{x_3(t)}\left[\frac{dx_3(t)}{dt}\right]^2\\
&=\frac{1}{x_1(t)+x_2(t)}\left[\frac{dx_1(t)+dx_2(t)}{dt}\right]=\\
&\neq y_1(t)+y_2(t)
\end{aligned}
$$

بنابراین نتیجه می گیریم که مستقیم جمع پذیر نیست.

حال ورودی چهارم را به صورت $x_4(t)=ax_1(t)$ در نظر بگیرید. خروجی متناظر به صورت

$$y_4(t)=\frac{1}{x_4(t)}\left[\frac{dx_4(t)}{dt}\right]^2=\frac{1}{\alpha x_1(t)}\left[\frac{d\alpha x_1(t)}{dt}\right]^2=\frac{a}{x_i(t)}\left[\frac{n_1d(t)}{dt}\right]^2=\alpha y_1(t)$$

بنابراین سیستم همگن است.

ii) سیستم جمع پذیر نیست. مثال زیر را در نظر می گیریم.

فرض کنیم

$$
\begin{aligned}
x_1[n]&=2\delta[n+2]+2\delta[n+1]+2\delta[n]\\
x=[2]&=\delta[n+2]+2\delta[n+1]+3\delta[n]
\end{aligned}
$$

خروجی متناظر در $n=0$ برابر است با:

$$y_1[0]=2\qquad ,\qquad y_2[0]=3/2$$

حال سیگنال را به صورت

$$x_3^-[n] = x_1[n] + x_2[n]$$
$$= 3\delta[n+2] + 4\delta[n+1] + 5\delta[n]$$

در نظر بگیرید.

خروجی متناظر در $n=\circ$ برابر است با $y[\circ]=15/4$. بطور واضح $y_3[\circ] \neq y_1[\circ] + y_2[\circ]$. این نشان می دهد که سیستم جمع پذیر نیست.

هیچ حدودی $x_4[n]$ که به خروجی $y_4[n]$ منجر می شود را در نظر بگیرید. می دانیم که

$$y_4[n] = \begin{cases} \dfrac{x_4[n]x_4[n-2]}{x_4[n-1]} & x_4[n-1] \neq \circ \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases} = ay_4[n]$$

سیستم همگن است.

۱,۳۰) تحقیق کنید هر یک از سیستمهای زیر وارونپذیرند یا نه. در صورت وارو نپذیر بودن سیستم وارون راپیدا کنید. در غیر این صورت دو سیگنال مختلف بیابید که پاسخ سیستم به آنها یکی باشد.

الف) $y(t) = x(t-4)$ ب) $y(t) = \cos[x(t)]$

ج) $y[n] = nx[n]$ د) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

هـ) $x[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ \circ, & n = \circ \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$

و) $y[n] = x[n]x[n-1]$ ز) $y[n] = x[1-n]$

خ) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$

ط) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

ی) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

ک) $y[n] = \begin{cases} x[n+1], & n \geq \circ \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$ ل) $y(t) = x(2t)$

م) $y[n] = x[2n]$

ن) $y[n]=\begin{cases} x[n/2] & n \text{ زوج} \\ \circ & n \text{ فرد} \end{cases}$

حل:

الف) تغییرناپذیر، معکوس پذیر: $y(t)=x(t+4)$.

ب) تغییر پذیر، سیگنالهای $x(t)$ و $x_1(t)=x(t)+2\pi$ خروجی های یکسانی را می دهند.

ج) تغییر پذیر، $\delta[n], s\delta[n]$ خروجی های یکسانی را می دهند. $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$.

د) تغییرناپذیر، معکوس پذیر.

هـ) تغییرناپذیر، معکوس پذیر؛ برای $n \geq \circ$ $y[x]=x[n+1]$ و برای $n<\circ$، $y[n]=x[n]$.

و) تغییرپذیر، $x[n]$ و $-y[n]$ نتایج یکسانی را ارائه می کنند.

ذ) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y[n]=x[1-n]$.

خ) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y(t)=x(t)+dx(t)\big/dt$.

ط) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y[n]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$.

ی) تغییرپذیر، اگر $x(t)$ هر ثابت دلخواهی فرض شود، در این صورت $y(t)=\circ$.

ک) تغییرپذیر، $\delta[n]$ و 2δ نتایج یکسانی $y[n]=\circ$ را ارائه می دهند.

ل) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y(t)=x\left(t/2\right)$.

م) تغییرناپذیر، معکوس پذیر: $y(t)=x\left(t/2\right)$.

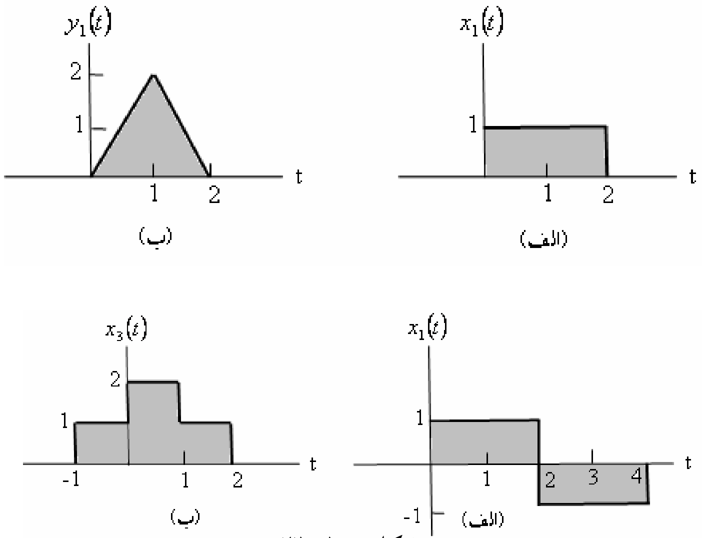
تغییرپذیر $\begin{cases} x_i[n]=\delta[n]+\delta[n-1] \\ , \\ x_2[n]=\delta[n] \end{cases}$ نتیجه می گیریم $y[n]=\delta[n]$

ن) تغییرناپذیر، معکوس پذیر: $y[n]=x[2n]$

۱,۳۱) در این مثال یکی از مهمترین نتایج خواص خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان را نشان می دهیم، یعنی این که اگر پاسخ سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) به یک ورودی یا چند ورودی را بدانیم، می توانی پاسخ سیستم به ورودیهای متعدد دیگری را نیز حساب کنیم. قسمت اعظم بقیه این کتاب به کاربرد این حقیقت در پی ریزی روشهایی برای تحلیل و سنتز سیستمهای LTI اختصاص دارد.

الف) یک سیستم LTI در نظر بگیرید که پاسخ آن به سیگنال $x_1(t)$ شکل م ۱–۳۱ (الف) سیگنال $y_1(t)$ شکل م ۱–۳۱ (ب) است. پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t)$ شکل م ۱–۳۱ (ج) را تعیین و به دقت رسم کنید.

ب) پاسخ سیستم مفروض در قسمت الف را به ورودی $x_3(t)$ شکل م ۱–۳۱ (د) تعیین و رسم کنید.

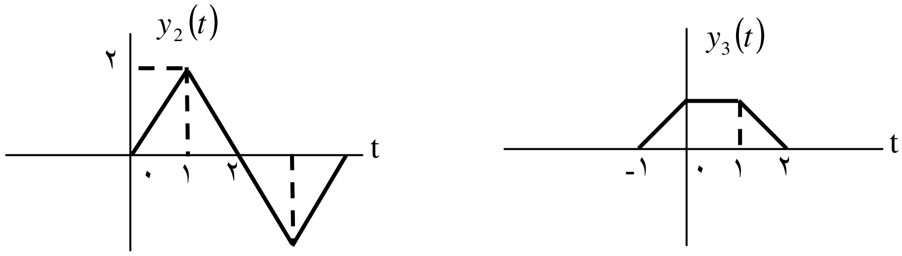


شکل م ۱–۳۱

حل:

الف) توجه داشته باشید که $x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-2)$. بنابراین طبق خطی بودن به $y_2(t)=y_1(t)-y(t-2)$ دست می یابیم. که در شکل ح ۱٫۳۱ نشان داده شده است.

ب) توجه کنید که $x_3(t)=x_1(t)+x(t+1)$. بنابراین، با استفاده از خاصیت خطی بودن $y_3(t)=y_1(t)+y_1(t+1)$. که در شکل ح ۱٫۳۱ نشان داده شده است.



شکل ح ۱٫۳۱

۱,۳۲) فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال پیوسته در زمان است و فرض کنید که

$y_1(t)=x(2t)$ و $y_2(t)=x(t/2)$

سیگنال $y_1(t)$ نوع سریع شده $x(t)$ است، از این لحاظ که زمان لازم برای ایجاد هر قسمت آن نصف شده است. به طور مشابه، $y_2(t)$ گونه ی کند شدهٔ $x(t)$ است، زیرا مدت آن دو برابر شده است.

گزاره های زیر را در نظر بگیرید:

(۱) اگر $x(t)$ متناوب باشد، آنگاه $y_1(t)$ نیز متناوب است.

(۲) اگر $y_1(t)$ متناوب باشد، آنگاه $x(t)$ نیز متناوب است.

(۳) اگر $x(t)$ متناوب باشد، آنگاه $y_2(t)$ نیز متناوب است.

(٤) اگر $y_2(t)$ متناوب باشد، آنگاه $x(t)$ نیز متناوب است.

درستی یا نادرستی هر یک از این گزاره ها را تحقیق کنید. در صورت درست بودن یک گزاره، رابطه بین زمان تناوب اصلی دو سیگنال ذکر شده در گزاره را بیان کنید. در صورت نادرست بودن گزاره، مثال نقض بیاورید.

حل:

تمامی گزاره ها صحیح است.

۱) $x(t)$ با تناوب T، متناوب است. $y_1(t)$، با تناوب $T/2$ پریودیک است.

۲) $y_1(t)$ با تناوب T متناوب است، $x(t)$ با تناوب ۲T پریودیک است.

۳) $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T و $y_L(t)$ با دوره تناوب ۲T پریودیک است.

٤) $y_2(t)$ متناوب با دوره تناوب T و $x(t)$ با دوره تناوب $T/2$ پریودیک است.

۱,۳۳) فرض کنید $x[n]$ یک سیگنال گسسته در زمان باشد و

$$y_1[n]=x[2n] \quad \text{و} \quad y_2[n]=\begin{cases} x[n/2] & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases}$$

سیگنالهای $y_1[n]$ و $y_2[n]$ به ترتیب گونه های سریع شده و کند شده $x[n]$ هستند. البته باید توجه داشته باشید که در حالت گسسته در زمان، نوع های سریع شده و کند شده با همتاهای پیوسته در زمان خود تفاوتهای عمده ای دارند. گزاره های زیر را در نظر بگیرد.

(۱) اگر $x[n]$ متناوب باشد، آنگاه $y_1[n]$ نیز متناوب است.

(۲) اگر $y_1[n]$ متناوب باشد، آنگاه $x[n]$ نیز متناوب است.

(۳) اگر $x[n]$ متناوب باشد، آنگاه $y_2[n]$ نیز متناوب است.

(٤) اگر $y_2[n]$ متناوب باشد، آنگاه $x[n]$ نیز متناوب است.

درستی یا نادرستی هر یک از این گزاره ها راتعیین کنید. در صورت درست بودن یک گزاره، رابطه بین زمان تناوب پایه دو سیگنال را بیان کنید. در صورت نادرست بودن گزاره مثال نقض بزنید.

حل:

۱) صحیح. $x[n]=x[n+N]; y_1[n]=y_1[n+N_\circ]$ یعنی پریودیک است بـا $N_\circ = N/2$ اگـر N زوج باشد و $N_\circ = N$ اگر N فرد باشد.

۲) نادرســت. $y_1[n]$. پریودیــک $x[n]$ پریودیــک را ارائــه مــی کنــد یعنــی بــا فــرض اینکــه $x[n]=g[n]+h[n]$، کـه $h[n]=\begin{cases} \circ & n \text{ زوج} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \text{ فرد} \end{cases}$ و $g[n]\begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ \circ & n \text{ فرد} \end{cases}$ در ایــن صــورت،

$y_1[n]=x[2n]$ پریودیک است امّا، $x[n]$ به طور واضح پریودیک نیست.

۳) صحیح. $x[n+N]=x[n]; y_2[n+N_\circ]=y_2[n]$ که $N_\circ = 2N$

٤) صحیح. $y_2[n+N]=y_2[n]; x[n+N_\circ]=x[n]$ که $N_\circ = N/2$

۱,۳٤) در این مسئله چند خاصیت سیگنالهای زوج و فرد را بررسی می کنیم.

الف) نشان دهید که اگر $x[n]$ فرد باشد، آنگاه:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \circ$$

ب) نشان دهید که اگر $x_1[n]$ فرد و $x_2[n]$ زوج باشد، آنگاه $x_2[n]\, x_1[n]$ فردخواهند بود.

ج) فرض کنید $x[n]$ سیگنال دلخواهی با قسمتهای فرد و زوج باشد

$$x_e[n] = \xi\{x[n]\} \qquad \text{و} \qquad x_\circ[n] = \vartheta_d\{x[n]\}$$

نشان دهید که

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$

د) با اینکه قسمت های الف تا ج بر حسب سیگنالهای گسسته در زمان بیان شد، خواص مـشابهی هـم برای حالت پیوسته در زمان صادق است. ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)dt$$

که در آن $x_e(t)$ و $x_o(t)$ به ترتیب بخشهای زوج و فرد $x(t)$ هستند.

حل:

الف) فرض کنید:

$$\sum_{n=s-\infty}^{\infty} x[n] = x[\circ] + \sum_{n=1}^{\infty} \{x[n] + x[-n]\}$$

اگر $x[n]$ فرد باشد، $x[n] + x[-n] = \circ$ بنابراین مجموع برابر صفر خواهد شد.

ب) فرض کنید $y[n] = x_1[n]x_2[n]$ در این صورت:

$$y[-n] = x_1[-n]x_2[-n] = -x_1[n]x_2[n] = -y[n]$$

این نشان می دهد که $y[n]$ فرد است.

ج) فرض کنید:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x_e[n] + x_\circ[n]\}^2$$

$$= \sum x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{t\infty} x_\circ^2[n] + 2\sum_{n=-\infty}^{t\infty} x_e[n]x_\circ[n]$$

بااستفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) می دانیم که $x_e[n]x_o[n]$ همواره سیگنالی فرد است و با استفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (الف) نتیجه می گیریم که:

$$2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e[n]x_o[n] = \circ$$

بنابراین:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$

د) فرض کنید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)x_e(t)dt$$

همچنین $x_\circ(t)x_e(t)$ نیز سیگنالی فرد است، پس:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_\circ(t)\, x_e(t)dt = \circ$$

بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^{e2}(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\circ}^2(t)\,dt.$$

۱٫۳۵) فرض کنید رابطه زیر سیگنال نمایی گسسته در زمان متناوب باشد

$$x[n] = e^{jm(2\pi/N)n}$$

نشان دهید که دوره تناوب اصلی این سیگنال برابر است با

$$N_{\circ} = N \;\text{ب. م. م}/ (m,N)$$

که (m,N) ب م م بزرگترین مقسوم علیه مشترک N,m است.

حل:

قصد داریم کوچکترین $N_{\circ}$ را طوری بیابیم کـه $m\left(\frac{2\pi}{N}\right)N_{\circ} = 2\pi k$ یـا $N_{\circ} = k\,{}^{N}\!/_{m}$ کـه k یـک عدد صحیح است. اگر $N_{\circ}$ یک عدد صحیح باشد آنگاه N باید یـک ضـریبی از ${}^{m}\!/_{k}$ باشـد و ${}^{m}\!/_{k}$ نیز بایستی یک عدد صحیح باشدپس ${}^{m}\!/_{k}$ یک ضریب مشترک بین k , m می باشـد. همچنـین، اگـر کوچکترین $N_{\circ}$ را پیدا کنیم، در اینصورت ${}^{m}\!/_{k}$ باید ب. م. م N , m باشد.

$$N_{\circ} = \frac{N}{\text{ب.م.م}(m,N)}$$

۱٫۳٦) فرض کنید $x(t)$ سیگنال نمایی مختلط پیوسته در زمان زیر باشد

$$x(t) = e^{jm} o^{t}$$

که فرکانس پایه آن $\omega_{\circ}$ و دوره تناوب پایه آن $T_{\circ}[n] = 2\pi/\omega_{\circ}$ است. سیگنال گسسته در زمـان را در نظر بگیرید که با گرفتن نمونه های هم فاصله $x(t)$ به دست می آید، یعنی

$$x\,[n] = x\,(nt) = e^{\omega j o}\,nT$$

الف) نشان دهید که $x[n]$ فقط و فقط به شرطی متناوبخواهد بود که $T/T_{\circ}$ عدد گویا باشد، به عبـارت دیگر اگر و تنها اگر مضربی از فاصله نمونه گیری دقیقاً برابر مضربی از دوره تناوب $x(t)$ باشد.

ب) فرض کنید که $x[n]$ متناوب است، پس

$$\frac{T}{T_{\circ}} = \frac{p}{q} \qquad \text{(م ۱-۳٦-۱)}$$

که در آن p و q اعداد صحیح می باشند. دوره تناوب اصلی و فرکانس پایه $x[n]$ را بیابید؟ فرکـانس پایه را به صورت کسری از $\omega_{\circ}T$ بیان کنید.

ج) حال فرض کنید که $T/T_\circ$ معادله (م ۱-۳٦-۱) را ارضا می کند، دقیقاً تعیین کنید که چند تناوب $x(t)$ لازم است تا نمونه های یک دوره تناوب $x[n]$ به دست آیند.

حل:

الف) اگر $x[n]$ متناوب باشد، $e^{j\omega_\circ nT}=e^{j\omega(n+N)T}$ که $\omega_\circ = 2\pi/T_\circ$ بیان می کند که:

$$\frac{2\pi 2NT}{T_\circ}2K\pi \Rightarrow \frac{T}{T_\circ}=\frac{K}{N} = \text{یک عدد گویا}$$

ب) اگر $T/T_\circ = p/q$ در این صورت $x[n]=e^{j2\pi n(P/q)}$. تناوب پایه برابر است با $\frac{q}{\text{ب.م.م}(P.q)}$

و فرکانس پایه برابر است با:

$$\frac{2\pi}{q}(\text{م.م.ب})(p,q)=\frac{2\pi}{p}\frac{p}{q}\gcd(p,q)=\frac{\omega_\circ}{P}\gcd(p,q)=\frac{\omega_\circ T}{p}\gcd(p,q)$$

ج) $\frac{p}{\gcd(p,q)}$ تناوب های $x(t)$ هستند.

۱٫۳۷) همبستگی بین دو سیگنال مفهوم مهمی در کاربردهای مخابراتی است. در مسائل انتهای فصل ۲ در این مورد بیشتر بحث خواهیم کرد و طرز کاربرد همبستگی را بیا می کنیم.حال به مقدمه ای کوتاهدر مورد توابع همبستگی و خواص آنها می پردازیم.

فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال باشند، تابع همبستگی به این صورت تعریف می شود

$$\Phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)y(t)d\tau$$

تابع $\Phi_{xx}(t)$ را تابع خود همبستگی سیگنال $x(t)$ و $\Phi_{xy}(t)$ را همبستگی متقابل سیگنالهای $x(t)$ و $y(t)$ می نامند.

الف) $\Phi_{xy}(t)$ و $\Phi_{yx}(t)$ چه رابطه ای دارند؟

ب) قسمت فرد $\Phi_{xx}(t)$ را محاسبه کنید.

ج) فرض کنید $y(t)=x(t+T)$. $\Phi_{xy}(t)$ و $\Phi_{yy}(t)$ را برحسب $\Phi_{xx}(t)$ بیان کنید.

حل:

الف) طبق تعریف $\phi_{xy}(t)$ داریم.

$$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} y(-t+\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$
$$=\phi_{yx}(-t)$$

ب) با توجه به قسمت (الف) $\phi_{xx}=\phi_{xx}(-t)$ که بیان می کند ϕ_{xx} زوج است.
بنابراین قسمت فرد $\phi_{xx}(t)$ برابر صفر خواهد شد..
ج) حال

$$\phi_{yy}(t)=\phi_{xx}(t) \quad \text{و} \quad \phi_{xy}(t)=\phi_{xx}(t-T)$$

۱,۳۸) در این مسئله به بررسی برخی خواص تابع ضربه واحد می پردازیم.
الف) نشان دهید که

$$\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$$

توجه: $\delta_{\Delta}(t)$را بررسی کنید (شکل ۱-۳٤ را ببینید).

ب) در بخش ۱-٤ ضربه واحد پیوسته در زمان را به صورت حد سیگنال $\delta_{\Delta}(t)$ تعریف کردیم. در حقیقت، چند خاصیت $\delta(t)$ را با بررسی خواص متناظر δ_{Δ} بیان کردیم. مثلاً چون سیگنال به پله واحد میل می کند.

$$u_{\Delta}(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta_{\Delta}(\tau)d\tau$$
$$u(t)=\underset{\Delta\to 0}{\text{حد}}\; u_{\Delta}(t) \qquad \text{(م ۱-۳۸-۱)}$$

یعنی فرض می کنیم $\delta(t)$ مشتق $u(t)$ باشد.

در واقع به جای مشخص کردن مقدار $\delta(t)$ به ازای مقادیر مختلف t، که کاری ناممکن است، این تابع را با خواص آن تعریف کنیم. در فصل ۲ یکی از مشخصه های بسیار ساده رفتار تابع ضربه واحد را مطرح می کنیم. حال می خواهیم این مطلب را بیان کنیم که مفهوم اصلی در استفاده از ضربه واحد، فهم چگونگی رفتار آن است. برای این کار شش سیگنال شکل م ۱-۳۸ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تمام اینها به ازای $\Delta\to 0$ (به صورت ضربه به رفتار می کنند)، پس اگر فرض کنیم

$$u^{i}(t)\int_{-\infty}^{t} r^{i}\Delta(\tau)d\tau$$

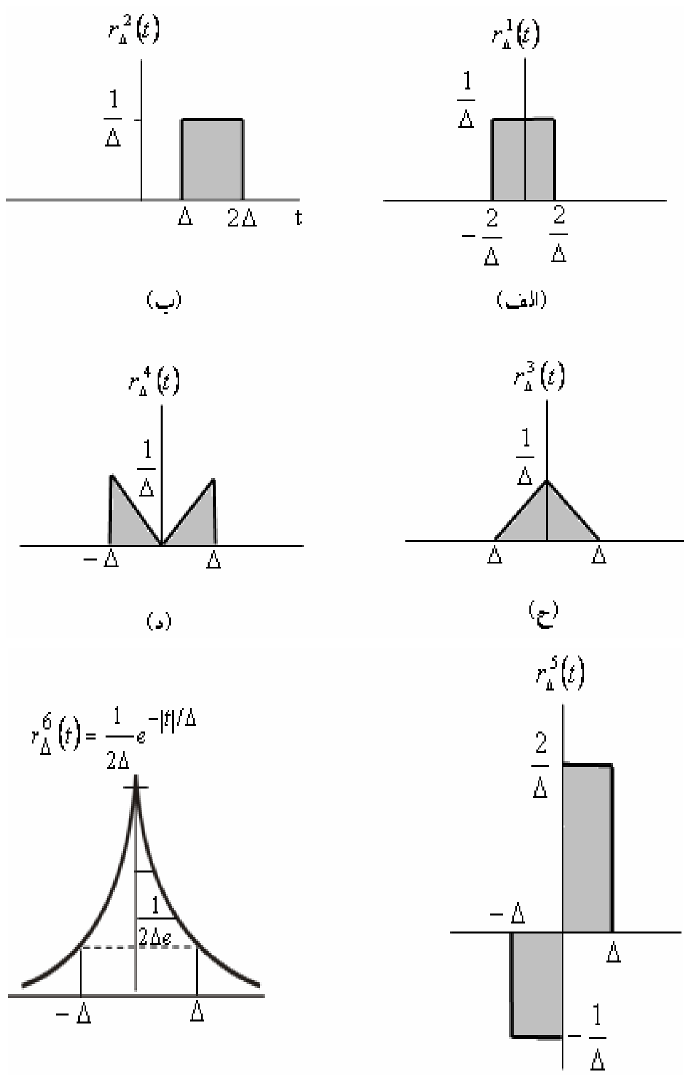
داریم:

$$u(t) = \underset{\Delta\to\circ}{\text{حد}}\; u(t)$$

در هر مورد سیگنال $u^i\Delta(t)$ را به دقت رسم و مقداردهی کنید. به خاطر داشته باشید که:

به ازای تمام مقادیر Δ $\qquad r^2\Delta(\circ)=r^4(\circ)=\circ$

بنابراین فرد فرض کردن $\delta(t)$ که به ازای $t\neq\circ$ صفر و بـه ازای $t=\circ$ بینهایـت اسـت کـافی نیـست. برعکس، خواصی نظیر معادله (م ۱-۳۸-۱) است که ضربه را تعریف مـی کنـد. در بخـش ۲-۵ دسـته کاملی از سیگنالها به نام توابع ویژه را تعریف خواهیم کرد که با تابع ضربه مرتبط اند و به جای مقـادیر بر حسب خواص تعریف می شوند.



حل:

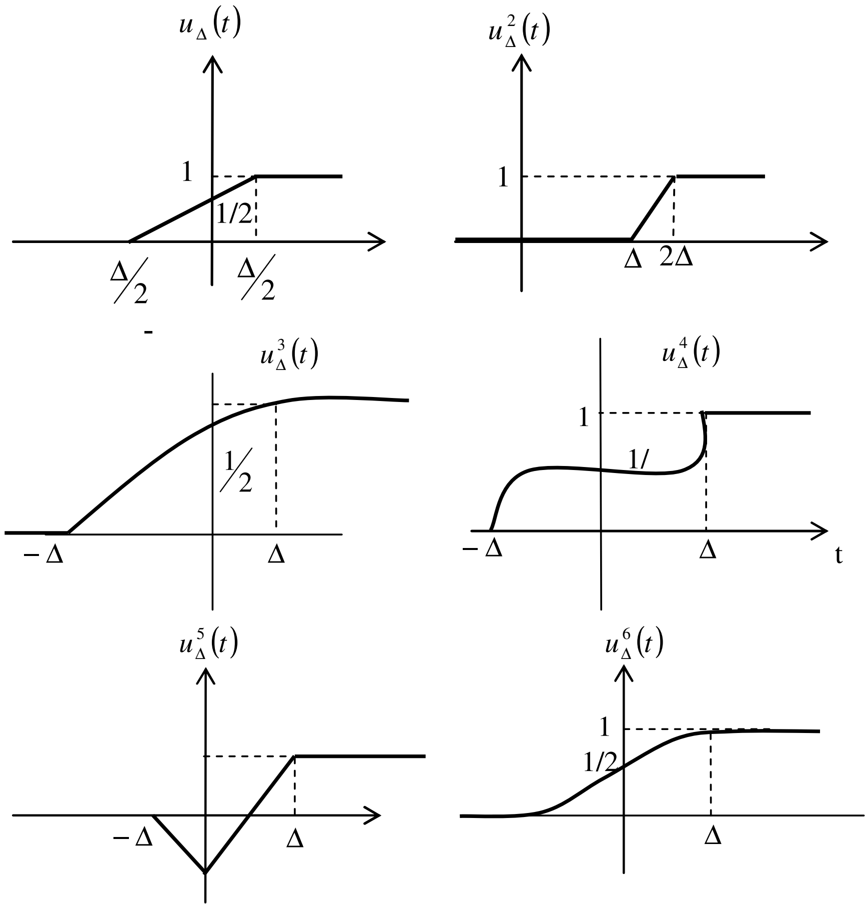
(الف) می دانیم که $2\delta_\Delta(2t)=\delta_{\Delta/2}(t)$ پس:

$$\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(2t)=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\delta_{\Delta/2}(t)$$

که بیان می کند

$$\delta(2t)=\tfrac{1}{2}\delta(t)$$

(ب) در شکل ح۱٫۳۸ نشان داده شده اند.



شکل ح۱٫۳۸

۱٫۳۹) نقش $u(t)$، $\delta(t)$ و دیگر توابع ویژه در بررسی سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمـان ایـده آل سازی پدیده های فیزیکی است، و این امر این امکان را می دهد که نمایش بسیار ساده و مهمی از این سیستمها به دست آوریم. اما در استفاد ه از توابع ویژه باید دقت کنیم. مخصوصاً باید بـه خـاطر داشـته باشیم که این توابع، توابعی ایده آل اند، ازینرو هر گاه با استفاده از آنها محاسـبه ای انجـام مـی دهـیم، فرض می کنیم که این محاسبه توصیف دقیقی است از رفتار سیگنالهایی است که قصد ایده آل سـازی آنها را داریم. برای بیان این مطلب معادله زیررا در نظر بگیرید.

$$x(t)\delta(\circ) = x(\circ)\delta(t) \qquad \text{(م ۱۳۹-۱)}$$

این معادله مبتنی بر این است که

$$x(t)\delta_{\Delta}(\circ) \approx x(\circ)\delta_{\Delta}(t) \qquad \text{(م ۱-۳۹-۲)}$$

با گرفتن حد ازاین معادله، معادله ایده آل (م ۱-۳۹-۱) به دست می آید. اما با بررسی دقیق تـر طریقـه به دست آوردن معادله (م ۱-۳۹-۲) نشان داده می شود که تساوی (م ۱-۳۹-۲) در واقـع فقـط زمـانی معنی دارد که $x(t)$ در $t=\circ$ پیوسته باشد؛ در غیر این صورت نمی توان برای t کوچک نوشت

$$x(t) \approx x(\circ)$$

برای واضح شدن مطلب، سیگنال پله واحد $u(t)$ را در نظر بگیرید. بـا توجـه بـه معادلـه (۱-۷۰) مـی دانیم که به ازای $t<\circ$، $u(t)=\circ$ و به ازای $t>\circ$ ، $u(t)=1$ خواهد بـود؛ امـا مقـدار آن در $t=\circ$ تعریف نـشده اسـت [بـرای مثـال توجـه کنیـد کـه بـه ازای همـه مقـادیر Δ، $u_{\Delta}(\circ)=\circ$، در حـالی که $u_{\Delta}^{1}(\circ)=\frac{1}{2}$، به مسئله ۱-۳۸ (ب) مراجعه کنید]. اگر محاسبات انجام شده بـا اسـتفاده از $u(t)$ بـه انتخاب مقدار مشخصی برای $u(\circ)$ بستگی نداشته باشد، تعریف نشدن $u(\circ)$ مشکلی ایجاد نمـی کنـد. مثلاً اگر $f(t)$ در $t=\circ$ پیوسته باشد، آنگاه مقدار

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

به $u(\circ)$ بستگی ندارد. از طرف دیگر تعریف نشدن $u(\circ)$ می تواند مهم باشد، زیرا به این معنی اسـت که برخی محاسبات شامل توابع ویژه تعریف نشده هستند. فـرض کنیـد مـی خـواهیم مقـداری بـرای

حاصل ضرب $u(t)\delta(t)$ تعریف کنیم. برای این که بدانید چنین تعریفی را نمی توان ارائه کـرد، نـشان

$$\underset{\Delta\to 0}{\text{حد}}\left[u_\Delta(t)\delta(t)\right]=0$$

دهید که ولی

$$\underset{\Delta\to 0}{\text{حد}}\left[u_\Delta(t)\delta_\Delta(t)\right]=\frac{1}{2}\delta(t)$$

به طور کلی می توان حال ضرب دو سیگنال را بدون هیچ مشکلی تعریف کرد،البته با توجـه بـه اینکـه محل نقاط تکین سیگنالها (ناپیوستگی، ضربه یا سایر نقاط تکین گفته شده در بخش ۲-۵) یکی نباشـد. اگر مکان نقاط تکین یکسان باشد، حاصل ضرب تعریف نشده است. به عنـوان مثـال نـشان دهیـد کـه سیگنال

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

مشابه $u(t)$ است؛ یعنی در $t<0$ برابر ۰ ، در $t>0$ برابر ۱، و در $t=0$ تعریف نشده است.

حل:

داریم:

$$\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t)\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(0)\delta(t)=0$$

همچنین:

$$\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t).\delta_\Delta(t)=(1/2)\delta(t)$$

داریم:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\delta(t-\tau)d\tau=\begin{cases} 0 & t>0 & \delta(t-\tau)=0 \\ 1 & t<0 & \delta(t-\tau)=u(t)\delta(t) \end{cases}$$

۱,٤۰ الف) نشان دهید اگر یک سیستم یا جمع پذیر باشد یا همگن ، به ازای ورودی متحد با صفر، خروجی متحد با صفر بدست می دهد.
ب) سیستمی (پیوسته یا گسسته در زمان) تعیین کنید که نه جمع پذیر باشد و نه همگن، ولی به ازای ورودی متحد با صفر خروی متحد با صفر ایجاد کند.
ج) با توجه به بند (الف) آیا می توان نتیجه گرفت که اگر ورودی یک سیستم خطی بین زمانهای t_1 و t_2 در حال پیوسته در زمان یا بین n_1 و n_2 در حالت گسسته در زمان صفر باشد، خروجی نیز باید در آن فاصله صفر باشد؟ توضیح دهید.

حل:

الف) اگر یک سیستم جمع پذیر باشد در اینصورت:

$$\circ = x(t) - x(t) \rightarrow y - y(t) = \circ$$

ب) بعنوان یک سیستم می باشد.

$$y(t) = x^2(t)$$

ج) خیر. برای مثال $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ با $x(t)=u(t)=-u(t-1)$ را در نظر بگیرید.
در این صورت $x(t)$ برای $t>1$ برابر صفر است اما $y(t)$ برای $t>1$ مقدار (۱) را دارد.

۱,٤۱) سیستم S را با ورودی $x[n]$، خروجی $y[n]$ و رابطه ورودی ـ خروجی زیر در نظر بگیرید.

$$y[n] = x[n]\{g[n] + g(n-1)\}$$

الف) نشان دهید اگر به ازای همه مقادیر n، $g[n]=1$ آنگاه سیستم S تغییرناپذیر با زمان است.
ب) نشان دهید که اگر $g[n]=n$، آنگاه سیستم S تغییرناپذیر با زمان نیست.
ج) نشان دهید که اگر $g[n]=1+(-1)^n$، آنگاه سیستم S تغییرپذیر با زمان است.

حل:

الف) $y[n]=2x[n]$ بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان است.
ب) $y[n]=(2n-1)x[n]$ سیستم تغییرپذیر با زمان است زیرا $y[n+N_\circ] \neq (2n-1)x[n-N_\circ]$.
پ) $y[n]=x[n]\ \left(1+(-1)^n+1+(-1)^{n-1}\right)=2x[n]$ بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

۱,٤۲)

الف) گزاره زیر درست است یا نادرست؟

اتصال سری دو سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، سیستمی خطی و تغییرناپذیر با زمان است. پاسخ خود را با دلیل بیان کنید.

ب) گزاره زیر درست است یا نادرست؟

اتصال سری دو سیستم غیرخطی یک سیستم غیرخطی است. پاسخ خود را با دلیل بیان کنید.

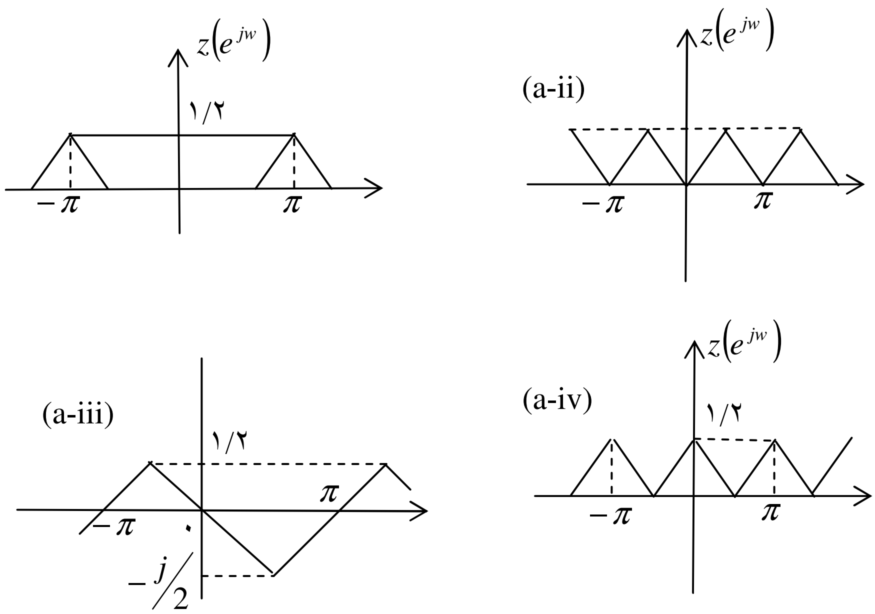
ج) سه سیستم با روابط ورودی ـ خروجی زیر در نظر بگیرید

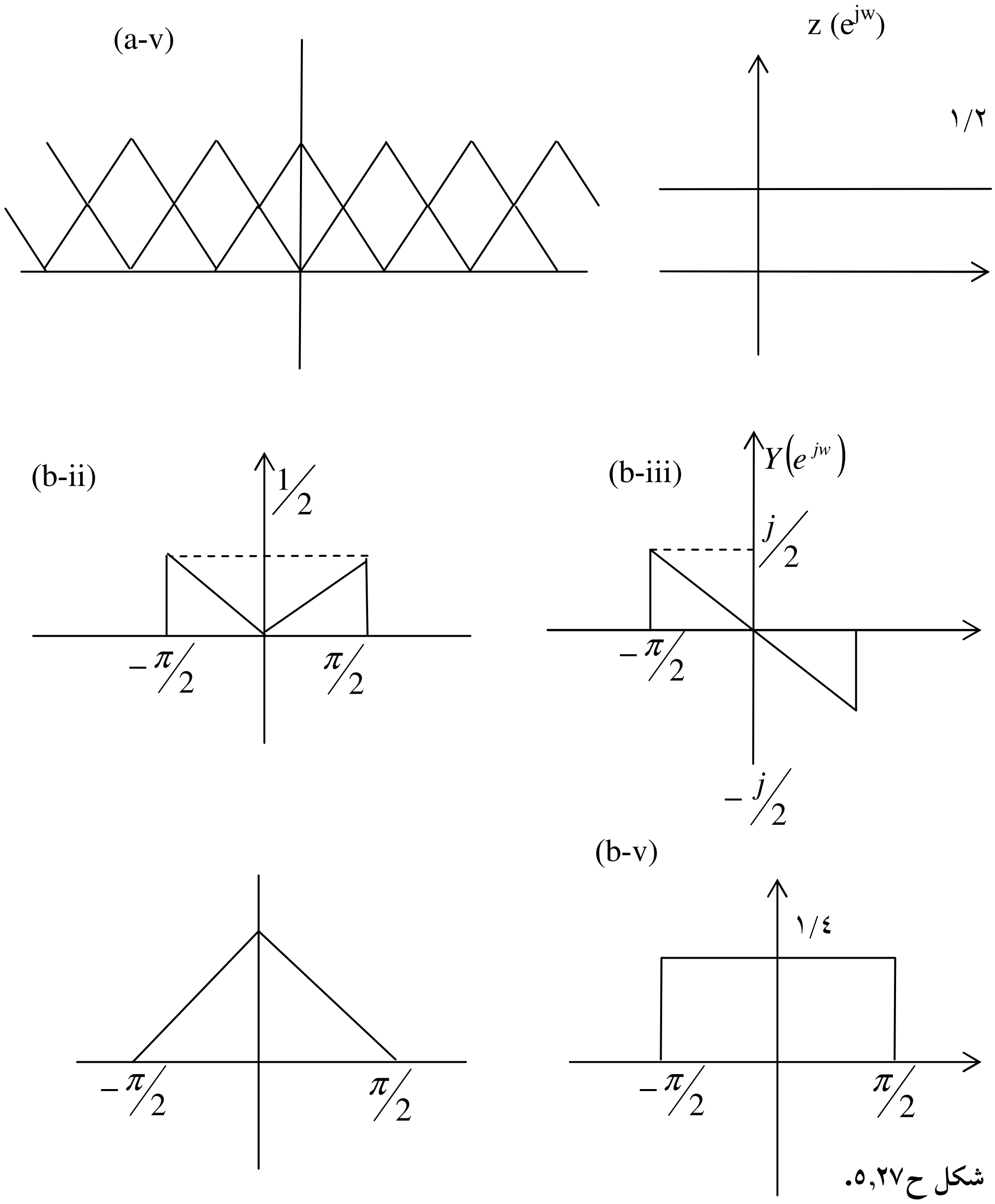
سیستم ۱ : $y[n]=\begin{cases} x[n/2] & n \text{ زوج} \\ \circ & n \text{ فرد} \end{cases}$

سیستم ۲ : $y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]$

سیستم ۳ : $y[n]=x[2n]$

فرض کنید که این سیستمها مطابق شکل م ۲-٤۲ به صورت سری بسته شده اند. رابطه ورودی ـ خروجی سیستم کل را بیابید. آیا این سیستم خطی است؟ آیا تغییرناپذیر با زمان است؟





شکل ح۵,۲۷.

حل:

الف) دو سیستم S۱ و S۲ را که به صورت سری بهم وصل شده اند در نظر بگیرید. فـرض کنیـد اگـر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ورودی های S_1 باشند آنگـاه $y_1(t)$ و $y_2(t)$ خروجـی هـای آن خواهنـد بـود.

همچنین فرض کنید که اگر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ ورودی های سیستم ۲ باشند در این صورت $z_1(t)$ و $z_2(t)$ خروجی های سیستم S۲ خواهند بود. چون S۱ خطی است.پس می توانیم بنویسیم:

$$ax_1+bx_2(t)\xrightarrow{si}\alpha y_1(t)+by_2(t)$$

که b , a، ثابت هستند. از آنجایی که S۲ نیز خطی است پس می توان نوشت:

$$ay_1(t)+by_2(t)\xrightarrow{S_L}az_1(t)+bz_2(t)$$

نتیجه می گیریم که

$$.ax_1(t)+bx_2(t)\xrightarrow{S_1S_2}a_1z_1(t)+bz_2(t)$$

بنابراین ترکیب سری S۱ و S۲ خطی است.

از آنجایی که S۱ خطی است، می توانیم بنویسیم.

$$x_1(t-T_\circ)\xrightarrow{S_1}y_1(t-T_\circ)y,$$

,

$$y_1(t-T_\circ)\xrightarrow{S_2}x_1(t-T_\circ)$$

بنابراین:

$$x_1(t-T_\circ)\xrightarrow{s_1.s_2}Z_1(t-T_\circ)$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که اتصال سری دو سیستم S۱ و S۲ تغییرناپذیر با زمان است.

ب) نادرست,

فرض کنید $y(t)=x(t)+1$ و $z(t)=y(t)-1$ که نشان می دهد سیستم ۲ غیرخطی اند. اگر سیستم ها به صورت سری وصل شوند $z(t)=x(t)$ سیستم خطی خواهد بود.

پ) فرض کنید خروجی سیستم ۱/۱ $\omega[n]$وخروجی سیستم ۱/۲ $z[n]$ بنامیم در اینصورت:

$$\begin{aligned} y\,[n]&=x\,[2n]=\omega[2n]+\tfrac{1}{2}\,\omega[2n-]+\tfrac{1}{4}\,\omega[2n-2] \\ &=x\,[n]+\tfrac{1}{2}\,x\,[n-1]+\tfrac{1}{4}\,x\,[n-2] \end{aligned}$$

سیستم کلی خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود

(۱,٤٣

الف) سیستم LTI با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر $x(t)$ دوره متناوب با دوره تناوب T باشد، $y(t)$ نیز چنین است. نشان دهید که برای حالت گسسته در زمان نیز نتیجه مشابهی بدست می آید.

ب) مثالی از یک سیستم تغییرناپذیر با زمان با سیگنال ورودی نامتناوب $x(t)$ بیان کنید که خروجی $y(t)$ و به صورت متناوب به دست دهد.

حل:

الف) داریم:

$$x(t) \xrightarrow{s} y(t)$$
$$x(t-T) \xrightarrow{s} y(t-T)$$

حال اگر، $x(t)$ با تناوب T، متناوب باشد، $x(t)=x(t-T)$ در این صورت نتیجه می گیریم که $y(t)=y(t-T)$ با دوره تناوب T، متناوب است. دلیلی مشابه برای سیستم های گسسته نیز صدق می کند.

١,٤٤) الف) نشان دهید که علی بودن برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان با بیان زیر هم ارزست:

به ازای هر زمان $t_\circ$ و هر سیگنال $x(t)$ با $x(t)=\circ$ در $t<t_\circ$، خروجی $y(t)$ نیز باید در $t<t_\circ$ صفر باشد.

برای حالت گسسته در زمان نیز می توان گزاره مشابهی بیان کرد.

ب) یک سیستم غیرخطی بیابید که شرطفوق را داشته باشد، ولی علّی نباشد.

ج) یک سیستم غیرخطی بیابید که علّی باشد، ولی این شرط را ارضا نکند.

د) نشان دهید که وارونپذیری یک سیستم گسسته در زمان خطی معادل بیان زیر است:

تنها ورودی ایجادکننده $y[n]=\circ$، برای تمام مقادیر n، $x[n]=\circ$، برای تمام مقادیر n، است. برای سیستمهای خطی پیوسته در زمان نیز گزاره مشابهی صدق می کند.

هـ) یک سیستم غیرخطی بیابید که شرط بند (د) را ارضا کند ولی وارونپذیر نباشد.

حل:

الف) فرض کنید: اگر $x(t)=\circ$ برای $t<t_\circ$، در این صورت برای $t<t_\circ$، $y(t)=\circ$ برای اثبات اینکه سیستم کازال است:

فرض کنید $x_1(t)$ سیگنال دلخواهی است. فرض کنیم $x_2(t)$ سیگنال دیگری است که در $t<t_\circ$ مشابه $x_1(t)$ می باشد. اما برای $t<t_\circ$؛ $x_2(t)\neq(t)$ است. از آنجایی که سیستم خطی است:

$$x_1(t)-x_2(t)\rightarrow y_1(t)-y_2(t)$$

چون برای $t<t_\circ$ $x_1(t)-x_2(t)=\circ$ فرض ما برای $t<t_\circ$ $y_1(t)-y_2(t)=\circ$. این نشان می دهد که برای $t<t_\circ$ $y_1(t)-y_2(t)$. به عبارت دیگر برای $t<t_\circ$ خروجی از ورودی نمی پذیرد. ازینرو سیستم سیستم کازال است.

فرض: سیستم کازال است. نشان می دهیم که اگر برای $t<t_\circ$، $x(t)=\circ$ در اینصورت برای $t<t_\circ$، $x(t)=\circ$.

فرض کنید برای $t<t_\circ$ سیگنال $x(t)$ برابر صفر است: $x(t)=\circ$.

در این صورت می توان بیان کرد $x(t)=x_1(t)-x_2(t)$ که $x_1(t)=x_2(t)$ برای $t<t_\circ$.

از آنجایی که خروجی سیستم خطی برابر است با $y(t)=y_1(t)-y_2(t)$.

حال، از آنجایی که سیستم کازال است $y_1(t)=y_2(t)$ برای $t<t_\circ$. بنابراین $t<t_\circ$، $y(t)=\circ$.

ب) فرض کنید $y(t)=x(t)x(t+1)$ حال، برای $t<t_\circ$، $x(t)=\circ$ بیان می دارد که برای $t<t_\circ$، $y(t)=\circ$. به خاطر داشته باشید که سیستم غیرخطی و غیرکازال است.

ج) فرض کنید $y(t)=x(t)+1$، این سیستم خطی اما کازال است. که شرط قسمت (۱) را ارضاء نمی کند.

د) فرض: سیستم تغییرناپذیر با زمان است. نشان می دهیم که $y[n]=\circ$ برای تمام مقادیر n اگر $x[n]=\circ$ فرض کنید.

$$x[n]=\circ\rightarrow y[n]$$

چون ورودی در دو معادله ی بالا تغییر نیافت. بایستی $y[n]=2y[n]$. این امر بیان می کند که $y[n]=\circ$. از آنجایی که فرض کردیم سیستم تغییرناپذیر با زمان است، تنها یک ورودی می تواند به یک خروجی خاص منجر شود. و این ورودی باید به صورت $x[n]=\circ$ باشد.

فرض: به ازای همه مقادیر n $y[n]=\circ$ اگر $x[n]=\circ$ برای کل n. نشان می دهیم که سیستم تغییرناپذیر است:

فرض کنید:

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$
,
$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$

از آنجایی که سیستم خطی است:

$$x_1[n] - x_2[n] \rightarrow y_1[n] - y_1[n] = \circ$$

با توجه به فرض اصلی، بایستی نتیجه بگیریم که $x_1[n] = x_2[x]$، یعنی هر $y_1[n]$ خاصـی مـی توانـد توسط یک ورودی $x_1[n]$ تولید شود. بنابراین سیستم تغییرناپذیر است.

ت)

$$y[n] = x^2[n]$$

۱,٤٥) در مسئله ۱–۳۷ مفهوم تابع همبستگی را معرفی کـردیم. محاسـبه تـابع همبـستگی $\Phi_{hx}(t)$ در حالتی که $h(t)$ سیگنال معینی است، ولی $x(t)$ می تواند هر سیگنالی باشد، از لحاظ عملی مهم اسـت. برای این منظور سیستم S طراحی می کنند که ورودی آن $x(t)$ و خروجی آن $\Phi_{hx}(t)$ باشد.

الف) آیا S خطی است؟ آیا S تغییرناپذیر با زمان است؟ آیا S علّی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

ب) اگر خروجی به جای $\Phi_{hx}(t)$، $\Phi_{xh}(t)$ باشد آیا پاسخهای بند (الف) تغییر می کند یا نه؟

حل:

فرض کنید:

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \phi_{hx_1}(t)$$
$$x_2(t) \xrightarrow{s} y_2(t) = \phi_{hx_2}(t)$$

حال فرض کنید: $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ خروجی سیستم متناظر برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_3(\tau)h(t+\tau)d\tau \\ &= a\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)h(t+\tau)d\tau + b\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)h(t+\tau)d\tau \\ &= a\phi_{hx_1}(t) + b\phi_{hx_2}(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

بنابراین $ خطی است.

حال، فرض کنیم: $x_4(t) = x_1(t-T)$، خروجی سیستم متناظر برابر خواهد بود با:

$$y_4(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_4(\tau)h(t+\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau-T)h(t+\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{-\infty}x_1(\tau)h(t+\tau+T)d\tau$$
$$=\phi_{hx_1}(t+T)$$

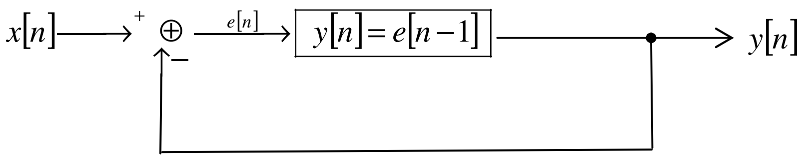
پر واضح است که $y_4(t)\neq y_1(t-T)$ بنابراین، سیستم تغییرپذیر با زمان است.

سیستم بطور توصیفی کازال نیست زیرا خروجی درهر زمان به زمان آینده سیگنال ورودی $x(t)$ وابسته است.

۱٫٤٦) سیستم فیدبک دار شکل ۱-٤٦ را در نظر بگیرید و فرض کنید که به ازای $n<0$ داریم $y[n]=0$.

الف) خروجی را به ازای $x[n]=\delta[n]$ رسم کنید

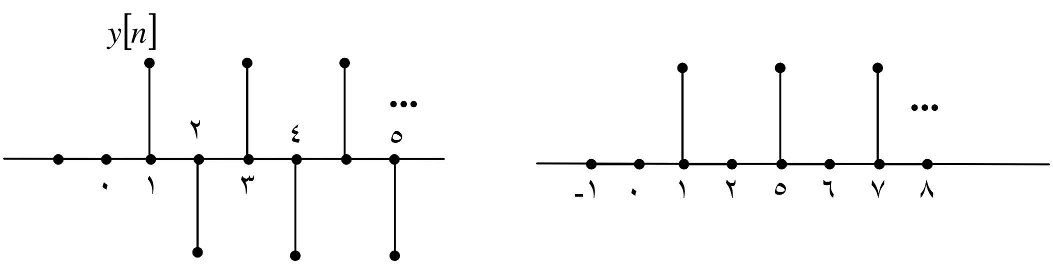
ب) اگر $x[n]=u[n]$ باشد، خروجی را رسم کنید.



شکل م ۱-٤٦

حل:

طرح در شکل ح **۱٫٤٦** رسم شده است.



شکل ح **۱٫٤٦**

۱,٤۷) الف) فرض کنید که S یک سیستم نمواً خطی، $x_1[n]$ یـک سـیگنال ورودی دلخـواه، و $y_1[n]$ خروجی متناظر با آن است. سیستم شکل م ۱–٤۷ (الف) را در نظر بگیرید. نشان دهید که این سیـستم خطی می باشد و در واقع رابطه کلی ورودی ـ خروجی بین $x[n]$ و $y[n]$ به انتخـاب $x_1[n]$ بـستگی ندارد.

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که S را می توان به صورت شکل ۱–٤۸ نمایش داد.

ج) کدام یک از سیستمهای زیر نمواً خطی است؟ پاسخ خود را با دلیل بیان کنید و اگر سیـستمی نمـواً خطی است، سیستم خطی L و پاسخ ورودی صـفر $y_\circ[n]$ یـا $y_\circ(t)$ آن را بـرای نمـایش سیـستم بـه صورت شکل ۱–٤۸ بیابید.

$$y[n]=n+x[n]+2x[n+4] \qquad \text{(i)}$$

$$y[n]=\begin{cases} n/2 & (n-1)/2 \qquad , \quad n \text{ زوج} \\ (n-1)\Big/\left(1+\sum_{k=-\infty}^{(n-1)/2} x[k]\right) & , \quad n \text{ فرد} \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

$$y[n]=\begin{cases} x[n]-x[n-1]+3 & , x[\circ]\geq\circ \\ x[n]-x[n-1]-3 & , x[\circ]<\circ \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

(iv) سیستم شکل م ۱–٤۷ (ب)

(v) سیستم شکل م ۱–٤۷ (ج)

(د) فرض کنید یک سیستم نمواً خطی خاص نمایشی مطابق شکل ۱–٤۸ دارد کـه L سیـستم خطـی و تغییرناپذیر با زمان و $y_\circ[n]$ پاسخ به ورودی صفر آن است. نشان دهید که S تغییرناپذیر با زمان است اگر و تنها S تغییرناپذیر با زمان و $y_\circ[n]$ ثابت باشد.

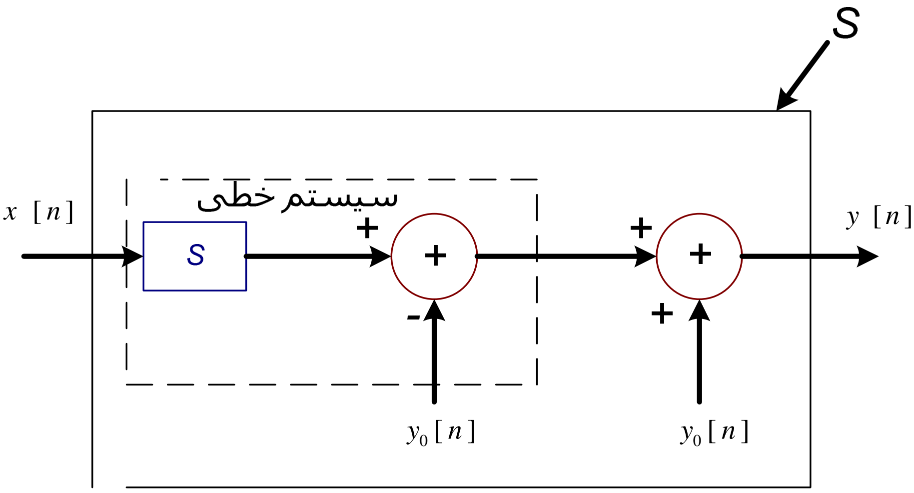
حل:

الف) { پاسخ سیستم به $x_1[n]$ }– { پاسخ سیستم به $x_1[n]+(x[n])$ } = پاسخ کلی سیستم شکل م–٤۷ (الف)

= { پاسخ ورودی صفر سیستم + پاسخ یک سیستم خطی L به $x_1[n]+(x[n])$ }

–{ پاسخ یک سیستم خطی L به ورودی (پاسخ صفر سیستم + $x_1[n]$) }

= { پاسخ یک سیستم خطی L به $x[n]$ }



شکل ح۱,٤۷

ب) اگر $x_1[n]=0$ برای تمامی n، در این صورت $y_1[n]$ نمایش ورودی صفر $y_0[n]$ خواهد بود.
S ممکن است در این صورت دوباره همانند شکل ۱,٤۷ S رسم شود. این مشابه شکل ۱,٤۸ است.

ج) i) تعمیم خطی

$$x[n] \rightarrow x[n]+2x[n+1] \quad \text{و} \quad y_0[n]=n$$

ii) تعمیم خطی

$$x[n] \rightarrow \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\frac{0(n-1)}{2}} x[k] & n \ \text{زوج} \\ & n \ \text{فرد} \end{cases}$$

و

$$y_0[n]=\begin{cases} n/2 & n \ \text{زوج} \\ (n-2)/2 & n \ \text{فرد} \end{cases}$$

iii) تعمیم خطی نیست: با انتخاب $y_0[n]=3$ داریم:

$$y[n]-y_{\circ}[n]=\begin{cases}x[n]=x[n-1] & x[\circ]\geq\circ\\ x[n]-x[n-1]-6 & x[\circ]<\circ\end{cases}$$

اگـــر $x_1[n]=-\delta[n]$ و $x_2[n]=-2\delta[n]$ در اینـــصورت $y_1[n]=-\delta[n]+\delta[n-1]-6$ و

$2y_1[n]\neq y_2[n]=-2\delta[n]+2\delta[n-1]-6$

iv) تعمیم خطی

$$x(t)\rightarrow x(t)+t\frac{dx(t)}{dt}-1 \text{ و } y_{\circ}(t)=1$$

V تعمیم خطی:

$$x[n]\rightarrow 2\cos(\pi n)x[n] \text{ و } y_{\circ}[n]=\cos^2(\pi n)$$

$$x[n]\xrightarrow{s} y[n] \text{ و}$$

د) فرض کنیـد: $x[n]\xrightarrow{s} y[n]$ و $x[n]\rightarrow z[n]$ در ایـن صـورت $y[n]=z[n]+c$، بـرای تغییرناپذیری نیاز داریم که وقتی ورودی $x[n-n_{\circ}]$ باشد، خروجی با:

$$y[n-n_{\circ}]=z[n-n_{\circ}]+c$$

برابر شود» این نشان می دهد که:

$$x[n-n_{\circ}]\xrightarrow{\ell} z[n-n_{\circ}]$$

در بازگـشت نـشان مـی دهـد کـه ℓ بایـد تغییرناپـذیر بـا زمـان باشـد. همینطـور مـی خـواهیم کـه $y[n]=c \leftarrow c$ ثابت مستقل از n باشد.

۱,۴۸) $z_{\circ}$ را عدد مختلطی با مختـصات قطبـی $(r_{\circ},\theta_{\circ})$ و مختـصات دکـارتی $(x_{\circ},y_{\circ})$ فـرض کنیـد. عبارتهایی برای مختصات دکارتی اعداد مختلط زیر برحسب $x_{\circ}$ و $y_{\circ}$ پیـدا کنیـد. نقطـه هـای $z_{\circ}$، z_1، z_2، z_3، z_4، و z_5 رادر صـــفحه مخـــتلط بـــه ازای $r_{\circ}=2$ و $\theta_{\circ}=\pi/4$ و بـــه ازای $r_{\circ}=2$ و $\theta_{\circ}=\pi/2$ رسم کنید. بخشهای حقیقی و موهومی هر نقطه را مشخص کنید.

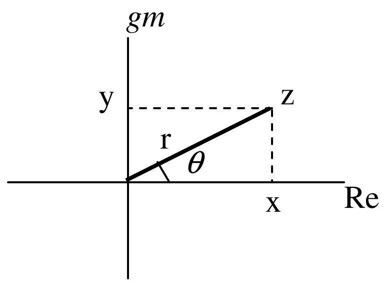
الف) $z_1=r_{\circ}e^{-j\theta_{\circ}}$

ب) $z_2=r_{\circ}$

ج) $z_3=r_{\circ}e^{j(\theta_{\circ}+\pi)}$

د) $z_4=r_{\circ}e^{j(-\theta_{\circ}+\pi)}$

هـ) $z_5=r_{\circ}e^{j(\theta_{\circ}+2\pi)}$



شکل م ۱-۴۸

حل:

داریم:

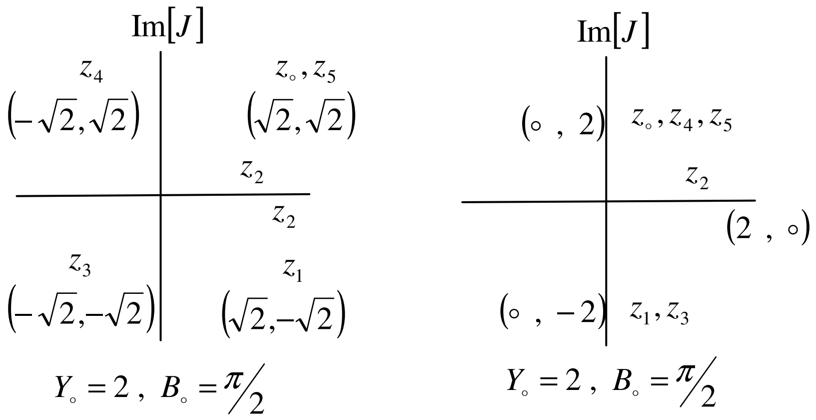
$$z_\circ = r_\circ e^{j\theta_\circ} \cos\theta_\circ tjr \circ \sin\theta = x_\circ + jy_\circ$$

الف) $z_1 = x_\circ - jy_\circ$ ب) $z_2 = \sqrt{x_\circ^2 + y_\circ^2}$

ج) $z_3 = -x_\circ - jy_\circ = -z_\circ$ د) $z_4 = -x_\circ + jy_\circ$

هـ) $z_5 = x_\circ + jy_\circ$

در شکل ح ۱٫۴۸ نمایشی از نقاط داده شده آمده است .



شکل ح۱٫۴۸

۱٫۴۹) هر یک از اعداد مختلط زیر رابه شکل قطبی بیان کنید، آنها را در صفحه مختلط نـشان دهیـد و اندازه و زاویه هر عدد را مشخص کنید.

الف) $1 + j\sqrt{3}$

ب) ۵-

ج) $-5-5j$

د) $3+4j$

هـ) $\left(1-j\sqrt{3}\right)^{3}$

و) $(1+j)^{5}$

ذ) $\left(+\sqrt{3}j^{3}(\ )1-j\right.$

خ) $\dfrac{2-j\left(6/\sqrt{3}\right)}{2+j\left(6/\sqrt{3}\right)}$

ط) $\dfrac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$

ی) $j(1+je)^{j\pi/6}$

ک) $\left(\sqrt{3}+j\right)2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$

ل) $\dfrac{e^{j\pi/3}-1}{1+j\sqrt{3}}$

حل:

الف) در اینجا $r=\sqrt{1+3}=2$ و نیز $\cos\theta=\frac{1}{2}$ و $\sin\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}$ این بیان می دارد که $\theta=\frac{\pi}{3}$. بنابراین.

الف) $1+j\sqrt{3}=2e^{j\pi 13}$ ب) $5e^{j\pi}$ ج) $5\sqrt{2}e^{j3\pi/4}$

د) $5e^{j\,\text{تان}^{-1}\left(4/3\right)}=5e^{j\left(53.13^{\circ}\right)}$ هـ) $8e^{-j\pi}$ و) $4\sqrt{2}e^{j\frac{5\pi}{4}}$

ذ) $2\sqrt{2e^{-j\frac{5\pi}{12}}}$ خ) $e^{-j2\pi/3}$ ط) $e^{j\pi/6}$

ک) $\sqrt{2}e^{j11\pi/12}$ ل) $4\sqrt{2}e^{-j\pi/12}$ م) $\frac{1}{2}e^{j\pi/3}$

۱,۵۰)

الف) با استفاده از رابطه اویلر یا شکل م ۱–۴۸ عبارتی برای x و y برحسب r و θ بیابید.

ب) عبارتی برای r و θ برحسب x و y تعیین کنید.

ج) اگر r و θ معلوم باشد آیا می توانیم x و y را به طور یکتا تعیین کنیم؟ درباره جواب خود توضیح بدهید.

حل:

(الف) $x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

(ب) داریم: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\cos^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = y^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$$

اگر $r = ٠$ باشد θ تعریف نشده است. از آنجا که θ و $\theta + 2m\pi$ (که در آن $m\theta\pi$) نتیجه مشابهی دارند θ یکتا نمی باشد.

(ج) θ و $\theta + \pi$ مقادیر یکسانی از لحظات مثلثاتی دارند تنها می دانیم که عدد مختلط برابر است با $z_1 re^{j\theta}$ یا $-z_1 = z_2 = re^{j(\theta+\pi)}$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad (\text{ح}١-١,٥١)$$

و

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \qquad (\text{ح}١,٥١,٢)$$

با ادغام (ح١-١,٥١) و (ح٢-١,٥١) داریم:

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{j\theta}\right)$$

(د) با جایگذاری معادله (ح١,٥١,٢) در (S١,٥١,١) داریم:

$$\sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

(هـ) می‌دانیم که $e^{j(\theta+\phi)} = e^{j}e^{j\phi}$ بنابراین:

$$\cos(\theta+\phi) + j\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta sos\phi - \sin\theta\sin\phi) + (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \qquad (\text{ح}١,٥١,٣)$$

با قرار دادن $\theta = \phi$ در معادله ی (S١,٥١,٣) داریم:

$$\cos_2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

و با قرار دادن $\theta = -\phi$ در معادله (ح۱-۵۱,۳) داریم:

$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

با جمع زدن دو رابطه فوق و خلاصه سازی خواهیم داشت:

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

و)با معادلسازی قسمت حقیقی (S۱,۵۱۳) با آرگمان $(\theta+\phi)$و $(\theta-\phi)$ داریم:

$$\cos(\phi+\theta) = \cos\theta\cos\phi - \sin\phi\sin\theta$$

,

$$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$$

با ادغام در رابطه فوق داریم:

$$\sin\theta\sin\phi = \tfrac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)]$$

ذ) معادلسازی قسمت موهومی در معادله (S۱,۵۱,۳) داریم:

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$

۱,۵۲) z را یک متغیر مختلط فرض کنید، یعنی

$$z = x + jy = re^{j\theta}$$

مزدوج مختلط z فرض کنید، یعنی

$$z = x + jy = re^{j\theta}$$

روابط زیر را به دست آورید، z ، z_1 و z_2 اعداد مختلط دلخواهی هستند.

الف) $zz^* = r^2$

ب) $\dfrac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$

ج) $z + z^* = 2\operatorname{Re}\{z\}$

د) $z - z^* = 2jgm\{z\}$

هـ) $(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

و) $(az_1z_2)^* = az_1^*z_2^*$ ، a حقیقی است

ز) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

خ) $\operatorname{Re}\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}\frac{z_1 z_* + z_1^* z_2^*}{z_2 z_2^*}$

حل:

الف)

$$zz^* = re = re^{je} re^{-j\theta} = r^2$$

ب)

$$z/_{z^*} = re^{j\theta} r^{-1} e^{j\theta} = e^{j2\theta}$$

ج)

$$z + z^* = x + jy + x - jy = 2x = 2\operatorname{Re}\{x\}$$

د)

$$z - z^* = x + jyx + jy = 2jy = 2\ \operatorname{Im}\{x\}$$

و)

$$(z_1 + z_2)^* = ((x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2))^* = x_1 - jy_1 + x_2 - jy_2 = z_1^* + z_2^*$$

ذ)

فرض کنید برای $(\alpha_1 z_1 z_2)^*$، $\alpha > \circ$

$$(az_1 z_2)^* = \left(|a| r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \pi)}\right)^* = |a| e^{j\pi} r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{-j\theta_2} = az_1^* z_2^*$$

برای $a < \circ$، $a = |a| e^{j\pi}$ بنابراین

$$(az_1 z_2)^* = \left(|a| r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \pi)}\right)^* = |a| e^{-j\pi} r_1 e^{-j\theta_1} r_2 e^{-j\theta_2} = az_1^* z_2^*$$

برای $|x_2| \neq \circ$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{r_1}{r_2} e - j\theta_1 e j\theta_2 = \frac{r_1 e^{-j\theta_1}}{r_2 e^{-j\theta_2}}$$

خ) از (ج) می توان نوشت:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*\right\}$$

با استفاده از (ذ) در این مسئله داریم:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{Z_1}{Z_2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)+\left(\frac{Z_1^*}{Z_2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{Z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*}\right]$$

۱٫۵۳) روابط زیر را برای اعداد مختلط دلخواه z_1، z_2، و z_3 ثابت کنید.

الف) $\left(e^z\right)^* = e^{z*}$

ب) $z_1 z_2^* + z_1^* = 2\operatorname{Re}\{z_1, z_2^*\} = 2\operatorname{Re}\{z_1^* z_2\}$

ج) $\left|z^*\right| = |z|$

د) $\left|z_1 z_2^* + z_1^* z_2\right| \le 2|z_1 z_2|$

هـ) $g_m\{z\} \le |z|\,,\ \operatorname{Re}\{z\} \le |z|$

و) $\left|z_1 z_2^* + z_1^*\right| \le 2|z_1 z_2|$

ز) $\left(|z_1| - |z_2|\right)^2 \le |z_1|^2 \le \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$

حل:

الف)

$$\left(e^z\right)^* = \left(e^x e^{jy}\right)^* = e^x e^{-jyx-jy} = e^{z^*}$$

ب) فرض کنید $z_3 = z_1 z_2^*$ و $z_4 = z_1^* z_2$ در این صورت

$$z_1 z_2^* + z_1^* z_2 = z_3 + z_3^* = 2\operatorname{Re}\{z_3\} = 2\operatorname{Re}\{z_1 z_2^*\}$$
$$= z_4^* + z_4 = 2\operatorname{Re}\{z_4\} = 2\operatorname{Re}\{z_1^* z_2\}$$

ج)

$$|x| = \left|re^{j\theta}\right| = r = \left|re^{-j\theta}\right| = \left|z^*\right|$$

ه) از آنجایی که $z = x + jy$ و $|z| = \sqrt{z} = \sqrt{x^2 + y^2}$. با نامساوی مثلثی :

$$\mathrm{Re}\{z\} = x \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

,

$$\mathrm{Im}\{z\} = y \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

(د)

$$\left|z_1 z_2^* + z_1^* z_2\right| = \left|2\,\mathrm{Re}\{z_1 z_2^*\}\right| = \left|2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right| \le 2r / r_2 = 2|z_1 z_2|$$

و) از آنجایی که $r_1 > ٠$ و $r_2 > ٠$ و $-1 \le \cos(\theta_1 - \theta_2) \le 1$

$$(|z_1| - |z_2|)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= |z_1 + z_2|^2$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = r_1^2 + r_2^2 + z\, {}^{r}\!/_{r_2} \ge |z_1 + z_2|^2$$

١,٥٤) روابط بیان شده در این مسئله در این کتاب زیاد کاربرد دارند.

الف) درستی رابطه زیر را ثابت کنید

$$\sum_{n=٠}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \dfrac{1 - a^N}{1 - a} & a \ne 1 \text{ هر عدد مختلط} \end{cases}$$

این را فرمول جمع محدود می نامند.

ب) نشان دهید اگر $|a| < 1$، آنگاه

$$\sum_{n=٠}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$

این را فرمول جمع نامحدود می نامند.

ج) نشاندهید که به ازای $|a| < 1$

$$\sum_{n=٠}^{\infty} n a^n = \frac{a}{(1 - a)^2}$$

(د) جمع زیر را به ازای $|a| < 1$ حساب کنید.

$$\sum_{n=-2}^{7} e^n$$

حل:

الف) $\alpha = 1$ کاملاً مشخص است که:

$$\sum_{n=\circ}^{N-1} a^n = N$$

برای $\alpha \neq 1$ می توان نوشت:

$$(1-\alpha)\sum_{n=\circ}^{N-1} a^n = \sum_{n=\circ}^{N-1} a^n - \sum_{n=\circ}^{N-1} a^{n+1} = 1-\alpha$$

بنابراین:

$$\sum_{n=\circ}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-\alpha}$$

ب) برای $|\alpha| < 1 \quad \Leftarrow$

$$\underset{N\to\infty}{Lim} a^N = \circ$$

بنابراین از نتیجه قسمت قبلی داریم:

$$\underset{N\to\infty}{Lim} \sum_{n=\circ}^{N-1} a^n = \sum_{n=\circ}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

ج) مشتق گیری دو طرف نتیجه قسمت (الف) و (ب) داریم:

$$\frac{d}{d.\alpha}\left(\sum_{n=\circ}^{\infty} \alpha^N\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$$= \sum n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

د) می توان نوشت:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a^n = a^k \sum_{n=\circ} a^n = \frac{a^k}{1-\alpha} \qquad for\, |\alpha| < 1$$

۱,۵۵) با استفاده از نتایج مسئله ۱-۵٤ جمعهای زیر را محاسبه کنید و جواب را بـه شـکل قـائم بیـان کنید.

الف) $\sum_{n=\circ}^{9} e^{j\pi n/2}$

ب) $\sum_{n=-2}^{7} e^{j\pi n/2}$

ج) $\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} e^{j\pi n/2}$

د) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} e^{j\pi n/2}$

هـ) $\sum_{n=\circ}^{9}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

و) $\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

حل:

الف) مجموع مطلوب عبارتست از :

$$\sum_{n=\circ}^{9} e\pi {}^{n}\!/_{2}=\frac{1-e^{i\pi 10/2}}{1-e^{i\pi/2}}=1+j$$

ب) مجموع خواسته شده برابر است با:

$$\sum_{n=-2}^{7} e^{j\pi n/2}=e^{j\pi n/2}=e^{-j\frac{2\pi}{2}}\sum_{n=\circ}^{9} e^{jn\pi/2}=-(1+j)$$

ج) حاصل مطلوب عبارتست از:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\left({}^{1}\!/_{2}\right)^{x} e^{j\pi\eta/2}=\frac{1}{1-\left({}^{1}\!/_{2}\right)e^{j\pi/2}}=\frac{4}{5}+j\frac{2}{5}$$

د) سری عبارتست از:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left({}^{1}\!/_{2}\right)^{n} e^{j\pi n/2}=\left({}^{1}\!/_{2}\right)^{2} e^{j\pi 2/2}=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left({}^{1}\!/_{2}\right)^{\eta} e^{j\pi n/2}={}^{1}\!/_{4}\left(\frac{4}{5}+j\frac{2}{5}\right)$$

هـ)

$$\sum_{n=\circ}^{9}\cos\left(n\,\pi/2\right)={}^{1}\!/_{2}\sum_{n=\circ}^{9} e^{\pi n/2}+{}^{1}\!/_{2}\sum_{n=\circ}^{9} ej\pi {}^{n}\!/_{2}$$
$$={}^{1}\!/_{2}(1+j)+{}^{1}\!/_{2}(1-j)=1$$

و) سری مورد نظر برابر است با:

$$\sum \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\eta} \cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\eta} . e^{j\pi n/2} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\eta} e^{-j\pi n/2}$$
$$= \tfrac{4}{10} + j\tfrac{2}{10} + \tfrac{4}{10} - j\tfrac{2}{10} = \tfrac{4}{5}$$

۱,٥٦) انتگرالهای زیر را محاسبه کرده، جواب به شکل قائم بیان کنید.

الف) $\int_{\circ}^{4} e^{j\pi t/2} dt$

ب) $\int_{\circ}^{6} e^{j\pi t/2} dt$

ج) $\int_{2}^{8} e^{j\pi t/2} dt$

د) $\int_{\circ}^{\infty} e^{-(1+j)} dt$

هـ) $\int_{\circ}^{\infty} e^{-t} \cos t\, dt$

و) $\int_{\circ}^{\infty} e^{-2t} \sin(3t) dt$

حل:

انتگرال های مورد نظر:

الف)

$$\int_{\circ}^{4} e^{j\pi t/2} dt = \frac{e^{\pi t/2}}{j\,\pi/2} \int_{\circ}^{4} = \circ$$

ب)

$$\int_{\circ}^{4} e^{\text{int}/2} dt = \frac{e^{\pi/2}}{j\pi/2} \int_{\circ}^{6} = \left(\frac{2}{\pi_j}\right)\left[e^{j3\pi} - 1\right] = \frac{4j}{\pi}$$

ج)

$$\int_{2}^{8} e^{j\pi t/2} dt = \frac{e^{\pi t/2}}{j\pi/2} \int_{2}^{8} = \left(2/j\pi\right)\left[e^{j4\pi} - e^{j\pi}\right] = -4\, j/\pi$$

د)

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-(1+j)t}\,dt = \frac{e^{(1+j)t}}{-(1+j)}\int_{\circ}^{\infty} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-j}{2}$$

انتگرال مورد نظر عبارتست از:

هـ)

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-t}\cos t\,dt = \int_{\circ}^{\infty}\left[\frac{e^{-(1+j)t} + e^{-(1-j)t}}{2}\right]dt$$

$$= \frac{1/2}{1+j} + \frac{1/2}{1-j} = 1/2$$

و) انتگرال مطلوبست برابر است با:

$$\text{ذ)}\int_{\circ}^{\infty} e^{-2}\sin 3tdt = \int_{\circ}^{\infty}\left[\frac{e^{-(2-3)j}e^{-(2+3)t}}{}\right] = \frac{1/2\,j}{2-3j} + \frac{1/2\,j}{2+3j} = \frac{3}{13}$$

فصل دوم

۲,۱) فرض کنید

$$h[n]=2\delta[n+1]+2\delta[n-1] \quad , \quad x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]-\delta[n-3]$$

کانولوشنهای زیر را پیدا کرده و آنها را رسم کنید.

الف) $y_1[n]=x[n]*h[n]$

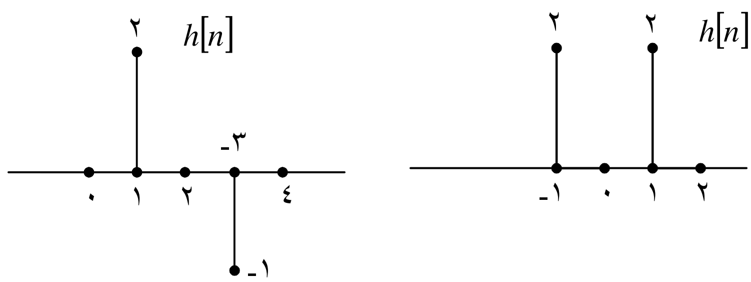
ب) $y_2[n]=x[n+2]*h[n]$

ج) $y_3[n]=x[n]*h[n+2]$

حل:

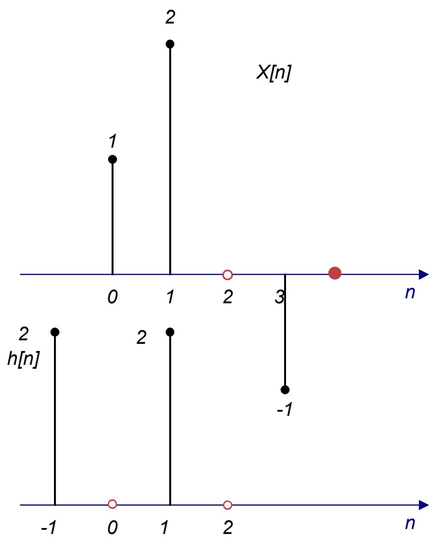
(الف) می دانیم که:

$$y_1[n]=h[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$



شکل (ح ۱-۲,۱)

سیگنالهای $x[n]$ و $h[n]$ در شکل ح ۲,۱ نشان داده شده اند.



شکل ح ۱-۲

از این شکل ها به راحتی می توانیم کانولوشن فوق را به صورت زیر خلاصه کنیم:

$$y_1[n]=h[-1]x[n+1]+h[n]x[n-1]$$
$$=2x[n+1]+2x[n-1]$$

که نتیجه می دهد.

$$y_1[n]=2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]-+2\delta[n-2]-2\delta[2-4]$$

(ب) می دانیم که:

$$y_2[n]=x[n+2]*h[n]=\sum_{K=-N}^{+\infty}h[k]x[n+2-k]$$

با مقایسه با معادله (ح۲,۱,۱.) داریم:

$$y_2[n]=y_1[n+2]$$

ج) می توانیم معادله (ح۲,۱,۱) به صورت زیر بنویسیم:

$$y_1[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n]h[n-k]$$

به طور مشابه می توان داشت:

$$y_3[n]=x[n]*h[n+2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n+2-k]$$

با مقایسه با رابطه(ح ۲،۱،۱) می توان نوشت:

$$y_3[n]=y_1[n+2]$$

۲،۲) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)n-\{u[n+3]-u[n-10]\}$$

A و B را برحسب n به نحوی بیابید که معادله زیر برقرار باشد.

$$h[n-k]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}, & A\le k\le B\\ 0, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

حل:

با استفاده از تعریف داده شده برای سیگنال $h[n]$ می توان نوشت:

$$h[k]=\left(1/2\right)^{k-1}\{u[k+3]-u[k-10]\}$$

سگینال $h[k]$ تنها دربازه ی $-3\le k\le 9$ صفر نیست. از این می دانیم که سیگنال $h[-k]$ تنها در بازه ی $-9\le k\le 3$ صفر نیست. حال اگر $h[-k]$ رابه اندازه n به سمت راست شیفت دهیم، در اینصورت سیگنال $h[n-k]$ حاصل می وشد که در بازه $n-9\le k\le n+3$ صفر نیست بنابراین:

$$A=n-9$$
$$B=n+3$$

۲،۳) ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ زیر را در نظر بگیرید

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$$
$$h[n]=u[n+2]$$

خروجی $y[n]=x[n]*h[n]$ را بیابید .

حل:

فرض کنید سیگنال های x_1 و $h[n]$ به صورت زیر تعریف شوند.

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

,

$$h[n] = u[n]$$

توجه داشته باشید که $x[n] = x_1[n-2]$ و $h[n] = h_1[n+2]$

حال:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= x_1[n-z] * h[n+2] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k-z] h_1[n-k+2] \end{aligned}$$

با جایگذاری $m+2$ بجای k در سیگمای فوق بدست می آوریم.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] h_1[n-m] = x_1[n] * x_1[n] * h_1[n]$$

با استفاده از نتیجه مثال ۲,۱ در متن کتاب درسی، می توان نوشت:

$$y[n] = 2\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] u[n]$$

۲,٤) $y[n] = x[n] * h[n]$ را به ازای $x[n]$ و $h[n]$ زیر بیابید و آن را رسم کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 \;, & 3 \le n \le 8 \\ \circ \;, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 \;, & 4 \le n \le 15 \\ \circ \;, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حل:

می دانیم که:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [k] h[n-k]$$

سیگنال $x[n]$ و $y[n]$ در شکل ح۲,٤ نشان داده شده اند.

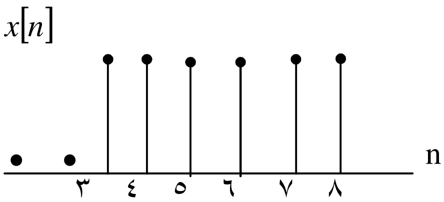
ازاین شکل ملاحظه می شود که مجموع فوق به شکل زیر خلاصه می شود:

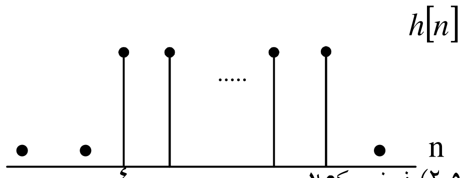
$$y[n]=x[3]h[n-3]+x[4]h[n-4]+x[5]h[n-5]$$
$$+x[6]h[n-6]+x[7]h[n-7]+x[8]h[n-8]$$

که نتیجه می دهد:

$$y[n]=\begin{cases} n-6 & 7\le n\le 11 \\ 6 & 12\le n\le 18 \\ 24-n & 19\le n\le 23 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

نمودار شکل





۲,۵) فرض کنید.

$$h[n]=\begin{cases} 1 \ , & \circ\le n\le N \\ \circ \ , & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{و} \quad h[n]=\begin{cases} 1 \ , & \circ\le n\le 9 \\ \circ \ , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $N\le 9$ یک عدد صحیح است. N را به نحوی تعیین کنید کـه بـرای $y[n]=x[n]*h[n]$ داشته باشیم.

$$x[4]=5 \qquad , \qquad x[14]=\circ$$

حل:

سیگنال $y[n]$ برابر است با:

$$y[n]=\sum_{k=\circ}^{9}x[k]h[n-k]=\sum_{k=\circ}^{9}h[n-k]$$

از این رابطه مشخص است که $y[n]$ برابر مجموع شیفت یافته $h[n]$ می باشد. از آنجایی که جملـه ی آخر در $n=9$ اتفاق می افتد و $h[n]$ بـرای $n>N$ برابر صـفر اسـت $y[n]$ بـرای $n>N+9$ صفر است. بااستفاده از این حقیقت که $y[14]=\circ$ ، می توان نتیجه گرفت که N حداکثر مـی توانـد ٤ باشد. بعلاوه از $y[4]=5$ می توان نتیجه گرفت که $h[n]$ حداقل ٥ نقطه فاقد صفر دارد. تنهـا مقـدار N که هر دو شرط را برآورده می کند ٤ است.

۲,٦) کانولوشن $y[n]=x[n]*h[n]$ را به ازای $x[n]$ و $h[n]$ زیر بیابید و آن را رسم کنید.

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}u[-n-1] \quad , \quad h[n]=u[n-1]$$

حل:

از اطلاعات داده شده داریم:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(1/3\right)^{-k}x[-k-1]u[n-k-1]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(1/3\right)^{-k}u[n-k-1]$$
$$=\sum_{k-1}^{\infty}\left(1/3\right)^{k}u[n+k-1]$$

جایگذاری k توسط p-۱ داریم:

$$y[n]=\sum_{p=0}^{\infty}\left(1/3\right)^{p+1}u[n+p]$$

برای $n\geq 0$ معادله ی بالایی به صورت زیر در می آید:

$$y[n]=\sum_{p=0}^{\infty}\left(1/3\right)^{p+1}=1/3\frac{1}{1-1/3}=1/2$$

برای $n>0$ معادله (S۲,٦,۱) به صورت خلاصه می شود:

$$y[n]=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left(1/3\right)^{p+1}=\left(1/3\right)^{-n+1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(1/3\right)^{p}$$
$$=\left(1/3\right)^{-n+1}\frac{1}{1-1/3}=\left(1/3\right)^{-n}1/2=\frac{3^n}{2}$$

بنابراین

$$y[n]=\begin{cases}3^n/2 & n>0\\ 1/2 & n\geq 0\end{cases}$$

۲-۷) برای سیستم خطی S رابطه زیر بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ وجود دارد

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]g[n-2k]$$

و در آن $g[n]=u[n]-u[n-4]$.

الف) $y[n]$ را به ازای $x[n]=\delta[n-1]$ بیابید.

ب) $y[n]$ را به ازای $x[n]=\delta[n-2]$ بیابید.

ج) آیا S و LTI است؟

د) $y[n]$ را به ازای $x[n]=u[n]$ بیابید.

حل:

(الف) داده شده است: $x[n]=\delta[n-2]$

ملاحظه می کنیم که:

$$y[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty}x[k]g[n-2k]=g[n-4]$$
$$=u[n-4]-u[n-8]$$

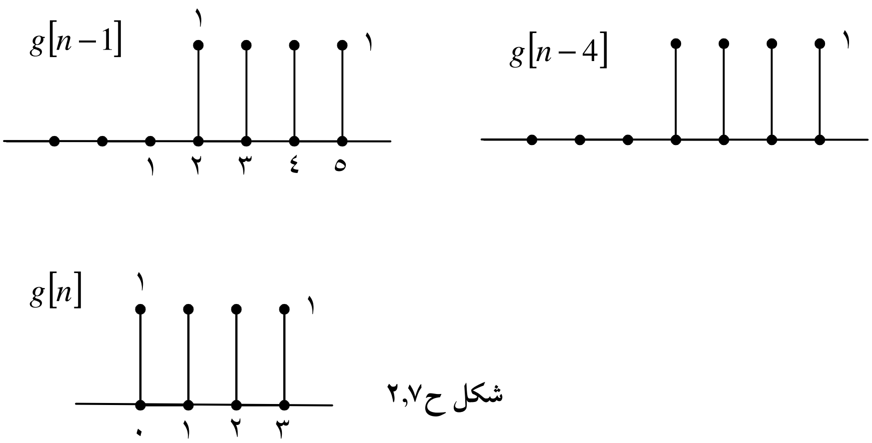
(ب) ورودی سیستم در قسمت (ب) مشابه قسمت (الف) به اندازه ی (۱) واحد به سمت راست شیفت یافته است. اگر S تغییرپذیر با زمان باشد، در این صورت خروجی سیستم بدست آمده در قسمت (ب) باید با خروجی بدست آمده سیستم در قسمت (الف) با یک شیفت به اندازه (۱) واحد به راست، باشد. واضح است که این، آن مورد ذکر شده نیست بنابراین سیستم LTI نیست.

(ج) اگر $x[n]=u[n]$ در این صورت

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]g$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}g[n-2k]$$

سیگنال $g[n-2k]$ برای $k=0\ ,1\ ,2$ در شکل S.۲,۷ رسم شده اند. با توجه به این شکل واضح است که:

$$y[n]=\begin{cases}1 & n=\circ,1\\ 2 & n>=2u[n]-\delta[n]-\delta[n-1]\\ \circ & \end{cases}$$



شکل ح۲,۷

۲,۸) کانولوشن دو سیگنال زیر را بیابید و نتیجه را رسم کنید.

$$x(t)=\begin{cases}t+1, & \circ\le t\le 1\\ 2-1, & 1\le t\le 2\\ \circ\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$$

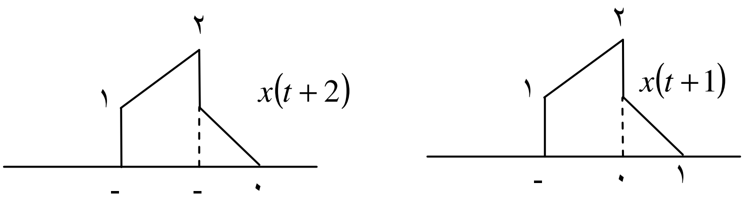
حل:

با استفاده از انتگرال کانولوشن داریم:

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$ داده شده است. که باعث می شود انتگرال فوق به شکل زیر خلاصه شود: $x(t)*y(t)=x(t+2)+2x(t+1)$

سیگنال $x(t+2)$ و $2x(t+1)$ در شکل ح۲,۸ نمایش داده شده است.



شکل ح۸-۲

با استفاده از شکل های فوق می توان به راحتی نشان داد که:

$$y(t)=\begin{cases} t+3 & -2<t\le -1 \\ t+4 & -1t\le \circ \\ 2-2t & \circ<t\le 1 \\ \circ & b \end{cases}$$

۲,۹) فرض کنید

$$h(t)=e^{2t}u(-t+4)+e^{-2t}u(t-5)$$

A و B را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau<A \\ \circ \quad , & A<\tau<B \\ e^{2(t-\tau)}, & B<\tau \end{cases}$$

حل:

با استفاده از تعریف داده شده برای سیگنال $h(t)$، می توان نوشت:

$$h(\tau)=e^{2\tau}u(-\tau+4)+e^{-2\tau}u(\tau-5)=\begin{cases} e^{-2\tau} & \tau>5 \\ e^{2\tau} & \tau>4 \\ \circ & 4<\tau<5 \end{cases}$$

بنابراین:

$$h(-\tau)=\begin{cases} e^{2\tau} & \tau>-5 \\ e^{-2\tau} & \tau>-4 \\ \circ & -5<\tau-4 \end{cases}$$

پس:

$$A=t-5$$

,

$$B=t-4$$

۲,۱۰) فرض کنید که

$$x(\tau)=\begin{cases} 1\,, & \circ\le\tau\le 1 \\ \circ\,, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

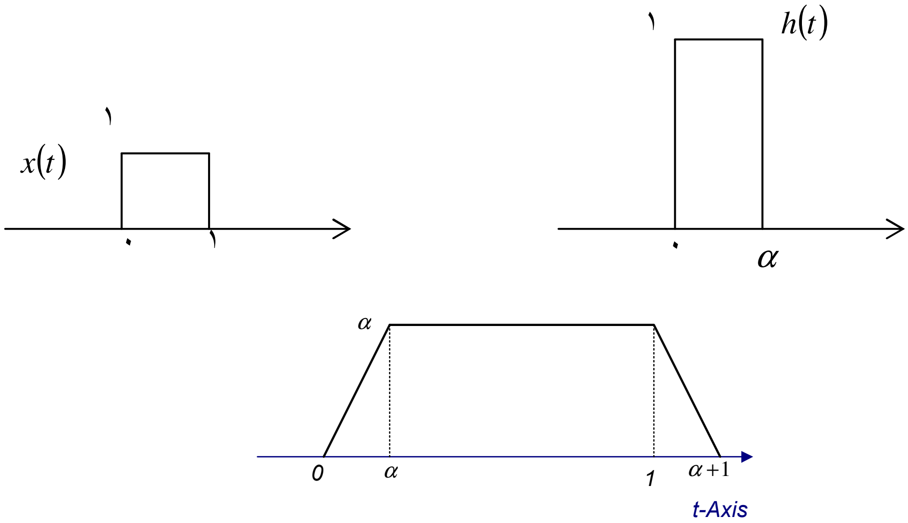
و $h(t)=x(t/a)$ که در آن $0<a\le 1$

الف) $y(t)=x(t)*h(t)$ را بیابید و آن را رسم کنید.

ب) اگر $dy(t)/dt$ تنها سه ناپیوستگی داشته باشد، مقدار a چقدرست؟

حل:

با استفاده از اطلاعات داده شده که می توانیم $x(t)$ و $h(t)$ را به شکل، شکل هـای S۲,۱۰ را رسـم کنید. (a) به کمک طرحهای شکل ح۲,۱۰. می توان نـشان داده $y(t)=x(t)*h(t)$ همنطـور کـه در اشکال ح۲,۱۰ نشان داده شده اند.



شکل ح۲,۱۰

بنابراین:

$$y(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le \alpha \\ \alpha & \alpha\le t\le 1 \\ 1+\alpha-t & 1\le t\le 1+\alpha \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(ب) از شکل بالا برای $y(t)$، واضح است که $\frac{dy(t)}{dt}$ در $1+\alpha, 1, \alpha, 0$ ناپیوسته است. اگر بخواهیم $\frac{dy(t)}{dt}$ تنها ۳ نقطه ی ناپیوستگی داشته باشد؛ در این صورت بایستی $\propto = 1$ انتخاب گردد.

۲,۱۱) فرض کنید

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \quad , \quad x(t) = u(t-3) - u(t-5)$$

الف) $y(t) = x(t) * h(t)$

ب) $g(t) = (dx(t))/dt * h(t)$

ج) $g(t)$ چه رابطه ای با $y(t)$ دارد.

(الف) از اطلاعات داده شده ملاحظه می کنید که $h(t)$ تنها در بازه $0 \le t \le \infty$ صفر نیست، بنـابراین:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$= \sum_{0}^{\infty} e - 3\tau(u(t-\tau-3)) - u(t-\tau-5) d\tau$$

براحتی می توان نشان داد که $u(t-\tau-3) - u(t-\tau-5)$ تنهـا در بـازه $t-5 < \tau < t-3$ صـفر نیست. بنابراین به ازای $t \le 3$ انتگرال فوق برابر صفر است. برای $3 < t \le 5$ انتگرال فوق بـه صـورت زیر است:

$$y(t) = \int_{0}^{t-3} e^{-3\tau} d\tau = \frac{1 - e^{-3(t-3)}}{3}$$

برای $t > 5$ انتگرال برابر است با:

$$y(t) = \int_{t-5}^{t-3} e^{-3\tau} d\tau = \frac{(1 - e^{-5})e^{-3(t-5)}}{3}$$

بنابراین؛ نتیجه کانولوشن به صورت زیر قابل بیان است:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \le 3 \\ \frac{1 - e^{-3(t-3)}}{3} & 3 > t \le 5 \\ \frac{(1 - e^{-5})e^{-3(t-5)}}{3} & 5 < t \le \infty \end{cases}$$

ب) با مشتقگیری از $x(t)$ در حوزه زمان داریم:

$$\frac{dx(t)dt}{dt}=\delta(t-3)-\delta(t-5)$$

بنابراین:

$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$$
$$=e^{-3(t-3)}u(t-3)-^{-(t-5)}u(t-5)$$

ج) از نتیجه (الف) می توانیم مشتق $y(t)$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\frac{dy(t)}{dt}=\begin{cases}\circ & -\infty<t\le 3\\ e^{-3(t-3)} & 3<t\le 5\\ (e^{-6}-1)e^{-3(t-5)} & 5<t\le\infty\end{cases}$$

که این دقیقاً برابر با $g(t)$ است بنابراین $g(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$.

۲,۱۲) فرض کنید

$$y(t)=e^{-t}u(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)$$

نشان دهید که در $\circ\le t<3$، $y(t)=Ae^{-t}$ و A را بیابید.

حل:

سیگنال $y(t)$ را می توان به صورت

$$y(t)=...+e^{-(t-6)}u(t+6)+e^{-(t+3)}u(t+3)+e^{-t}u(t)+e^{-(t-3)}u(t-3)$$
$$+e^{-(t-6)}u(t-6)+...$$

در بازه ی $\circ\le t<3$ نوشت؛ می توان $y(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$y(t)=...+e^{-(t+\circ)}u(t+6)+e^{-(t+3)}u(t+3)+e^{-t}u(t)$$
$$=e^{-t}+e^{-(t+3)}+e^{-(t+6)}+...$$
$$=e^{-t}\left(1+e^{-3}+e-6+...\right)=e^{-t}\frac{1}{1-e^{-3}}$$

بنابراین: $A=\dfrac{1}{1-e^{-3}}$ می باشد.

۲,۱۳) سیستم گسسته در زمان S_1 با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید

$$h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u[n]$$

الف) A را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم $h[n]-A\,h[n-1]=\delta[n]$.

ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) پاسخ ضربه $g[n]$ سیستم S_2 LTI را به نحوی تعیین کنیـد کـه S_2 وارون S_1 باشد.

حل:

(الف) نیاز داریم که بدانیم:

$$\left(1/5\right)^{n}u[n]-A\left(1/5\right)^{n-1}u[n-1]=\delta[n]$$

با قراردادن n=۱ و محاسبه A داریم: $A=1/3$

(ب) از قسمت (الف) می دانیم که:

$$h[n]-\frac{1}{5}h[n-1]=\delta[n]$$

$$h[n]*\left(\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]\right)=\delta[n]$$

با استفاده از تعریف معکوس سیستم داریم:

$$g[n]=\delta[n]-\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

۲,۱٤) کدام یک از پاسخ ضربه های زیر پاسخ ضربه یک سیستم LTI پایدارست؟

الف) $h_1(t)=e^{-(1-2j)t}u(t)$

ب) $h_2(t)=e^{-t}\cos(2t)u(t)$

حل:

(الف) ابتدا تعیین می کنیم که $h_1(t)$ انتگرال معینی به شکل زیر باشد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|h_1(\tau)d\tau=\int_{\circ}^{\infty}e^{-\tau}d\tau=1\right|$$

بنابراین $h_1(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم پایدار است.

(ب) اگر $h_2(t)$ انتگرال معینی به شکل زیر باشد، تعیین می کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|h_2(\tau)\right|d\tau=\int_{\circ}^{\infty}e^{-t}\left|\cos 2t\right|d\tau$$

این انتگرال به طور واضح مقدار محدودی دارد زیـرا $e^{-t}|\cos Lt|$ یـک تـابع ترومـی نمـایی در بـازه $\circ \le t \le \infty$ است. بنابراین $h_2(t)$ پاسخ ضربه ی یک سیستم LTI می باشد.

۲,۱۵) کدام یک از پاسخ ضربه های زیر پاسخ ضربه یک سیستم LTI پایدارست؟

الف) $h_1[n] = n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$

ب) $h_2[n] = 3^n u[-n+10]$

حل:

(الف) اگر $h_1[n]$ مجموع (سیگمای) معینی به شکل زیر باشد، تعیین می :نیم:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_1|k|| = \sum_{k=\circ}^{\infty} k\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right|$$

این سری مقدار محدودی ندارد زیرا بـا تـابع $k\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right|$ بـا افـزایش مقـدار k، صـعودی اسـت.

بنابراین $h_1[n]$ نمی توان پاسخ ضربه یک سیتم LTI پایدار باشد.

(ب) اگر $h_2[n]$ سری معینی به شکل زیر باشد، تعیین می کنیم:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h_2|k|| = \sum_{k=-\infty}^{10} 3^k \cong 3^{11}\!/_2$$

بنابراین $h_2[n]$ پاسخ ضربه یک سیستم پایدار LTI می باشد.

۲,۱٦) درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را تعیین کنید:

الف) اگر در $n < N_1$، $x[n] = \circ$ و در $n < N_2$، $h[n] = \circ$؛ آنگاه در $n < N_1 + N_2$، $y[n] = x[n] * h[n] = \circ$.

ب) اگر $y[n] = x[n] * h[n]$، آنگاه $y[n-1] = x[n-1] * h[n-1]$.

ج) اگر $y(t) = x(t) * h(t)$، آنگاه $y(-t) = x(-t) * h(-t)$.

د) اگر در $t > T_1$، $x(t) = \circ$، و در $t > T_2$، $h(t) = \circ$، آنگاه در $t > T_1 + T_2$، $x(t) * h(t) = \circ$.

حل:

(الف) صحیح: این به راحتی با توجه به اینکه کانولوش می تواند بعنوان فرآینـدی اصـل بـر هـم نهـی $h[n]$ را انجام دهد، بحث شود. این می تواند بعنوان انعکاسی در محل اولین نمونه صفر $x[n]$ اتفـاق بیافتد. در این مورد اولین انعکاس در N۱ اتفاق می افتد. انعکاسـی $h[n]$ کـه در $n = N_1$ اتفـاق مـی

افتد، اولین نمونه ی صفر خود را در محل زمانی N_1+N_2 خواهد داشت، بنابراین برای تمامی مقادیر n که N_1+N_2 بخود اختصاص می دهد، خروجی $h[n]$ صفر است.

(ب) نادرست.

فرض کنید:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

از این:

$$y[n-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-1-k]$$
$$=x[n]*h[n-1]$$

این نشان می دهد که حالت داده شده نادرست است.

(ج) صحیح: فرض کنید:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

بنابراین:

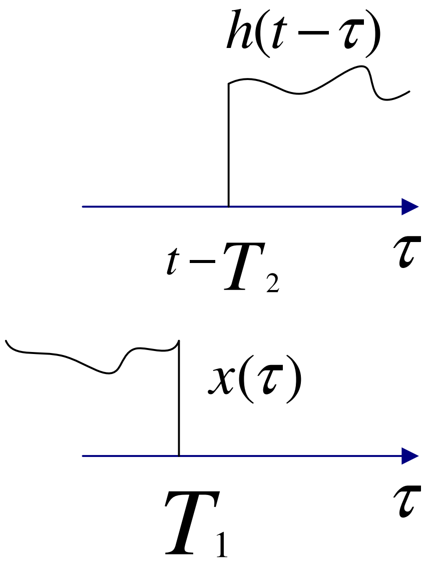
$$y(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(-\tau-t)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(-\tau)h(-t+\tau)d\tau$$
$$=x(-t)*h(-t)$$

که نشان می دهد وضعیت داده شده صحیح است.

(د) صحیح: این مسئله با فرض زیر می تواند بحث شود:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

در شکل ح۲,۱۶، $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ را رسم کرده ایم (با فرض اینکه (۱) برای $t>T_1$ $x(t)=0$ و (۲) برای $t>T_2$ ، $(h(t))=0$: واضح است، حاصلضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ اگر $t-T_2>T_1$ برابر صفر خواهد بود، بنابراین برای $t>T_1+T_2$ ، $y(t)=0$.



شکل حل ۱۶-۲

۲٫۱۷) یک سیستم LTI با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ و رابطه خروجی ـ ورودی زیر در نظر بگیرید

$$\frac{d}{dt}y+4y(t)=x(t) \qquad \text{(م ۲-۱۷-۱)}$$

سیستم ابتدائاً ساکن است.

الف) $y(t)$ به ازای $x(t)=e^{(-1+3j)t}$ چیست؟

ب) توجه کنید که $\mathrm{Re}\{x(t)\}$ و $\mathrm{Re}\{y(t)\}$ معادله (م ۲-۱۷-۱) را ارضا می کنند. خروجی $y(t)$ سیستم LTI را به ازای ورودی زیر بیابید:

$$x(t)=e^{-t}\cos(3t)u(t)$$

حل:

(الف) می دانیم که $y(t)$ مجموع جواب همگن و خصوصی معادله دیفرانسیل داده شده است. ابتداً پاسخ خصوصی $y_p(t)$ را با استفاده از روش جایگذاری (روشی که در مثال ۲٫۱۴ آمده است.) بدست می آوریم. از آنجایی که ورودی $x(t)=e^{(-1+3j)t}u(t)$ برای $t>0$، اعمال می کنیم؛ بدست می آوریم.

$$y_p(t)=ke^{(-1+3j)t} \text{ برای } t>0$$

با جایگذاری $x(t)$ و $y(t)$ در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$(-1+3j)ke^{(-1+3j)t}+4ke^{(-1+3j)t}=e^{(-1+3j)t}$$

که می دهد:

$$(-1+3j)k+4k=1$$
$$\Rightarrow k=\frac{1}{3(1+j)}$$

بنابراین:

$$y_p=\frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t} \qquad t>0$$

برای بدست آوردن جواب همگن: قرار می دهیم:

$$y_y(t)=Ae^{st}$$

از آنجایی که حل همگن، باید معادله ی دیفرانسیل زیر را ارضاء کند:

$$\frac{dy_h(t)}{dt}+4yh(t)=0$$

بدست می آوریم:

$$ASe^{st}+4Ae^{st}=Ae^{st}(S+4)=0$$

که بیان می کند برای هر مقدار A، S=-٤ می باشد. جواب کلی معادله به صورت زیر می باشد؛

$$y(t)=Ae^{-4t}+\frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t} \quad t>0$$

حال برای تعیین ثابت k ازاین حقیقت استفاده می کنیم که سیستم شرایط اولیه را ارضاء می کند. داده شده است $y(0)=0$ بنابراین می توان نتیجه گرفت که:

$$A+\frac{1}{3(1+j)}=0$$
$$\Rightarrow A=\frac{-1}{3(1+j)}$$

بنابراین $t>0$ داریم:

$$y(t)=\frac{1}{3(1+j)}\left[-e^{-4t}+e(-1+3j)t\right];\ t>\circ$$

از آنجایی که سیستم باید شرایط اولیه را ارضاء کند، برای $t>\circ$، $y(t)=\circ$ بنابراین:

$$y(t)=\frac{1-j}{6}\left(-e^{-4t}+e^{(-1+3j)t}\right)u(t)$$

(ب) خروجی، قسمت حقیقی پاسخ بدست آمده در قسمت (الف) خواهد بود.

$$y(t)=\tfrac{1}{6}\left(e^{-t}\cos 3t+e^{-t}\sin 3t-e^{-4t}\right)u(t)$$

۲,۱۸) ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم علّی LTI با معادله تفاضلی زیر به هم مربـوط مـی شوند

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+x[n]$$

$y[n]$ را به ازای $x[n]=\delta[n-1]$ بیابید.

حل:

از آنجایی که سیستم کازال است: برای $n<1$، $y[n]=\circ$ حال:

$$y[1]=\tfrac{1}{4}y[\circ]+x[1]=\circ+1=1$$

$$y[2]=\tfrac{1}{4}y[1]+x[2]=\tfrac{1}{4}+\circ=\tfrac{1}{4}$$

$$y[3]=\tfrac{1}{4}y[2]+x[3]=\tfrac{1}{16}+\circ=\tfrac{1}{16}$$

$$\vdots$$

$$y[m]=\left(\tfrac{1}{4}\right)^{m-1}$$

بنابراین:

$$y[n]=(n)=\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}u[n-1]$$

۲,۱۹) اتصال سری دو سیستم S_1 و S_2 به صورت شکل م ۲-۱۹ را در نظر بگیرید:

$$x[n]\longrightarrow\boxed{S_1}\xrightarrow{w[n]}\boxed{S_2}\longrightarrow y[n]$$

شکل م ۲-۱۹

$LTI:S_1$ علّی $w[n]=\frac{1}{2}w[n-1]+x[n]$

$LTI:S_2$ علی $y[n]=ay[n-1]+\beta w[n]$

معادله تفاضلی بین $x[n]$ و $y[n]$ عبارت است از

$$y[n]=-\frac{1}{8}y[n-2]+\frac{3}{4}y[n-1]+x[n]$$

الف) a و β را بیابید.

ب) پاسخ ضربه اتصال سری سیستمهای S_1 و S_2 را بیابید.

حل:

(الف) معادله ی دیفرانسی مربوط با $y[n]$ و $\omega[n]$ را برای S_2 در نظر بگیرید:

$$y[n]=\alpha y[n-1]+\beta\omega[n]$$

از این می توان نوشت:

$$\omega[n]=\frac{1}{\beta}y[n]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-1]$$

و

$$\omega[n-1]=\frac{1}{\beta}y[n-1]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-2]$$

با ضرب معادله ی به $1/2$ و جایگذاری در مرحله قبلی داریم:

$$\omega[n]-1/2\,\omega[n-1]=\frac{1}{\beta}y[n]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-1]-\frac{1}{2\beta}y[n-1]+\frac{\alpha}{2\beta}y[n-2]$$

با جایگذاری این در معادله ی دیفرانسیل مربوط به $\omega[n]$و $x[n]$ برای S_1 داریم:

$$\frac{1}{\beta}y[n]-\frac{\alpha}{\beta}y[n-1]-\frac{1}{2\beta}y[n-1]+\frac{\alpha}{2\beta}y[n-2]=x[n]$$

یعنی:

$$y[n]=\left(\alpha+1/2\right)y[n-1]-\frac{\alpha}{2}y[n-2]+\beta x[n]$$

با مقایسه با معادله ی داده شده مربوط به $y[n]$ و $x[n]$ داریم:

$$\alpha=\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \beta=1$$

(ب) معادله دیفرانسیل ورودی و خروجی سیستم های S_1 و S_2 عبارتند از:

$$\omega[n]=\tfrac{1}{2}\,\omega[n-1]+x[n]$$

,

$$y[n]=\tfrac{1}{4}\,y[n-1]+\omega[n]$$

از مثال ۲,۱۵ می توانیم استفاده کنیم تا نشان دهیم که پاسخ ضربه سیستمهای S_1 و S_2 عبارتند از:

$$h_1[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

,

$$h_2[n]=\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$

پاسخ ضربه کلی سیستم از اتصال کاسل کد (آشباری) سیستمهای S_1 و S_L بدست می آید:

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_1[k]h_2[n-k]$$
$$=\sum_{\circ=k}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)*\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k}u[n-k]$$
$$=\sum_{k=\circ}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k}=\sum_{k=\circ}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2(n-k)}$$
$$=\left(2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n-\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

۲,۲۰) انتگرالهای زیر را حساب کنید:

الف) $\int_{-\infty}^{\infty}u_\circ(t)\cos(t)dt$

ب) $\int_{\circ}^{5}\sin(2\pi t)\delta(t+3)dt$

ج) $\int_{-5}^{5}u_1(1-t)\cos(2\pi\tau)d\tau$

حل:

(الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_\circ(t)\cos(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

(ب)

$$\int_{\circ}^{5}\sin(2\pi t)\delta(t+3)dt=\sin 6\pi=\circ$$

(ج) برای تعیین انتگرال

$$\int_{-5}^{5}u_1(1-\tau)\cos(2\pi\tau)d\tau$$

فرض کنید سیگنال

$$x(t)=\cos(2\pi t)[u(t+5)-u(t-5)]$$

می دانیم که:

$$\frac{dx(t)}{dt}=u_1(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_1(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

$$\int_{-5}^{5}u_1(t-\tau)\cos(2\pi\tau)d\tau$$

حال:

$$\frac{dx}{dt}(t)\Big|_{t=1}=\int_{-5}^{5}u_1(1-t)\cos(2\pi\tau)d\tau$$

که انتگرال مطولبست: مقدار انتگال را به صورت زیر تعیین می کنیم:

$$\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=1}=\sin(2\pi t)_t=1=\circ$$

۲,۲۱) کانولوشن $y[n]=x[n]*h[n]$ را به ازای زوج سیگنالهای زیر حساب کنید

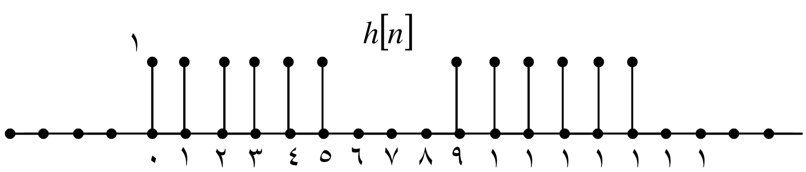
الف) $\left.\begin{matrix}x[n]=a^n u[n]\\ h[n]=\beta^n u[n]\end{matrix}\right\}a\neq\beta$

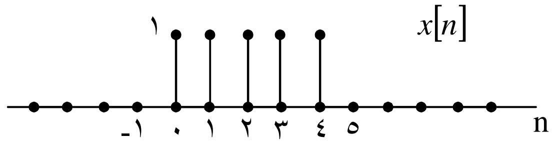
ب) $x[n]=h[n]=a^n u[n]$

ج) $x[n]=h[n]=a^n u[n]$

ج) $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$ $\qquad$ $h[n]=4^n u[2-n]$

د) $x[n]$ و $h[n]$ شکل م ۲-۲۱.





حل:

(الف) کانولوشن داده شده به صورت زیر است:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

برای $n\geq 0$

$$=\beta^n\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\alpha/\beta\right)^k$$

برای $\alpha\neq\beta$

$$=\left[\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right]u[n]$$

(ب) از (الف)

$$y[n]=a^n\left[a^n\right]\left[\sum_{k=0}^{n}1\right]u[n]=(n+1)a^n u[n]$$

(ج) برای $n\leq 6$

$$y[n]=4^n\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1/8\right)^k-\sum_{k=0}^{3}\left(-1/8\right)^{k-}\right]$$

برای $n>6$

$$y[n]=4^n\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1/8\right)^k-\sum_{k=6}^{n-1}\left(-1/8\right)^k\right\}$$

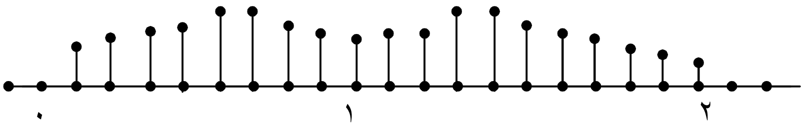
بنابراین:

$$y[n]=\begin{cases}\left(8/9\right)\left(-1/8\right)^4 4^n & n\leq 6\\ \left(8/9\right)\left(-1/2\right)^n & n>6\end{cases}$$

(د) کانولوشن مطلوب عبارتست از:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
&= x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] \\
&\quad + x[3]h[n-3] + x[4]h[n-4] \\
&= h[n] + h[n-1] + h[n-2] + h[n-3] + h[n-4]
\end{aligned}
$$

که در شکل ح ۱,۲۱ نشان داده شده است.

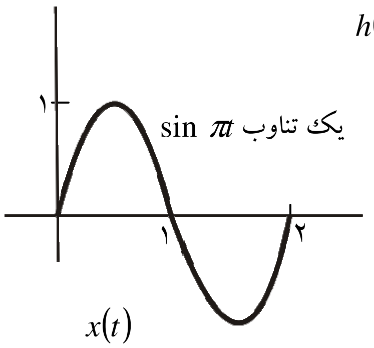


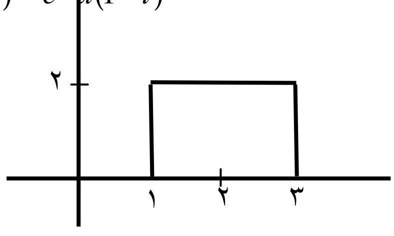
۲,۲۲) به ازای زوج سیگنالهای داده شده، بـا اسـتفاده از انتگـرال کانولوشـن پاسـخ $y(t)$ سیـستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)$ به ورودی $x(t)$ را بیابید. نتایج را رسم کنید.

الف) $\begin{cases} x(t) = e^{-at}u(t) \\ h(t) = e^{-\beta t}u(t) \end{cases}$ (هم به ازای $a \neq \beta$ و هم به ازای $a = \beta$)

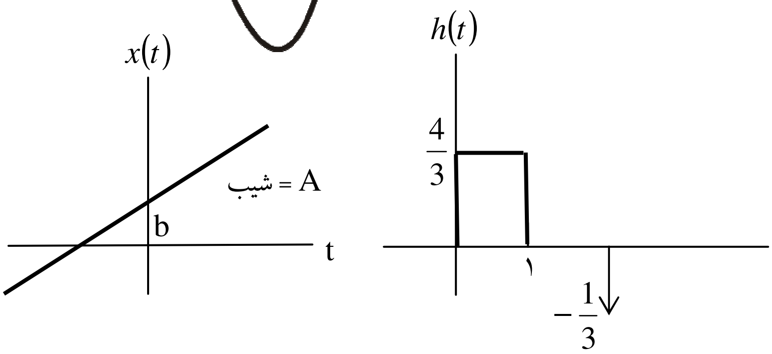
ب) $\begin{aligned} x(t) &= u(t) - 2u(t-2) + u(t-5) \\ h(t) &= e^{2t}u(1-t) \end{aligned}$

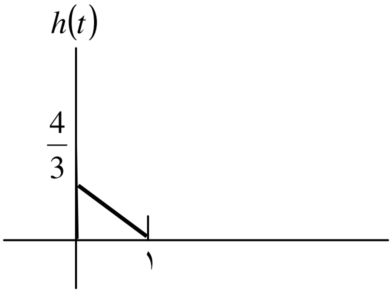
(الف)



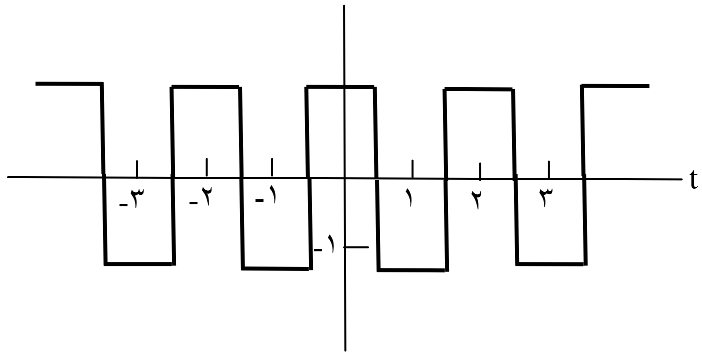


(ب)





(ج)



شکل م ۲-۲۲

ج) $x(t)$ و $h(t)$ شکل م ۲-۲۲ (الف)

د) $x(t)$ و $h(t)$ شکل م ۲-۲۲ (ج)

هـ) $x(t)$ و $h(t)$ شکل م ۲-۲۲ (ج)

حل:

کانولوشن مطلوب عبارت است از:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{0}^{t} e^{-\alpha t} e^{-\beta(t-\tau)}d\tau \qquad t\geq 0$$

در این صورت:

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{-5t}\left(e^{-(\alpha-\beta)t}-1\right)}{\beta-\alpha}u(t) & \alpha\neq\beta\\ te^{-\beta t}u(t) & \alpha=\beta\end{cases}$$

ب) کانولوشن مطلوب عبارت از:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{2} h(t-\tau)d\tau-\int_{2}^{5} h(t-\tau)d\tau$$

که می توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$y(t)=\begin{cases}\int_{\circ}^{2}e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_{2}^{5}e^{2(t-\tau)}d\tau & t\le 1\\ \int_{t-1}^{2}e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_{2}^{5}e^{2(t-\tau)}d\tau & 1\le t\le 3\\ -\int_{t-1}^{5}e^{2(t-\tau)}d\tau 3\le t\le 6 & 3\le t\le 6\\ \circ & 6<t\end{cases}$$

بنابراین:

$$y(t)=\begin{cases}\left(1/2\right)\left[e^{2t}-2e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}\right] & t\le 1\\ \left(1/2\right)\left[e^{2}+e^{2(t-5)}-2e^{2(t-2)}\right]1\le t\le 3 & 1\le t\le 3\\ \left(1/2\right)\left[e^{2(t-5)}-e^{2}\right] & 3\le t\le 6\\ \circ & 6<3\end{cases}$$

ج) سیگنال مطلوب عبارتست از:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{\circ}^{2}\sin(\pi\tau)h(t-\tau)d\tau$$

که می دهد:

$$y(t)=\begin{cases}\circ\, t<1 & t<1\\ \left(2/\pi\right)\left[1-\cos[\pi(t-1)]\right] & 1<t<3\\ \left(2/\pi\right)\left[\cos[\pi(t-3)]-1\right] & 3<t<5\\ \circ & 5<t\end{cases}$$

فرض کنید:

$$h(t)=h_1(t)-1/3\,\delta(t-2)$$

که:

$$h_1(t)=\begin{cases}4/3 & \circ\le t\le 1\\ \circ\ \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

حال:

$$y(t)=h(t)*x(t)=[h_1(t)*x(t)]-\tfrac{1}{3}x(t-2)$$

داریم:

$$h_1(t)*x(t)=\int_{t-3}^{t}\tfrac{4}{3}(\alpha\tau+b)d\tau\left(\tfrac{1}{2}at^2-\tfrac{1}{2}a(t-1)^2+bt-b(t-1)\right)$$

بنابراین:

$$y(t)=\tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{2}at^2-\tfrac{1}{2}\alpha(t-1)^2+bt-b(t-1)\right]-\tfrac{1}{3}\left(a(t-2)+b\right)=at+b=x(t)$$

(د) $x(t)$ پریودیک، $y(t)$ پریودیک را ارائه می کند: تنها یک پریودیک را تعیین می کنیم.

داریم:

$$y(t)=\begin{cases}\int_{t-1}^{-\frac{1}{2}}(t-\tau-1)d\tau+\int_{-\frac{1}{2}}^{t}(1-t+\tau)d\tau=\tfrac{1}{4}+t-t^2-\tfrac{1}{4}<t<\tfrac{1}{2}\\ \int_{t-1}^{\frac{1}{2}}(1-t+\tau)d\tau+\int_{\frac{1}{2}}^{t}(t-1-\tau)d\tau=t^2-3t+\tfrac{7}{4}\quad \tfrac{1}{2}<t<\tfrac{3}{2}\end{cases}$$

پریود $y(t)$ برابر ۲ می باشد.

۲,۲۳) $h(t)$ را پالس مستطیلی شکل م ۲-۲۳ (الف) و $x(t)$ را قطار ضـربه شـکل م ۲-۲۳ (ب) فرض کنید؛ یعنی

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k)$$

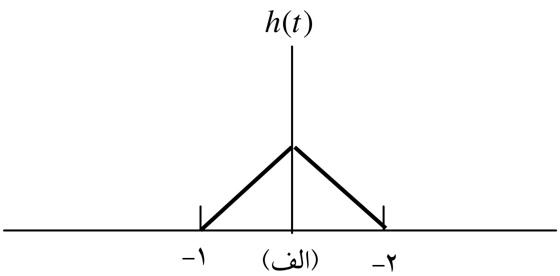
$y(t)=x(t)*h(t)$ را به ازای T های زیر بیابید آن را رسم کنید.

الف) $T=4$

ب) $T=2$

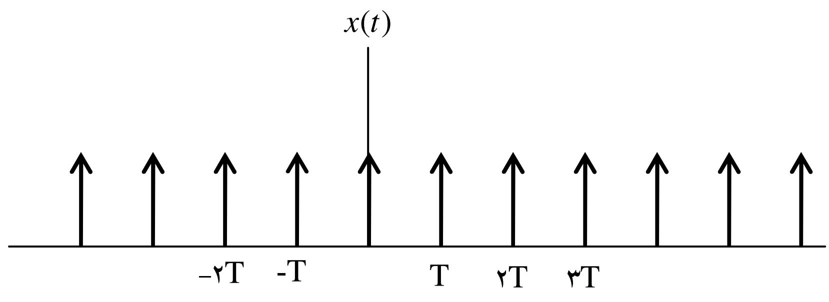
ج) $T=\frac{3}{2}$

د) $T=1$



(الف)

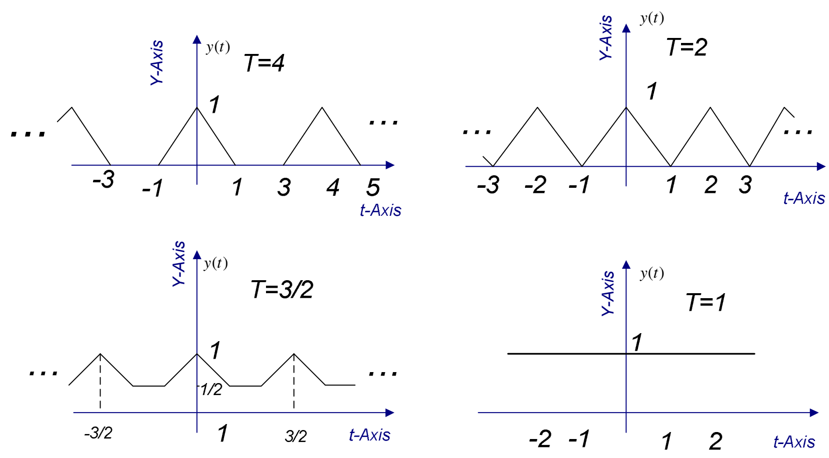
حل:



(ب)

شکل م ۲-۲

$y(t)$ برای مقادیر مختلف T در شکل S.۲,۲۳ رسم شده است.



شکل ح۲,۲۳.

۲,۲٤) ترکیب سری سیستم ‌های LTI به صورت نشان داده شـده در شـکل م ۲-۲٤ (الـف) را در نظر بگیرید.

پاسخ ضربه $h_2[n]$ عبارت است از

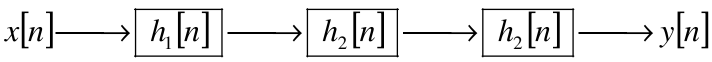
$$h_2[n]=u[n]-u[n-2]$$

و پاسخ ضربه سیستم کل مطابق شکل م ۲-۲٤ (ب) است.

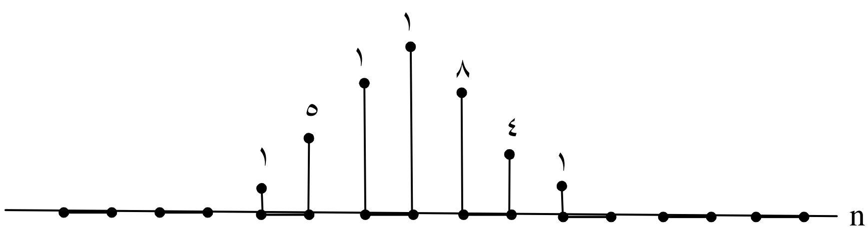
الف) پاسخ ضربه $h_2[n]$ را بیابید.

ب) پاسخ سیستم کل به ورودی زیر را بیابید.

$$x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$



(الف)



(ب)

شکل ۲٤-۲

حل:

(الف) داده شده است که $h_2[n]=\delta[n]+\delta[n-2]$، بنابراین:

$$h_2[n]*h_2[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

از آنجایی که $h[n]=h_1[n]*[h_2[n]*h_2[n]]$

داریم:

$$h[n]=h_1[n]+2h_1[n-1]+h_1[n-2]$$

بنابراین:

$$h[\circ]=h_1[\circ]\Rightarrow h_1[\circ]=1$$
$$h[1]=h_1[1]+2h_1[\circ]\Rightarrow h_1[1]=3$$
$$h[2]=h_1[2]+2h_1[1]+h_1[\circ]\Rightarrow h_1[2]=3$$
$$h[3]=h_1[3]+2h_1[2]+h_1[1]\Rightarrow h_1[3]=2$$
$$h[4]=h[4]+2h_1[3]+h_1[2]\Rightarrow h_1[4]=1$$
$$h[5]=h_1[5]+2h_1[4]+h_1[3]\Rightarrow h_1[5]=\circ$$
$$h_1[n]=\circ \qquad for \qquad n<\circ \quad , \quad n>5$$

(ب) در این مورد

$$y[n]=x[n]*h[n]=h[n]-h[n-1]$$

(۲,۲۵) سیگنال زیر

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

را به ازای

$$x[n]=3^n u[-n-1]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

و

$$h[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$$

در نظر بگیرید.

(الف) $y[n]$ را بدون استفاده از خاصیت پخشی کانولوشن بیابید.

(ب) $y[n]$ را با استفاده از خاصیت پخشی کانولوشن بیابید.

حل:

(الف) $x[n]$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$x[n]=\left(1/3\right)^{|n|}$$

حال کانولوشن مطلوب عبارتست از:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[x] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3] \\ &+ \sum_{k=\circ}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3] \\ &= \left(\tfrac{1}{12}\right) \sum_{k=\circ}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n+k} u(n+k+4) \\ &+ \sum_{k=\circ}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3] \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن هر کدا م از سری های در معادله فوق به صورت جداگانه، می توان نشان داد که:

$$y[n] = \begin{cases} \left((12)\tfrac{4}{11}\right)3^{n} & n < -4 \\ \left(\tfrac{1}{11}\right)4^{4} & n = -4 \\ \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n}\left(\tfrac{1}{11}\right) + (-3)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} + 3(256)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} & n \geq -3 \end{cases}$$

(ب) حال کانولوشن را در نظر بگیرید:

$$y_1[n] = \left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} u[n]\right] * \left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} u[n+3]\right]$$

می توان نشان داد که:

$$y_1[n] = \begin{cases} \circ & n < -3 \\ -3\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} + 3(256)\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} & n \geq -3 \end{cases}$$

نیز کانولوشن را در نظر بگیرید:

$$y_2[n] = \left[(3)^{n} u[-n-1] * \left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} u[n+3]\right]\right]$$

می توان نشان داد که:

$$y_2[n] = \begin{cases} \left((12)^{4/11}\right)3^{n} & n < -4 \\ \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} \tfrac{1}{11} & n \geq -3 \end{cases}$$

بطور واضح؛ $y_1[n]+y_2[n]=y[n]$ از قسمت قبلی بدست می آید.

(۲,۲,٦) محاسبه زیر

$$y[n]=x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]$$

را بـــه ازای $x_1[n]=0/5^n[n]$ ، $x_2[n]=u[n+3]$ ، و $x_2[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$ در نظـــر بگیرید.

الف) $x_1[n]*x_2[n]$ را حساب کنید.

ب) کانولوشن نتیجه بند (الف) با $x_3[n]$ را برای محاسبه $y[n]$ حساب کنید.

ج) $x_2[n]*x_3[n]$ را حساب کنید.

د) کانولوشن نتیجه بند (الف) با $x_1[n]$ را برای $y[n]$ حساب کنید.

حل:

(الف) داریم:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n]*x_2[n] \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x_1[x]x_2[n-k] \\ &= \sum_{k=\circ}^{+\infty} (\circ.5)^x u[n+3-k] \end{aligned}$$

که برابر است با

$$y_1[n]=x_1[n]*x_2[n]=\begin{cases} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}\right) & n\geq -3 \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(ب) حال:

$$y[n]=x_3[n]*y_1[n]=y_1[n]-y_1[n-1]$$

بنابراین:

$$y[n]=\begin{cases}2\left(1-\left(1/2\right)^{n+3}\right)+2\left(1-\left(1/2\right)^{n+4}\right)=\left(1/2\right)^{n+3} & n\geq -2\\ 1 & n=-3\\ \circ \quad \text{سایر نقاط} & \end{cases}$$

بنابراین:

$$y[n]=\left(1/2\right)^{n+3}u[n+3]$$

(ج) داریم:

$$\begin{aligned}y_2[n]&=x_2[n]*x_3[n]\\ &=u[n+3]-u[n+2]=\delta[n+3]\end{aligned}$$

(د) با استفاده از نتیجه قسمت (ج) داریم:

$$y[n]=y_2[n]*k_1[n]=x_1[n+3]=\left(1/2\right)^{n+3}u[n+3]$$

۲,۲۷) مساحت زیر سیگنال پیوسته در زمان $v(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_v=\begin{cases}\infty\\ -\infty^{v(t)dt}\end{cases}$$

نشان دهید که اگر $y(t)=x(t)=x(t)*h(t)$ ، آنگاه

$$A_y=A_xA_h$$

حل:

اثبات در زیر آورده است:

$$\begin{aligned}Ay&=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)dt\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t\tau)d\tau dt\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)dtd\tau\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)Ay\,d\tau\\ &=AxAy\end{aligned}$$

۲,۲۸) سیگنالهای زیر پاسخ ضربه های سیستمهای LTI گسسته در زمان هستند. آیا این سیستمها پایدار و/ یا علّی هستند؟ دلیل بیاورید.

الف) $h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

هـ) $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+(1/۰)^n[n-1]$

ب) $h[n]=(۰/8)^n u[n+2]$

و) $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+(1/۰1)^n u[1-n]$

ج) $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

ز) $h[n]=n\left(\frac{1}{3}\right)^n[n-1]$

د) $h[n]=(5)^n u[3-n]$

حل:

(الف) کازال است زیرا $h[n]$ برای $n>۰$ برابر صفر است.

پایدار است زیرا $\sum_{n=۰}^{\infty}\left(1/5\right)^n=5/4<\infty$

(ب) کازال نیست زیرا برای $n<۰$، $h[n]\neq ۰$ پایدار زیرا $\sum(۰.8)^n=5<\infty$.

(پ) کانتی – کازال زیرا برای $n>۰$، $h[n]=۰$، پایدار نیست زیرا $\sum_{n=-\infty}^{۰}\left(1/2\right)^n=\infty$

(ت) کازال نیست زیرا $h[n]\neq ۰$ برای $n<۰$، پایدار زیرا $\sum_{n=-\infty}^{3}5^n=\frac{625}{4}<\infty$

(ت) کازال زیرا برای $n<۰$، $h[n]=۰$، پایدار نیست زیرا جمله دوم زمانیکه $n\to\infty$ نامحدود است.

(ح) کازال نیست زیرا برای $n<۰$، $h[n]\neq ۰$. پایدار است زیرا $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\frac{305}{3}<\infty$

(خ) کازال است زیرا برای $n<0$، $h[n]=0$. پایدار است زیرا $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=1<\infty$

۲،۲۹) سیگنالهای زیر پاسخ ضربه های سیستمهای LTI پیوسته در زمان هستند. آیا این سیستمها پایدار و / یا علّی هستند؟ دلیل بیاورید.

الف) $h(t)=e^{-4t}u(t-2)$

ب) $h(t)=e^{-6t}u(3-t)$

ج) $h(t)=e^{2t}u(-1-t)$

د) $h(t)=e^{2t}u(-1-t)$

هـ) $h(t)=e^{-6|t|}$

و) $h(t)=te^{-t}u(t)$

ز) $h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-(t-100)/100}\right)u(t)$

حل)

(الف) کازال زیرا برای $t<0$ $h(t)=0$، پایدار زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=e^{-8/4}<\infty$

(ب) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|=\infty$

(پ) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=e^{50}<\infty$

ت) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=e^{-2/2}<\infty$

(ث) کازال نیست زیرا برای $t<0$، $h(t)\neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=1/3<\infty$

(ح) کازال است زیرا برای $t<0$، $h(t)=0$. پایدار است زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=1<\infty$

(خ) کازال است زیرا برای $t<0$، $h(t)=0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=\infty$

۲،۳۰) معادله تفاضلی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]$$

با فرض سکون ابتدائی (یعنی اگر در $n<n_0$، $x[n]=0$؛ آنگاه در $n<n_0$، $y[n]=0$) پاسخ ضربه سیستمی را که رابطه ورودی ـ خروجی آن با این معادله تفاضلی توصیف شده است بیابید. شاید بهتر

باشد معادله تفاضلی را به صورتی بازنویسی کنید که $y[n]$ را بر حسب $x[n-1]$ و $x[n]$ بیان کند، و مقادیر $y[\circ]\,, y[1]\,, y[2]$ و ... را به ترتیب بیابید.

حل:

بایستی خروجی سیگنال را وقتی ورودی برابر $x[n]=\delta[n]=\delta[n]$ بیابیم. از آنجایی که از ما خواسته شده است تا فرض کنیم جواب نهایی را مختصر کنیم. می توانیم نتیجه بگیریم که برای $n<\circ$ ،$y[n]=\circ$. حال:

$$y[n]=x[n]-2y[n-1]$$

بنابراین:

$$y[\circ]=x[\circ]-2y[-1]=1$$

,

$$y[1]=x[1]-2y[\circ]=-2$$

,

$$y[2]=x[2]+2y[2]=-4$$

به همین ترتیب: جواب به صورت زیر بدست می آید:

$$y[n]=(-2)^n u[n]$$

این پاسخ ضربه سیستم است.

۲,۳۱) سیستم LTI ابتدائاض ساکن توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]+2x[n-2]$$

پاسخ این سیستم به ورودی نشان داده شده در شکل م ۲-۳۱ را با حل بازگشتی معادله تفاضلی بیابید.

حل:

جواب نهایی مختصر بیان می دارد که برای $n<-2$، $y[n]=\circ$ حال:

$$y[n]=x[n]+2x[n-2]-2y[n-1]$$

بنابراین:

$$y[-2]=1\ ,\ y[-1]=\circ\ \ ,\ y[\circ]=5\,,\ldots$$

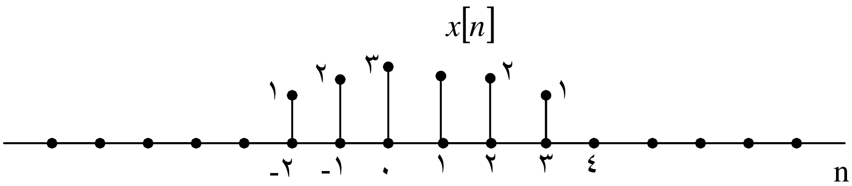
برای $n\geq 5$ $\qquad y[5]=--110\,,\ldots y[n]=-110(-2)^{n-5}$

۲,۳۲) معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n] \qquad (\text{م ۲-۳۲-۱})$$

فرض کنید که

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \qquad \text{(م ۲-۳۲-۲)}$$



شکل م ۲-۳۱

جواب $y[n]$ را مجموع یک جواب خصوصی $y_p[n]$ معادله (م ۲-۳۲-۱) و یک جواب همگن $yh[n]$ به معادله زیر فرض کنید.

$$yh[n]-\frac{1}{2}yh[n-1]=0$$

الف) نشان دهید که جواب همگن عبارت است از

$$yh[n]=A(1)2^n$$

ب) جواب خصوصی $y_p[n]$ را به نحوی می یابیم که معادله زیر ارضا شود

$$y_p[n]-\frac{1}{2}y_p[n-1]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

فرض کنید $y_p[n]$ در $n\geq 0$ به شکل $B\left(\frac{1}{3}\right)^n$ است و با جایگزینی آن در معادله تفاضلی بالا مقدار B را بیابید.

ج) فرض کنید ورودی یک سیستم LTI توصیف شده با معادله (م ۲-۳۲-۱) و ابتدائاً ساکن، سیگنال معادله (م ۲-۳۲-۲) است. چون در $n<0$، $x[n]=0$؛ پس در $n<0$، $y[n]=0$. همچنین با توجه به بندهای (الف) و (ب) $y[n]$ در $n\geq 0$ به شکل زیرست

$$y[n]=A\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

برای یافتن ثابت مجهول B باید یک مقدار $y[n]$ در $n \geq \circ$ را بدانیم. با استفاده از شرط سکون ابتدایی و معادلات (م ۲–۳۲–۱) و (م ۲–۳۲–۱) $y[\circ]$ را تعیین کنید. ثابت A را به کمک این مقدار بیابید. نتیجه این محاسبه جواب معادله تفاضلی (م ۲–۳۲–۱) به ازای ورودی معادله (م ۲–۳۲–۳) و شرط سکون ابتدایی است.

حل:

(الف) اگر $y_h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$ دراین صورت لازم است ثابت کنیم

$$A\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \circ$$

واضح است که صحیح می باشد.

(ب) حال برای $n \geq \circ$ می خواهیم:

$$B\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

بنابراین $B = -2$

(پ) از معادله (م۲,۳۲,۱) می دانیم که $y[\circ] = x[\circ] + \frac{1}{2}y[-1]y[-1] = x[\circ] = 1$

$$y[\circ] = A + B \quad \Rightarrow \quad A = 1 - B = 3$$

۲,۳۳) سیستمی را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را ارضا می کند.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \qquad \text{(م ۲–۳۳–۱)}$$

این سیستم شرط سکون ابتدایی را نیز برآورده می کند.

الف) (i) خروجی $y_1(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_1(t) = e^{3t}u(t)$ را بیابید.

(ii) خروجی $y_2(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_2(t) = e^{2t}u(t)$ را بیابید.

(iii) خروجی $y_3(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_3(t) = ae^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$ را بیابید. a و β دو عدد حقیقی اند. نشان دهید که $y_3(t) = ay_1 + \beta y_2(t)$.

(iv) حال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را دو سیگنال دلخواه بگیرید، به نحوی که

در $x_1(t) = \circ \ , \ t < t_1$

در $x_2(t) = \circ \ , \ t < t_2$

$y_1(t)$ را پاسخ سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_2(t)$، و $y_3(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_3(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_3(t)=ax_1(t)+\beta x_2(t)$ فرض کنید، نشان دهید که

$$y_3(t)=ay_1(t)+\beta y_2(t)$$

بنابراین سیستم تحت بررسی خطی است.

ب) (i) خروجی $y_1(t)$ را به ازای ورودی $x_2(t)=Ke^{2t}u(t)$ بیابید.

(ii) خروجی $y_2(t)$ را به ازای ورودی $x_1(t)\backslash=Ke^{2(t-T)}u(t-T)$ بیابید. نشان دهید که $y_2(t)=y_1(t-T)$.

(iii) حال $x_1(t)$ را سیگنال دلخواهی بگیرید که در $t<t_{\circ}$، $x_1(t)$. $y_1(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ را خروجی سیستم به ازای $x_2(t)=x_1(t-T)$ فرض کنید. نشان دهید که

$$y_2(t)=y_1(t-T)$$

پس نتیجه می گیریم سیستم تحت بررسی تغییرناپذیر با زمان است. با توجه به نتیجه بند (الف) سیستم داده شده LTI است. چون این سیستم شرط سکون ابتدایی را نیز دارد، علّی هم هست.

حل:

(الف i) از مثال ۲,۱٤) می دانیم که:

$$y_1(t)=\left[\frac{1}{5}e^{3t}-\frac{1}{5}e^{-2t}\right]u(t)$$

(ii) این را بر اساس مثال ۲,۱٤ حل می کنیم. ابتدا فرض کنید که $y_p(t)$ شامل ke^{2t} است.
دراین صورت با استفاده از معادله (م۲,۳۳,۱)، برای $t>\circ$ داریم:

$$2ke^{2t}+2ke^{2t}=e^{2t}\Rightarrow\left(k=\tfrac{1}{4}\right)$$

حال می دانیم که $y_p(t)=\tfrac{1}{4}e^{2t}$ برای $t>\circ$. حال جواب عمومی معادله را بدست می آوریم

$$y_h(t)=Ae^{-2t}$$

بنابراین:

$$y_2(t)=Ae^{-2t}+\tfrac{1}{4}e^{2t}\qquad for\ t>\circ$$

با فرض جواب نهایی، می توانیم نتیجه بگیریم که برای $t\le\circ$ $y_2(t)=\circ$، بنابراین.

$$y_2(\circ]=\circ=A+1\!/\!_4 \Rightarrow A=-1\!/\!_4$$

دراینصورت

$$y_2(t)=\left[-\frac{1}{4}e^{2t}\right]+1\!/\!_4\, e^{-2}u(t)$$

iii) فرض کنیم ورودی به صورت $x_3(t)=\propto e^{3t}u(t)+\beta e^{2t}u(t)$ باشد. فرض کنیم که $y_p(t)$ جواب خصوصی بصورت زیر باشد:

$$y_p(t)=x_1\alpha_1 e^{3t}+k_2\beta e^{2t}$$

برای $t>\circ$، با استفاده از معادله (م۲,۳۳) داریم:

$$3k_1\alpha e^{3t}+2k_2\beta e^{2t}+2k_1\alpha e^{3t}+2k_2\beta e^{2t}=\alpha e^{3t}+\beta e^{2t}$$

با متحد قرار دادن ضرایب e^{3t} و e^{2t} در دو طرف معادله داریم:

$$k_1=1\!/\!_5\ ,\ k_2=1\!/\!_4$$

حال، با قرار دادن $y_h(t)=A_e^{-2t}$ داریم:

$$y_3(t)=1\!/\!_5\,\alpha e^{3t}+1\!/\!_4\,\beta e^{2t}+Ae^{-2t}$$

برای $t>\circ$ = شرایط اولیه را به صورت زیر فیض می کنیم:

$$y_3=(\circ)=\circ=A+\alpha\!/\!_5+\beta\!/\!_4$$

$$\Rightarrow A=-\left(\frac{\propto}{5}+\beta\!/\!_4\right)$$

بنابراین:

$$y_3(t)=\left\{1\!/\!_5\propto e^{3t}+\frac{1}{4}\beta e^{2t}-\left(\frac{\propto}{5}+\frac{\beta}{4}\right)e^{-2t}\right\}u(t)$$

iv) برای ورودی ـ خروجی جفت $x_1(t)$ و $y_1(t)$، می توانیم از معادله (م۲,۳۳,۱) استفاده کنیم و شرایط اولیه برای نوشتن:

(ح۲,۳۳,۱)

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t)\\ y_1(t)=\circ \qquad \rightarrow t<t_1\end{cases}$$

برای ورودی ـ خروجی جفت $x_2(t)$ و $y_2(t)$، می تـوانیم از معادلـه ی (م۲٫۳۳٫۱) اسـتفاده کنـیم و شرایط اولیه برای نوشتن:

(ح۲٫۳۳٫۲)

$$\begin{cases} \frac{dy_2(t)}{dt}+2y_2(t)=x_2(t) \\ y_2(t)=0 \end{cases}$$

باسکیل کردن معادله (ح۲٫۳۳٫۱) به اندازه α ومعادله (ح۲٫۳۳٫۲) به اندازه β و خلاصه سازی داریم:

$$\frac{d}{dt}\{\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)\}+2\{\alpha y_1 t+\beta y_2(t)\}=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$$

$$y_1(t)+y_2(t)=0 \qquad for \quad t<mm(t_1,t_2)$$

بـا جایگـذاری، واضـح اسـت کـه خروجـی $y_3(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ زمانیکـه $x_3(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$. بعلاوه $y_3(t)=0$ برای $t<t_3$. که t_3 نشان دهنده زمان است تا زمانیکه $x_3(t)=0$.

(ب) (i) بااستفاده از نتیجه (a-ii) می توان نوشت:

$$y_1(t)=\frac{k}{4}\left[e^{2t}-e^{-2t}\right]u(t)$$

(ii) این مسئله را در راستای مثال ۲٫۱٤ حـل مـی کنـیم. ابتـدا فـرض کنیـد کـه $y_p(t)$ بـه صـورت $KYe^{2(t-T)}$ برای $t>2$ است. سپس بـا اسـتفاده از معادلـه (م۲٫۳۳٫۱) بـرای $t>T$ اسـت. سـپس بااستفاده از معادله (م۲٫۳۳٫۱) برای $t>T$ داریم:

$$2ke^{2(t-T)}+22ke^{2(t-T)}=e^{2t}$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

می دانیم که $y_p(t)=\frac{k}{4}e^{2(t-T)}$ برای $t>T$. حال جواب عمومی را بدست می آوریم:

$$y_h(t)=Ae^{-2t}$$

بنابراین

$$y_2(t)=Ae^{-2t}+\frac{k}{4}e^{2(t-T)} \qquad for \quad t>T$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه، می توان نتیجه گرفت که برای $t \le T$ $y_2(t)=0$. بنابراین:

$$y_2(T)=0=Ae^{-2T}+k/4 \Rightarrow A=-\frac{k}{4}e^{2T};$$

در این صورت:

$$y_2(t)=\left[-\frac{k}{4}e^{-2(t-T)}+\frac{k}{4}e^{2(t-T)}\right]u(t-T)$$

آشکار است که $x_1(t)=y_1(t-T)$ که برای $t<t_0$، $x_1(t)=0$ توجه کنید که:

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t) \qquad y_1(t)=0 \qquad for \quad t<t_0$$

از آنجایی که مشتق یک عملگر تغییرپذیر با زمان است، می توان نوشت:

$$\frac{dy_1(t-T)}{dt}+2y_1(t-T)=x_1(t-T) \qquad y_1(t)=0 \qquad for \ \ t<t_0$$

این پیشنهاد می کند که اگر ورودی به صورت سیگنالی از $x_2(t)=x_1(t-T)$ باشد، در اینصورت خروجی نیز سیگنالی به صورت $y_2(t)=y_1(t-T)$ خواهد بود. همچنین، توجه کنید که ورودی جدید $y_2(t)$ برای $t<t_0+T$ صفر خواهد بود. این تغییرپذیری با زمان را حمایت می کند از آنجا می کند $x_2(t)$ برای $t<t_0+T$ صفر است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که سیستم تغییرپذیر با زمان است.

۲٫۳۴) فرض کنید سکون ابتدایی معادل یک شرط کمکی صفرست که در زمانی قابل تنظیم با سیگنال ورودی تعیین می شود. در این مسئله نشان می دهیم که اگر شرط کمکی غیر صفر باشد یا در زمان مشخصی (مستقل از سیگنال ورودی) اعمال شود، سیستم متناظر نمی تواند LTI باشد. سیستمی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ فرض کنید که معادله دیفرانسیل مرتبه اول (م ۲–۳۳–۱) را ارضاکند.

(الف) با فرض شرط کمکی $y(1)=1$، با مثالی نقض نشان دهید که سیستم خطی نیست.

(ب) با فرض شرط کمکی $y(1)=1$، با مثالی نقض نشان دهید که سیستم تغییرناپذیر یا زمان نیست.

ج) نشان دهید که سیستم با شرط کمکی $y(1)=1$ نموأ خطی است.

د) نشان دهید که به ازای شرط کمکی $y(1)=1$ سیستم خطی است ولی تغییرناپذیر با زمان نیست.

هـ) نشان دهید که به ازای شرط کمکی $y(0)+y(4)=0$ سیستم خطی است ولی تغییرناپذیر با زمان نیست.

حل:

(الف) فرض کنید $x_1(t)\xrightarrow{S} y_1(t)$ ،$x_2(t)\xrightarrow{S} y_2(t)$. می دانیم کـه $y_1(1)=y_2(1)=1$
حال ورودی سومی را به صـورت $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ در نظـر بگیریـد. فـرض کنیـد خروجـی متناظر نیز $y_3(t)$، باشد.
حال توجه کنید که $y_3(1)=1\neq y_1(1)+y_2(1)$. بنابراین سیستم خطی نیست. یک مثـال خـالص در زیر آورده شده است:
خروجی متناظر برای $t<0$ برابر است با:

$$y_1(t)=\tfrac{1}{4}e^{2t}+Ae^{-2t}$$

با استفاده از این حقیقت که $y_1(1)=1$ برای $t>0$ داریم:

$$y_1(t)=\tfrac{1}{4}e^{2t}+\left(1-\tfrac{e}{4}\right)e^{-2(t-1)}$$

حال سیگنال $x_2(t)=0$ را فرض کنید دراین صورت خروجی متناظر برابر است با:

$$y_2(t)=Be^{-2t}$$

برای $t>0$ با استفاده از این حقیقت که $y_2(1)=1$ برای $t>0$ داریم:

$$y_2(t)=e^{-2(t-1)}$$

حال سیگنال سوم $x_3=x_1(t)+x_2(t)=x_1(t)$ را در نظر بگیرید. توجه کنیـد کـه خروجـی هنـوز برابراست با $y_3(t)=y_1(t)$ بـرای $t>0$. بـدیهی اسـت کـه $y_3(t)\neq y_1(t)+y_2(t)$ بـرای $t>0$.
بنابراین سیستم خطی نیست.

(ب) دوباره سیگنال ورودی $x_1(t)=e^{2t}u(t)$ را فرض کنید. از قسمت (الف) می دانیم که سـیگنال خروجی متناظر برای $t>0$ با $y(1)=1$ برابر است با:

$$y_1(t)=\tfrac{1}{4}e^{2t}+\left(1-\tfrac{e}{4}\right)e^{-2(t-1)}$$

حـال فـرض کنیـد سـیگنال ورودی $x_2(t)=x_1(t-T)=e^{2(t-T)}u(t-T)$، در اینـصورت بـرای $t>T$

$$y_2(t)=\tfrac{1}{4}e^{2(t-T)}+Ae^{-2t}$$

با استفاده ازاین حقیقت که $y_2(1)=1$ و همچنین فرض کنید $T<1$ برای $t>T$ داریم:

$$y_2(t)=\tfrac{1}{4}e^{2(t-T)}+\left(1-\tfrac{1}{4}e^{2(1-T)}\right)e^{-2(t-1)}$$

حال توجه کنید که برای $t>T$، $y_2(t)\neq y_1(t-T)$. بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان نیست.

(ج) به منظور اینکه نشان دهیم سیستم خطی صعودی با شرایط معین مثلاً $y(1)=1$ می باشد ابتدا بایستی نشان دهیم که سیستم با شرایط معین خطی است بطو خاص $y(1)=0$.
برای ورودی ـ خروجی جفت $x_1(t)$ و $y_1(t)$، می توان از (م۲٫۳۳٫۱) استفاده کنیم. و بااستفاده از شرایط اولیه:
(ح ۱-۲٫۳٤)

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t)\ ;\quad y_2(1)=0$$

برای ورودی ـ خروجی جفت، $x_2(t)$ و $y_2(2)$ نیز:

$$\frac{dy_2(t)}{dt}+2y_2(t)=x_2(t)\qquad ;\qquad y_2(1)=0 \qquad (ح ۲٫۳٤٫۲)$$

با اسکیل کردن (ح ۲٫۳٤٫۱) به اندازه α و (ح ۲٫۳٤٫۲) به اندازه ی β و خلاصه سازی داریم:

$$\frac{d}{dt}\{ay_1(t)+\beta y_2(t)\}+2\{ay_1(t)+\beta y_2(t)\}$$
$$=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$$
$$,$$
$$y_3(1)=y(1)+y_2(1)=0$$

ملاحظه می شود که خروجی به صورت $y_3(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ زمانیکه ورودی به صورت $x_3(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ بود، درآمد. بعلاوه $y(1)=0=y_1(1)+y_2(1)$ بنابراین سیستم خطی است.
بنابراین اگر سیستم کلی به صورت (کاسکید (آبشاری) به سیستم خطی با جمع کننده بهم وصل شود پاسخ تنها به شرایط معین اولیه را جمع می زند.
(د) در قسمت قبلی نشان دادیم که سیستم زمانی خطی است که $y(1)=0$ برای اینکه نشان دهیم سیستم تغییرناپذیر نیست، فرض کنیم یک ورودی از $x_1(t)=e^{2t}u(t)$ از قسمت (الف). می دانیم که خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$y_1(t)=\frac{1}{4}e^{2t}+Ae^{-2t}$$

با استفاده از این حقیقت که $y_1(1)=0$ برای $t>0$ داریم:

$$y_1(t)=\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2(t-2)}$$

فرض کنیم یک ورودی $x_2(t)=x_1\left(t-\frac{1}{2}\right)$ باشد. توجه کنید که $y_2(1)=0$ واضح است $\left(y_1\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(e-e^3\right)\right)$. $y_2(1)\neq y_1\left(1-\frac{1}{2}\right)$. بنابراین $y(t)\neq y_1\left(t-\frac{1}{2}\right)$ برای تمامی nها. این به این معنا است که سیستم تغییر پذیر با زمان است.

(هـ) برهانی که بسیار شبیه به اثبات خطی استفاده شده در قسمت (پ) اینجا نیز می تواند استفاده گردد. با روش نشان داده شده در قسمت (ت) می توانیم نشان دهیم که سیستم تغییرپذیر با زمان سات.

۲,۳۵) در مسئله قبل دیدیم که استفاده از شرط کمکی ثابت در زمان (مستقل از سیگنال ورودی) به سیستمی تغییرپذیر با زمان می انجامد. در این مسئله اثر شرط کمکی ثابت در زمان بر علّی بودن را بررسی می کنیم. سیستمی در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن معادله دیفرانسیل (م ۲-۳۳-۱) را ارضا کند. فرض کنید شرط کمکی این معادله دیفرانسیل $y(0)=0$ است. خروجی سیستم به ازای دو ورودی زیر را بیابید:

(الف $x_1(t)=0$

(ب $x_2(t)=\begin{cases}1\,, & \tau<-1\\ 0\,, & \tau>-1\end{cases}$

توجه کنید که $y_1(t)$ خروجی به ازای $x_1(t)$ و $y_2(t)$ خروجی به ازای $x_2(t)$ است، و گرچه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در $t<-1$ یکسان اند، ولی $y_2(t)$ در $t<-1$ یکسان نیستند. بر اساس این نتیجه می توان استدلالی برای علّی نبودن سیستم ارائه کرد.

حل:

(الف) از آنجایی که سیستم خطی است، $y_1(t)=0$ برای همه ی t.

(ب) حال فرض کنید خروجی زمانیکه ورودی $x_2(t)$ است، $y_2(t)$ باشد.

جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p(t)=Y \qquad t>-1$$

با جایگذاری در (م۱-۲,۳۳) داریم:

$$2\ Y=1$$

حال، جواب عمومی را به صورت $y_h(t)=Ae^{-2t}$ در نظر بگیریم. جواب کلی را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$y_2(t)=Ae^{-2t}+\frac{1}{2}\qquad t>-1$$

از آنجایی که $y(\circ)=\circ$ داریم:

(ح۱-۲،۳۵)

$$y_2(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}$$

برای $t<-1$، نشان می دهیم که $x_2(t)=\circ$. بنابراین جواب خصوصی در این بازه صفر خواهد شد و

(ح۲-۲،۳۵)

$$y_2(t)=Be^{-2t}\qquad t<-1$$

از آنجایی که دو قسمت جواب $y_2(t)$ معادلات (ح۱-۲،۳۵) و (ح۲-۳۵-۲) باید در $t=-1$ بدست آیند، می توانیم B را از معادله بدست آوریم:

در نتیجه:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2}=Be^{2}$$
$$y_2(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2}\right)e^{-2t+1}\qquad t<-1$$

حال نشان می دهیم که چون $x_1(t)=x_2(t)$ برای $t<-1$ بایستی درست که برای سیستم کازال در $t<-1$، $y_1(t)=y_2(t)$ بهرحال نتیجه قسمت (الف) و (ب) نشان می دهد که این صحیح نیست بنابراین سیستم کازال نیست.

(۲،۳٦) سیستم گسسته در زمانی را که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن به صورت زیر مرتبط اند، در نظر بگیرید

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$$

الف) نشان دهید که در صورت ابتدائاً ساکن بودن (یعنی اگر در $n<n_\circ$، $x[n]=\circ$؛ آنگاه در $n<n_\circ$، $y[n]=\circ$) سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

ب) نشان دهید که اگر سیستم ابتدائاً ساکن نباشد، و به جای آن شرط کمکی $y[\circ]=\circ$ را ارضا کند، سیستم علّی نیست. [راهنمایی: رهیافتی مشابه مسئله ۲-۳۵ به کار برید.]

حل:

یک ورودی $x_1[n]$ راه مانند $x_1[n]=\circ$ برای $n<n_1$ فرض کنید، خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$\begin{cases} y_1[n]=\frac{1}{2}y_1[n-1]+x_1[n) \\ y_1[n]=\circ \end{cases} \qquad \text{(ح ۲,۳٦,۱)}$$

و نیز ورودی دیگری بنام $x_2[n]$ را مانند $x_2[n]=\circ$ برای $n<n_2$ در این صورت خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$y_2[n]=\frac{1}{2}y_2[n-1]+x_2[n] \qquad y_2[n]=\circ \quad for \quad n<n_2$$

(ح ۲,۳٦,۲)

ـ با اسکیل کردن معادله (S.۲,۳٦,۱) به اندازه $\propto$ و معادله (S.۲,۳٦,۲) به انـدازه β و سـاده سـازی داریم:

$$\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]=\frac{\beta}{2}y_1[n-1]+\beta\!\!\diagup_{\!2}\,y_2[n-1]+\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$$

بـا جایگـذاری، بـدیهی اسـت کـه خروجـی $y_3(t)=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$ زمانیکـه $x_3[n]=\alpha x_1[n]+\beta x_{20[n]}$ بعـلاوه $y_1(1)+y_2(1)=y_3(1)=\circ$. بنـابراین، سیـستم خطـی است.

(ب) فرض کنیم دو ورودی $x_1[n]=\circ$ برای تمام n ها

و

$$x_2[n]=\begin{cases} \circ & n<-1 \\ 1 & n\geq -1 \end{cases}$$

موجود هستند. از آنجایی که سیستم خطی است، پاسخ $x_1[n]$ که همان $y_1[n]$ اسـت بـرای تمـام n هابرابر صفر است، یعنی $y_1[n]=\circ$

حال خروجی $y_2[n]$ را زمانی که ورودی $x_2[n]$ می باشد را بدست می آوریم:

چون $y_2[\circ]=\circ$

$$\begin{cases} y_2[1]=\left(\frac{1}{2}\right)\circ+\circ=\circ \\ y_2[2]=\left(\frac{1}{2}\right)\circ+\circ=\circ \end{cases}$$

بنابراین $\begin{cases} y_2[n]=\circ \\ for \quad n\ge\circ \end{cases}$ حال برای $n>\circ$ توجه کنید که:

$$y_2[\circ]=\tfrac{1}{2}y_2[-1]+x[\circ]$$

بنابراین: $y_2[-1]=-2$. با فرآیندی مشابه داریم $y_2[-2]=-4$ و $y_2[-2]=-4$ و $y_2[-3]=-8$ و به همین ترتیب $y_2=-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$.

حال توجه کنید که چون نبرای $n<\circ$ $x_1[n]=y_2[n]$. بهر طریف، نتایج بدست آمده از بالا نشان می دهد که این درست نیست.

بنابراین، سیستم کازال نیست.

۲٫۳۷) سیستمی با رابطه ورودی ـ خروجی مطابق معادله تفاضلی (م ۲-۳۳-۱) در نظر بگیرید، فرض کنید سیستم نهایتاً ساکن است [یعنی اگر در $t>t_\circ$، $x(t)=\circ$؛ آنگاه در $t>t_\circ$، $y(t)=\circ$]. نشان دهید که این سیستم علّی نیست. [راهنمایی: دو سیگنال ورودی در نظر بگیرید، $x_1(t)=\circ$ با خروجی $y_1(t)$ و $x_2(t)=e^t[u(t)-u(t-1)]$ با خروجی $y_2(t)$. نشان دهید که در $t<\circ$، $y_1(t)\neq y_2(t)$.]

حل:

فرض کنیم دو ورودی

$$x_1(t)=\circ$$

و

$$x_2(t)=e^t\left(u(t)-u(t-1)\right)$$

موجود باشند.

چون سیستم خطی است، پاسخ $y_1(t)=\circ \quad -\infty<n<\infty$ خواهد بود.

حال $y_2(t)$ را زمانی که $x_1(t)$ ورودی سیستم باشد را، بدست می آوریم. جواب خصوصی به صورت زیر می باشد:

$$y_p(t)=Ye^t \quad \circ<t<1$$

با جایگذاری در معادله (م۲٫۸۳٫۱) داریم:

$$3Y=1$$

حال جواب عمومی معادله را نیز داریم $y_h(t)=Ae^{-2t}$، جواب کلی معادله به صورت زیر می باشد.

$$y_2(t)=e^{-2t}+\tfrac{1}{3}e^{t} \qquad 0<t<1$$

با فرض شرایط نهایی داریم: $y(1)=0$، بااستفاده از این بدست می آوریم: $A=-e^{3}/3$. بنابراین:

$$y_2(t)=-\tfrac{1}{30}e^{-2t+3}+\tfrac{1}{3}e^{t} \qquad 0<t<1 \qquad (\text{ح}\ 2{,}37{,}1)$$

برای $t<0$ بایستی توجه کنید که $x_2(t)=0$. بنابراین، جواب خصوصی در این بازه برابر صفر خواهد بود.

$$y_2(t)=Be^{-2t} \qquad t>0 \qquad (\text{ح}\ 2{,}37{,}2)$$

چون دو قسمت از جواب برای $y_2(t)$ در معادلات (ح۱-۲,۳۷) و (ح۲-۳۷-۲) در $t=0$ برقرارند. می توانیم B برقرارند. می توانیم B را از معادله بدست آوریم.

$$\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}e^{3}=B$$

که در نتیجه

$$y_2(t)=\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}e^{3}\right)e^{-2t} \qquad t<0$$

حال توجه کنید که چون برای $t<0 \qquad x_1(t)=x_2(t)$، باید این درست باشد که برای یک سیتم کازال $y_1(t)=y_2(t)\ (for\ \ t<0)$، اما نتایج بدست آمده از معادلات فوق صحت این موضوع راتعیین نمی کند یعنی سیستم کازال نیست.

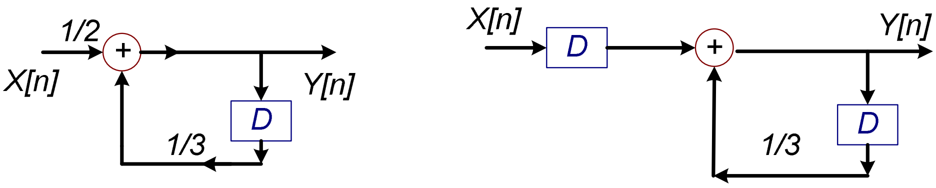
۲,۳۸) نمایش جعبه ای سیستمهای LTI علّی توصیف شده با معادلات تفاضلی زیر را رسم کنید:

الف) $y[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+\frac{1}{2}x[n]$

ب) $y[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+x[n-1]$

حل:

بلوک دیاگرام در شکل ح۲,۳۸ نشان داده شده است.



شکل ح۲٫۳۸

۲٫۳۹) نمایش جعبه ای سیستمهای LTI علّی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را رسم کنید:

الف) $y(t)=-\frac{1}{2}dy(t)/dt+4x(t)$

ب) $dy(dt)+3y(t)=x(t)$

حل:

بلوک دیاگرام در شکل ح۲٫۳۹ نشان داده شده است.

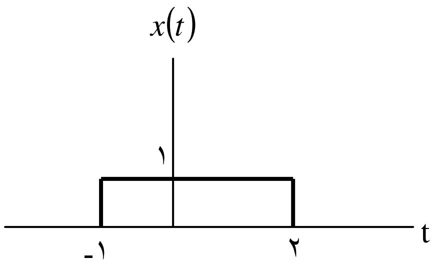
شکل ح۲٫۳۹

۲٫۴۰) ورودی و خروجی یک سیستم LTI با رابطه زیر هم مرتبط شده اند

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

پاسخ ضربه $h(t)$ این سیستم چیست؟

(ب) پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ نشان داده شده در شکل م ۲-۴۰ را بیابید.



شکل م ۲٫۴۰

حل:

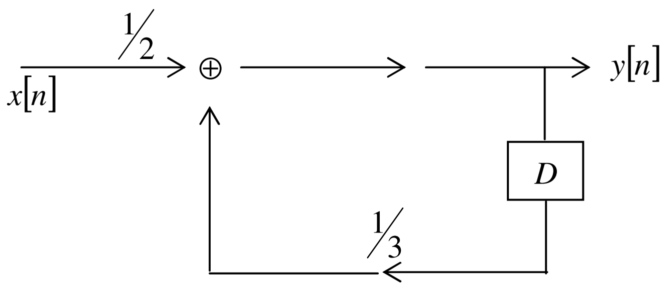
(الف) توجه کنید که:

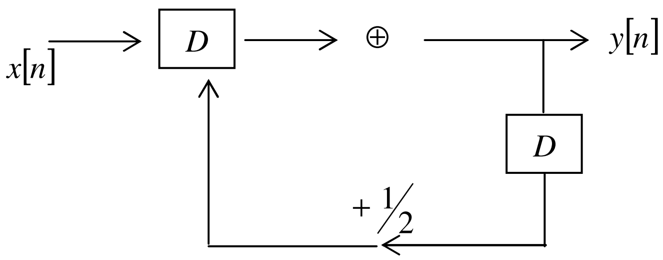
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau=\int_{-\infty}^{t-\tau} e^{-(t-z-\tau')}x(\tau')d\tau'$$

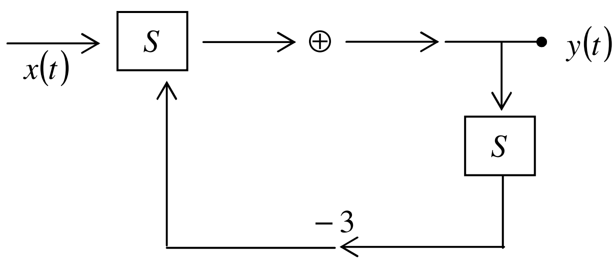
بنابراین:

$$h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$$

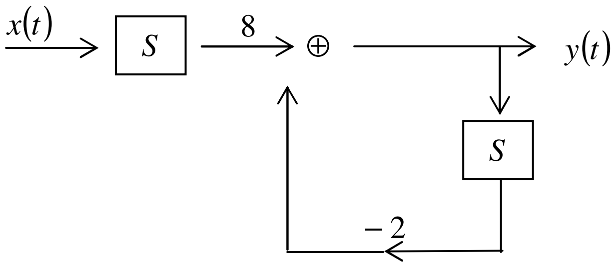
شکل ح۲,۳۸







شکل ح۲,۳۰



شکل ح ۲٫۳۰

(ب) داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\tau-2)}[u(t-\tau+1)-u(t-\tau-2)]d\tau$$

$h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ در شکل زیر نشان داده شده است.

با استفاده از شکل می تون نوشت:

$$y(t)=\begin{cases}\circ & t>1\\ \int_{2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=1-e^{-(t-1)} & 1<t<4\\ \int_{t-2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=e^{-(t-4)}\left[1-e^{-3}\right] & t>4\end{cases}$$

۲٫٤۱ سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x[n]=a^{n}u[n]$$

الف) سیگنال $g[n]=x[n]-a\,x[n-1]$ را رسم کنید.

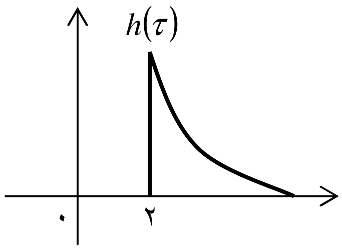
ب) با توجه به نتیجه بند (الف) و خواص کانولوشن $h[n]$ را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

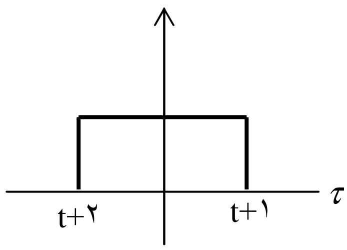
$$x[n]*h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\{u[n+2]\}-u[n-2]$$

حل:

(الف) می توان نوشت:

$$g[n]=x[mn]-\alpha x[n-1]$$
$$=a^{n}u[n]-a^{n}u[n=1]=\delta[n]$$





شکل ح۲,٤۰

(ب) توجه کنید که $g[n]=x[n]*\{x[n]-\alpha\delta[n-1]\}$. بنابرای از قسمت (α) می دانیم که $x[n]*\{\delta[n]-\alpha\delta[n-1]\}=\delta[n]$ با استفاده از ان می توان نوشت:

$$x[n]*\{\delta[n-1]-\alpha\delta[n-2]\}=\delta[n-1]$$
$$x[n]*\{\delta[n+1]-\alpha\delta[n]\}=\delta[n+1]$$
$$x[n]*\{\delta[n+2]-\alpha\delta[n+1]\}=\delta[n+2]$$

حال توجه کنید که:

$$x[n]*h[n]=4\delta[n+2]+2\delta[n+1]+\delta[n]+\tfrac{1}{2}\delta[n-1]$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}x[n]*h[n]&=4x[n]*\{\delta[n+2]-\alpha\delta[n+1]\}\\&+2x[n]*\{\delta[n+1]-\alpha\delta[n]\}\\&+x[n]*\{\delta[n]-\alpha\delta[n-1]\}\\&+\left(\tfrac{1}{2}\right)x[n]*\delta\{n-1\}-\alpha\delta[n-2]\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}h[n]&=4\delta[n+2]+(2+4\alpha)\delta[n+1]+(1+2\alpha)\delta[n]\\&+\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)\delta[n-1]-\tfrac{1}{2}\quad\delta[n-2]\end{aligned}$$

۲,٤۲) دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x(t)=u(t+0/5)-u(t-0/5)$$
$$h(t)=e^{j\omega_0 t}$$

الف) ω_0 را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$y(t)=0$$
$$y(t)=x(t)*h(t)$$

ب) آیا جواب یکتاست؟

حل:

داریم:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{0.5}^{+0.5} e^{j\omega_\circ}(t-\tau)d\tau$$

$$y(\circ)=\int_{-0.5}^{0.5} e^{-j\omega_\circ \tau}dz=\frac{2}{\omega_\circ}\sin(\omega_\circ/2)$$

(الف) اگر $\omega_\circ=2\pi$ در اینصورت $y(\circ)=\circ$.

(ب) واضح است، جواب ما به قسمت (الف) منحصر به فرد نیست. هر $\omega_\circ=2k\pi \quad K\in T$ و $K\neq\circ$ کافی خواهد بود.

۲٫٤۳) یکی از خواص مهم کانولوشن در هر دو حالت پیوسته و گسسته در زمان، خاصیت شرکت پذیری است. در این مسئله این خاصیت را مورد بررسی قرار می دهیم.

الف) تساوی زیر را ثابت کنید.

$$[x(t)]*h(t)*g(t)=x(t)*[h(t)*g(t)] \qquad (\text{م ۲–٤۳–۱})$$

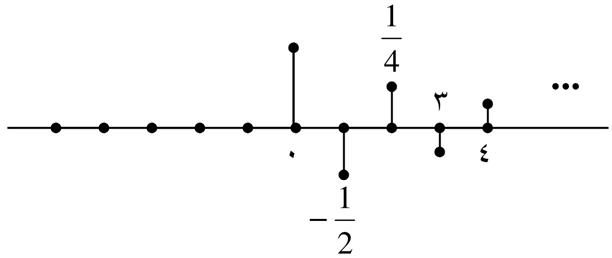
به ین منظور نشان دهید ه هر دو طرف معادله (م ۲–٤۳–۱) به صورت زیر در می آیند.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma$$

ب) در شکل م ۲–٤۳ (الف) دو سیستم LTI با پاسخ ضربه های h_1 و h_2 نشان داده شده اند. این دو سیستم را مطابق شکل م ۲–٤۳ (ب) سری می کنیم. فرض کنید $x[n]=u[n]$.

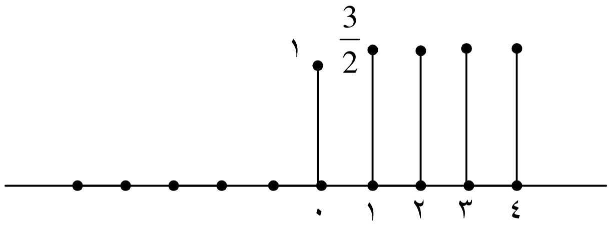
(i) ابتدا با محاسبه $w[n]=x[n]*h_1[n]$ و سپس محاسبه $y[n]=w[n]*h_2[n]$ ، $y[n]$ را یعنی حاصل $y[n]=\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]$ را محاسبه کنید.

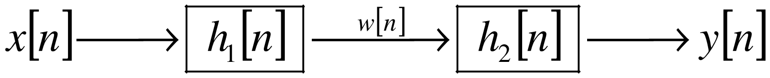
(ii) ابتدا کانولوشن $g[n]=h_2[n]*h_1[n]$ را حساب کنید.



$$h_2[n] = u[n] + \frac{1}{2}u[n-1]$$

(الف)





شکل م ۲-۳٤

جوابهای دو بند (i) و (ii) باید برابر باشند، که خاصیت شرکت پذیری کانولوشن را در حالت گسسته در زمان نشان می دهد

ج) ترکیب متوالی دو سیستم LTI شکل م ۲-٤۳ (ب) را در نظر بگیرید، که در این حالت

$$h_1[n] = \sin 8n$$

,

$$h_2[n] = a^n u[n] \quad , \quad |a| < 1$$

ورودی عبارت است

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$$

خروجی $y[n]$ را پیدا کنید. (راهنمایی: جابجایی و شرکت پذیری کانولوشن حل این مسئله را بسیار ساده می کند).

حل:

الف) ابتدا داریم:

$$[x(t) * h(t)] * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma^2 - \tau)g(t - \sigma')d\tau\, d\sigma'$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t - \sigma - \tau)d\tau d\sigma$$

و نیز:

$$x(t)*[h(t)*g(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\sigma^{2})h(\tau)g(\sigma'-\tau)d\sigma' d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\sigma)h(\tau)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(\sigma)g(t-\sigma-\tau)d\tau d\sigma$$

این تساوی اثبات شد.

(ب) (i) ابتدا داریم:

$$\omega[n]=u[n]*h_1[n]=\sum_{n=\circ}^{n}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{k}=\tfrac{2}{3}\left[1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u[n]$$

حال

$$y[n]=\omega[n]*h_2[n]=(n+1)u[n]$$

ii) ابتدا داریم:

$$g[n]=h_1[n]*h_2[n]$$
$$=\sum_{k=\circ}^{n}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{k}+\tfrac{1}{2}\sum_{k=\circ}^{n-1}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{k}=u[n]$$

حال:

$$y[n]=u[n]*g[n]=u[n]*u[n]=(n+1)u[n]$$

نتیجه یکسانی برای هر دو قسمت (i) و (ii) بدست آمده.

(ج) توجه کنید که:

$$x[n]*\{h_2[n]*h_1[n]\}=\{x[n]*h_2[n]\}*h_1[n]$$

همچنین توجه کنید که:

$$x[n]*h_2[n]=a^{n}u[n]-a^{n}u[n-1]=\delta[n]$$

بنابراین:

$$x[n]*h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]*\sin 8n=\sin 8n$$

۲,٤٤) الف) اگر

$$x(t)=\circ\ ,\quad |t|>T_1$$

,

$$h(t)=\circ\ ,\quad |t|>T_2$$

آنگاه می توان عدد مثبت T_3 را به نحوی یافت که به ازای آن

$$x(t)*h(t)=0, \qquad |t|>T_3$$

T_3 را برحسب T_1 و T_2 به دست آورید.

ب) ورودی یک سیستم گسسته در زمان LTI $x[n]$، پاسخ ضربه آن $h[n]$، و خروجی آن $y[n]$ است. اگر بدانیم $h[n]$ در خارج فاصله $N_0 \le n \le N_1$, $x[n]$ در خارج فاصله $N_2 \le n \le N_3$ صفرند، خروجی $y[n]$ در خارج فاصله $N_4 \le n \le N_5$ صفرند.

(ii) اگر طول فواصل $N_0 \le n \le N_1$، $N_2 \le n \le N_3$، و $N_4 \le n \le N_5$ را به ترتیب M_h، M_x، و M_y بنامیم، M_y و M_x بیابید.

ج) یک سیستم LTI گسسته در زمان با این مشخصه در نظر بگیرید: اگر به ازای $n \ge 10$، $x[n]=0$، آنگاه خروجی به ازای $n \ge 15$ صفرست. برای درستی این گزاره پاسخ ضربه سیستم باید چه شرطی داشته باشد؟

د) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه شکل م ۲-٤٤ در نظر بگیرید. برای تعیین $y(0)$ دانستن $y[n]$ در فاصله ای لازم است؟

حل:

داریم:

$$x(t)T_2 * h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{T_1}^{T_2}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

توجه کنید که برای $h(-\tau)=0$، بنابراین برای $\tau > t+T_2$ و $\tau < -T_2+t$ $h(t-\tau)=0$

بنابراین: انتگرال فوق برابر صفر خواهد بود همچنین اگر $T_1 < -T_2+\tau$ یا $T_2+t < -T_1$ که بیان می دارد اگر $t>|T_1+T_2|$ انتگرال کانولوشن صفر است.

(ب) (i) داریم: $y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{K=N_0}^{N_1}h[k]x[n-k]$

توجه کنید که برای $N_3 \le x \le -N_2$ $x[-k]\ne 0$. بنابراین برای $-N_3+n \le k \le -N_2+n$ $x[-k+n]\ne 0$. واضح است. سری کانولوشن اگر $-N_3+n \le N_1$ و $-N_2+n \ge N_0$ صفر

نیست. بنابراین $y[n]$ برای $n \le N_1 + N_3$ صـفر نیـست. بنـابراین $y[n]$ بـرای $n \le N_1 + N_3$ و $n \ge N_\circ + N_2$ صفر نیست.

ii) به راحتی می توان نشان داد که $My = M_h + M_x - 1$

(ج) برای $n > 5$، $h[n] = \circ$

(د) از شکل مشخص است که:

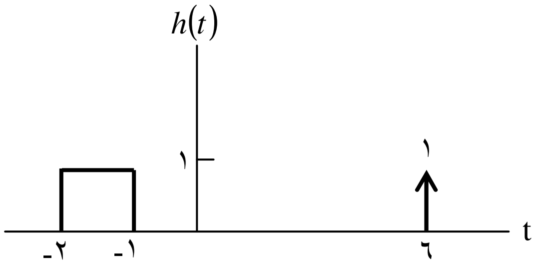
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-2}^{-1} x(t-\tau)d\tau + x(t-6)$$

بنابراین:

$$y(\circ) = \int_{-2}^{-1} x(\tau)d\tau + x(-6)$$

که بیان می کند که $x(t)$ باید در بازه $1 \le t \le 2$ و برای $t = -6$ معین باشد.

۲,٤٥) نشان دهید که اگر $y(t)$ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ باشد، آنگاه پاسخ سیستم به



شکل ۲,٤٤

ورودی

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

برابر $y'(t)$ است. درستی این مطلب را به سه شکل نشان دهید:

(i) با استفاده مستقیم از خواص خطی بودن، تغییرناپذیری با زمان و این که

$$x'(t) = \lim_{n \to \circ} \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{u_1(t)} \longrightarrow y(t)$$

شکل م ۲،٤٥

(ii) با مشتق گیری از انتگرال کانولوشن.

(iii) با بررسی سیستم شکل م ۲–٤٥.

(ب) صحت روابط زیر را نشان دهید.

i) $\left(y'(t) = x(t) * h'(t) \right)$

ii) $\left(y'(t) = \left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau) \right) * h'(t) = \int_{-\infty}^{t} [x'(\tau) * h(\tau) d\tau] = x'(t) * \left(\int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau \right) \right.$

[راهنمایی: به کمک نمودار جعبه ای بند (iii) بخش (الف) و توجه به این که $u_1(t) * u_{-1}(t) = \delta(t)$، می توان به آسانی مسئله را حل کرد.]

د) $s(t)$ پاسخ پله واحد یک سیستم LTI پیوسته در زمان است. با استفاده از بند (ب) نشاندهید که پاسخ $y(t)$ به ورودی $x(t)$ عبارت است از

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) u(t-\tau) d\tau \qquad \text{(م ۲–٤٥–۱)}$$

هـ) با استفاده از معادله (م ۲–٤٥–۲) پاسخ سیستم LTI دارای پاسخ ضربه زیر

$$s(t) = \left(e^{-3t} - 2e^{-2t} + 1 \right) u(t)$$

به ورودی $x(t) = e^{t} u(t)$ را بیابید.

و) $s[n]$ پاسخ پله یک سیستم گسسته در زمان LTI است. همتای گسسته در زمان معادله های (م ۲–٤٥–۲) را بیابید.

حل:

داریم:

$$\frac{x(t) - x(t-h)}{h} \xrightarrow{\ell TI} \frac{y(t) - y(t-h)}{h}$$

با سوق دادن $h \to 0$ در هر طرف معادله فوق داریم:

$$x'(t) \xrightarrow{\ell TI} y'(t)$$

ii) با گرفتن دیفرانسیل از انتگرال کانولوشن داریم:

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}[x(t-\tau)]h(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x'(t-\tau)h(\tau)d\tau=x^{1}(t)*h(t)$$

$$\xrightarrow{x(t)}\boxed{h(t)}\xrightarrow[y(t)]{}\boxed{u_1(t)}\xrightarrow{p(t)=y'(t)}$$

شکل ح۲,٤٥

iii) فرض کنیم نام خروجی سیستم با پاسخ ضربه $u_1(t)$، $\omega(t)$ باشد. در این صورت

$$z(t)=x'(t)*h(t),\ \omega(t)=x(t)*u_1(t)=x'(t)$$

چون هر دو سیستم در زنجیر (cascade) ℓTI هستند. می توانیم جای آنها را مانند آنچه در شکل S۲,٤٥ نشان داده شده است عوض کرد.

در این صورت $y(t)=x(t)*h(t)$, $p(t)=y'(t)$ چون $z(t)$ و $p(t)$ با ید برابر باشند می توانیم نتیجه بگیریم که

$$x'(t)*h(t)=y'(t)$$

ii) فرض کنید:

$$y(t)=[x(t)*u(t)]*h'(t)$$
$$=x(t)[u(t)*u_1(t)]*h(t)$$
$$=x(t)*h(t)$$

این نشان می دهد که $[x(t)*u(t)]h'(t)$ که معادل است با $x(t)*h(t)$. حال مطلب مشابهی را به صورت زیر می توان نوشت:

$$y(t)=[x(t)*u(t)]*h'(t)$$
$$=[[x(t)*u_1(t)]*h(t)]*u(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{t}x^{1}(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=x^{1}(t)*[h(t)*u(t)]$$
$$=x^{1}(t)*\int_{\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

ج) توجه کنید $\delta(t)-5e^{-5t}u(t)=x^1(t)$. بنابراین، خروجی سیستم ℓTI $x^1(t)$ برابر خواهد بود با $h(t)-5\sin(\omega_\circ t)$ چون این بایستی با $y'(t)=\omega_\circ t$ معادل باشد مجبوریم:

$$h(t)=\omega_\circ \cos(\omega_\circ t)+5\sin\omega_\circ t$$

د) داریم:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)*[u_1(t)*u(t)]*h(t) \\ &= [x(t)*u_1(t)]*[u(t)*h(t)] \\ &= x^1(t)*S(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau)\dot{s}(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

(ii

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t)*S(t) \\ &= [x[t]*u_1(t)]*u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^1(\tau)u(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

هـ) در این مورد:

$$x^1(t)=e^t u(t)+\delta(t)$$

بنابراین:

$$y(t)=S(t)+e^t u(t)*S(t)$$

که می تواند به صورت

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[e^{-3t}-2e^{-2t}+1\right]u(t) \\ &+ \tfrac{1}{4}\left[e^t-e^{-3t}\right] \\ &- \left(\frac{2}{3}\left(e^t-e^{-2t}\right)-e^t-1\right)u(t) \end{aligned}$$

ح) با استفاده از این حقیقت که $\delta[n]=u[n]*[\delta[n]-\delta[n-1]]$ داریم:

$$y[n]=[x[n]-x[n-1]]*s[n]=\sum[x[k]-x[k-1]]s[n-k]$$

و

$$\dot{x}[n]=[x[n]-x[n-1]]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[x[k]-x[k-1]u[k-k]]$$

۲,٤٦) S یک سیتم LTI است، سیگنال $x(t)=e^{-3t}u(t-1)$ را در نظر بگیرید. اگر

$$x(t)\rightarrow y(t)$$

,

$$\frac{dx(t)}{dt}\rightarrow -3y(t)+e^{-2t}u(t)$$

پاسخ ضربه $h(t)$ سیستم S را بیابید.

حل:

توجه کنید که

$$\frac{dx(t)}{dt}=-6e^{-3t}u(t-1)+2\delta(t-1)=-3x(t)+2\delta(t-1)$$

که می دهد:

$$x(t)=2e^{-3t}u(t-1)\rightarrow y(t)$$

می دانیم که: $\frac{dx(t)}{dt}=-3x(t)+2\delta(t-1)$ بایـد در خروجـی $-3y(t)+2h(t-1)$ را بدهـد.

ازاطلاعات داده شده می توانیم نتیجه بگیریم که

$$.2h(t-1)=e^{-2t}u(t)$$

بنابراین:

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-2(t+1)}u(t+1)$$

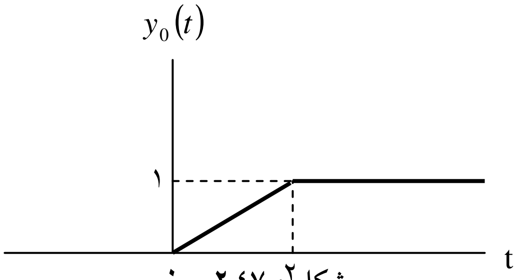
۲,٤٧) یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، با پاسخ ضربه $h_{\circ}(t)$ داده شده است. مـی دانـیم کـه اگـر ورودی $x_{\circ}(t)$ باشـد، خروجـی بـه صـورت $y_{\circ}(t)$ شـکل م ۲-٤٧ اسـت. سـیگنالهای زیـر ورودی سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربه داده شده هستند:

الف) ورودی $x(t)$	پاسخ ضربه $h(t)$
ب) $x(t)=x_{\circ}(t)-x_{\circ}(t-2)$	$h(t)=h_{\circ}(t)$
ج) $x(t)=x_{\circ}(t-2)$	$h(t)=h_{\circ}(t+1)$
د) $x(t)=x_{\circ}(-t)$	$h(t)=h_{\circ}(t)$

هـ) $x(t)=x'_{\circ}(t)$ $\qquad$ $h(t)=h_{\circ}(-t)$

و) $x(t)=x'_{\circ}(t)$ $\qquad$ $h(t)=h'_{\circ}(t)$

[در اینجا $x'_{\circ}(t)$ و $h'_{\circ}(t)$ به ترتیب مشتقهای $x_{\circ}$ و $h_{\circ}(t)$ هستند].



شکل م۲ ۲,٤۷

در هر مورد تعیین کنید آیا بـرای یـافتن خروجـی سیـستم دارای پاسـخ ضـربه $h(t)$ بـه ورودی $x(t)$ اطلاعات کافی است یا نه. در صورت وجود اطلاعات کافی، $y(t)$ را رسم و آن را دقیقـاً عددگـذاری کنید.

حل:

(الف) $y(t)=2y_{\circ}(t)$

(ب) $y(t)=y_{\circ}(t)-y_{\circ}(t-2)$

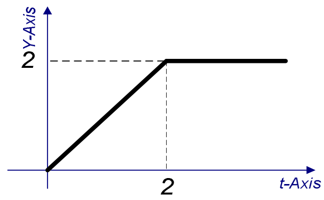
(ج) $y(t)=y_{\circ}(t-1)$

(د) اطلاعات کافی نیست.

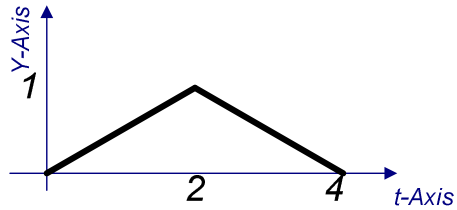
(هـ) $y(t)=y_{\circ}(-t)$

(و) $y(t)=y''_{\circ}(t)$

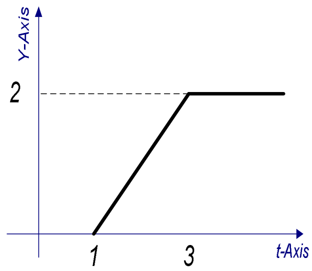
سیگنالها برای قسمت های مختلف مسئله در شکل ح۲,۱۷ ترسیم شده اند.



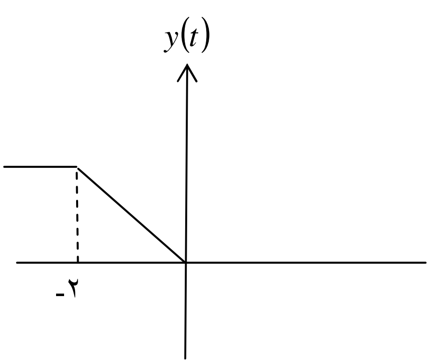
(الف)



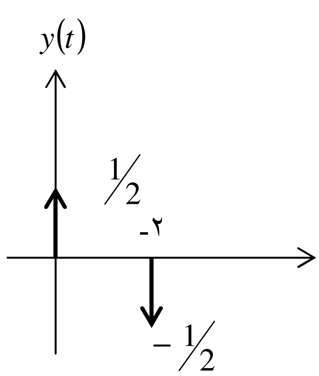
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

۲,۴۸) گزاره های زیر در مورد سیستهای LTI درست است یا نادرست؟ دلیل بیاورید.

الف) سیستم وارون یک سیستم LTI، متناوب و غیر صفر باشد، سیستم ناپایدار است.

ب) سیستم وارون یک سیستم LTI علّی همیشه علّی است.

(ج) ار به ازای هر مقدار n داشته باشیم $|h[n]| \le k$، که K یک عدد معین اســت، سیــستم LTI دارای پاسخ ضربه $h[n]$ پایدار است.

د) اگر طول پاسخ ضربه سیستم LTI گسسته در زمان محدود باشد، سیستم پایدارست.

هـ) اگر یک سیستم LTI علّی باشد، آنگاه پایدارست.

و) ترکیب متوالی یک سیستم LTI غیر علّی و یک سیستم علّی لزوماً غیر علّی است.

ز) یک سیستم LTI پیوسته در زمان پایدارست، اگر و تنها اگر پاسخ پلـه آن $s(t)$ مطلقـاً انتگرالپـذیر باشد، یعنی داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

ح) یک سیستم LTI گسسته در زمان علّی است، اگر و تنهـا اگـر پاسـخ پلـه آن $s[n]$ بـه ازای $n < 0$ صفر باشد.

حل:

(الف) درست: اگر $h(t)$ پریودیک وغیرصفر باشد، در این صورت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \infty$$

بنابراین $h(t)$ ناپایدار است.

(ب) نادرست، برای مثال معکوس $h[n] = \delta[n-k]$ برابر است با $g[n] = \delta[n+k]$ که غیر کازال است.

(ج) نادرست؛ برای مثال $h[n] = u[n]$ که بیان می دارد:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \infty$$

که سیستم ناپایدار است.

(د) درست؛ با فرض اینکه $h[n]$ در بازه $n_1 \le n \le n_2$ محدود و غیر صفر باشد. در این صورت

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} |h[k]| < \infty$$

که بیان می کند، سیستم پایدار است.

(هـ) نادرست. برای مثال $h(t)=e^{t}u(t)$ پایدار نیست اما کازال است.

(و) نادرست، برای مثال اتصال زنجیری سیستم های کازال با پاسخ ضربه $h_1[n]=\delta[n-1]$ و سیستم غیر کازال با پاسخ ضربه $h_2[n]=\delta[n+1]$ منجر به یک سیستم کلی با پاسخ ضربه

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]=\delta[n].$$

(ذ) نادرست، برای مثال اگر $h(t)=e^{-t}u(t)$ باشد در این صورت $S(t)=\left(1-e^{-t}\right)u(t)$. $\int_{\circ}^{\infty}\left|1-e^{-t}\right|dt=t_{,}e^{-t}\Big|_{\circ}^{\infty}=\infty$. اگر چه سیستم پایدار است اما پاسخ پله انتگرال پذیر نیست

(خ) درست. می توان نوشت: $u[n]=\sum_{k=\circ}^{\infty}\delta[n-k]$. بنابراین $S[n]=\sum_{k=\circ}^{\infty}h[n-k]$.

اگر در بازه $n<\circ$، $s[n]=\circ$ در اینصورت در $n<\circ$، $h[n]=\circ$ و سیستم کازال است.

۲٫۴۹) در درس نشان دادیم که اگر $h[n]$ مطلقاً جمع پذیر باشد، یعنی

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

آنگاه سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h[n]$ پایدارست. پس مطلقاً جمع پذیر بودن شرط کافی پایداری است. در این مسئله نشان می دهیم که این شرط لازم نیز هست. یک سیستم LTI در نظر بگیرید که پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع پذیر نباشد، یعنی

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$$

الف) فرض کنید سیگنال ورودی این سیستم به صورت زیرست

$$x[n]=\begin{cases} \circ & , h[-n]=\circ \quad \text{به ازای} \\ \dfrac{h[-n]}{|h[-n]|} & , h[-n]\neq\circ \quad \text{به ازای} \end{cases}$$

آیا این سیگنال ورودی کراندارست؟ اگر آری، کوچکترین مقدار B را که شرایط زیر را ارضا می کنـد، بیابید

به ازای تمام مقادیر n، $|x[n]| \le B$

ب) به ازای این ورودی، خروجی را در $n=0$ حساب کنید. آیا این نتیجـه، لازم بـودن شـرط مطلقـاً جمع پذیری برای پایداری سیستم را اثبات می کند؟

ج) به روشی مشابه نشان دهید که شرط لازم و کافی برای پایداری سیستمهای LTI پیوسـته در زمـان در زمان این است که پاسخ ضربه آنها مطلقا ً انتگرالپذیر باشد.

حل:

(الف) ورودی محدود است $|x[n]| \le 1 = B_x$ در $-\infty < n < \infty$.

(ب) فرض کنید:

$$
\begin{aligned}
y[0] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[-k]h[k] \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{h^2[k]}{|h[k]|} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]| \to \infty
\end{aligned}
$$

بنابراین خروجی محدود نیست و سیستم ناپایدار است.

(پ) فرض کنید

$$
x(t) = \begin{cases} 0 & h(-t) = 0 \quad \text{اگر} \\ \dfrac{h(-t)}{|h(-t)|} & h(-t) \ne 0 \quad \text{اگر} \end{cases}
$$

حال برای ترم t $|x(t) \le 1|$. بنابراین $x(t)$ ورودی محدود است به جای

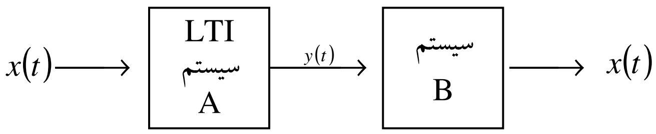
$$
\begin{aligned}
y(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(x(-\tau)h(\tau)d\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h^2(\tau)}{|h(\tau)|} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty
\end{aligned}
$$

بنابراین اگر پاسخ ضربه به طور معین انتگرال پذیر نباشد سیستم ناپایدار خواهد بود.

۲,۵۰) ترکیب سری شکل م ۲–۵۰ را در نظر بگیرید. سیستم A یک سیستم LTI، و سیستم B وارون سیستم A است. $y_1(t)$ پاسخ به سیستم A به $x_1(t)$ و $y_2(t)$ پاسخ سیستم A به $x_2(t)$ است:

الف) پاسخ سیستم B به ورودی $ay_1(t)+by_2(t)$ چیست؟ a و b اعداد ثابت اند.

ب) پاسخ سیستم B به ورودی $y_1(t-\tau)$ چیست؟



شکل م ۲–۵۰

حل:

(الف) خروجی برابر خواهد بود؛ $ax_1(t)+bx_2(t)$.

(ب) خروجی برابر است با: $x_1(t-\tau)$.

(۲,۵۱) در دس دیدیم که رابطه ورودی ـ خروجی دو سیستم LTI سری به ترتیب اتصال آنها بستگی ندارد. این مطلب، که خاصیت جابجایی نام دارد، به خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان هر دو سیستم وابسته است. در این مسئله این نکته را نشان می دهیم.

الف) دو سیستم گسسته در زمان A و B در نظر بگیرید. سیستم LTIB خطی است، ولی تغییرناپذیر با زمان نیست، ولی سیستم A سیستمی LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ است. در واقع پاسخ سیستم B به ورودی $w[n]$ به صورت زیرست

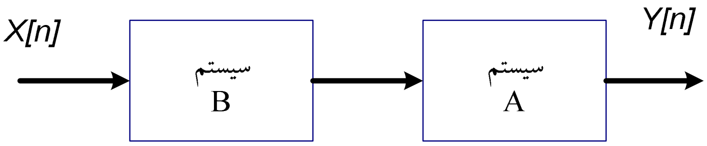
$$z[n]=nw[n]$$

با محاسبه پاسخ هر یک از اتصالهای سری شکلهای م ۲– ۵۱ (الف) و (ب) بـه ورودی $x[n]=\delta[n]$ نشان دهید که این دو سیستم خاصیت جابجایی ندارند.

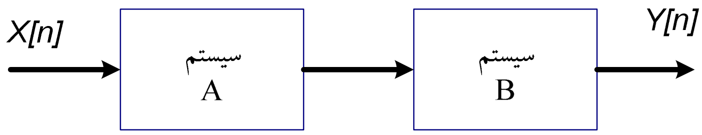
ب) فرض کنید به جای سیستم b دو اتصال شکل م ۲–۵۱ ، سیستمی قرار گرفته که رابطه بین ورودی $w[n]$ و خروجی $z[n]$ آن به صورت زیرست.

$$z[n]=w[n]+2$$

محاسبات قسمت (الف) را برای این حالت تکرار کنید



(الف)



(ب)

حل:

(الف) برای سیستم شکل (الف) ح ۲٫۵۱، پاسخ به ضربه واحد برابر است با:

$$y_1[n]=n\left({}^{1}\!/_{2}\right)^n u[n]$$

برای سیستم شکل (ب) ح ۲٫۵۱ پاسخ ضربه واحد عبارتست از:

$$y=[n]=0$$

واضح است که $y_1[n]\neq y_2[n]$

(ب) برای سیستم شکل (الف) ح ۲٫۵۱ پاسخ ضربه واحد عبارتست از:

$$y[n]=\left({}^{1}\!/_{2}\right)^n u[n]+2$$

برای سیستم شکل (ب) ح ۲٫۵۱ پاسخ ضربه واحد عبارتست از:

$$y[n]=\left({}^{1}\!/_{2}\right)^n u[n]+4$$

واضح است که

$$y_1[n]\neq y_2[n]$$

۲٫۵۲) یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید،

$$h[n]=(n+1)a^n u[n]$$

که در آن $|a|<1$. نشاندهید پاسخ پله سیستم به صورت زیرست.

$$s[n]=\left[\frac{1}{(a-1)^2}-\frac{a}{(a-1)^2}a^n+\frac{a}{(a-1)}(n+1)a^n\right]u[n]$$

راهنمایی: توجه کنید که

$$\sum_{K=\circ}^{N}(K+1)a^k=\frac{d}{da}\sum_{K=\circ}^{N+1}a^k$$

حل:

داریم:

$$s[n]=h[n]*u[n]$$

$$=\begin{cases}\sum_{k=\circ}^{n}(1+k)a^k & n\geq\circ\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

توجه داشته باشید که:

$$\sum(k+1)a^k=\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=\circ}^{n+1}a^k=\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1-\alpha^{n+2}}{1-\alpha}\right]$$

داریم:

$$s[n]=\left[\frac{1-(n+2)\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\alpha+\frac{1-\alpha^{n+2}}{(1-\alpha^2)}\right]u[n]$$

$$=\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\alpha^n+\frac{\alpha}{1-\alpha}(n+1)\alpha^n\right]u[n]$$

۲,۵۳) الف) معادله دیفرانسیل همگن زیر رادر نظر بگیرید

$$\sum_{K=\circ}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{d\,t^k}=\circ \qquad (\text{م } ۲-۵۳-۱)$$

نشان دهید اگر $s_\circ$ ریشه معادله زیر باشد

$$p(s)=\sum_{k=\circ}^{N}a_k s^k=\circ \qquad (\text{م } ۲-۵۳-۱)$$

آنگاه $A\,e^{s_\circ t}$ یک جواب معادله (۲–۵۳–۱) است، که در آن A یک ثابت دلخواه مختلط است.

ب) چند جمله ای $p(s)$ معادله (۲–۵۳–۲) را می توان برحسب ریشه است. توجه کنید که

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_r=N$$

در حالت کلی به ازای $\sigma_i>1$، علاوه بر Ae^{s_it}، $A_{ij}t_je^{s_it}$ هم جواب معادله (م ۲–۵۳–۱) است، که j تمام اعداد صحیح بزرگتر از صفر و کوچکتر یا مساوی σ_i-1 را می تواند داشته باشد. برای اثبات این مطلب نشان دهید اگر $\sigma_i=2$، Ate^{s_it} هم یک جواب معادله (م ۲–۵۳–۱) است. [راهنمایی: نشان دهید اگر s یک عدد مختلط دلخواه باشد آنگاه

$$\sum_{k=\circ}^{N}a_k\frac{d^k\left(Ate^{st}\right)}{dt^k}=A\,p(s)te^{st}+A\frac{d\,p(s)}{ds}e^{st}$$

پس کلی ترین جواب معادله (م ۲–۵۳–۱) به صورت زیرست

$$\sum_{i=1}^{r}\ \sum_{j=\circ}^{\sigma_i-1}A_{ij}t^je^{s_it}$$

که در آن A_{ij} یک ثابت دلخواه مختلط است.

ج) معادلات دیفرانسیل همگن زیر را با شرایط کمکی داده شده حل کنید:

(i) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{d\,y(t)}{dt}+2y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=\circ\ ,\ y'(\circ)=2$

(ii) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{d\,y(t)}{dt}+2\,y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=1\ ,\ y'(\circ)=-1$

(iii) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{d\,y(t)}{dt}+2\,y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=\circ\ ,\ y'(\circ)=\circ$

(iv) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{d\,y(t)}{dt}+y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=1\ ,\ y'(\circ)=1$

(v) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3}+\dfrac{d^2\,y(t)}{dt^2}-\dfrac{dy(t)}{dy}-y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=1\ ,\ y'(\circ)=1\ ,\ y''(\circ)=-2$

(vi) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{d\,y(t)}{dt}+5\,y(t)=\circ \qquad ;\ y(\circ)=1\ ,\ y'(\circ)=1$

حل:

فرض کنیم

$$\sum_{K=\circ}^{N} a_k s_\circ^k = \circ$$

در اینصورت :

$$\sum_{k=\circ}^{N} \alpha_k \frac{d^k}{dt^k}\left(Ae^{s_\circ t}\right)$$
$$= \sum_{k=\circ}^{N} A\alpha_k e^{s_\circ t} s_\circ^k = \circ$$

بنابراین $Ae^{s.t}$ جواب معادله (ح ۲,۵۳,۱)

(ب) فرض کنید:

$$\sum_{k=\circ}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k}\left(Ate^{st}\right) = \sum_{k=\circ}^{N} Aa_k t\, s^k e^{st} + \sum_{k=\circ}^{N} A\alpha_k e^{st} s^{k-1}$$
$$= Ate^{st}\sum_{k=\circ}^{N} a_k s^k + Ae^{st}\sum_{k=\circ}^{N}\frac{d}{ds}\left(s^k\right)$$
$$= Ate^{st}\sum_{k=\circ}^{N} a_k s^k + Ae^{st}\frac{d}{ds}\sum_{k=\circ}^{N} a_k s^k$$

اگر s، یک جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$\sum_{k=\circ}^{N} a_k s_k^1 = \circ$$

این بیان می دارد که $te^{s_\circ t}$ یک جواب است.

(ج) (i) در اینجا

$$s^2 + 3s + 2 + \circ \Rightarrow s = -2\,,\ s = -1$$

چون $y_y(\circ) = \circ$ و $y'_y(\circ) = 2$، $A + B = \circ$ و $2A + B = 2$ بنابراین از حل دستگاه

$$\begin{cases} A + B = \circ \\ 2A + B = 2 \end{cases}$$

بنابراین $A = -2$ و $B = 2$

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

(ii) در اینجا

$$s^2 33 + 2 = \circ \Rightarrow y(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

چون $y(\circ)=1$ و $y'(\circ)=-1$ داریم $y(t)=e^{-t}$

(iii) به خاطر شرایط اولیه $y(t)=\circ$

(iv) در اینجا نیز

$$s^L+2s+1=\circ=(s+1)^L$$
$$\Rightarrow \sigma=2 \quad , \quad s=-1$$
$$y(t)=Ae^{-t}+Bte^{-t}$$

از آنجا که $y(\circ)=1$ و $y'(\circ)=1$ و $A=1$ و $B=2$

داریم:

$$y(t)=e^{-t}+2te^{-t}$$

(v) اینجا نیز

$$s^3+s^2-s-1=\circ=(s-1)(s+1)^2$$
$$\Rightarrow y(t)=Ae^{t}+B_e^{-t}+cte^{-t}$$

چون $y(\circ)=1$ و $y'(\circ)=1$ و $y^n=-2$ داریم $c=3/2$ و $B=3/4$ و $A=1/2$، بنابراین

$$y(t)=Ae^{-t}e^{2jt}+Be^{-t}e^{-2jt}$$

چون $y(\circ)=1$ و $y'(\circ)=1$ آنگاه

$$A=1/2(1-j)=B^*$$

بنابراین:

$$y\ (t\ )=e^{-t}\left[\cos 2t \sin 2t\right]$$

(۲,۵٤) الف) معادله معادله تفاضلی همگن زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=\circ}^{N} a_k\, y[n-k]=\circ \qquad \text{(م ۲-٥٤-۱)}$$

نشان دهید اگر $z_\circ$ ریشه معادله زیر باشد.

$$\sum_{k=\circ}^{N} a_k z^{-k}=\circ$$

$A\,z_\circ^z$ یک جواب معادله (م ۲-٥٤-۱) است، که در آن A یک ثابت دلخواه است.

ب) کار با چند جمله ایهایی که تنها توانهای غیرمنفی z دارنـد سـاده ترسـت، پـس معادلـه حاصـل از ضرب دو طرف معادله (م ۲–٥٤–۲) در z^N را در نظر می گیریم.

$$p(z)=\sum_{k=\circ}^{N} a_k z^{N-k}=\circ \qquad \text{(م ۲–٥٤–۳)}$$

چند جمله ای $p(z)$ را می توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$p(z)=a_\circ (z-z_1)^{\sigma_1}(z-z_2)^{\sigma_2}$$

که در آن $z_1,\dots,s_i$ ریشه های متمایز $p(z)$ هستند.

نشان دهید به ازای $y[n]=n\,z^{n-1}$ داریم

$$\sum_{k=\circ}^{N} a_k y[n-k]=\frac{dp(z)}{dz}z^{n-N}+(n-N)p(z)z^{n-N-1}$$

با استفاده از این مطلب نشان دهید که به ازای $\sigma_i=2$، هم $A\,z_i^n$ و هم $B\,n\,z_i^{n-1}$ جواب معادلـه (م ۲–٥٤–۱) هستند، که در آنها، A و B ثابتهای مختلط دلخواهی اند. در حالت کلی می تـوان بـه همـین ترتیب نشان داد که به ازای $\sigma_i>1$

$$A\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$r=\circ,1,\dots,\sigma_{j-1}$ جواب معادله (م ۲–٥٤–۱) هستند.

ج) معادلات تفاضلی زیر را با شرایط کمکی داده شده حل کنید:

(i) $y[n]+\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=\circ \qquad ;\ y[\circ]=1,\ y[-1]=-6$

(ii) $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=\circ \qquad ;\ y[\circ]=1,\ y[-1]=\circ$

(iii) $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=\circ \qquad ;\ y[\circ]=1,\ y[10]=21$

(iv) $y[n]-\frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=\circ \qquad ;\ y[\circ]=\circ,\ y[-1]=1$

حل:

(الف) فرض کنیم که:

$$\sum_{K=\circ}^{N} a_k z_\circ^k=\circ$$

در اینصورت اگر

$$y[n]=Az_\circ^n$$

$$\sum_{k=\circ}^{N}a_k k[n-k]=\sum_{K=\circ}^{N}a_k\left(Az_\circ^{n-1}\right)=Ax_\circ^k\sum_{K=\circ}^{N}a_k z_\circ^{-k}=\circ$$

بنابراین $Az_\circ^n$، جواب معادله (م۱-۲٫۵٤) می باشد.

(ب) اگر $y[n]=n\ z^{n-1}$ در اینصورت:

(ح۱٫۲٫۵٤)

$$\sum_{K=\circ}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{K=\circ}^{N}a_k(n-k)z^{n-k-1}$$

با گرفتن طرف راست معادله می خواهیم ثابت کینم که

$$P.H.S=z^{n-N}\sum_{k=\circ}^{N}a_k(N-K)z^{n-k-1}+(n-N)\sum_{K=\circ}^{N}a_k$$

(ح۲-۲٫۵٤)

$$=\sum_{K=\circ}^{N}a_k(n-k)z^{n-k-1}$$

با مقایسه (ح۱-۲٫۵٤) و (ح۲-۲٫۵٤) نتیجه می گیریم که معادله های فوق معادلند و اثبات کامل می شود.

(پ) (i) اینجا نیز داریم:

$$1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}=\circ$$

$$\Rightarrow z=-\frac{1}{2}\ ,\ z=-\frac{1}{4}$$

بنابراین

$$y[n]=A\left(-\frac{1}{2}\right)^n+B\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

چون $y(\circ)=1$ و $y[-1]=-6$ داریم $A=-1$ و $B=-2$ و $y[n]=2\left(-\frac{1}{4}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(ii) اینجا $z^2-2z+1=\circ$

بنابراین:

$$y[n]=A(1)^n+Bn(1)^n=A+Bn$$

چون $y(\circ)=1$ و $y[1]=\circ$ داریم $A=1$ و $B=-1$ و $y[n]=1-n$

(iii) تنها تفاوت با قسمت قبلی شرایط اصلی است؛ $y(\circ)=1$ و $y[10]=21$، داریم:

$$A=1 \text{ و } B=2$$

$$y[n]=1+2n$$

(iv) اینجا

(v) $$z=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1\pm j)$$

بنابراین

$$y[n]=A\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+j)\right]^n+B\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-j)\right]^n$$

چون $y(\circ)=\circ$ و $y[-1]=1$ داریم

$$B=\frac{-j}{2\sqrt{2}} \text{ و } A\frac{j}{2\sqrt{2}}$$

و

$$y[n]=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(n\pi/4\right)$$

۲،۵۵) در درس روشی برای حل معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت ارائه کردیم و در مسئله ۲-۳۰ روش دیگری برایاین کار بیان شد. با فرض سکون ابتدائی، سیستم بیان شده با معادلات تفاضلی LTI و علّی است و می توان با یکی از این دو روش پاسخ ضربه $h[n]$ را یافت. در فصل ۵ روش جالبتری برای تعیین $h[n]$ ارائه خواهیم کرد. دراین مسئله نیز رهیافت دیگری معرفی می کنیم که نشان می دهد، می توان $h[n]$ را با حل معادله همگن، تحت شرایط اولیه مناسب، به دست آورد.

الف) سیستم ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n] \qquad \text{(م ۲-۵۵-۱)}$$

با فرض $x[n]=\delta[n]$، $y[\circ]$ را بیابید؟ $h[n]$ در $n\geq 1$ چه معادله ای و چه شرایط اولیه ای را ارضا می کند؟ با حل این معادله جواب بسته ای برای $h[n]$ به دست آورید.

ب) حال سیستم LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرد.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+2x[n-1] \qquad (\text{م } ٢-٥٥-٢)$$

این سیستم در شکل م ٢-٥٥ (الف) به صورت ترکیب سری و سیستم ابتدائاً ساکن نشان داده شده است. با توجه به خواص سیستمهای LTI می توان دو سیستم را جابجا کرد و نمایش متفاوت شکل م ٢-٥٥ (ب) را یافت. حال با توجه به نتیجه بند (الف) را، با پاسخ ضربه $h[n]$، در نظر بگیرید. با نشان دادن این که معادله (م ٢-٥٣-٣) معادله تفاضلی (م ٢-٥٥-١) را ارضا می کند، ثابت کنید که پاسخ $y[n]$ به ورودی دلخواه $x[n]$ در واقع از جمع کانولوشن زیر به دست می آید.

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[n-m]x[m] \qquad (\text{م } ٢-٥٥-٣)$$

با فرض $a_0 \neq 0$ و $x[n]=\delta[n]$، $y[0]$ را بیابید. با استفاده از این نتیجه، معادله تفاضلی همگن و شرایط اولیه ای را که باید توسط پاسخ ضربه این سیستم ارضا شود بیابید.

حال سیستم LTI علّی توصیف شده با معادله تفاضلی زیرا را در نظر بگیرید.

$$\sum_{K=0}^{n}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k] \qquad (\text{م } ٢-٥٥-٥)$$

پاسخ ضربه این سیستم را بر حسب پاسخ ضربه سیستم LTI توصیف شده با معادله (م ٢-٥-٤) بیابید.

$$x[n]\longrightarrow\boxed{z[n]=x[n]+2x[n-1]}\xrightarrow{z[n]}\boxed{y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=z[n]}\longrightarrow y[n]$$

$$x[n]\longrightarrow\boxed{w[n]-\frac{1}{2}w[n-1]=x[n]}\xrightarrow{w[n]}\boxed{y[n]=w[n]+2w[n-1]}\longrightarrow y[n]$$

هـ) روش دیگری نیز باری تعیین پاسخ سیستم LTI توصیف شده با معادله (م ٢-٥٥-٥) وجود دارد. معادله (م ٢-٥٥-٥) را با فرض سکون ابتدائی، یعنی $y[-N]=y[-N+1]=\ldots=y[-1]=0$، و به ازای ورودی $x[n]=\delta[n]$ به صورت بازگشتی حل کنید و $y[0],\ldots,y[M]$ را بیابید. در $n \geq M$، $h[n]$ چه معادله ای را ارضا می کند؟ شرایط کمکی مناسب برای این معادله چیست؟

و) با استفاده از یکی از روشهای بندهای (د) یا (هـ) پاسخ ضربه سیستمهای LTI علّی توصیف شده معادلات تفاضلی زیر را بیابید.

(i) $y[n]-y[n-2]=x[n]$

(ii) $y[n]-y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$

(iii) $y[n]-y[n-2]=2x[n]-3x[n-4]$

(iv) $y[n]-\frac{\sqrt{3}}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$

$$y[n]=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(n\pi/4\right)$$

حل:

(الف) $y[\circ]=x[\circ]=1$ ، $h[n]$ معادله را برآورده می سازد.

$$h[n]=1/2\,h[n-1] \qquad n\geq 1$$

شرایط معین عبارتست از $h[\circ]=1$ با استفاده روش معرفی شده در مسئله قبلی، داریم $z=1/2$،
بنابراین $h[n]=A\left(1/2\right)^n$ با استفاده از شرایط معین

$$h[n]=\left(1/2\right)^n u[n]$$

(ب) از شکل (ب) م۲٫۵۵، می دانیم که اگر $x[n]=\delta[n]$ آنگاه

$$\omega[n]=h_\circ[n]=\left(1/2\right)^n u[n]$$

که بیان می کند:

$$y[n]=h[n]=\left(1/2\right)^n u[n]+2\left(1/2\right)^{n-1}u[n-1]$$

(ج) جایگذاری معادله (م۲٫۵۵٫۳) در معادله (م۲٫۵۵٫۱) داریم.

$$\sum_m h[n-m]x[m]-1/2\sum_m h[n-m-1]x[m]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{n}\left(1/2\right)^{n-m}x[m]-\sum_{m=-\infty}^{n-1}\left(1/2\right)^{n-m}x[m]$$

$$=\left(1/2\right)^{n-m}x[n]=x[n]=x[n]$$

که نشانگر اینست که معادله (م۲,۵۵,۳)، معادله (م۲,۵۵,۱) را برآورده می سازد.

(د) (i) داده شده که $a_\circ \neq \circ$ و سیستم از شرایط تبعیت می کند. داریم:

$$a_\circ y[\circ] = 1 \Rightarrow y[\circ] = \frac{1}{a_\circ}$$

معادله ی همگن بصورت زیر است

$$\sum_{K=\circ}^{N} a_k h[n-k] = \circ$$

با شرایط اولیه:

$$h[\circ] = \frac{1}{a_\circ} \ , \ h[-1] = \ldots = h[-N+1] = \circ$$

ii) داریم:

$$h[N] = \sum_{K=\circ}^{N} b_k h_1[n-k] = \circ$$

که $h_1[n]$ به صورت فوق است.

(هـ) برای $n > M$

$$\sum_{K=\circ}^{N} a_k h[n-k] = \circ$$

با

$$h[\circ] = y[\circ], \ldots, h[M] = y[M]$$

(و) (i) داریم:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n \geq \circ \text{ ,زوج} \\ \circ & n < \circ \text{ فرد} \end{cases}$$

(ii) داریم:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n \geq \circ \text{ ,زوج } n \\ 2 & n > \circ \text{ ,فرد } n \\ \circ & n < \circ \end{cases}$$

(iii)

$$h[n]=\begin{cases}2 & n=0,2\\ -1 & n\geq 4,\ \text{زوج}\ n\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

(iv) داریم

$$h[n]=\tfrac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{6}+\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{6}\right]$$

۲,٥٦) دراین مسئله همتای پیوسته در زمان تکنیک پی ریزی شده در مسئله ۲–٥٥ در نظر می گیریم. باز هم می بینیم که مسئله یافتن پاسخ ضربه $h(t)$ یک سیستم LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t) \qquad \text{(م ۲–٥٦–۱)}$$

فرض کنید $x(t)=\delta(t)$. برای تعیین مقدار $y(t)$ درست بعد از اعمال ضربه واحد، از معادله (م ۲–٥٦–۱) از $t=0^-$ تا $t=0^+$ (یعنی «درست قبل از اعمال ضربه» تا «درست بعد از» آن) انتگرال می گیریم. با این کار به دست می آوریم.

$$y(0^+)-y(0^-)+2\int_{0^-}^{0^+}y(\tau)d\tau=\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)d\tau=1 \qquad \text{(م ۲–٥٦–۲)}$$

چون سیستم ابتدائاً ساکن، و در $t<0$، $x(t)=0$ پس $y(0^-)=0$. برای ارضای معادله (م ۲–٥٦–۲) باید داشته باشیم $y(0^+)=1$. چون در $t>0$ داریم $x(t)=0$ پاسخ ضربه سیستم برابر پاسخ معادله دیفرانسیل همگن زیر

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$$

و شرط اولیه زیرست

$$y(0^+)=1$$

با حل این معادله دیفرانسیل $h(t)$، پاسخ ضربه سیستم را به دست آورید. برای امتحان جواب خود نشان دهید که

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

به ازای هر ورودی $x(t)$ دلخواهی معادله (م ۲–٥٦–۱) را ارضا می کند.

ب) برای تعمیم این بحث، سیستم LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = x(t) \qquad \text{(م ۲-۵۶-۳)}$$

و فرض کنید $x(t)=\delta(t)$. چون در $t<0$، $x(t)=0$، شرط سکون ابتدایی اقتضا می کند که داشته باشیم

$$y(0^-)=\frac{dy}{dt}(0^-)=\ldots=\frac{d^{N-1}y}{d t^{N-1}}(0^-)=0 \qquad \text{(م ۲-۵۶-٤)}$$

از دو طرف معادله (م ۲۵٦-۳) یک بار، از $t=0^-$ تا $t=0^+$ انتگرال بگیرید، سپس به کمک معادله (م ۲-۵٦-۵) و استدلالی شبیه استدلال بند (الف۹ نشان دهید معادله حاصل با شرایط زیر ارضا می وشد

$$y(0^+)=\frac{dy}{dt}(0^+)=\ldots=\frac{d^{N-2}y}{d t^{N-2}}(0^+)=0 \qquad \text{(م ۲-۵٦-۵ الف)}$$

و

$$\frac{d^{N-1}y}{d t^{N-1}}(0^+)=\frac{1}{a_N} \qquad \text{(م ۲-۵٦-۵ ب)}$$

در نتیجه پاسخ ضربه سیستم در $t>0$ را می توان با حل معادله دیفرانسیل همگن زیر، و شرایط اولیه بیان شده در معادله های (م ۲-۵٦-۵) به دست آورد.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = 0$$

شکل م ۲-۵٦

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\sum_{\frac{d^k}{dt^k}}^{d^k w(t)} a_k \frac{d^k w(t)}{dt^k} = x(t)} \xrightarrow{w(t)} \boxed{y(t)=\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k w(t)}{dt^k} = y(t)}$$

ج) حال سیستم LTI علّی توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = \sum_{k=0}^{M} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{d t^k} \qquad \text{(م ۲-۵٦-٦)}$$

پاسخ ضربه این سیستم را بر حسب پاسخ ضربه سیستم بند (ب) بیان کنید (راهنمایی: شکل م ۲-۵٦ را ببینید).

د) با روش بیان شده در بندهای (ب) و (ج)، پاسخ سیستمهای LTI ابتـدائاً سـاکن توصـیف شـده بـا معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\text{(i)}\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$\text{(ii)}\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+2y=x(t)$$

هـ) به کمک نتـایج بنـدهای (ب) و (ج) نـشان دهیـد کـه اگـر در معادلـه (م ۲–٥٦–٦) داشـته باشـیم $M \geq N$، پاسخ ضربه $h(t)$ در $t=\circ$ جملات تکین دارد؛ یعنی $h(t)$ جملاتی به شکل زیر دارد

$$\sum_{r=\circ}^{M-N} a_r u_r(t)$$

که در آنها a_rها ثابت و $u_r(t)$ ها توابع تکین تعریف شده در بخش ۲–۵ هستند.

و) پاسخ ضربه سیستمهای علّی LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$\text{(i)}\ \frac{d\,y(t)}{dt}+2y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

$$\text{(ii)}\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{d^3x(t)}{dt^3}+2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{d\,x(t)}{dt}+x(t)$$

حل:

(الف) در این مورد $2+2=\circ$ که بیان می دارد که:

$$y(t)=h(t)=Ae^{-2t}$$

چون $y(\circ^+)=1$ و $A=1$ و $h(t)=e^{-2t}u(t)$.

حال معادله (م۱–۲٫٥٦) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\ell.H.S &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau+2\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2(t-\tau)}\delta(t-\tau)x(\tau)d\tau\\ &=x(t)=R.H.S\end{aligned}$$

که بیان می دارد که $y(t)$ معادله را حل می کند.

(ب) داریم:

$$y(t)=\sum_i a_i u_i(t)$$

در اینصورت:

$$\sum_{K=\circ}^{N} a_k \sum_i a_i u_{k+1}(t)=\delta(t)$$

انتگرال گیری بین $t=\circ$ و $t=\circ^t$ و ضرایب مربوطه، داریم $a_t=\circ$ بجز $a_{-N}=\dfrac{1}{a_N}$. این بیان می دارد که برای $\circ' \le t \le \circ^t$

$$y(t)=\frac{1}{aN}u_{-N}(t)$$

,

$$y(\circ^t)=y'(\circ^t)=\ldots=y^{(N-2)}(\circ^t)=\circ$$

$$\left.\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}\right|_{\circ^t}=\frac{1}{a^N}$$

(ج) (i) با گرفتن

$$y(t)=\sum_r a u_r(t)$$

داریم:

$$\sum_r \left(a_r u_{r+2}(t)+3a_r u_{r+1}(t)+2a_r u_r(t)\right)=\delta(t)$$

که بیان می کند $r_{Max=2}$ و $a_{-2}=1$. بنابراین $h(\circ^t)$ و $h'(\circ^t)=1$ شرایط اولیه را تشکیل می دهند.

حال:

$$\delta^3+35+2=\circ \Rightarrow s=-z, s=-1$$

بنابراین:

$$h(t)=Ae^{-2t}+Be^{-t} \qquad t\ge\circ$$

با اعمال شرایط اول $A=b-1$ و $B=1$ را بدست می آوریم، بنابراین:

$$h(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u_{-1}(t)$$

(ii) شرایط اولیه $h(\circ^+)=\circ$ و $h'(\circ^+)=1$ می باشد. بنابراین:

$$h(t)=e^t \sin t\, u_{-1}(t)$$

(د) از (ج)، اگر $M \geq N$ در اینصورت $\sum_{K=\circ}^{M} b_k \frac{d^k h^{(t)}}{dt^k}$ که شامل یک جمله تکینی در $t=\circ$ خواهد بود، در اینصورت

$$h(t)=\sum_r a_r u_r(t+...)$$

(هـ) (i) حال

$$\sum_r a_r u_{r+1}(t)+2+L\sum a_r u_r = 3u_1(t)+u_\circ(t)$$

بنابراین $r_{Max=\circ}$ همچنین

$$\alpha_\circ u_1(t)+a_{-1}u_\circ(t)+2a_\circ u_\circ(t)=3u_1(t)+u_\circ(t)$$

که منجر می شود تا $a_\circ=3$ و $-5=-1\propto$ باشد.

شرایط اولیه $h(\circ^+)$

$$h(t)=3u_\circ(t)-5e^{-2t}u-1(t)=3\delta(t)-5e^{-3t}u_\circ(t)$$

که منجر می شود تا $a_\circ=3$ و $-5=-1\propto$ باشد.

شرایط اولیه $H(\circ^+)=-5$

$$h(t)=3u_\circ(t)-5e^{-2t}u-1(t)=3\delta(t)-5e^{-2t}u(t)$$

(ii) اینجا $\alpha_1=1$ و $\alpha_\circ=-3$ و $\alpha_{-1}=13$ و $\alpha_{-2}=-44$ بنابراین

$$h(\circ^+)=13 \text{ و } h^1(\circ^+)=-44$$

و

$$h(t)=u_1(t)-3u_\circ(t)-3u_\circ(t)18e^{-3t}u_{-1}(t)-5e^{-2t}u-1(t)$$

۲,۵۷) یک سیستم LTI علّی S، با رابطه ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ زیر در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که S را می توان اتصال سری و سیستم LTI علّی S_1 و S_2 با روابط ورودی خروجی زیر دانست.

$$S_1: \quad y_1[n]=b_\circ x[n]+b_1x_1[n-1]$$
$$S_2: \quad y_2[n]=-ay_2[n-1]+x_2[n]$$

(ب) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(ج) نمایش جعبه ای S را رسم کنید.

(د) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبـال نمـایش جعبـه ای سیستم S_1 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_1 رسم کنید.

(هـ) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم ۱ به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

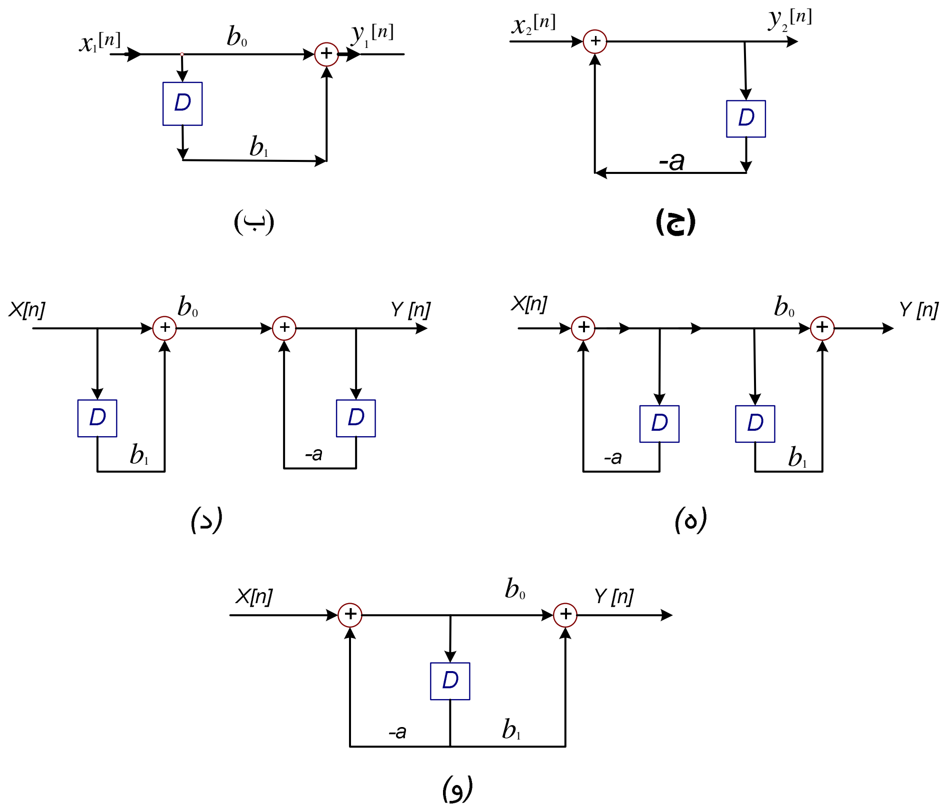
(و) نشان دهید که دو عنصر تأخیر دهنده نمایش جعبه ای بند (هـ) را مـی ـوان در هـم ادغـام کـرد. نمایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می نامنـد، حـال آن کـه نمـایش جعبـه ای بندهای (د) و (هـ) را تحقق مستقیم نوع I می نامند.

حل:

(الف) متوجه می شویم که $x_2[n] = y_1[n]$ که می توانیم آن را از دو معادله تفاضلی بدست آوریم. در نتیجه داریم:

$$y_2[n] = -ay_2[n-1] + b_\circ x_1[n] + b_1 x_1[n-1]$$

که مشابه معادله دیفرانسیل کلی است.



شکل (ح۲,۵۷)

(ب) شکلهای متناظر با قسمتهای باقی مانده این مساله در شکل ح۲,۵۷ نشان داده شده اند.

۲,۵۸) یک سیستم LTI علّی S، با روابط ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ زیر در نظر بگیرید:

$$2y[n]-y[n-1]+y[n-3]=x[n]-5x[n-4]$$

(الف) نشان دهید که S، را می توان اتصال سری دو سیستم LTI علّی S_1 و S_2 بـا روابـط ورودی - خروجی زیر دانست.

$$S: 2y_1[n]=x_1[n]-5x_1[n-4]$$

$$S: y_2=\frac{1}{2}y_2[n-1]-\frac{1}{2}y_2[n-3]+x_2[n]$$

ب) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(ج) نمایش جعبه ای S_2 را رسم کنید.

(د) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبـال نمـایش جعبـه ای S_1 رسم کنید.

(هـ) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمای جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

(و) نشان دهید که چهار عنصر تأخیردهنده نمایش جعبه ای بند (هـ) را می ـوان در سه عنـصر ادغـام کرد نمایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می نامند، حال آن که نمایش جعبـه ای بندهای (د) و (هـ) تحقق مستقیم نوع I نامیده می شود.

حل:

(الف) با توجه به اینکه $y_1[n]=x_2^-[n]$. می توانیم آنرا از دو معادله ی تفاضـلی بدسـت آوریـم. در نتیجه:

$$2y_2[n]-y_2[n-1]+y_2[n-3]=x_1[n]-5x_1[n-4]$$

این مشابه معادله دیفرانسل کلی است.

(ب) شکل متناظر با قسمتهای باقی مانده ی این مساله در شکل (ح۵۸-۲) آمده است.

۲,۵۹) یک سیستم LTI علّی S با رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ زیر در نظر بگیرید.

$$a_1\frac{d\,y(t)}{d\,t}+a_\circ y(t)=b_\circ x(t)+b_1\frac{d\ x(t)}{d\,t}$$

(الف) نشان دهید که

$$y(t)=A\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau+Bx(t)+C\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\,\tau$$

و ثابتهای A، B، و C را برحسب ثابتهای $a_\circ$، a_1، $b_\circ$ و b_1 بیان کنید.

(ب) نشاندهید که S را می ـوان اتصال سری دو سیستم LTI زیر دانست

$$S_1:\ y_1(t)=Bx_1(t)+C\int_{-\infty}^{t}x(\tau)$$

$$S_2:\ y_2(t)=A\int_{-\infty}^{t}y_2(\tau)d\tau+x_2(t)$$

(ج) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(د) نمایش جعبه ای S_2 را رسم کنید.(هـ) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبـه ای سیستم S_2 به دنبال نمایش جعبه آی سیستم S_1 رسم کنید.

(و) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

(ز) نشان دهید که دو انتگرالگیری بند (و) را می توان در هم ادغام کرد. نمایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می نامند، حال آن که نمایش جعبه ای بندهای (هـ) و (و) تحقق مستقیم نوع I نامیده می شود.

حل:

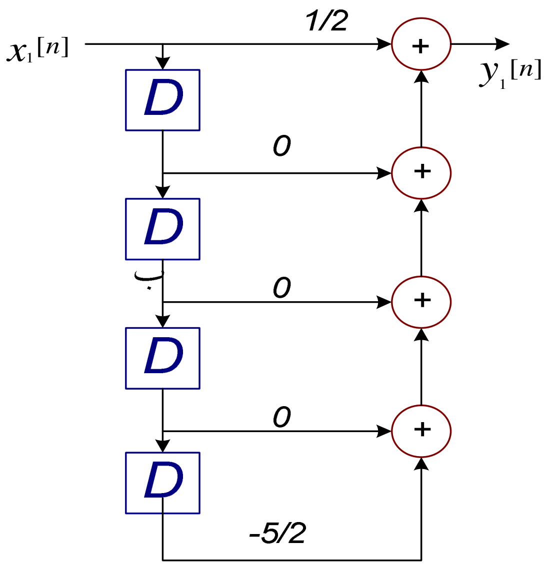
(الف) با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل داده شده اول و خلاصه سازی خواهیم داشت:

$$y(t) = -\frac{a_\circ}{a_1}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau + \frac{b_\circ}{a_1}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + \frac{b_1}{a_1}x(t)$$

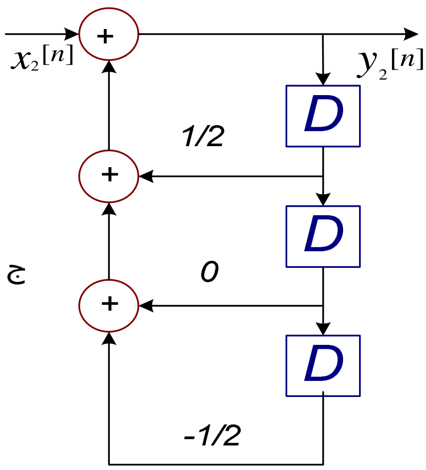
بنابراین: $A = -\frac{a_\circ}{a_1}$ و $B = \frac{b_1}{a_1}$ و $c = \frac{b_\circ}{a_1}$

(ب) می دانیم که $z_2(t) = y_1(t)$ می توانیم این دو معادله ی انتگرال را حذف کنیم. داریم:

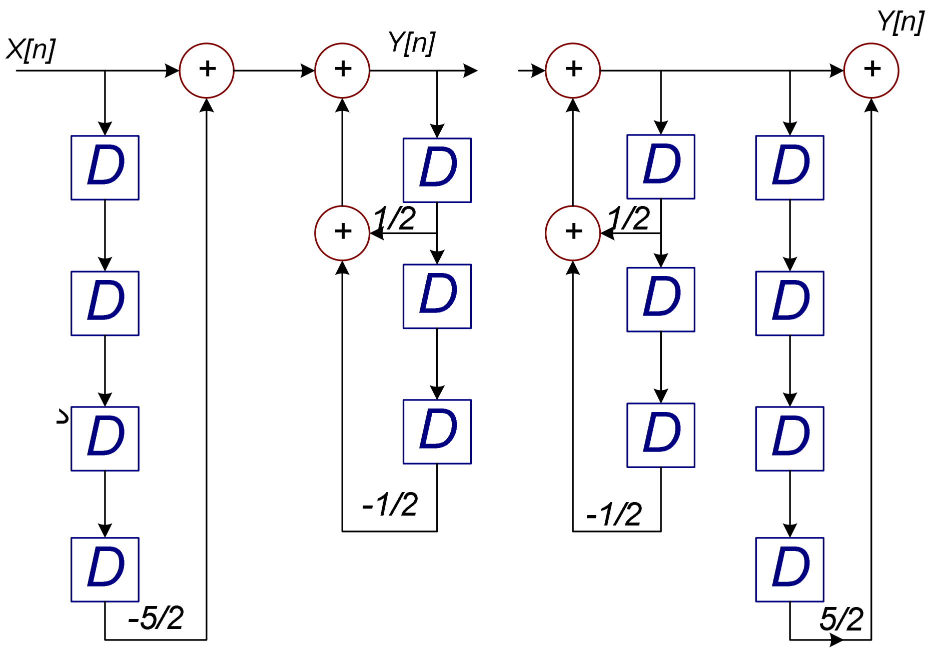
$$y_2(t) = A\int_{-\infty}^{t} y_2(\tau)d\tau + B\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau + cx_1(t)$$

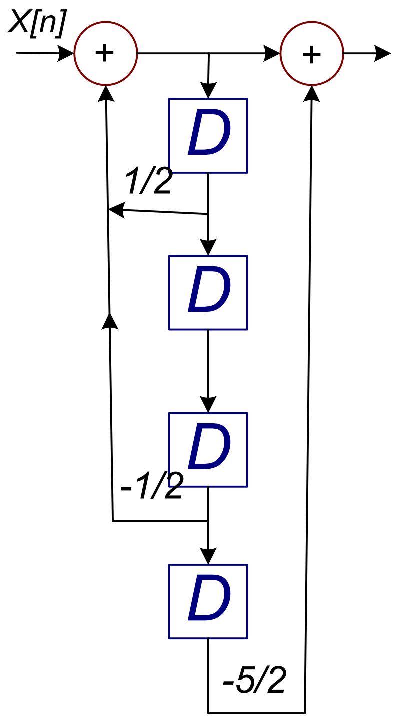


ب



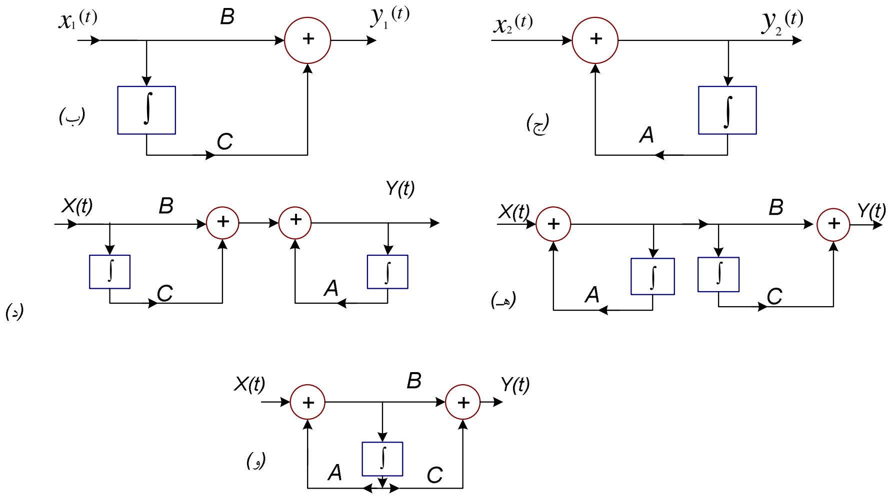
ج


X[n]
Y[n]
Y[n]
D
1/2
1/2
-1/2
-1/2
-5/2
5/2



شکل (ح۲,۵۸)

(ج) شکل های متناظر برای قسمت های باقی مانده این مساله در شکل ح۲,۵۹. نشان داده شده اند.



د شکل ح۲,۵۹.

۲,٦۰) یک سیستم LTI علّی S با رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ زیر در نظر بگیرید.

$$a_2\frac{d\,y^2(t)}{d\,t^2}+a\frac{d\,\,y(t)}{d\,\,t}+a_\circ y(t)=b_\circ x(t)+b_1\frac{d\,\,x(t)}{d\,\,t}+b_2\frac{d\,\,x^2(t)}{d\,t^2}$$

(الف) نشان دهید که

$$y(t)=A\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau+B\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\tau}(y(\sigma)d\sigma)d\tau+Cx(t)$$
$$+D\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau+E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau}x(\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

و ثابتهای A، B، C، D و E را برحسب ثابتهای $a_\circ$، a_1، a_2، $b_\circ$، b_1، و b_2 بیان کنید.

$$S_1: y(t)=Cx_1(t)=Cx_1(t)+D\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)d\tau+E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau}x(\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

$$S_2: y_2(t)=A\int_{-\infty}^{t}y_2(\tau)d\tau+B\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau}y_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau+x_2(t)$$

(ب) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(ج) نمایش جعبه ای S_2 را رسم کنید.

(د) نماش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_1 رسم کنید.

(ه) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

(و) نشان دهید که چهار انتگرالگیر جواب بند (و) را می تـوان در دو انتگرالگیـر ادغـام کـرد. نمـایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می نامند، حال آن که نمایش جعبه ای بندهای (هـ) و (و) تحقق مستقیم نوع I نامیده می شود.

حل:

(الف) با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل داده شده و خلاصه سازی داریم:

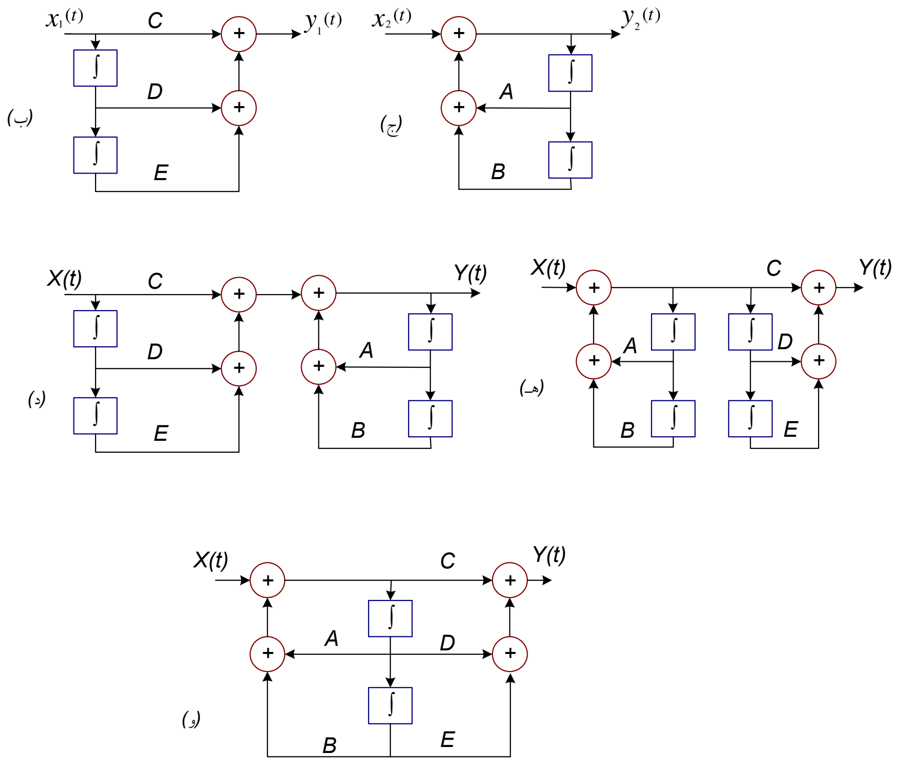
$$y(H)=-\frac{-a_1}{a_2}\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau-\frac{a_\circ}{a_2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau}y(\sigma)d\sigma d\tau$$
$$+\frac{b_\circ}{a_2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}x(\sigma)d\sigma d\tau+\frac{b_1}{a_2}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau+\frac{b_2}{a_1}x(t)$$

بنابراین

$$A=\frac{-a_1}{a_2}\ ،B=\frac{-\infty}{a_2}\ ،C=\frac{b_2}{a_1}\ ،D=\frac{b_1}{a_2}\ ،E=\frac{b_\circ}{a_2}$$

(ب) می دانیم که $x_2(t)=y_1(t)$ و می توانیم این را از دو معادله ی انتگرالی حذف کنیم.

(پ) شکلهای متناظر برای قسمتهای باقی مانده این مسأله در شکل ح ۲٫۶۰، نشان داده شده است.



شکل ح ۲,۶۰

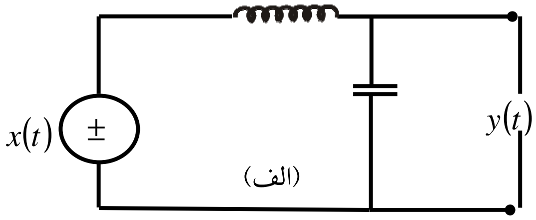
(۲,۶۱) (الف) در مدار شکل م ۲–۶۱ (الف) $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم در نظر بگیرید.

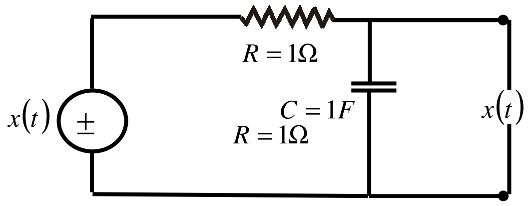
(i) معادله دیفرانسیلی را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کنند بیابید.

(ii) نشان دهید که جواب همگن معادله دیفرانسیل بند (i) به صورت $K_1e^{j\omega_1 t}+K_2e^{j\omega_2 t}$ است. مقادیر ω_1 و ω_2 را بیابید.

(iii) نشان دهید که چون ولتاژ و جریان حقیقی باشند، پاسخ طبیعی سیستم سینوسی است.

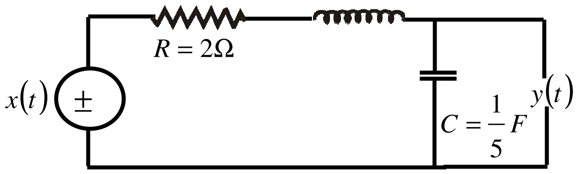
(ب) در مدار شکل م ۲–۶۱ (ب) $x(t)$ ولتاژ ورود است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم در نظر بگیرید.





(ب)

شکل م ۲-۶۱ الف



(ج)

شکل م ۲-۶۱ ب و ج

(i) معادله دیفرانسیلی را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کند بیابید.

(ii) نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم به صورت Ke^{at} است و مقدار a را مشخص کنید.

(ج) در مدار شکل م ۲-۶۱ (ج) $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم فرض کنید.

(i) معادله دیفرانسیلی را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کند بیابید.

(ii) نشان دهید که چون ولتاژ و جریان باید حقیقی باشند، پاسخ طبیعی سیستم یک سینوسی میر است.

حل:

(الف) (i) از قانون ولتاژ کریشهف، می دانیم که ولتاژ ورودی، باید با مجموع ولتاژهای شاخه های خازنی و سلفی برابر باشد، فلذا

$$x(t)=\ell c\frac{d^2y(t)}{dt}+y(t)$$

بااستفاده از مقادیر c , ℓ داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+y(t)=x(t)$$

ii) با استفاده از نتایج مسئله ۲٫۵۳، می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y(t)=bx(t)$$

برحسب $k_1e^{s_\circ t}+k_2e^{s_1t}$ خواهد بود که $s_\circ$ و s_1 ریشه های معادله مشخصه $s^2+a_1s+a_2=\circ$ می باشد.

(در اینجا فرض شده است که $s_\circ\neq s_1$) در این مسئله $a_1=\circ$ و $a_2=1$ بنابراین ریشه های معادله مشخصه برابر است با $s_\circ=j$ و $s_1=-j$. جواب عمومی عبارتست از:

$$h_h(t)=k_1e^{it}+k_2e^{-jt}$$

و

$$\omega_2=w_1=1$$

(iii) اگر ولتاژ و جریان به اعداد حقیقی منحصر شوند. $k_1=k_2=k$ بنابراین

$$y_h(t)=2k\cos t=2k\sin\left(t+\pi/2\right)$$

(ب) (i) از قانون ولتاپ کریشهف، می دانیم که ولتاپ ورودی باید با مجموع ولتاپ شاخه مقاومتها و خازنها برابر باشد. بنابراین:

$$x(t)=Rc\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

با استفاده از مقادیر R و L و C داریم.

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

(ii) پاسخ طبیعی سیستم، جواب همگن معادله دیفرانسیل فوق می باشد. با استفاده از نتیجه مساله (۲٫۵۳) ، می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy(t)}{dt}+a_1 y(t)=bx(t)$$

برحسب $Ae^{s_\circ t}$ ریشه ی معادله مشخصه است

$$s+a_1=\circ$$

می باشد. جواب همگن برابر است $s_\circ=-1$، بنابراین ریشه معادله $a_1=1$ در این مساله

با $y_h(t)=ke^{-t}$

و

$$a=1$$

(ج) از قانون ولتاپ کریشهف، می دانیم که ولتاژ ورودی باید با مجموع ولتاژهای شاخه های مقاومتی و سلفی و خازنی برابر باشد بنابراین:

$$x(t)=fc\frac{d^2y(t)}{dt}+Rc\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

با استفاده از مقادیر R و C و L، داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+sy(t)=5x(t)$$

(ii) با استفاده از نتیجه مسئله ۲,۵۳، می دانیم که جواب همگن معادله ی دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=bx(t)$$

جملاتی برحسب $k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_Lt}$ خواهد بود که در آن s_1 , $s_\circ$ ریشه هی معادلـه ی مشخـصه مـی باشد.

$$s^2+a_1s+a_2=\circ$$

(فرض شـده اسـت کـه $s_\circ \neq s_1$) در ایـن مـسئله $a_1=2$ و $a_2=5$ بنـابراین ریـشه هـای معادلـه $s_\circ=-1+2j$ و $s_1=-1-2j$. جواب همگن معادله برابر با:

$$y_h(t)=k_1e^{-t}e^{2jt}+k_2e^{-t}e^{-2jt}$$

و

$$a=-1$$

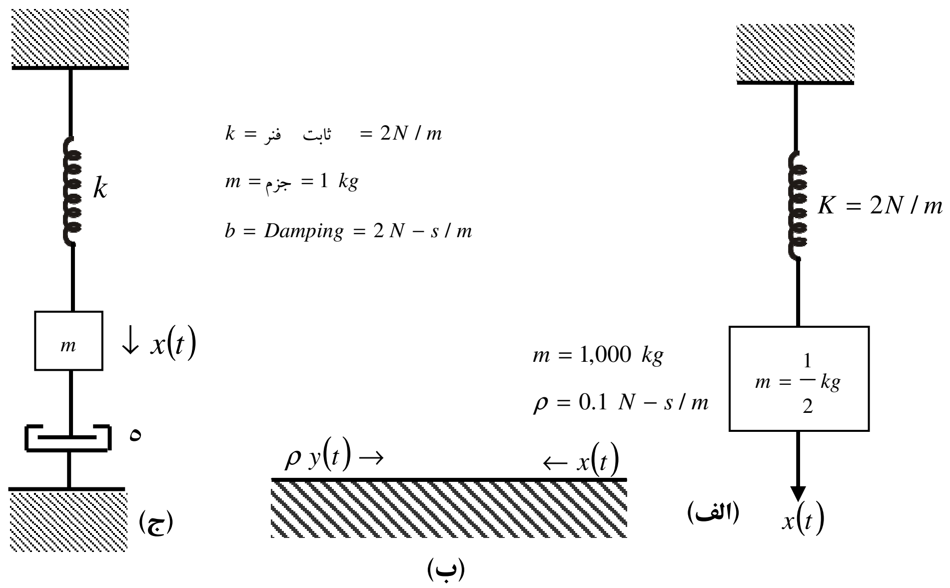
(iii) اگر ولتاژ و جریان حقیقی در نظر گرفته شوند، در اینصورت $k_1=k_2=k$.

بنابراین

$$-y_h(t)=2ke^{-t}\cos(2t)=2ke^{-t}\sin\left(t+\pi/2\right)$$

۲,۶۲) (الف) در سیستم مکانیکی شکل م ۲-۶۲ (الف) نیروی $x(t)$ اعمال شده به جرم ورودی، و جابجایی $y(t)$ جرم خروجی است. معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید. نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم متناوب است.

(ب) شکل م ۲-۶۲ (ب) را در نظر بگیرید که در آن نیروی $x(t)$ ورودی و سرعت $v(t)$ خروجی است. جرم خودرو و m و ضریب اصطکاک جنبشی ρ و ضریب اصطکاک جنبشی ρ است. نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم میر است.



شکل م ۲-۶۲ الف و ب و ج

K = ثابت فنر ۲ N/M   m = جرم = ۱ kg   b = ثابت میرایی = ۲ N-s/m

(ج) در سیستم مکانیکی شکل م ۲-٦۲ (ج) نیروی $x(t)$ اعمال شده به جرم ورودی و جابجایی $y(t)$ جرم خروجی است.

(i) معادله دیفرانسیل را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کند بیابید.

(ii) نشان دهید که جواب همگن معادله دیفرانسیل بند (i) به صورت $e^{at}\{K_1e^{j-t}+K_2e^{i-t}\}$ است و a را تعیین کنید.

حل:

(الف) نیروی $x(t)$ باید با مجموع نیروهای لازم برای خنثی وزن و نیروی لازم برای کش متر برابر باشد. بنابراین:

$$x(t)=m\frac{d^2y(t)}{dt}+ky(t)=x(t)$$

با جایگذاری مقادیر m و k، داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4y(t)=2x(t)$$

بااستفاده از نتایج مسئله ۲،۵۳، می دانیم که جواب همگن معادله ی دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y_2(t)=bx(t)$$

برحسب جملاتی از $k_1e^{s_\circ t}+k_2e^{s/t}$ که $s_\circ$ و s_1 ریشه های معادله مشخصه $s^2+a_1s+a_2=\circ$ خواهد بود.

(فرض شده است که $s_\circ \neq s_1$) در این مسئله $a_2=\circ$ و $a_2=4$. بنابراین، ریشه های معادله برابر $s_\circ=\pm 2j$ و $s_1=2j$ می باشد. جواب همگن عبارتست از:

$$y_h(t)=k_1e^{2jt}+k_2e^{2jt}$$

با فرض اینکه $y(t)$ حقیقی است، داریم $k_1=k_2=k$، بنابراین:

$$y_h(t)=2k\cos t$$

واضح است که $y_h(t)$ پریودیک است.

(ب) نیروی $x(t)$ بایستی با مجموع نیروی موردنیاز برای خنثی کردن وزن و نیروی لازم برای کشش متر برابر باشد. بنابراین $x(t)=m\dfrac{dy(t)}{dt}+by(t)$ با جایگذاری مقادیر m و b داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{y(t)}{10000}=\frac{x(t)}{1000}$$

و استفاده از نتایج مسئله ۲٫۵۳ می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy(t)}{dt}+a_1 y(t)=bx(t)$$

برحسب جملاتی از $Ae^{s_\circ t}$ خواهد بود. که $s_\circ$ ریشه ی معادله مشخصه

$$s+a_1=\circ$$

در این مسئله $a_1=\frac{1}{10000}$ بنابراین، ریشه ی معادله $s_\circ=-10^{-4}$ می باشد.

جواب همگن عبارتست از $y_h(t)=ke^{-10^{-4}}t$

واضح است $y_h(t)$ با تغییر کاهش می یابد.

(ج) می دانیم که نیروی لازم برای خنثی کردن نیروی متر ناشی از $y(t)$.

نیروی جابجایی برای خنثی کردن وزن + نیروی لازم برای خنی کردن بر خود توسط $y(t)$ = $x(t)$

بنابراین:

$$x(t)=\dot{m}\frac{d^2y(t)}{dt}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)$$

با استفاده از مقادیر m و b و k داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

(ii) با توجه به نتایج مسئله ۲٫۵۳ می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt}+\alpha_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y(t)=b_1x(t)$$

جملاتی برحسب $k_1e^{s_\circ t}+k_2e^{s_1 t}$ خواهد بود که $s_1, s_\circ$ ریشه های معادله مشخصه $s^2+a_1s+a_2=\circ$ خواهد بود.

(فرض شده که $s_\circ \neq s_1$) در این ریشه $a_1=2$ و $a_2=2$ بنابراین ریشه های معادله برابرند با $s_\circ=-1+j$ و $s_1=-1-j$. جواب همگن برابر است با

$$y_h(t)=k_1e^{-t}e^{jt}+k_2e^{-t}e^{-jt}$$

و

$$a = 1$$

(iii) اگر نیرو تعیین شده، حقیقی باشد.در این صورت $k_1 = k_2 = k$ بنابراین:

$$y_h(t) = 2ke^{-t}\cos(t) = 2ke^{-t}\sin\left(t + \pi/2\right)$$

و

$$y[\circ] = 100000$$

۲,٦۳) می خواهیم یک وام ۱۰۰۰۰۰ دلاری را با اقساط مساوی ماهیانه D دلار باز پرداخت کنیم. ربح به صورت مرکب و ماهیانه، با نرخ سالیانه ۱۲٪ روی باقیمانده بدهی محاسبه می شود.

$$\$100000 + \frac{0/12}{12}\$100000 = \$101000$$

باید D را به نحوی تعیین کنیم که پس از یک مدت معین کل وام پرداخت و بدهی صفر شود.

(الف) برای توصیف ریاضی مسئله فرض کنید $y[n]$ بدهی باقیمانده پس از n ماه اول است. وام در ماه ۰ گرفته شده است و پرداخت از ماه ۱ آغاز می شود. نشان دهید که $y[n]$ معادله تفاضلی زیر

$$y[n] = \gamma y[n-1] = -D \qquad \text{(م ۲-٦۳-۱)}$$

را با شرط اولیه

$$y[\circ] = \$100000$$

ارضا می کند که در آن γ ثابت است. γ را بیابید.

(ب) معادله تفاضلی بند (الف) را حل کرده $y[n]$ را در $n \geq \circ$ تعیین کنید.

راهنمائی: جواب مخصوص معادله (م ۲-٦۳-۱) عدد ثابت Y است. مقدار Y را یافته، $y[n]$ را در $n \geq \circ$ به صورت مجموع جواب خصوصی و جواب همگن بنویسید. ثابت نامعلوم جواب همگن را با محاسبه مستقیم $y[1]$ از معادله (م ۲-٦۳-۱) و مقایسه آن با جواب به دست آمد، تعیین کنید.)

(ج) اگر وام ۳۰ ساله باشد، یعنی پرداخت در ۳٦۰ قسط ماهیانه صورت گیرد، مقدار D باید چقدر باشد؟

(د) کل بازپرداخت ۳۰ ساله چقدرست؟

(هـ) چرا بانکها وام می دهند؟

حل:

ترکیب Amt از برج قبلی + پرداخت شده $Amt -$ قرضی $y(t) = Amt$

$$=100000\delta[n]+1.01\,y[n-1]-Du[n-1]$$

بنابراین

$$y[n]=1.01y[n-1]-D_1 \qquad n>\circ$$

$$\wp=1.01 \text{ و } \qquad y[\circ]=100000 \text{ و}$$

(ب) داریم:

$$y_b[n]=1.01y_p[n-1]D$$

که بیان می کند $y_p[n]=1000$. همچنین جواب همگن برابر است با:

$$y_h[n]=A(1.01)^n$$

بنابراین:

$$y[n]=y_y[n]+y_p[n]=A(1.01)^n+100D$$

با استفاده از شرایط اولیه $y[\circ]=100000$ ، داریم:

$$A=100000-100D$$

بنابراین:

$$y[n]=(100000-100D)(1.01)^n+100D$$

(ج) داریم:

$$y[360]=\circ(p-100D)(1.01)^{360}+100D$$

بنابراین

$$D=\$1028.60$$

(د) مجموع پرداختی = $370.269

(هـ) سئوال دشوار در این کتاب !!!

٢,٦٤) یکی از فواید مهم سیستمهای وارون در وضعیتهایی است که می خواهیم نوعی اعواجاج را حذف کنیم. مسئله حذف پژواک محسوسی داشته باشد، به دنبال یک ضربه صوتی اولیه، در فواصل زمانی مساوی نمونه های تضعیف شده این صدا به گوش می رسد. به این دلیل، مدلی که غالباً برای این پدیده به کار می رود، یک سیستم LTI با پاسخ ضربه ای مشتمل بر یک قطار ضربه است..

$$h(t)=\sum_{k=\circ}^{\infty}h_k\delta(t-kT)$$

پژواک ها با فاصله T ثانیه تکرار می شوند، و h_k ضریب بهره k ضریب بهره پژواک حاصل از ضربه صوتی اولیه است.

(الف) $x(t)$ را سیگنال صوتی اولیه (مثلاً موسیقی ارکستر)، و $y(t)=x(t)*h(t)$ را سیگنالی که بدون هیچ پردازشی به گوش می رسد فرض کنید. برای حذف اعوجاج حاصل از پژواکها میکروفونی نصب شده که $y(t)$ را می گیرد و آن را به یکسیگنال الکتریکی تبدیل می کند. این سیگال را هم $x(t)$ می «امیم زیرا معادل الکتریکی سیگنال صوتی است، و می توان این دو را با سیستمهای مبدل صوتی الکتریکی به هم تبدیل کرد.

نکته قابل توجه این است که سیستم دارای پاسخ ضربه معادله (م ٢-٦٤-١) وارونپذیرست. پس می توان یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $g(t)$ یافت، به نحوی که

$$y(t)*g(t)=x(t)$$

معالات جبری را که مقادیر متوالی $g(t)$ در آن صدق می کنند بیابید و با حل آنها g_0، g_1، g_2 را برحسب gk بیابید.

(ب) $g(t)$ را با فرض h_0، $g_0=\frac{1}{2}$ و برای تمام مقادیر $h_i\geq 2$، $h_i=0$ بیابید.

(ج) شکل م ٢-٦٤ مدل خوبی برای تولید پژواک است. پژواکهای متوال، صورتهای فیدبک شده $y(t)$ هستند، که به اندازه T ثانیه تأخیر یافته و در a ضرب شده اند. معمولاً $0<a<1$، زیرا پژواکهای متوالی تضعیف می شوند.

(i) پاسخ ضربه این سیستم را بیابید. (فرض کنید سیستم ابتدائاً ساکن است، یعنی اگر در $1<0$، $x(t)=0$؛ آنگاه در $t<0$، $y(t)=0$.

(ii) ثابت کنید که سیستم به ازای $0<a<1$ پایداری و به ازای $a>1$ ناپایدار است.

(iii) $g(t)$ را برای این حالت بیابید. این سیستم وارون را با جمع کننده، ضرب کننده و عدد و تأخیر دهنده T ثانیه بسازید.

(د) هر چند بحث بالا به علت کاربرد خاص در نظر گرفته شدهف در مورد سیستمهای پیوسته در زمان بیان شد ولی در حالت گسسته در زمان نیز می توان این مفاهیم را به کار برد. یعنی سیستم LTI با پاسخ ضربه

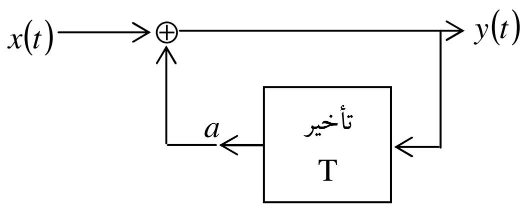
$$h[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

وارونپذیرست و سیستم وارون آن سیستمی LTI با پاسخ ضربه زیرست

$$g[n]=\sum_{k=\circ}^{\infty} gk\delta[n-kN]$$

به راحتی می توان نشان داد gi ها همان معادلات جبری بند (الف) را ارضـا مـی کننـد. یـک سیـستم گسسته در زمان LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرد.

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$$



شکل م ۲-٦٤

این سیستم وارونپذیر نیست. دو ورودی بیابید که خروجی یکسانی ایجاد کنند.

حل:

(الف) داریم: $y(t)*h(t)$ و $x(t)=y(t)*g(t)$. بنابراین $g(t)*h(t)=\delta(t)$

حال

$$h(t)*g(t)\big|_{t=nT}=\sum_{k=\circ}^{n} h_k q_{n-k}\delta(t-nk)$$

بنابراین، می خواهیم:

$$\sum_{k=\circ}^{n} h_k g_{n-k}=\begin{cases}1 & n=\circ\\ \circ & n=1,2,3,\ldots\end{cases}$$

بنابراین

$$g_\circ=\frac{1}{h_\circ}\quad,\quad g_1=\frac{-h_1}{h_\circ^2}$$

$$g_2=\frac{-1}{h_\circ}\left[\frac{-h_1^2}{h_\circ^2}+\frac{h_2}{h_\circ}\right],\ldots$$

(ب) در این مورد $g_\circ=1$ و $g_2=-\frac{1}{2}$ و $g_3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ و ... به این ترتیب که نـشان مـی دهـد که:

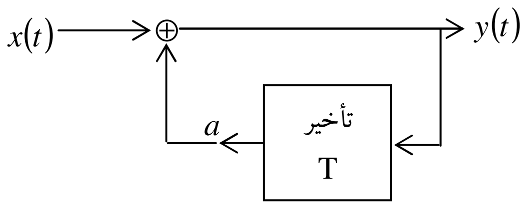
$$g(t)=\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\delta(t-KT)$$

(ج) (i) در اینجا:

$$h(t)=\sum_{k=\circ}^{\infty}a^k\delta(t-T)$$

(ii) اگر $\circ<\propto<1$ در این صورت $\propto^k<1$، بنابراین $h(t)$ محدود شده و بطور معین انتگـرال پـذیر متناظر با یک سیستم پایدار است. اگر $\propto>1$، در این صورت $h(t)$ به طور معین انتگرال پـذیر نیـست و سیستم را ناپیدار می باشد.

(iii) در اینجا نیز؛ $g(t)=1-\delta(t-T)$. سیستم معکوس در شکل زیر نشان داده شده است:



(د) اگر $x_1[n]=\delta[n]$ و $y[n]=h[n]$؛ اگر $x_2[n]=\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-N]$ و $y[n]=h[n]$.

۲,٦٥) در مسئله ۱–٤٥ تابع همبستگی را برای سیگنالهای پیوسته در زمان معرفی و بعضی خصوصیات اساسی آن را بررسی کردیم. همتای گسسته در زمان تابع همبستگی نیز همان خواص را دارد و هـر دو کاربردهای بسیار مهم و متعددی دارند (و در مسائل ۲–٦٦ و ۲–٦۷ معرفی شان خواهیم کرد). در ایـن مسئلهتابع همبستگی گسسته در زمان رامعرفی و چند خاصیت دیگر آن را بررسی می کنیم.

$x[n]$ و $y[n]$ را دو سیگنال گسسته در زمان حقیقی بگرید. توابع خود همبستگی $x[n]$ و $y[n]$، بـه ترتیب $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ هستند و به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\phi_{xx}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m+n]x[m]$$

,

$$\phi_{yy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}y[m+n]y[m]$$

توابع همبستگی متقال $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yx}[n]$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$\phi_{xy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m+n]y[m]$$

,

$$\phi_{yy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}y[m+n]x[m]$$

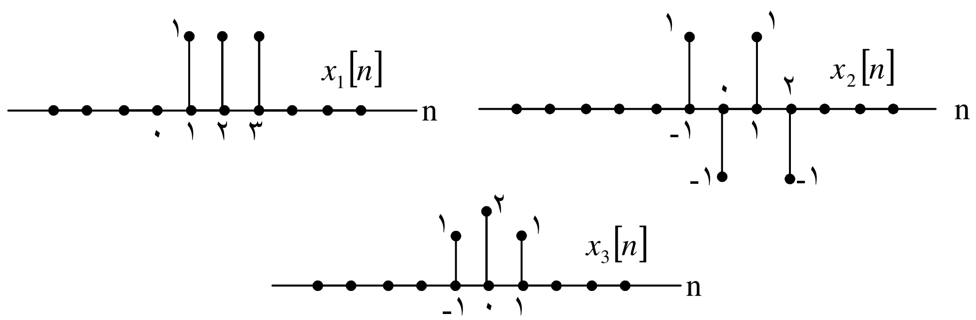
این توابع مانند حالت پیوسته در زمان تفاوتهای خاصی دارند. $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ توابعی زوج هستند، و حال آن که $\phi_{xy}[n]=\phi_{yx}[-n]$.

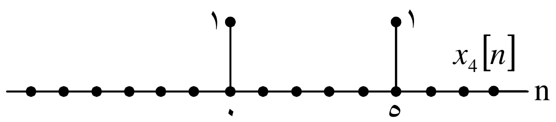
(الف) دنباله هی خود همبستگی سیگنالهای $x_1[n]$، $x_2[n]$، $x_3[n]$، و $x_4[n]$ شکل م ۲-۶۵ را بیابید.

(ب) دنباله های همبستگی متقابل زیر را بیابید.

$$\phi_{x_i y_i}[n] \quad i\neq j \qquad i,j=1,2,3,4$$

$x_i[n]$ ها همان سیگنالهای شکل م ۲-۶۵ هستند.





شکل م ۲-۶۵

(ج) $x[n]$ را ورودی یک سیستم LTI، با پاسخ نمونه واحد $h[n]$، و $y[n]$ را خروجی متناظر باآن بگیرید. $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را برحسب $\phi_{xx}[n]$ و $h[n]$ بیابید. نشان دهید که می توان $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را خروجی دو سیستم LTI به ورودی $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ دانست؟ (پاسخ ضربه این دو سیستم را بیابید).

(د) $h[n]$ را $x_1[n]$ شکل م ۲-٦٥ بگیرید و فرض کنید $y[n]$ خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ به ورودی $x_1[n]$ است. به کمک نتایج بند (ج) $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را بیابید.

حل:

الف) دنباله خود همبستگی در شکل ح٢,٦٥ نشان داده شده است.

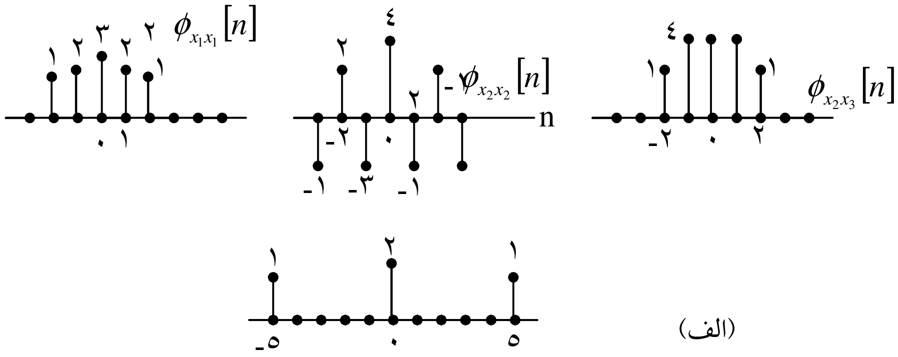
(ب) دنباله ها خود همبستگی در شکل ح٢,٦٥ نشان داده شده است.

(ج) داریم:

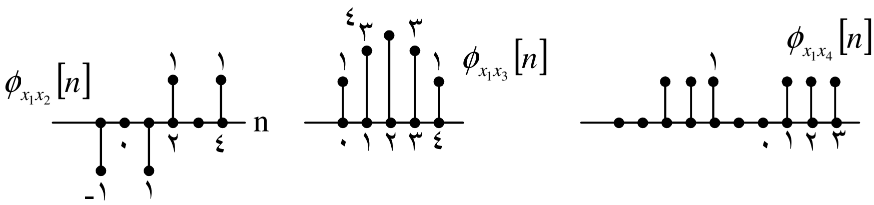
$$\phi_{xy}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[-k]\phi_{xx}[n-k]$$

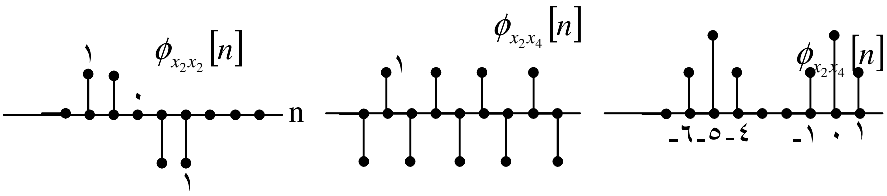
بنابراین $\phi_{xy}[n]$ به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\phi_{xx}[n]\rightarrow\boxed{h[-n]}\rightarrow\phi_{xy}[n]$$

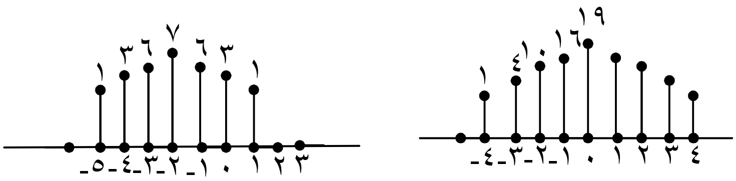


(الف)





(ب)



(شکل ح۲,٦٥

نیز: $\phi_{yy}[n]=\sum_k \phi_{xx}[n-k]\phi_{hh}[k]$

بنابراین $\phi_{yy}[n]$ به صورت طیر نمایش داده می شود.

$$\xrightarrow{\phi_{xx}[n]} \boxed{h[n]*h[-n]} \rightarrow \phi_{yy}[n]$$

(د) $\phi_{xy}[n]$ و ϕ_{yy} در شکل ح۲,٦٥ نشان داه شده است.

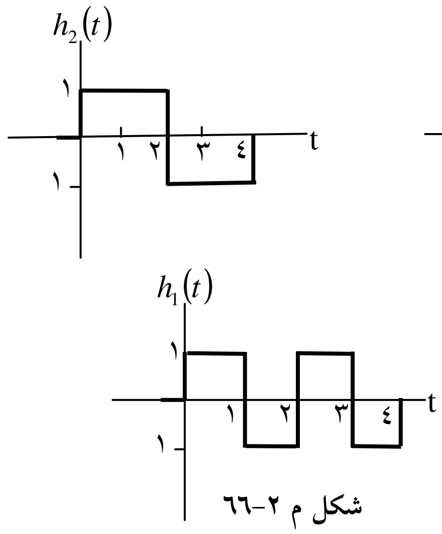
۲,٦٦) $h_1(t)$، $h_2(t)$ و $h_3(t)$ شکل م ۲–٦٦ را پاسخ ضربه سه سیستم LTI فرض کنید. اینها راتوابع والش می نامند و به علت سادگی ساختشان با مدارهای منطقی و نیز چون عمل ضرب در هر یک از آنها تنها با یک تغییر علامت متناظرست و می توان با کلیدهای تغییر وضعیت آن را انجام داد، اهمیت زیادی دارند.

(الف) یک سیگنال پیوسته در زمان $x_1(t)$ با مشخصات زیر انتخاب و رسم کنید

(i) $x_1(t)$ حقیقی باشد.

(ii) به ازای تمام مقادیر $t \geq ۰$، $x_1(t) = ۰$.

(iii) به ازای تمام مقادیر $t \geq ۰$، $|x_1(t)| \leq 1$



شکل م ۲-٦٦

(iv) $y_1(t) = x_1(t) * h_1(t)$ در $t = 4$ حداکثر مقدار ممکن راداشته باشد.

(ب) قسمت (الف) را برای $x_2(t)$ و $x_3(t)$ تکرار کنید، به نحـوی کـه $y_2(t) = x_2(t) * h_2(t)$ در $t = 4$ و $y_3(t) = x_3(t) * h_3(t)$ در $t = 4$ ماکزیمم شوند.

(ج) مقدار

$$y_{ij(t)} = x_i(t) * h_j(t) \qquad i \neq j$$

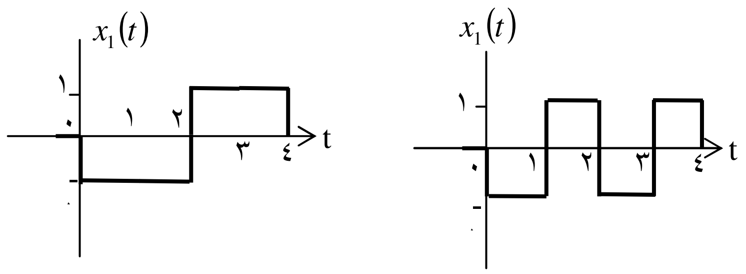
در $t = 4$ را به ازای $i, j = 1, 2, 3$ بیابید.

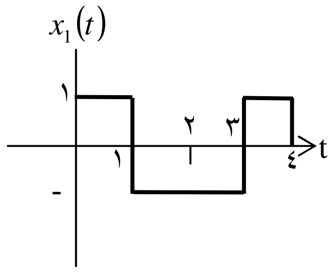
سیستم دارای پاسخ ضربه $h_i(t)$ را فیلتر منطبق سیگنال $x_i(t)$ می نامند، زیرا پاسخ ضـربه آن بـرای ماکزیمم شدن خروجی سیگنال به ازای

حل:

(الف) طرحواره $x_1(t)$ در شکل ح۲،٦٦ نشان داده شده است.

(ب) طرحواره $x_2(t)$ و $x_2(t)$ در شکل ح۲،٦٦ نشان داده شده است.





شکل ح۲,٦٦

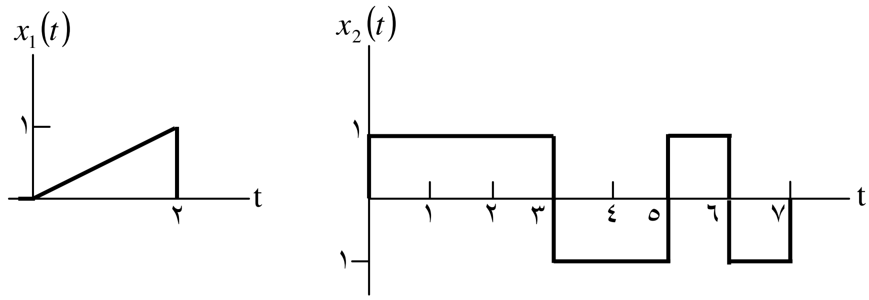
ج)

$$x_1(t)*h_2(t)=x_2(t)*h_3(t)$$
$$=x_1(t)*h_3(t)=\circ \qquad\qquad t=4 \quad \text{برای}$$

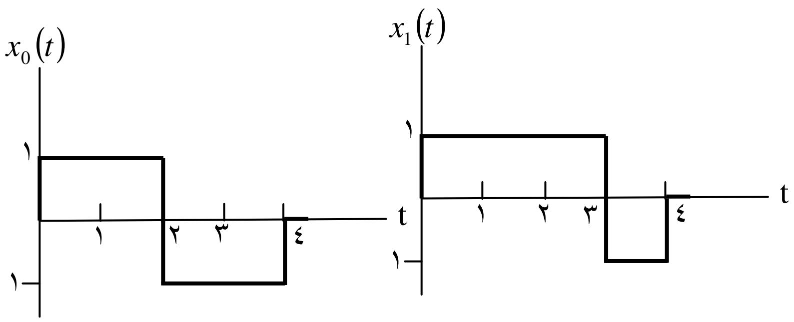
۲,٦۷) تابع همبستگی متقابل دو سیگنال حقیقی پیوسته در زمان $x(t)$ و $y(t)$ عبارت است از

$$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)y(\tau)d\tau \qquad \text{(م ۲–٦۷)}$$

با گذاشتن $x(t)$ به جای $y(t)$ معادله (م ۲–٦۷–۱)، تابع همبستگی سیگنال $x(t)$ به دست می آید.



(الف)



(ب)

شکل ۲-۶۷

$$\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau \qquad \text{(م ۲-۶۷)}$$

(الف) برای هر یک از دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ شکل م ۲-۶۷-۱ تابع خود همبستگی را بیابید.

(ب) $x_1(t)$ را یک سیگنال معین دارای عمر محدود فرض کنید، یعنی برای $t<0$ و $t>T$، $x(t)=0$.

می خواهیم $\phi_{xx}(t-T)$ پاسخ یک یسستم LTI به ورودی $x(t)$ است. به صورت زیر می توانیم نشان دهیم که این تعریف فیلتر منطبق با تعریف بیان شده در مسئله ۲-۶۶ یکسان است.

$y(t)$ را پاسخ یک سیستم LTI، با پاسخ ضربه حقیقی $h(t)$، به سیگنال $x(t)$ بند (ب) فرض کنید. فرض کنید در $t<0$ و T، $t>T$، $x(t)=0$. نشان دهید $h(t)$ ماکزیمم کننده $y(t)$، با قید زیر

$$\int_0^T h^2(t)dt=M \quad \text{یک عدد مثبت ثابت} \qquad \text{(م ۲-۶۷-۲)}$$

مضرب اسکالری از پاسخ ضربه مشخص شده در بند (ب) است.

[راهنمایی: نامساوی شوارتز برای دو سیگنال $u(t)$ و $\upsilon(t)$ عبارت است از

$$\int_b^a u(t)\upsilon(t)dt \le \left[\int_b^a u^2(t)dt\right]^{1/2}\left[\int_b^a \upsilon^2(t)dt\right]^{1/2}$$

با استفاده از این نامساوی کران $y(T)$ را بیابید.]

(د) قید معادله (م ۲–٦۷–۲) تنها برای پاسخ ضربه یک ضریب تعیین می کند، زیرا افزایش M تنها ضریب اسکالر بند (ج) را تغییر می دهد. پس انتخاب $h(t)$ به صورت بندهای (ب) و (ج) با $x(t)$ منطبق است، به نحوی که پاسخ سیستم به آن ماکزیمم شود. چنان که خواهیم گفت در بعضی کاربردها این مسئله بسیار مهم است.

در کاربردهای مخابراتی گاهی می خواهیم یکی از چند خبر (نشان) ممکن را ارسال کنیم. مثلاً وقتی یک پیام پیچیده را به صورت یک دنباله دودویی کد می کنیم، سیستمی داریم که اطلاعات را بیت به بیت ارسال می کند. هر بیت را می توان به صورت یک سیگنال مخابره کرد، مثلاً به ازای بیت صفر سیگنال $x_{\circ}(t)$ و به ازای بیت یک سیگنال $x_1(t)$ را. در این حالت سیستم گیرنده این سیگنالها باید تشخیص دهد که $x_{\circ}(t)$ رسیده است یا $x_1(t)$. عاقلانه است که در گیرنده دو سیستم داشته باشیم که یکی برای $x_{\circ}(t)$ و دیگری برای $x_1(t)$ «تنظیم» شده باشد. منظور از «تنظیم» این استکه سیستم با رسیدن سیگنالی که برای آن تنظیم شده، خروجی بزرگ تولید کند. خاصیت تولید خروجی بزرگ به هنگام رسیدن یک سیگنال خاص دقیقاً همان خصوصیتی است که فیلتر منطبق دارد.

در عمل ارسال و دریافت همیشه با اعوجاج و تداخل همراه است. در نتیجه می خواهیم اختلاف بین پاسخ فیلتر منطبق به ورودیی که با آن تطبیق یافته و پاسخ فیلتر به یکی از سیگنالهای دیگری که می تواند ارسال شود، ماکزیمم باشد. برای روشن کردن این مطلب دو سیگنال $x_{\circ}(t)$ و $x_1(t)$ شکل م ۲–٦۷ (ب) را در نظر بگیرید.

(i) پاسخ $L_{\circ}$ به $x_{\circ}(t)$ و $x_1(t)$ را رسم کنید. برای L_1 نیز این کار انجام دهید.

(ii) مقدار این پاسخها را در $t = 4$ مقایسه کنید. چه تغییری در $x_{\circ}(t)$ صورت دهیم تا کار گیرنده در تشخیص بین $x_{\circ}(t)$ و $x_1(t)$ ساده تر باشد؟ برای این کار باید $t = 4$، پاسخ $L_{\circ}$به $x_1(t)$ و پاسخ L_1 به $x_{\circ}(t)$ صفر باشد.

حل:

(الف) توابع خود همبستگی عبارتند از:

$$\phi_{x_1x_1} = \begin{cases} \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{2}{3} & \circ \le t \le 2 \\ \circ & t > 2 \end{cases} \;,\; \phi_{x_1x_1}(t)\phi_{x_1x_1}(-t)$$

$$\phi_{x_2x_2}(t)=\begin{cases}6(1-t) & a\le t\le 1\\ 1-t & 1\le t\le 2\\ t-3 & 2\le t\le 3\\ 3-t & 3\le t\le 4\\ t-5 & 4\le t\le 5\\ 5-t & 5\le t\le 6\\ t-7 & 6\le t\le 7\\ \circ & t>7\end{cases}\quad ,\quad \phi_{x_2x_2(t)}=\phi_{x_2x_2}(-t)$$

ب) اگر پاسخ ضربه $h(t)=x(T-t)$ باشد، در اینصورت $y(t)=\phi_{xx}(t-T)$

ج) دا ریم:

$$y(T)=\int_\circ^T x(\tau)h(T-\tau)d\tau$$

$$\le m^{1/2}\left[\int_\circ^T x^2(t)dt\right]^{1/2}$$

بنابراین

$$y(t) \text{ با } M^{1/2}\left[\int_\circ^T x^2(t)dt\right]^{1/2}$$

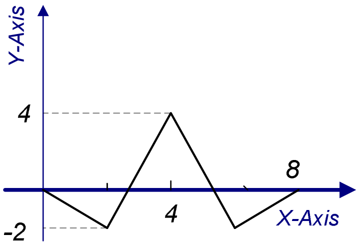
حال اگرداشته باشیم :

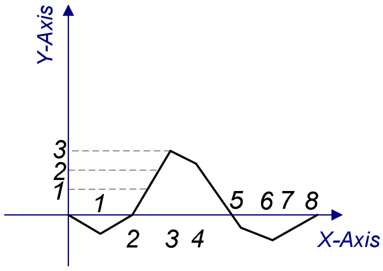
$$h(t)=\sqrt{\frac{m}{\int_\circ^T x^2(t)dt}x(T-t)}$$

در این صورت

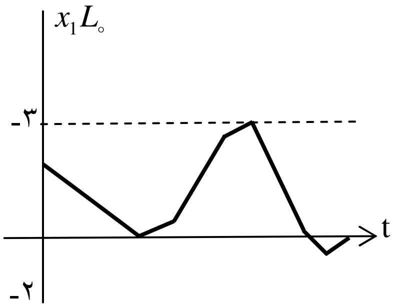
$$y(T)=M^{1/2}\left(\int_\circ^T x^2(t)dt\right)^{1/2}$$

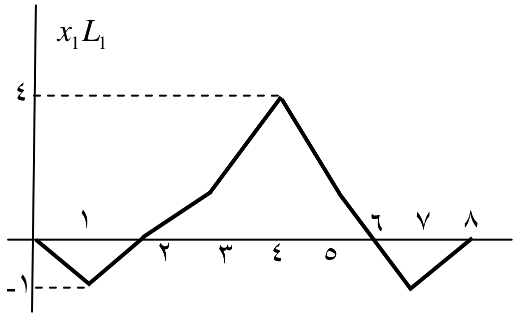
واضح است که $y(T)$ در انتخاب بالا برای $h(T)$ ماکزیمم است.



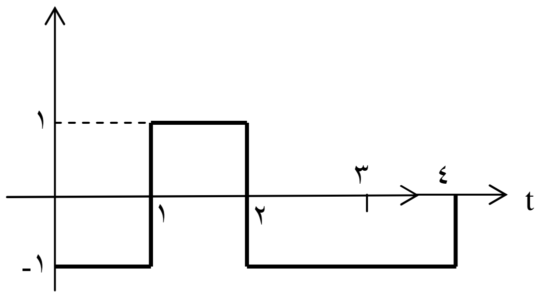


د





(د)



شکل ح۲,٦۷

(ii) فرض کنید پاسخ ضربه $L_\circ$ و L_1، $L_{t_\circ}$ و $h_{L1}(t)$؛ در اینصورت:

$$x_\circ(t) * h_{L_\circ}(t)\Big|_{t=4} = 4$$

$$x_\circ(t) * h_{L1}(t)\Big|_{t=4} = 2$$

$$x_1(t) * h_{L_\circ}(t)\Big|_{t=4} = 4$$

$$x_1(t) * h_{L1}(t)\big|_{t=4} = 4$$

برای انیکه کار گیرنده ساده تر گردد، $x_\circ(t)$ همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است تغییر دهید.

۲،۶۸) سیستمهای رادار کاربرد دیگری است که در آنها فیلترهای منطبق و توابع همبستگی نقش مهمی دارند. اساس رادار ارسال یک پالس الکترومغناطیسی به سوی هدف، بازتاب آن از هدف و در نتیجه بازگشت آن به فرستنده با تأخیری متناسب با فاصله هدف تا رادارست. در حالت ایده آل سیگنال دریافتی نمونه تأخیر یافته و تضعیف شده سیگنال ارسالی است.

پالس اصلی ارسالی را $p(t)$ فرض کنید. نشان دهید که

$$\phi_{pp} = (\circ) = \max_t \phi_{pp}(t)$$

یعنی $\phi_{pp}(\circ)$ ماکزیمم مقدار $\phi_{pp}(t)$ است. با استفادهاز این معادله نتیجه بگیرید که اگر شکل موج دریافت شده درگیرنده به صورت زیر باشد

$$x(t) = a\ p(t - t_\circ)$$

که در آن a مقداری ثابت است، آنگاه

$$\phi_{xp}(t_\circ) = \max_t \phi_{xp}(t)$$

(راهنمایی: نامساوی شوارتز را به کار برید.)

پس سیستم ساده فاصله یابی راداری بر اساس استفاده از فیلتر منطبق با شکل موجی ارسالی $p(t)$، و یافتن زمان ماکزیمم شدن خروجی این سیستم استوارست.

حل:

$$\begin{aligned}\phi_{pp}(\tau) &= \int p(\tau)p(t+\tau)dt \\ &\le \left[\int p^2(\tau)d\tau\right]^{1/2}\left[\int p^2(t+\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le \int p^2(\tau)d\tau\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\phi_{pp}(\tau) \le \phi_{pp}(\circ) \Rightarrow \phi_{pp}(\circ) = \max \phi_{pp}(t)$$

نیز

$$\phi_{xp} = \phi_{pp}(t - t_\circ) \Rightarrow \phi_{xp}(t_\circ) = \phi_{pp}(\circ) = \max \phi_{xp}(t)$$

۲,٦۹) (الف) فرض کنید

$$g(t)=x(t-\tau)$$

در اینصورت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(t)u_1(t)dt=-r'(\circ)=-g'(\circ)-f(\circ)-g(\circ)f'(\circ)$$

نیز

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(\circ)u_1(t)dt-\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f'(\circ)u_\circ(t)dt\\&=-g'(\circ)f(\circ)-g(\circ)f'(\circ)\end{aligned}$$

که مشابه بالایی است.

(ج)

$$g^{n}(\circ)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u_2(\tau)d\tau$$

(د) می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\int g(\tau)f(\tau)u_2(\tau)d\tau &=\\ &=\frac{d^2}{dt^2}\left[g(-t)f(-t)\right]\Big|_{t=\circ}\\ &=\frac{-d}{dt}\left[g'(-t)f(-t)+g(-t)f'(t)\right]_{t=\circ}\\ &=g^{n}(\circ)f(\circ)-2g'(\circ)f'(\circ)+g(\circ)f''(\circ)\end{aligned}$$

بنابراین

$$f(t)u_2(t)=f(\circ)u_2(t)-2f'(\circ)u_1(t)+f''(\circ)u_\circ(t)$$

۲,۷۰) می‌توانیم به قیاس توابع ویژه پیوسته در زمان، یک مجموعه سیگنال ویژه گسسته در زمان تعریف کنیم.

فرض کنید

$$\begin{aligned}u_{-1}[n]&=u[n]\\ u_\circ&=\delta[n]\end{aligned}$$

و

$$u_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

توابع زیر را تعریف کنید

$$u_k[n]=\underbrace{u_1[n][n]*\ldots*u_1[n]}_{k\ \text{بار}} \quad ,k>\circ$$

و

$$u_k[n]=\underbrace{u_{-1}[n]*\ldots*u_{-1}[n]}_{k\ \text{بار}} \quad ,k<\circ$$

توجه کنید که

$$x[n]*\delta[n]=x[n]$$

$$x[n]*u[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]$$

و

$$x[n]*u_{-1}[n]=x[n]-x[n-1]$$

(الف) مقدار زیر را بیابید

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]u_1[m]$$

(ب) نشان دهید که

$$x[n]u_1[n]=x[\circ]u_1[n]-(x[1]-x[\circ])\delta[n-1]$$
$$=x[1]u_1[n]-(x[1]-x[\circ])\delta[n]$$

(ج) سیگنالهای $u_2[n]$ و $u_3[n]$ را رسم کنید.

(د) $u_{-2}[n]$ و $u_{-3}[n]$ را رسم کنید.

(هـ) نشان دهی د که در حالت کلی برای $k>\circ$ داریم

$$u_k[n]=\frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!}(u[n])-u[n-k-1] \qquad (۱-۷۰-۲)$$

(راهنمایی: از استقراء استفاده کنید. از بند (ج) می دانیم که $u_k[n]$، بهازای $k=2,3$ معادله (م ۲-۷۰-۱) را ارضا می کند. سپس با فرض این که $u_k[n]$ نیز چنین است، با نوشتن $u_{k+1}[n]$ برحسب $u_k[n]$ نشان دهید که $u_{k+1}[n]$ نیز این معادله را ارضا می کند.)

(و) نشان دهید که در حالت کلی برای $k>\circ$ داریم.

$$u-k[n]=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n] \qquad (\text{م } ۲-۷۰-۲)$$

(راهنمایی: از استقراء استفاده کنید. توجه کنید که

$$u_{-(k+1)}[n]-u_{-(k+1)}[n-1]=u_{-k}[u] \qquad (۳-۷۰-۲)$$

سپس با فرض صحت معادله (م ۲-۷۰-۲) برای $u_{-k}[n]$، نشان دهید که این معادله بـرای $u_{-(k+1)}[n]$ هم معتبرست.)

حل:

داریم:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]u_1[m]=\sum_m x[m\{\delta[m]-\delta[m-1]\}]$$
$$=x[\circ]-x[1]$$

(ب) داریم:

$$x[n]u_1[n]=x[\circ]\delta[n]-x[1]\delta[n-1]+[x[\circ\ \delta[n-1]]-x[\circ]\delta[n-1]]$$
$$=x[\circ]u_1[n]-\{x[1]-x[\circ]\}\delta[n-1]$$
$$=x[\circ]\delta[n]-x[1]\delta[n-1]+x[1]\delta[n]-x[1]\delta[n]$$
$$=x[1]u_1[n]-\{x[1]-x[\circ]\}\delta[n]$$

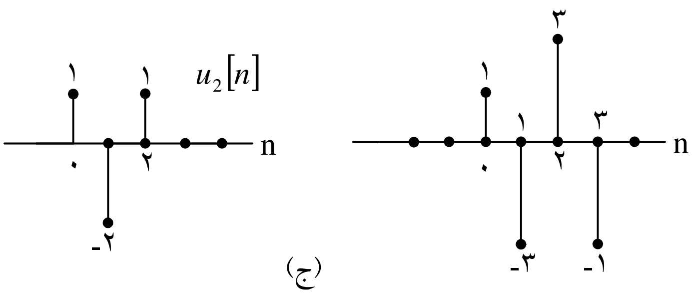
(ج) داریم:

$$u_2[n]=u_1[n]*u_1[n]=\delta[n]-2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

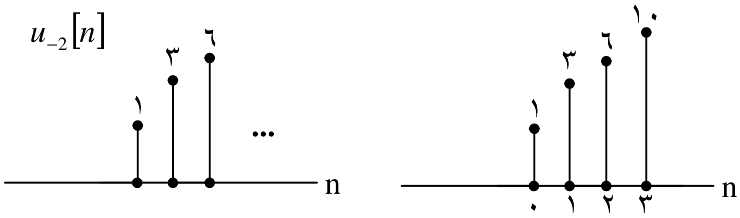
,

$$u_3[n]=\delta[n]=-3\delta[n-1]+3\delta[n-2]-\delta[n-3]$$

طرحهای سیگنالها در شکل ح ۲،۷۰ نشان داده شده اند. **شکل ح ۲،۷۰**



(ج)



شکل (ح ۲,۷۰,۱)

(د) داریم:

$$u_{-2}[n]=n+1 \qquad n\geq ۰$$

,

$$u-3[n]=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad n\geq ۰$$

شکل ها در شکل ح ۲,۷۰ نمایش داده شده است.

(هـ) وضعیت برای $K=1,2,3$ صحیح هستند. فرض کنیم برای k درست باشد، در این صورت برای $k>۰$، $u_{k+1}[n]=u_1[n]*u_k[n]=-u_k[n]-u_k[n-1]$

با استدلال، می توانیم دلیل بیاوریم که حالت موردنظر برای تمام $k>۰$ صحیح است.

(و) برای $k=1$، $u_{-1}[n]=u[n]$ که نشان می دهد که وضعیت صحیح است. برای $k=2$

$$u_{-2}[n]=\frac{(n+1)}{n!}=u[n]=(n+1)u[n]$$

که دوباره نشان می دهد ک وضعیت درست است. فرض کنید که برای $k-1>۰$ صحیح باشد، در این صورت:

$$u_{-(k-1)}[n]=u_{-1}[n]-u_{-k}[n-1]$$

نیز:

$$\begin{aligned}u_{-(k-1)}[n]&=\frac{(n+k-2)!}{n!(k-2)!}\\&=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n]-\frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-2)!}u[n-2]\end{aligned}$$

با استفاده از مقایسه معادله بالا با معادله (ح ۲٫۷۰٫۱) داریم:

$$u_{-k}[n]=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n]$$

با استدلال، می توان دلیل آورد که وضعیت برای تمامی $k>0$ صحیح است.

۲٫۷۱) دراین فصل از چند ویژگی و مفهوم ساده کننده تحلیل سیستمهای LTI استفاده کردیم. در این مسئله می خواهیم دو تا از این ویژگیها را دقیقتر بررسی کنیم. خواهیم دید که در بعضی حالات بسیار خاص باید این ویژگیها را با دقت و احتیاط به کاربرد، حال آنکه در حالتهای دیگر بدون وسواس از آنها استفاده می کنیم.

(الف) یکی از ویژگیهای اساسی و مهم کانولوشن (در هر دو حالت پیوسته و گسسته در زمان) ویژگی شرکت پذیری است. یعنی اگر $h(t)$، $x(t)$، و $g(t)$ سه سیگنال باشند داریم

$$x(t)*[g(t)*h(t)]=[x(t)*g(t)]*h(t)=[x(t)*h(t)]*g(t) \qquad \text{(م ۲-۷۱-۱)}$$

رابطه فوق به شرطی درست است که هر سه عبارت خوش تعریف و غیر بی نهایت باشند. چون معمولاً این شرط برقرارست، در عمل معمولاً بدون هیچ فرض و تفسیری رابطه فوق را به کار می بریم. ولی در بعضی حالات چنین نیست. برای مثال سیستم شکل م ۲-۷۱ را با $h(t)=u_1(t)$ و $g(t)=u(t)$ در نظر بگیرید.

پاسخ این سیستم را به ورودی زیر پیدا کنید.

برای تمام مقادیر $\qquad x(t)=1$

این کار را به سه طریق بیان شده در معادله (م ۲-۷۱-۱) انجام دهید:

$$x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow\boxed{g(t)}\longrightarrow y(t)$$

$$x(t)\longrightarrow\boxed{g(t)}\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t)$$

شکل م ۲-۷۱

(i) ابتدا کانولوشن دو پاسخ را بیابید و نتیجه حاصل را با $x(t)$ کانولوشن کنید.

(ii) اول $x(t)$ را با $u_1(t)$، و سپس نتیجه را با $u(t)$ کانولوشن کنید.

(iii) اول $x(t)$ را با $u(t)$ و سپس نتیجه را با $u_1(t)$ کانولوشن کنید.

(ب) بند (الف) را به ازای سیگنالهای زیر تکرار کنید.

$$x(t) = e^{-t}$$
$$h(t) = e^{-t}u(t)$$
$$g(t) = u_1(t) + \delta(t)$$

(ج) همین کار را با سیگنالهای زیر انجام دهید

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$g[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

پس در حالت کلی خاصیت شرکت پذیری کانولوشن تنها و تنها به شرطی برقرارست که سه عبارت معادله (م ۲-۷۱-۱) معنی داشته باشند (یعنی تعبیر آنها بر حسب سیستمهای LTI معنی دار باشد). مثلاً در بند (الف) مشتق گیری از یک ثابت و سپس انتگرال گیری از آن معنی دارد ولی فرآیند انتگرال گیری یک ثابت از $t = -\infty$ و سپس مشتقگیری از آن معنی ندارد، و تنها در چنین مواردی است که نمی توان خاصیت شرکت پذیری را به کار برد.

سیستمهای وارون هم به مبحث فوق بسیار مرتبط است. سیستمی LTI با پاسخ ضربه $h(t) = u(t)$ در نظر بگیرید. چنان که در بند (الف) دیدیم ورودیهایی وجود دارد، مثلاً $x(t)$ =ثابت غیر صفر، که پاسخ سیستم به آنها بی نهایت می شود، بنابراین بررسی مسئله وارون کردن این سیستم برای بازیابی ورودی بی معنی است. البته اگر تنها ورودیهایی را در نظر بگیریم که خروجی محدودی دارند، یعنی ورودیهایی که در رابطه زیر صدق کنند.

$$\left|\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right| < \infty \qquad (۲-۷۱-۲)$$

سیستم فوق وارون پذیرست و وارون آن سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $u_1(t)$ وارون آن است.

(د) نشان دهید سیستم LTI با پاسخ ضربه $u_1(t)$ وارونپذیر نیست. (راهنمایی: دو ورودی مختلف پیدا کنید که خروجی سیستم به آنها، در تمام زمانها صفر باشد.) نشان دهید اگر ورودیها در معادله (م ۲-۷۲-۲) صدق کنند، این سیستم وارونپذیرست. [راهنمایی: در مسئله ۱-٤٤ نشان دادیم اگر سیستم LTI تنها به ازای ورودی $x(t) = ۰$ در تمام زمانها صفر شود، سیستم وارونپذیرست؛ آیا می توان دو

ورودی $x(t)$ پیدا کرد که در معادله (م ۲-۷۱-۲) صدق کنند و در کانولوشن با $u_1(t)$ متحد بـا صـفر باشند؟]

در این مسئله مطالب زیر را نشان دادیم:

۱. اگـر $h(t)$، $x(t)$، و $g(t)$ سـه سـیگنال باشـند کـه بـرای آنهـا $x(t)*g(t)$، $h(t)*g(t)$، و $x(t)*h(t)$ همگی خوش تعریف و محدود باشـند، خاصـیت شـرکت پـذیری (م ۲-۷۱-۱) برقـرار است.

۲. فرض کنید $h(t)$ پاسخ ضربه یـک سیـستم LTI اسـت و پاسخ ضـربه یـک سیـستم دیگـر $g(t)$ خاصیت زیر را دارد.

$$h(t)*g(t)=\delta(t) \qquad \text{(م ۲-۷۱-۳)}$$

با توجه به (۱) می توانیم برای تمـام ورودیهـای $x(t)$ کـه بـه ازای آنهـا $h(t)*x(t)$، و $g(t)*x(t)$ خوش تعریف و محدودند، دو ترکیب سری نشان داده شده در شکل م ۲-۷۱ هـر دو سیـستم همـانی انـد، پـس در سیـستم LTI را مـی تـوان وارون یکـدیگر دانـست. مـثلاً اگـر $g(t)=u_1(t)$ و $h(t)=u(t)$، تا وقتی خود را به ورودیهای صدق کننده در معادله (م ۲-۷۱-۲) محدود کنیم، این دو سیستم وارون یکدیگرند.

پس می بینیم که خاصیت شرکت پذیری معادله (م ۲-۷۱-۱) و تعریـف سیـستم وارون معادلـه (م ۲-۷۱-۳) به شرطی معتبرند که تمام کانولوشنهای موجود در آنها محـدود باشـند. چـون در تمـام مـسائل واقعی این شرط برقرارست، این خواص و تعاریف را بدون هیچ فرض و تفسیری بـه کـار مـی بـریم. توجه سیستمهای گسسته در زمان هم صادق اند [بند (ج) مسئله این را نشان می دهد].

حل:

(الف) داریم:

$$x(t)*[u_1(t)*u(t)]=x=1;\ \ for\ \ all\ t.$$
$$[x(t)*u_1(t)]*u(t)=\circ u(t)=\circ;\qquad for\ \ all\ \ t$$

و

$$[x(t)*u(t)]*u_1(t)=\infty*u_1(t)=\text{تعریف نشده}$$

(ب) داریم: $h(t)=e^{-t}u(t)$ و $x(t)=e^{-t}$ و $g(t)=u_1(t)+\delta(t)$ بنابراین:

$$x(t)*[h(t)*g(t)]=x(t)=e^{-t}$$
$$[x(t)*g(t)]*h(t)=0$$
$$g(t)*[x(t)*h(t)]=g(t)*e^{-t}\int_0^{\infty}1d\tau \quad = \text{تعریف نشده}$$

(ج) داریم:

$$x[n]*[[n]*g[n]]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n*\delta[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$
$$(x[n]*g[n])*h[n]=0*h[n]=0$$
,
$$(x[n]*h[n])*g[n]=\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}1\right\}*g[n]=\infty$$

(د) فرض کنید $h(t)=u_1(t)$، دراینصورت اگر ورودی برابر $x_1(t)=0$ باشد، خروجی برابر است با $y_1(t)=0$. حال، اگر ثابت $x_2(t)$ در اینصورت $y_2(t)=0$. بنابراین سیستم تغییرناپذیر نیست.

حال توجه کنید که: $$\left|\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau\right|=\begin{cases}0 & \forall t\ x_2(t)=0 \quad \text{اگر}\\ \infty & x_2(t)\neq 0 \quad \text{اگر}\end{cases}$$

بنابراین اگر $\left|\int_{-\infty}^{t}cdt\right|\neq\infty$ دراین صورت فقط $x_2(t)=0$ نتیجه خواهد داد: $y_2(t)=0$ بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

۲,۷۲) $\delta_\Delta(t)$ را یک پالس به ارتفاع $\frac{1}{\Delta}$ در $0<t\le\Delta$ فرض کنید. نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}\delta(t)=\frac{1}{\Delta}[\delta(t)-\delta_\Delta(t-\Delta)]$$

حل:

داریم:

$$\delta_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}u(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$

با مشتقگیری از طرفین داریم:

$$\frac{d}{dt}\delta_{\Delta}(t)=\frac{1}{\Delta}u'(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$

$$=\frac{1}{\Delta}\delta(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$

$$\frac{1}{\Delta}[\delta(t)-\delta(t-T)]$$

۲,۷۳) بااستقراء نشان دهید که

$$u_{-k}=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)$$

حل: برای $k=1$، $u_{-1}(t)=u(t)$. بناراین وضعیت داده شده برای $k=1$ صحیح است.

حال فرض کنید که مطلب فوق برای $k>1$ صحیح باشد.

در اینصورت:

$$u_{-1}(k+1)(t)=u(t)*u_{-k}(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{t}u_{-k}(t)=\int_{\circ}^{t}u_{-k}(\tau)$$

$$=\int_{\circ}^{t}\frac{\tau_{k-1}}{(k-1)!}\qquad t\geq\circ$$

$$=\frac{\tau^{k}}{k(k-1)!}\Bigg|_{\tau=t>\circ}=\frac{t^{k}}{k!}u(t)$$

فصل سوم

نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب

۳,۱) سیگنال متنـاوب پیوسـته در زمـان $x(t)$ حقیقـی و دارای تنـاوب پایـه $T=A$ اسـت. ضـرائب غیرصفر سری فوریه $x(t)$ عبارت اند از

$$a_1=a_{-1}2, a_3=a*_{-3}=4j$$

$x(t)$ را به صورت زیر بیان کنید

$$x(t)=\sum_{k=\circ}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t+\phi_k)$$

حل:

با استفاده از ترکیب سری فوریه معادله (۳,۳۸):

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{j\left(2\pi/T\right)}+a_{-1}e^{-j\left(2\pi/T\right)t}+a_3 e^{j3\left(2\pi/T\right)t}+a_{-3}e^{-3j\left(2\pi/T\right)t} \\ &= 2e^{j\left(2\pi/8\right)t}+2e^{-j\left(2\pi/8\right)}+4je^{3j\left(2\pi/8\right)t}-4j^{-3j\left(2\pi/8\right)t} \\ &= 4\cos\left(\pi/4\,t\right)-8\sin\left(6\,n/8\,t\right)=4\cos\left(3\pi/4\,t+\pi/2\right) \end{aligned}$$

۳,۲) سیگنال متناوب گسسته در زمان $x[n]$ حقیقی و دارای تناوب پایه $N=5$ است. ضـرائب غیـر صفر سری فوری $x[n]$ عبارت اند از

$$a_\circ=1,\ a_2=a_{-2}^*=e^{j\pi/4}, a_4=a_{-4}^*=2e^{j\pi/}$$

$x[n]$ را به صورت زیر بیان کنید.

$$x[n]=A_\circ+\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n+\phi_k)$$

حل:

با استفاده ا ز ترکیب سری فوری معادله (۳,۹۵):

$$x[n]=a_{\circ}+a_2e^{j2\left(2\pi/N\right)n}+a_{-2}e^{-j2\left(2\pi/N\right)n}+a_4e^{j4\left(2\pi/N\right)\pi}+a_{-4}e^{-j4\left(2\pi/N\right)n}$$
$$=1+a^{j\left(\pi/4\right)}e^{j2\left(2\pi/5\right)n}+e^{-j\left(\pi/4\right)}e^{-2j\left(2\pi/5\right)n}$$
$$+2e^{j\left(\pi/3\right)}e^{j4\left(2\pi/5\right)n}+2e^{-j\left(\pi/3\right)}\propto -4\ e^{-j4\left(2\pi/N\right)n}$$
$$=1+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}n+\pi/4\right)+4\cos\left(\frac{8\pi}{5}n+\pi/3\right)$$
$$=1+2\sin\left(\frac{4\pi}{5}n+\frac{3\pi}{4}\right)+4\sin\left(\frac{8\pi}{5}n+\frac{5n}{6}\right)$$

۳,۳) برای سیگنال متناوب پیوسته در زمان

$$x(t)=2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+4\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

فرکانس $\omega_{\circ}$ و ضرائب سری فوریه a_k را به نحوی بیابید که داشته باشیم

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{jk\omega_{\circ}t}$$

حل:

سیگنال داده شده عبارتست از:

$$x(t)=2+\frac{1}{2}e^{j\left(2\pi/3\right)t}+1/2\,e^{-j\left(2\pi/3\right)}-2\,je^{j\left(5\pi/3\right)t}+2\,je^{-j\left(5\pi/3\right)t}$$
$$=2+1/2\,e^{j2\left(2\pi/6\right)t}+1/2\,e^{-j2\left(2\pi/6\right)t}-2\,je^{5j\left(2\pi/6\right)t}+2\,je^{-5j\left(2\pi/6\right)t}$$

با استفادهاز مطالب فوق؛ می توانیم نتیجه بگیریم که فرکانس پایه $x(t)$ برابر است با $2\pi/6=\pi/3$

ضرایب غیر صفر سری فوریه عبارتست از:

$$\propto_{\circ}=2\,,\ a_2=-a_2=\frac{1}{2}\ ,\ a_5=a_{-5}^{*}=-2j$$

۳,٤) بااستفاده از فرمول تجزیه سری فوریه (۳-۳۹) ضرایب a_k سیگنال متناوب زیر را بیابید.

$$x(t)=\begin{cases}1/5, & \circ \le t<1 \\ -1/5, & 1\le t<2\end{cases}$$

فرکانس پایه عبارت است از $\omega_\circ=\pi$.

حل:

چون $\omega_\circ=\pi$, $T=\frac{2\pi}{\omega_\circ}=2$، بنابراین:

$$a_k=\tfrac{1}{2}\int_\circ^1 1.5\theta^{-k\pi t}dt-\tfrac{1}{2}\int_1^2 1.5e^{-jk\pi t}dt$$
$$=\frac{3}{2k\pi j}(1-e-jk\pi)=\frac{3}{k\pi}e^{-jk(\pi/2)}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

....

۳,۵) $x_1(t)$ سیگنال در زمانی با فرکانس پایه ω_1 و ضرائب سری فوریه a_k فرض کنید. داریم

$$x_2(t)=x_1(1-t)+x_1(t-1)$$

فرکانس پایه ω_2 سیگنال $x_2(t)$ را برحسب ω_1 بیان کنید. ضرائب سری فوریه $x_2(t)$، b_k، را برحسب ضرائب a_k بیان کنید. می توانید از خواص جدول ۳-۱ استفاده کنید.

حل:

هر دو سیگنال $x_1(1-t)$ و $x_1(t-1)$ تناوب پایه $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ متناوب هستند. و به دلیل $y(t)$ ترکیب خطی $x_1(1-t)$ و $x_1(1-t)$ می باشد، $y(t)$ نیز با تنواب اصلی $T_2=\frac{2\pi}{\omega_1}$ تناوب خواهد داد.

بنابراین: $\omega_2=\omega_1$ چون $x_1(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$ ($F_s\to$ سری فوریه)

بااستفاده از نتیجه جدول ۳,۱ خواهیم داشت:

$$x_1(t+1)\xleftrightarrow{FS}a_k e^{jk\left(2\pi/T_1\right)}$$
$$x_1(t-1)\xrightarrow{FS}a_k e^{jk\left(2\pi/T_1\right)}\Rightarrow x_1(-t+1)\xrightarrow{FS}a-k^{e^{-j(2\pi/\pi)}}$$

بنابراین:

$$x_1(t+1)+x_1(1-t)\xleftrightarrow{FS}a_k e^{jk\left(2\pi/T_1\right)}+a-k\ e^{-jk\left(2\pi/T_1\right)}=e^{-j\omega_1 k}(a_k+a-k)$$

۳,٦) سه سیگنال متناوب پیوسته در زمان با نمایش سری فوریه زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1(t)=\sum_{k=\circ}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

$$x_2(t)=\sum_{k=-100}^{100}\cos(k\pi)e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

$$x_3(t)=\sum_{k=-1002}^{100} j\sin\left(\frac{k\pi}{}\right)e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

با استفاده از خواص سری فوریه به سئوالهای زیر پاسخ دهید:

(الف) کدام سیگنالها حقیقی اند؟

(ب) کدام سیگنالها زوج اند؟

حل:

(الف) با مقایسه ی $x_1(t)$ با ترکیب سری فوریه معادلـه (۳,۳۸)، ضـرایب سـری فوریـه $x_1(t)$ را بـه صورت زیر بدست می آوریم:

$$a_k=\begin{cases}\left(1/2\right)^k & \circ\le k\le 100\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

از جدول ۳,۱، می دانیم که اگر $x_1(t)$ حقیقی باشد، در اینصورت a_k باید برابـر بـا مـردوج مخـتلط باشد معادله:

از جدول ۳,۱، می دانیم که اگر $x_1(t)$ حقیقی باشد، در اینصورت a_k باید برابر با مزدوج مختلط باشد ضریب سری فوریه $x_2(t)$ برابر است با:

$$a_k=\begin{cases}\cos(k\pi) & \circ\le k\le 100\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

با استفاده از جدول ۳,۱، می دانیم که اگر $x_2(t)$ حقیقی باشد، بایستی $a_k=a_{-k}^*$ بـدلیل اینـک ایـن مطلب در مورد $x_2(t)$ صدق می کند $x_2(t)$ سیگنالی حقیقی است.

به طور مشابه، ضرایب سری فوریه $x_3(t)$ عبارتست از:

$$a_i = \begin{cases} j \ \sin\left(k\pi/2\right) & 0 \le k \le 100 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

دوباره، با استفاده از جدول ۳,۱ می دانیم که $x_3(t)$ حقیقی می باشد. زیـرا اگـر $x_3(t)$ حقیقـی باشـد، بایستی $a_k = a_{-k}^*$ که این مطلب در مورد سیگنال $x_3(t)$ صدق می کند.

(ب) برای یک سیگنال، ضرایب سری فوریه بایستی روج باشد که این تنها در مورد $x_2(t)$ صـدق مـی کند.

....

۳,۷) فرض شده است که:

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

داریم:

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} b_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$$

بنابراین:

$$a_k = \frac{b_k}{j\left(2\pi/T\right)k} \ , \ k \ne 0$$

هر گاه $k = 0$ باشد:

با استفاده از اطلاعات داده شده:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)dt = \frac{2}{T}$$

بنابراین:

$$a_k = \begin{cases} 2/T & k = 0 \\ \dfrac{b_k}{j\left(2\pi/T\right)k} & k \ne 0 \end{cases}$$

....

۳,۸) اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x(t)$ داده شده است:

۱. $x(t)$ حقیقی و فردست.

۲. $x(t)$ دارای تناوب پایه $T=2$ و ضرائب سری فوریه a_k است.
۳. به ازای $|k|>1$، $a_k=0$
٤. $\frac{1}{2}\int_T^2 x(t)dt=2$
دو سیگنال متفاوت برای ارضای این شرایط بیابید.

حل:

بدلیل اینکه $x(t)$ سیگنالی فرد و حقیقی است (راهنمای)، ضرایب سری فوریه اش، a_k، سوهومی خالص و فرد خواهند بود .

۳,۱۰) بدلیل اینکه ضرایب سری فوریه برای هر N های تکرار می شوند، داریم:

$$a_1=a_{15}\ \ ,a_2=a_{16}\ ,\ a_3=a_{17}$$

بعلاوه، چون سیگنال حقیقی و فرد است، ضرایب سری فوریه، a_k، فرد و موهومی خالص خواهند بود. بنابراین $a=0$ و $a_3=-a_{-3}$ و $a_2=-a_{-2}$ و $a_1=-a_{-1}$

در نهایت: $a_{-3}=-3j$ و $a_{-2}=-2j$ و $a_{-1}=-j$

۳,۱۱) اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x[n]$ داده شده است.

۱. $x[n]$ حقیقی و زوج است.
۲. دوره تناوب $x[n]$، $N=10$ و ضرائب سری فوریه آن a_k است.
۳. $a_{11}=5$
٤. $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50$

نشان دهید که $x[n]=A\cos(Bn+C)$ و مقادیر عددی ثابتهای A، B، C را بیابید.

حل:

بدلیل اینکه برای هر $N=10$ ضرایب سری فوریه تکرار می شود، داریم $a_1=a_{11}=5$، بعلاوه از آنجائیکه، $x[n]$ حقیقی و زوج است، a_k نیز حقیقی و زوج خواهد بود. بنابراین $a_1=a_{-1}=5$.
همچنین فرض شده است که:

$$\frac{1}{40}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50$$

بااستفاده از رابطه پارسئوال

$$\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2=50$$

$$\sum_{k=-1}^{8}|a_k|^2=50$$

$$|a-1|^2+|a_1|^2+a_\circ^2+\sum_{k=2}^{8}|a_k|^2=50$$

$$a_\circ^2+\sum_{k=2}^{8}.|a_k|^2=\circ$$

بنابراین برای $k=2,...,8$ ، $a_k=\circ$، حال با استفاده از ترکیب معدله (۳,۹٤)، داریم:

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}Kn}=\sum_{k=-1}^{8}a_k e^{j\frac{2\pi}{10}Kn}$$

$$=5e^{j\frac{2\pi}{10}n}+5e^{-j\frac{2\pi}{10}n}$$

$$=10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

....

۳,۱۲) برای هر دو سیگنال متناوب $x_1[n]$ و $x_2[n]$، $N=4$ و ضرائب سری فوریه به صورت زیر مشخص شده اند.

$$x_1[n]\leftrightarrow a_k\ .\ \ x_2[n]\leftrightarrow b_k$$

که

$$a_\circ=a_3=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_2=1 \qquad \text{و} \qquad b_\circ=b_1=b_2=b_3=1$$

با استفادهاز خاصیت ضرب جدول ۳–۱، ضرائب سری فوریه c_k سیگنال $g[n]=x_1[n]x_2[n]$ را بیابید.

حل:

با استفاده از خاصیت ضرب، داریم:

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{FS} \sum_{\ell=\langle N\rangle} a_\ell b_{k-1} = \sum_{k=3}^{3} a_\ell b_{k-1}$$

$$\xleftrightarrow{FS} a_\circ b_k + a_1 b_{k-1} + a_z b_{k-z} + a_3 b_{k-3}$$

$$\xleftrightarrow{FS} b_n, 2b_k + 2b_{k-1} + b_{k-2}$$

چون b_k به ازای تمام مقادیر k، برابر با (۱) است، بدیهی است که $b_k + 2b_{k-1} + 2b_{k-3} + 2b_{k-3}$ که به ازاء جمیع مقادیر k برابر ٦ خواهد بود. بنابراین؛

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{FS} 6$$

۳,۱۳) یک سیستم LTI پیوسته در زمان با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

ورودی این سیستم سیگنال متناوب زیر با دوره تناوب $T = A$ است.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \circ \le t < 4 \\ -1 & 4 \le t < 8 \end{cases}$$

ضرائب سری فوریه خروجی سیستم $y(t)$ را بیابید.

حل:

ابتدا ضرایب سری فوریه $x(t)$ را محاسبه می کنیم. بدیهاً، چون $x(t)$، فرد و حقیقی است، a_k فرد و موهومی خالص خواهد بود. بنابراین $a_\circ = \circ$، حال:

$$a_k = \frac{1}{8}\int_\circ^8 x(t)e^{-j(2\pi/8)}dt$$

$$= 1/8\int_\circ^4 e^{-j(2\pi/8)tk}dt - \frac{1}{8}\int_4^8 e^{-j(2\pi/8)tk}dt$$

$$= \frac{1}{j\pi k}\left[1 - e^{-j\pi k}\right]$$

واضح است، جمله بالا برای تمام kهای زوج برابر صفر خواهد بود. بنابراین

$$a_k \begin{cases} \circ & k \text{ زوج} \\ \dfrac{2}{j\pi k} & k \text{ فرد} \end{cases}$$

هنگامیکه $x(t)$ از طریق یک کانال با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ عبور می کند، خروجی $y(t)$ به صورت زیر بدست می آید: (بخش ۳،۸ را مطالعه کنید):

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_\circ) e^{jk\omega_\circ t}$$

که $\omega_\circ = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$، چون a_k تنها به ازاء مقادیر فرد k صفر نیست، بایستی سری فوق را برای k های فرد محاسبه کنیم: بعلاوه، توجه کنید که:

$$H(j\omega) = \left(jk\left(\pi/4\right)\right) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\pi/4\right)}$$

برای مقادیر فرد k، برابر صفر است، بنابراین $\quad y(t) = \circ$

....

۳،۱٤) قطار ضربه زیر

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

ورودی یک سیستم LTI، با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ است، و خروجی سیستم عبارت است از

$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

مقادیر $H\left(e^{jk\pi/2}\right)$ را به ازای $k = \circ,1,2,3$ بیابید.

حل:

سیگنال $x[n]$ با پریود $N = 4$ ، متناوب می باشد. ضرایب سری فوریه ای عبارتند از:

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=\circ}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \qquad for\ \ all\ \ k$$

از نتایج بیان شده در بخش ۳،۸، می دانیم که خروجی $y[n]$ برابر است؛

$$y[n]=\sum_{k=\circ}^{3} a_k H\left(e^{j\left(2\pi/4\right)k}\right)e^{jk\left(2\pi/4\right)n}$$
$$=\frac{1}{4}H\left(e^{j\circ}\right)e^{j\circ}+\frac{1}{4}H\left(e^{j\left(\pi/2\right)}\right)e^{j\left(\pi/2\right)}$$
$$+\frac{1}{4}H\left(e^{j\left(3\pi/2\right)}\right)e^{j\left(3\pi/2\right)}+\frac{1}{4}H\left(e^{j(\pi)}\right)e^{j(\pi)}$$

بااستفاده از اطلاعات داده شده، می دانیم که $y[n]$ برابر است با:

$$y[n]=\cos\left(\frac{5\pi}{2}n+\pi/4\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\pi/4\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^{j\left(\pi/2\pi+\pi/4\right)}+\frac{1}{2}e^{-j\left(\pi/2n+\pi/4\right)}$$
$$=\frac{1}{2}e^{j\left(\pi/2n+\pi/4\right)}+\frac{1}{2}e^{j\left(3\pi/2n-\frac{\pi}{4}\right)}$$

با مقایسه با معادله (ح ٣،١٤،١) داریم:

$$H\left(e^{j\circ}\right)=H\left(e^{j\pi}\right)=\circ$$

$$H\left(e^{j\pi/2}\right)=e^{2j\pi/4}$$

$$H\left(e^{3j\pi/2}\right)=2e^{-j\pi/4}$$

٣،١٥) یک فیلتر سیگنال متناوب $x(y)$ با $T=\pi/6$ و ضرائب سری فوریه a_k است. می دانیم که

$$x(t)\xrightarrow{S}y(t)=x(t)$$

به ازای کدام مقادیر k داریم $a_k=\circ$؟

حل:

از نتایج قسمت ٣،٨

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k H\left(jk\omega_\circ\right)e^{jk\omega_\circ t}$$

که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 12$. چون $H(j\omega)$ برای $|\omega| > 100$، برابر صفر است، بزرگترین مقدار $|k|$ آنـان صفر نیست، بایستی به صورت مقابل باشد: $|k|\omega_0 \le 100$

که بیان می دارد $|k| \le 8$، بنابراین برای $|k| > 8$ برابر صفر می باشد.

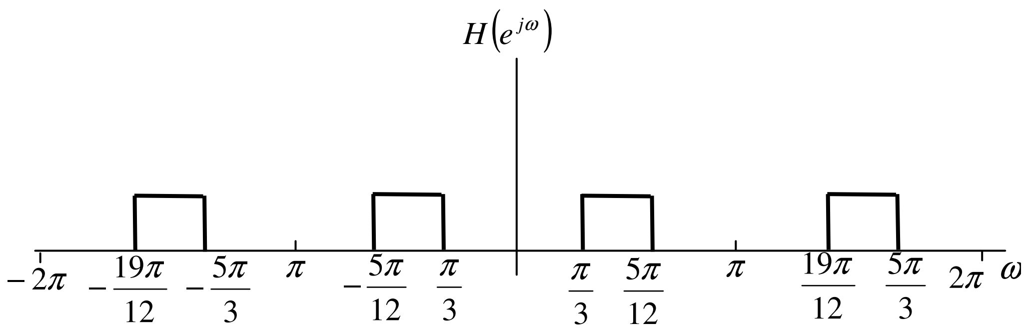
۳,۱٦) خروجی فیلتر شکل م ۳–۱٦ به ورودیهای متناوب زیر را بیابید.

(الف) $x_1[n] = (-1)^n$

(ب) $x_2[n] = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{5}n + \frac{\pi}{4}\right)$

(ج) $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k} u[n-4k]$

شکل م ۳–۱٦



حل:

(الف) سیگنال داده شده $x_1[n]$ برابر است با:

$$x_1[n] = e^{j/2 (\pi/2) n}$$

بنـابراین $x_1[n]$ بـا پریـود $N = 2$ متنـاوب اسـت و ضـرایب سـری فوریـه اش در بـازه $\circ \le k \le 1$ برابراست با:

$$\alpha_\circ = \circ \quad \text{و} \quad \alpha_1 = 1$$

بااستفاده از نتایج بدست آمده در قسمت ۳,۸، خروجی $y_1[n]$ برابر است؛

$$y_1[n]=\sum_{k=\circ}^{1} a_k H\left(e^{j2k\pi/2}\right)e^{k(2\pi/2)}$$
$$=\circ+a_1H\left(e^{j\pi}\right)e^{j\pi}=\circ$$

(ب) سیگنال $x_2[n]$ با پریود $N=16$، متناوب می باشد، و می توانیم این سیگنال را به صورت زیر بنویسیم:

$$x_2[n]=e^{j(2\pi/16)(\circ)n}-\left(j/2\right)e^{j(\pi/4)}e^{j(2\pi/16)(3)n}+\left(j/2\right)e^{-j(\pi/4)}e^{-j(2\pi/16)(3)n}$$
$$=e^{j(2\pi/16)n}-\left(j/2\right)e^{j(2\pi/16)(3)n}+\left(j/2\right)e^{-j(\pi/4)}e^{j(2\pi/16)(13)n}$$

بنابراین، ضریب غیرصفر سری فوریه $x_2[n]$ در بازه و $\circ\le k\le 15$ برابر است با:

$$a_\circ=1 \quad \text{و} \quad a_3=-\left(j/2\right)e^{j\pi/4} \quad \text{و} \quad a_{13}=\left(j/2\right)e^{-j\pi/4}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمت ۳٫۸، خروجی $y_2[n]$ برابر است با:

$$y_2[n]=\sum_{k=\circ}^{15} a_k H\left(e^{j\pi k/16}\right)e^{k(2\pi/16)}$$
$$=\circ-\left(j/2\right)\left(e^{j\pi/4}\right)e^{j(2\pi/16)(3)n}+\left(j/2\right)e^{-j(\pi/4)}e^{j(2\pi/16)(13)n}$$
$$=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)n+\pi/4$$

(ج) سیگنال $x_3[n]$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x_3=\left[\left(1/2\right)^n u[n]\right]*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]=g[m]*r[n]$$

که $g[n]=\left(1/2\right)^n u[n]$ و $r[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$. بنابراین $y_3[n]$ را می توانیم با عبور سیگنال از طریق فیلتری با پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ بدست آوریم. سپس نتیجه را با $g[n]$ کانوال کنیم.

سیگنال $r[n]$ با پریود ٤، متناوب است و ضریب سری فوریه اش عبارتند از:

$$a_k=1/14 \qquad for \quad all \quad k$$

خروجی $q[n]$ که با عبور دادن سیگنال $r[n]$ از طریق فیلتری با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ بدست می آید عبارتست از:

$$q[n]=\sum^{3} k=\circ a_k H\left(e^{j2k\pi/4}\right)e^{k(2\pi/4)}$$

$$=\left(1/4\right)\int H\left(e^{j\circ}\right)e^{j\circ}+H\left(e^{j\pi/2}\right)e^{j(\pi/2)}+H\left(e^{j\pi}\right)e^{j\pi}$$

$$+H\left(e^{j3(\pi/2)}\right)e^{j3\pi/2}\Big)=\circ$$

بنابراین خروجی نهایی $y_3[n]=q[n]\times q[n]=\circ$

بناراین خروجی نهایی $y_3[n]=q[n]*q[n]=\circ$

۳,۱۷) سه سیستم گسسته در زمان S_1، S_2، S_3 در نظر بگیر ید که پاسخشان به ورودی نمایی مختلط e^{j5t} به صورت زیرست.

$$S_1: e^{j5t}\to te^{j5t}$$
$$S_2: e^{j5t}\to te^{j5(t-1)}$$
$$S_3: e^{j5t}\to \cos(5t)$$

در مورد هر سیستم بگویی آیا با اطلاعات داده شده می توان نتیجه گرفت که سیستم مطمئناً LTI نیست.

حل:

(الف) بدلیل اینکه نمایی هایی مختلط توابع اصلی سیستم های LTI هستند. خروجی $x_1(t)=e^{j5t}$ بایستی یک خروجی شامل Ae^{j5t} بوجود آود که A ثابتی مختلط است. امّا، واضح است که در این مورد خروجی شامل جمله ی مذکور نمی باشد. بنابراین سیستم s_1، مشخصاً LTI نیست.

(ب) سیستم می تواند LTI باشد، زیرا خاصیت تابع اصلی سیستمهای LTI را برآورده می سازد.

(پ) (الف) در این مورد، خروجی شامل $y_3(t)=\frac{1}{2}e^{j5t}+\frac{1}{2}e^{j5t}$ می باشد. واضح است که خروجی شامل یک نمایی مختلط با فرکانس ۵- است که در ورودی $x_3(t)$ حضور ندارد. می دانیم که سیستمهای LTI هرگز نمی تواند نمایی مختطی با فرکانس ۵- بدون وجود داشتن نمایی مختلطی با همان فرکانس ورودی، تولید کنند. بدلیل اینکه این مورد در مسئله صحیح نیست، سیستم مشخصاً LTI نمی باشد.

۳,۱۸) سه سیستم گسسته در زمان S_1، S_2، و S_3 در نظر بگیرید که پاسخشان به ورودی نمایی مختلط $e^{jn\pi/2}$ به صورت زیرست

$$S_1 : e^{\pi nt/2} \to e^{j\pi n/2}u[n]$$
$$S_2 : e^{j\pi n/2} \to e^{j3\pi n/2}$$
$$S_3 : e^{j\pi n/2} \to 2e^{j5\pi n/2}$$

در مورد هر سیستم بگویید آیا با اطلاعات داده شده می توان نتیجه گرفت که سیستم مطمئناً LTI نیست.

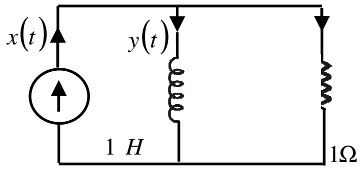
حل:

(الف) با استفاده از بحثی مشابه آن در قسمت (الف) مسأله قبلی مطرح شد نتیجه می گیریم که s_1 با توجه به تعریف LTI نیست.

(ب) خروجی در این مورد برابر است با $y_2[n]=e^{j(3\pi/2)n}=e^{-j(\pi/2)n}$. واضح است که تابع اصلی را نقض می کند. بنابراین s_2 طبق تعریف LTI نیست.

(ج) در این مورد خروجی برابر است با $y_3[n]=2e^{j(5\pi/2)n}=2e^{j(\pi/2)n}$. که این خاصیت LTI بودن تابع اصلی را نقض نمی کند. بنابراین s_3 می توان یک سیستم LTI تلقی شود.

۳,۱۹) سیستم LTI علّی ساخته شده با مدار RL شکل م ۳-۱۹ را در نظر بگیرید. یک منبع جریان سیگنال ورودی $x(t)$ در اعمال می کند و خروجی سیستم جریان $y(t)$ القاگرست.



شکل م ۳-۱۹

(الف) معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

(ب) پاسخ فرکانسی این سیستم را با در نظر گرفتن خروجی به ازای ورودی $x(t)=e^{j\omega t}$ بـه دسـت آورید.

(ج) یک سیستم LTI علّی به صورت مدار RLC شکل م ۳-۲۰ ساخته شده است. ورودی مدار منبع ولتاژ $x(t)$ به دست آورید.

(ج) خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t)=\sin(t)$ بیابید.

حل:

(الف) ولتاژ در طول هادی = $\ell\dfrac{dy(t)}{dt}$.

جریان ولتاژ در طول هادی = $\dfrac{\ell}{R}\dfrac{dy(t)}{dt}$.

جریان ورودی $x(t)$ = جریان در مقاومت + جریان در هادی. بنابراین:

$$x(t)=\frac{\ell}{R}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

با جایگذاری مقادیر L و R داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

(ب) با استفاده از روش ذکر شده در ۳،۱۰،۱، می دانیم که زمانیکه ورودی سیستم $e^{i\omega t}$ باشد. خروجی این سیستم برابر با $H(j\omega)e^{j\omega t}$ خواهـد بـود بـا جایگـذاری در معادلـه دیفرانـسیل قـسمت (الـف) خواهیم داشت:

$$j\omega\, H(j\omega)e^{j\omega t}+H(j\omega t)e^{j\omega t}=e^{j\omega t}$$

بنابراین

$$j(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$

(ج) سیگنال $x(t)$، سیگنالی متناوب با پریود 2π می باشد. به دلیل اینکه $x(t)$ بـه صـورت زیـر قابـل نوشتن می باشد:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/2\pi)t}$$

ضرب غیر صفر سری فوریه برابر است با:

$$a = a_{-1} = \frac{1}{2}^{\bullet}$$

بااستفاده از نتایج بدست آمده در قسمت ۳٫۸ (معادله (۳٫۱۲٤) را ببینید)، داریم:

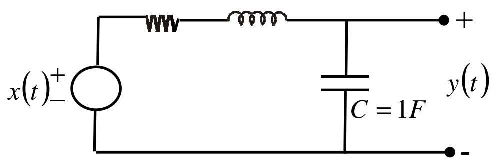
$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 H(j) e^{jt} + a_{-1} H(-j) e^{-jt} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j} e^{jt} + \frac{1}{1-j} e^{-jt} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(e^{-j\pi/4} + e^{j\pi/4} e^{-jt} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cos\left(t - \pi/4\right) \end{aligned}$$

۳٫۲۰) یک سیستم LTI علّی به صورت مدار RLC شکل م ۳–۲۰ ساخته شـده اسـت. ورودی مـدار منبع ولتاژ $x(t)$ است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیتم در نظر بگیرید.

(الف) معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

(ب) پاسخ فرکانسی این سیستم را با در نظر گرفتن خروجی به ازای ورودی $x(t) = e^{j\omega t}$ بـه دسـت آورید.

(ج) خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t) = \sin(t)$ بیابید.



شکل م ۳–۲۰

حل:

(الف) جریان جاری شده در خازن = $e\dfrac{dy(t)}{dt}$

ولتاژ در خازن = $Rc\dfrac{dy(t)}{dt}$.

ولتاژ در هادی = $Lc\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$.

$x(t)$ ولتاژ ورودی = ولتاژ در طول مقاومت + ولتاژ هادی + ولتاژ در خازن.

پس:

$$x(t)=Lc\frac{d^2y(t)}{dt^2}+Rc\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

با جایگذاری مقادیر L و R و C داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

(ب) حال از روش مشابهی که برای بار اول در قسمت (ب) مسأله قبلی استفاده می کنیم. اگر فرض کنیم که ورودی به صورت $e^{j\omega t}$ باشد، در اینصورت خروجی به صورت $H(j\omega)e^{j\omega t}$ خواهد بود. با جایگذاری در معادله در معادله دیفرانسیل فوق و ساده سازی عبارت زیر را بدست خواهیم آورد:

$$H(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2+j\omega+1}$$

(ج) سیگنال $x(t)$، سیگنالی متناوب با پریود 2π می باشد. چون $x(t)$ می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$x(t)=\frac{1}{2j}e^{j(2\pi/2\pi)t}-\frac{1}{2j}e^{-j(2\pi/2\pi)t}$$

ضرایب غیرصفر $x(t)$، عبارتند از:

$$a_1=a_{-1}^{*}=\frac{1}{2j}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده در ۳,۸ (معادله (۳,۱۲٤) را ببینید) داریم:

$$y(t)=a_1H(j)e^{jt}-a_{-1}H(-j)e^{-jt}$$
$$=\left(\frac{1}{j}e^{jt}-\frac{1}{-j}e^{-jt}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)$$
$$=-\cos(t)$$

۳,۲۱) سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$ حقیقی و دارای دوره تناوب پایه $T=8$ است. ضـرائب غیرصفر سری فوریه $x(t)$ عبارت اند از:

$$a_1=a_{-1}^*=j,\ a_5=a_{-5}=2$$

$x(t)$ را به صورت زیر بیان کنید.

$$x(t)=\sum_{k=\circ}^{\infty}A_k\cos\left(w_k^t+\phi_k\right)$$

حل:

با استفاده از ترکیب سری فوریه معادله (۳,۳۸):

$$x\ (t\ )=a_1e^{j\left(2\pi/T\right)t}+a_{-1}e^{-j\left(2\pi/T\right)t}+a_5e^{j5\left(2\pi/T\right)t}+a^{-5}\left(2\pi/T\right)t$$

$$=je^{j\left(2\pi/8\right)t}-je^{-j\left(2\pi/8\right)t}+2e^{j5\left(2\pi/8\right)t}+2e^{-j5\left(2\pi/8\right)t}$$

$$=-2\sin\left(\pi/4\,t\right)+4\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right)$$

$$=-2\cos\left(\pi/4\,t=\pi/2\right)+4\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right)$$

۳,۲۲) ضرائب سری فوریه سیگنالهای زیر را بیابید.

(الف) $x(t)$ شکلهای م ۳-۲۲ (الف) تا (و)

ب) $x(t)$ دوره تناوب ۲ متناوب است و

در $-1<t<1$ ، $x(t)=e^{-t}$

ج) $x(t)$ متناوب با دوره تناوب ٤ است و

$$x(t)=\begin{cases}\sin \pi t & \circ \le t \le -2\\ \circ, & 2<t\le 4\end{cases}$$

حل:

الف) (i) $T=1$ و $a_\circ=\circ$ و $a_k=\dfrac{j(-1)^k}{k\pi}$ و $k\neq\circ$

(ii) در اینجا:

$$x(t)=\begin{cases}t+2 & -2<t<-1\\ 1 & -1t<1\\ 2-t & 1<t<2\end{cases}$$

$T=6$ و $a_\circ=1/2$ و

$$a_k=\begin{cases}\circ & k \text{ زوج}\\ \dfrac{8}{\pi^2k^2}\sin\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi k}{6}\right) & k \text{ فرد}\end{cases}$$

(iii) $T=3$ و $a_\circ=1$ و

$$a_k=\frac{3j}{2\pi^2k^2}\left[e^{j2k\pi/3}Sin\left(k\pi 2/3\right)+2e^{jk\pi/3}\sin\left(k\pi/3\right)\right)\quad k\neq\circ$$

(iv) $a_k=1/2-(-1)^k, k\neq\circ$, $T=2$, $a_\circ=-1/2$

(V) $t=6$ و $\omega_\circ=\pi/3$ و

$$a_k=\frac{\cos\left(2k\pi/3\right)-\cos\left(k\pi/3\right)}{jk\pi/3}$$

توجه کنید که $a_\circ=\circ$ و a_k زوج$=\circ$

(vi) $a_\circ=3/4$ و $\omega_\circ=\pi/2$ و $T=4$

$$a_k = \frac{e^{-jk\pi/2}\sin\left(k\pi/2\right) + e^{-jk\pi/4}\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi}\forall k$$

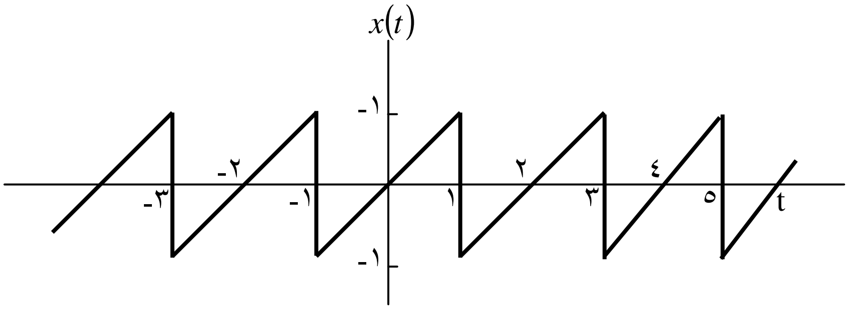
ب) $T=2$ و برای تمامی k ها $a_k = \frac{(-1)^k}{2(1+jk\pi)}\left[e-e^{-1}\right]$

ج) $T=3$ و $\omega_\circ = 2\pi/3$ و $a_\circ = 1$ و

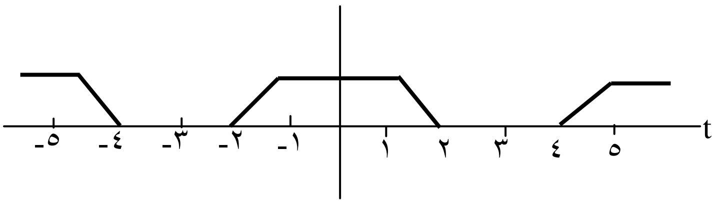
$$a_k = \frac{2e^{-j\pi k/3}}{\pi k}\sin\left(2k\pi/3\right) + \frac{e^{-j\pi k}}{\pi k}\sin(\pi k)$$

۳٫۲۳) در هر یک از موارد زیر ضرائب سری فوریه یک سیگنال پیوسته در زمـان متنـاوب دارای دوره تناوب ٤ بیان شده است. سیگنال $x(t)$ را در هر مورد بیابید.

الف) $a_k = \begin{cases} \circ, & k=\circ \\ (j)^k \dfrac{\sin k\pi/4}{k\pi} & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$

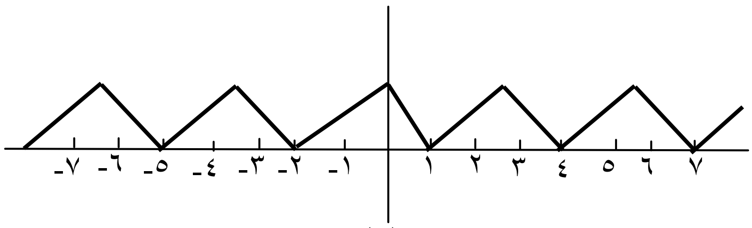


(الف)



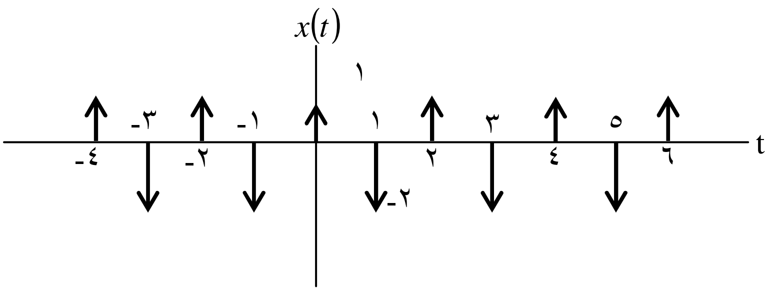
ج

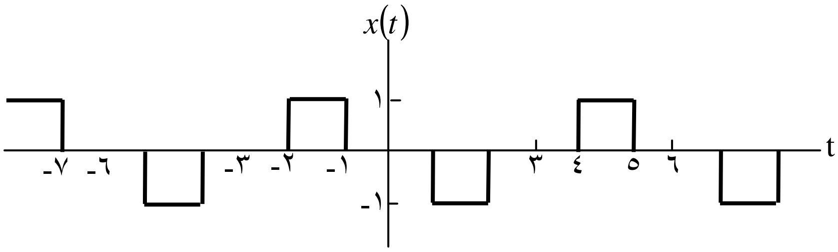
(ب)



(ج)

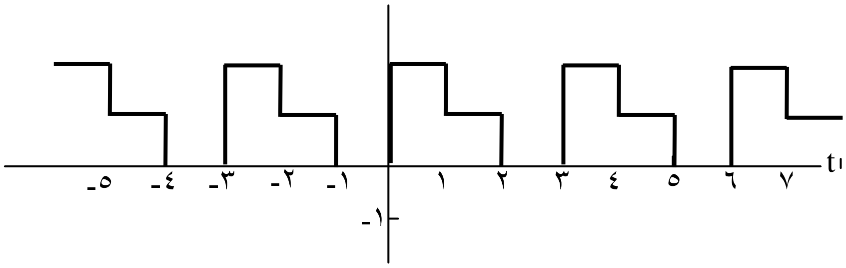
شكل م ٣–٢٢ الف، ب و ج





(شكل م ٣–٢٢ د، هـ و)

$x(t)$



(ب)
$$a_k = (-1)^k \frac{\sin k\pi/8}{2k\pi}$$

(ج)
$$a_k = \begin{cases} jk, & |k| < 3 \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(د)
$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{زوج} \quad k \\ 2, & \text{فرد} \quad k \end{cases}$$

حل:

(الف) ابتدا فرض کنیم $y(t)$ سیگنالی با ضرایب FS (سری فوریه) به صورت زیر باشد:

$$b_k = \frac{\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi}$$

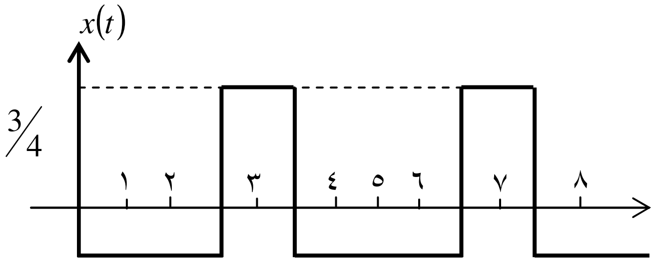
با توجه به مثال ۳۵، نتیجه می گیری که $y(t)$ باید سیگنالی موج مربعی متناوب باشد که در یک دوره تناوب برابر است با:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ \circ & 1/2 < |t| < 2 \end{cases}$$

حال، توجه کنید که $b_\circ = 1/4$. فرض کنید سیگنال دیگری به صورت $x(t) = -1/4$ تعریف کنیم که ضریب سری فوریه غیر صفر آن برابر $c_\circ = -1/4$ باشد. سیگنال $p(t)$ برابر است با $p(t) = y(t) + x(t)$ که ضرایب سری فوریه آن به صورت زیر می باشد:

$$d_k = a_k + c_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \dfrac{\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi} & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

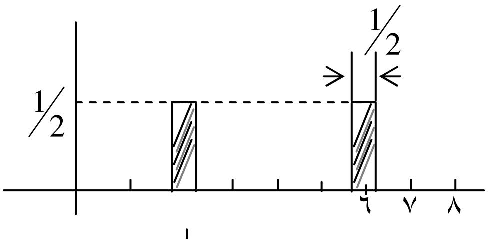
حال توجه کنید کـه $a_k = d_k e^{j(\pi/2)k}$. بنـابراین سـیگنال $x(t) = p(t+1)$ در شـکل (الـف) S.۲۳ نمایش داده شده است.



(b) ابتدا فرض نمائید که ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t)$ به صورت زیر می باشد:

$$b_k = \begin{cases} 1/2 & |t| < 1/4 \\ 0 & 1/4 < |t| < 2 \end{cases}$$

با توجه فرمائید که $a_k = b_k e^{j\pi k}$. بنابراین سیگنال $x(t) = y(t+2)$ که در شکل (ب) ۵۳,۲۳ نـشان داه شده است.



(ج) تنها ضریب های غیرصفری سری فوریه عبارتند از: $a = a_{-1}^* = j$ و $a_2 = a_{-2}^* = 2j$ با استفاده از معادله ترکیب

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{j(2\pi/T)t} + a_{-1} e^{-j(2\pi/T)t} + a_{-2} e^{-2j(2\pi/T)t} \\ &= je^{j(2\pi/4)t} - je^{-j(-2\pi/4)t} - 2je^{-j2(2\pi/4)t} \\ &= -2\sin\left(\pi/2\, t\right) - 4\sin(\pi t) \end{aligned}$$

(د) ضرایب FS (سری فوریه) a_k را می توانیم به صورت مجموع دو ضریب سری فوری b_k و c_k، نشان دهیم، در اینصورت:

$$b_k = 1; \quad for \quad all \quad k$$

$$e_k = \begin{cases} 1 & \text{فرد } k \\ \circ & \text{زوج } k \end{cases}$$

ضرایب سری فوری b_k متناظر با سیگنال:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-4k)$$

ضرایب FS، C_k متناظر با سیگنال:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j(\pi/2)t} \delta(t-2k)$$

بنابراین:

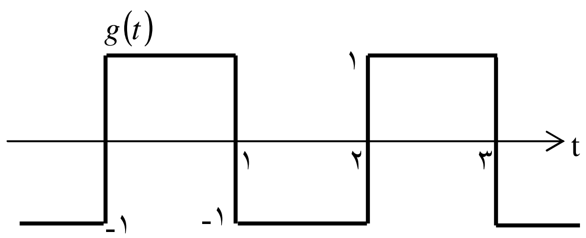
$$x(t) = y(t) + p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{(\pi/2j)t} \delta(t-2k)$$

(۳,۲٤

(الف) داریم:

$$a_\circ = \tfrac{1}{2}\int_\circ^1 t dt + \tfrac{1}{2}\int_1^2 (2-t) dt = \tfrac{1}{2}$$

(ب) سیگنال $g(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ در شکل S.۳,۲٤ نمایش داده شده اند:



شکل S۳,۲٤

ضریب FS و b_k ی $g(t)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$b_\circ = \frac{1}{2}\int_\circ^1 dt - \frac{1}{2}\int_1^2 dt = \circ$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_\circ^1 e^{-j\pi kt}dt - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{-j\pi kt}dt$$

$$= \frac{1}{j\pi k}\left(1-e^{-j\pi k}\right)$$

(ج) توجه بفرمائید که:

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} b_k = jk\pi ak$$

بنابراین:

$$a_k = \frac{1}{jk\pi}b_k = \frac{-1}{\pi^2 k^2}\left(1-e^{-j\pi k}\right)$$

۳,۲۵) سه سیگنال پیوسته در زمان دارای دوره تناوب پایه $T = \frac{1}{2}$ هستند.

$$x(t) = \cos(4\pi t)$$
$$y(t) = \sin(4\pi t)$$
$$z(t) = x(t)y(t)$$

(الف) ضرائب سری فوریه $x(t)$ را بیابید.

(ب) ضرائب سری فوریه $y(t)$ را بیابید.

(ج) با استفاده از نتایج بندهای (الف) و (ب) و خاصیت ضرب سری فوریه پیوسته در زمان، ضـرائب سری فوریه پیوسته در زمان، ضرائب سوری فوریه $z(t) = x(t)y(t)$ را بیابید.

(د) ضرائب سری فوریه $z(t)$ را مستقیماً با بسط $z(t)$ به صورت مثلثاتی به دست آورید و نتایج را با بند (ج) مقایسه کنید.

حل:

(الف) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتست از $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$.

(ب) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتست از $b_1 = b_{-1}^* = \frac{1}{2}j$.

(ج) از خاصیت ضرب؛ می دانیم که:

$$z(t)=x(t)y(t)\xleftrightarrow{FS}c_k=\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty}a_\ell b_{k-\ell}$$

بنابراین:

$$x_k=a_k*b_k \circ$$
$$=\frac{1}{4j}\delta[k-z]-\frac{1}{4}\delta[k+2]$$

این موضوع بیان می کند که ضرب غیر صفر سری فوریه $z(t)$ برابر است با $c_2=c_{-2}^*=\left(\frac{1}{4j}\right)$

(د) داریم: $x(t)=\sin(4t)\cos(4t)=\frac{1}{2}\sin(8t)$

بنابراین، ضرای غیر صفر فوریه $z(t)$ عبارتست از: $c_2=c-z=\left(\frac{1}{4j}\right)$.

۳,۲٦) $x(t)$ یک سیگنال متناوب با ضرائب سری فوریه زیرست

$$a_k=\begin{cases}2, & k=\circ \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

با استفادهاز خواص سری فوریه سئوالهای زیر را پاسخ دهید.

(الف) آیا $x(t)$ حقیقی است؟

(ب) آیا $x(t)$ زوج است؟

(ج) آیا $dx(t)/dt$ زوج است؟

حل:

(الف) اگر $x(t)$ حقیقی باشد، آنگاه $x(t)=x^*(t)$ که نشان می دهد برای $x(t)$ حقیقی $a_k=a_{-k}^*$ بدلیل اینکه این مورد در این مسأله درست نیست، $x(t)$ سیگنالی حقیقی نیست.

(ب) اگر $x(t)$ زوج باشد، در اینصورت $x(t)=x(-y)$ و $a_k=a_{-k}$ چون این بیان این مورد صحیح می باشد، فلذا $x(t)$، زوج است.

ج) داریم:

$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{FS} b_k = jk\frac{2\pi}{k_\circ}a_k$$

بنابراین

$$b_k = \begin{cases} \circ & k=\circ \\ -k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|}\left(\tfrac{2\pi}{T_\circ}\right) & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

بدلیل اینکه $x(t)$ زوج نیست در نتیجه $g(t)$ نیز زوج نخواهد بود.

....

۳,۲۷) سیگنال متناوب گسسته در زمان $x[n]$ حقیقی و دارای تناوب پایه $N=5$ است. ضرائب غیر صفر سری فوریه $x[n]$ عبارت اند از:

$$a_\circ = 2,\ a_{-2}^* = 2e^{j\pi/6},\ a_4 = a_{-4}^* = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$x[n]$ را به صورت زیر بیان کنید.

$$x[n] = A_\circ + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k)$$

حل:

با استفاده از ترکیب تبدل فوریه معادله (۳,۳۸) داریم:

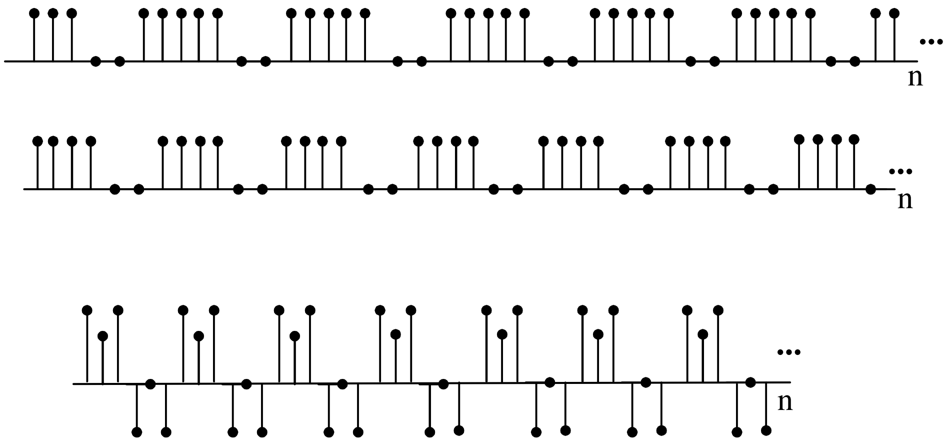
$$\begin{aligned} x[n] &= a_\circ + a_2\ e^{j2(2\pi/N)n} + a_{-2}e^{-j2(2\pi/N)n} + a_4e^{j4(2\pi/N)n} + a_{-4}e^{-j4(2\pi/N)n} \\ &= 2 + 2e^{j\pi/6}e^{j\left(\frac{4\pi}{5}\right)n} + 2e^{-j\pi/6}e^{-j(4\pi/5)n} + e^{j\pi/3}e^{j(8\pi/5)n} + e^{-j\pi/3}e^{-j\left(\frac{8\pi}{5}\right)n} \\ &= 2 + 4\cos\left[\left(4\pi n/5 + \pi/6\right)\right] + 2\cos\left[\left(8\pi n/5\right) + \pi/3\right] \\ &= 2 + 4\sin\left[\left(\frac{4\pi n}{5}\right) + 2\pi/3\right] + 2\sin\left[\left(8\pi n/5\right) + 5\pi/6\right] \end{aligned}$$

(پانوشت مترجم: توجه شود که تساوی در آخر کلیه عبارتهای شامل cos به عبارتهـای شـامل sin بـا توجه به فرمول $\sin\omega t = \cos - 90^\circ$ و یا $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + 90^\circ)$، تبدیل شده اند.)

....

۳,۲۸) ضرائب سری فوریه هر یک از سیگنالهای متناوب گسسته در زمان زیر را حساب کنید. اندازه و فاز ضرائب a_k هر سری را رسم کنید.

(الف) هر یک $x[n]$ های شکل م ۳-۲۸ الف تا ج



شکل م ۲۸-۳

(ب) $x[n]=\sin(2\pi n/3)\cos(\pi n/2)$

(ج) $x[n]$ با دوره تناوب ٤ و

در $\circ \le n \le 3$

(د) $x[n]$ متناوب با دوره تناوب ۱۲ و

در $\circ \le n \le 3$ ، $x[n]=1-\sin\frac{\pi n}{4}$

(د) $x[n]$ متناوب با دوره تناوب ۱۲ و

در $\circ \le n \le 11$ ، $x[n]=1-\sin\frac{\pi n}{4}$

حل:

(الف) $N=7$

$$a_k=\frac{1}{7}\frac{e^{-4\pi kj/7}\sin\left(5\pi k/7\right)}{\sin\left(\pi k/7\right)}$$

ب) $N=6$ a_k در یک دوره تناوب $(\circ \le k \le 5)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$a_k = \frac{1}{6} e^{-j\pi k/2} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)}{\sin\left(\pi k/6\right)} 1 \le k \le 5 \quad \text{و} \quad a_\circ = 4/6$$

ج) $N=6;$ $\quad a_k = 1 + 4\cos\left(\pi k/3\right) - 2\cos 2\pi k/3$

د) $N=12$، a_k د ریک دوره تناوب $(\circ \le k \le 11)$ به صورت زیر بدست می آید:

برای سایر نقاط $\quad a_1 = \frac{1}{4j} = a_{11}^* \;;\; a_5 = -\frac{1}{4j} = a_7^* \;;\; a_k = \circ$

یعنی:

$$\begin{cases} a_1 = a_{11}^* = \frac{1}{4j} \\ a_5 = a_7^* = -\frac{1}{4j} \\ a_k = \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

هـ) $N=4$ $\quad a_k = 1 + 2(-1)^k\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(k\pi/2\right)$

و) $N=12$:

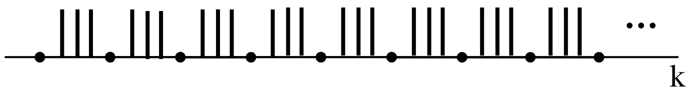
$$a_k = 1 + \left(1 - 1/\sqrt{2}\right)2\cos\left(\pi k/6\right) + 2\left(1 - 1/\sqrt{2}\right)\cos\left(\pi k/2\right)$$
$$+2\left(1 + 1/\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{5\pi k}{6}\right) + 2(-1)^k + 2\cos\left(2\pi k/3\right)$$

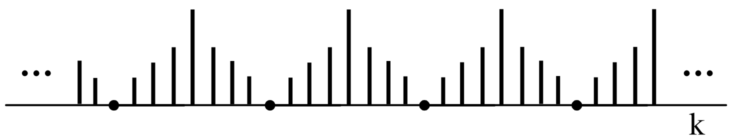
۳,۲۹) در هر مورد ضرائب سری فوریه یک سیگال دارای دوره تناوب پایه ۸ را مـشخص کـرده ایـم . سیگنال $x[n]$ را بیابید.

(الف) $\quad a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$

(ب) $a_k = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{k\pi}{3}\right) & \circ \le k \le 6 \\ \circ, & k = 7 \end{cases}$

(ج) a_k شکل م ۳-۲۹ (الف) (د) a_k شکل م ۳-۲۹ (ب)





حل:

(الف) $N=8$ در یک دوره ی تناوب $(\circ \le n \le 7)$ داریم:

$$x[n]=4\delta[n-1]+4\delta[n-7]+4j\delta[n-3]-4j\delta[n-5]$$

(ب) $N=8$ در یک دوره تناوب $(\circ \le n \le 7)$:

$$x[n]=\frac{1}{2j}\left[\frac{-e^{\frac{5\pi n}{4}}\sin\left\{\dfrac{n\pi}{4}+\pi/3\right\}}{\sin\left[1/2\left(\dfrac{n\pi}{4}+\pi/3\right)\right]}+\frac{e^{j\frac{\pi n}{4}}\sin\left\{\dfrac{n\pi}{4}-\pi/3\right\}}{\sin\left\{1/2\left(\dfrac{n\pi}{4}-\pi/3\right)\right\}}\right]$$

(ج) $N=8$ در یک دوره تناوب $(\circ \le n \le 7)$:

$$x[n]=1+(-1)^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+2\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

(هـ) $N=8$، در یک دوره تناوب $(\circ \le n \le 7)$:

$$x[n]=2+2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+1/2\cos(3n\pi)$$

۳,۳۰) سه یگسنال گسسته در زمان زیر دارای دوره تناوب پایه ٦ هستند.

$$x[n]=1+\cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) \qquad x[n]=\sin\left(\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right) \qquad z[n]=x[n]y[n]$$

(الف) ضرائب سریه فوریه $x[n]$ را بیابید.
(ب) ضرائب سری فوریه $y[n]$ را بیابید.
(ج) با استفادهاز نتایج بندهای (الف) و (ب) و خاصیت ضرب سری فوریه گسسته در زمـان، ضـرائب سری فوریه $z[n]=x[n]y[n]$ را بیابید.
(د) مستقیماً ضرائب سری فوریه $z[n]$ را حساب کرده، نتیجه را با بند (ج) مقایسه کنید.

حل:

(الف) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتند از: $a_\circ = 1 \;,\; \propto_1 = \propto_{-1} = \frac{1}{2}$

(ب) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتند از: $b_1 = b_{-1}^* = \dfrac{e^{-j\pi/4}}{2}$

(پ) با استفاده از خاصیت ضرب: داریم:

$$z[n] = x[y]y[n] \xleftrightarrow{FS} c_k = \sum_{\ell=-2}^{2} a_\ell b_{k-\ell}$$

که نشان می دهد که ضرایب غیر صفر سری فوری $z[n]$ برابر است با:

$$\begin{cases} c_\circ = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ c_1 = c_{-1}^* = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} \\ c_2 = c_{-2}^* = \frac{1}{4} e^{-j\pi/4} \end{cases}$$

(ج) داریم:

$$z[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right)$$
$$= in\left(\frac{2\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{4\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

که بیان می کند، ضرایب غیر صفر سری فوریه $z[n]$ برابراست با:

$$c_\circ = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{و} \quad c_1 = c_{-1}^* = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} \quad \text{و} \quad c_2 = \underline{c}_2^* = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}$$

۳،۳۱) فرض کنید

$$x[n]=\begin{cases}1, & \circ\le n\le 7\\ \circ, & 8\le n\le 9\end{cases}$$

یک سیگنال متناوب با $N=10$ و ضرائب سری فوریه a_k است. همچنین فرض کنید که

$$g[n]=x[n]-x[n-1]$$

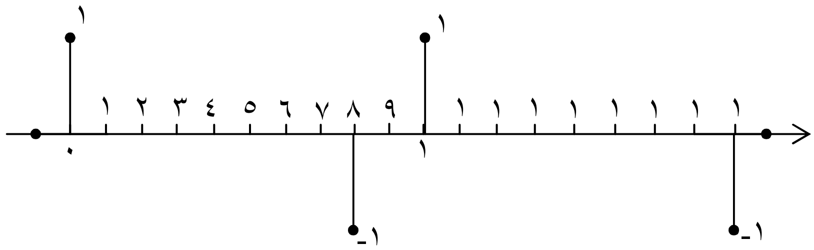
(الف) نشان دهید که زمان تناوب پایه $g[n]$ برابر ۱۰ است.

(ب) ضرائب سری فوریه $g[n]$ را بیابید.

(ج) با استفاده از ضرائب سری فوریه $g[n]$ خاصیت تفاضـل اول جـدول ۳-۲، a_k را بـرای $k\neq\circ$ تعیین کنید.

حل:

(الف) $g[n]$ در شکل S۳,۳۱ نشان داده شده است. بدیهی است که دوره تناوب پایه $g[n]$ برابر ۱۰ است.



شکل (۵۳,۳۱)

(ب) ضرایب سری فوریه $g[n]$ برابر است با $b_k=\left(\frac{1}{10}\left[1-e^{-j\left(2\pi/10\right)8k}\right]\right)$

(ج) بدلیل اینکه $g[n]=x[n]-x[n-1]$. ضایب سری فوریه a_k و b_k بایستی توسط فرمولی بهـم مرتبط شوند که در زیر آمده است:

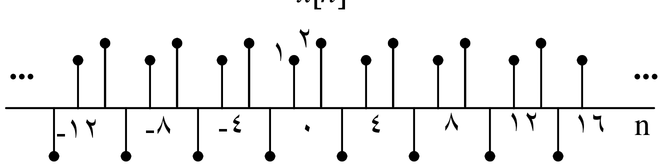
$$b_k=a_k-e^{-j\left(2\pi/10\right)k}a_k$$

بنابراین:

$$a_k = \frac{b_k}{1-e^{-j\left(z\pi/10\right)k}} = \frac{\left(1/10\right)\left(1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}\right)8k}\right)}{1-e^{-j\left(2\pi/10\right)k}}$$

۳٫۳۲) سیگنال $x[n]$ شکل م ۳-۳۲ را در نظر بگیرید. برای این سیگنال متناوب $N=4$ و مـی تـوان آن را به صورت سری فوریه گسسته در زمان زیر بیان کنید.

$$x[n] = \sum_{k=\circ}^{3} a_k e^{jk(2\pi/4)}n \qquad \text{(م ۳-۳۲-۱)}$$



شکل م ۳-۳۲

همانطور که در درس گفته شد یک روش تعیین ضرائب سری فوریه این است که معادله (م ۳-۳۲-۱) را هار معادله چهار مجهولی (به ازای $n=1,2,3$ با مجهولهای $a_\circ, a_2, a_3$) فرض کنیم.

(الف) این چهار معادله را به صورت صریح بنویسید و آنها را به روش حل دستگاههای معادلات حـل کنید. (ابتدا نماییهای مختلط را ساده کنید.)

(ب) جواب خود را با محاسبه مستقیم a_k، با استفادها ز معادله تجزیه سری فوریه امتحان کنید.

$$a_{kl} = \frac{1}{4}\sum_{n=\circ}^{3} x[n] e^{-jk(2\pi/4)}n$$

حل:

(الف) چهارمعادله عبارتند از:

$$a_\circ + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \quad , \quad a_\circ + ja_1 - a_2 - ja_3 = \circ$$
$$a_\circ - a_1 + a_2 - a_3 = 2 \quad , \quad a_\circ - ja_1 - a_2 + ja_3 = -1$$

پس از حل معادلات توسط روش های ماتریسی مثل کرامر بدست می آوریم:

$$a_\circ = 1/2 \ , \ a_1 = -\frac{1+j}{4} \ , \ a_2 = -1 \ , \ a_3 = -\frac{1-j}{4}$$

(ب) با محاسبه مستقیم

$$a_k = 1/4\left[1 + 2e^{-jk\pi} - e^{-jk\pi 3/2}\right]$$

این مشابه پاسخ ما در قسمت (الف) برای $\circ \le k \le 3$ می باشد.

۳،۳۳) یک سیستم LTI پیوسته در زمان با ورودی $x(t)$ با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است.

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

نمایش سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

(الف) $x(t) = \cos 2\pi t$

(ب) $x(t) = \sin 4\pi t + \cos(6\pi t + \pi/4)$

حل:

ابتدا پاسخ فرکانسی سیستم را بدست خواهیم آورد. فرض کنید ورودی $x(t)$ به صورت $e^{j\omega t}$ باشد. با توجه به بحث بخش ۳،۹،۲ می توان گفت پاسخ به این ورودی بایستی به صورت $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ باشد. بنابراین، با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده؛ داریم:

$$H(j\omega)j\omega e^{j\omega t} + 4e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

بنابراین:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4}$$

از معادله (۳،۱۲٤) می دانیم که زمانیکه ورودی $x(t)$ باشد:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_\circ)e^{jk\omega_\circ t}$$

$x(t)$ ضرایب سری فوریه ای a_k و فرکانس پایه ی $\omega_\circ$ و ضرایب غیر صفر فوریه عبارتند از: $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ بنابراین؛ ضرایب غیر صفر سری فوریه $y(t)$ برابر است با $a_k H(jk\omega_\circ)$.

(الف) در این مسأله، $\omega_\circ = 2\pi$ و ضرایب غیر صفر سری فوریه عبارتند از: $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$

بنابراین؛ ضرایب غیر صفر سری فوریه $y(t)$ برابر است با:

$$b_1 = a_1 H(j2\pi) = \frac{1}{2(4+2\pi j)}$$

,

$$b_{-1} = a_{-1} H(-j2\pi) = \frac{1}{???}$$

(ب) در اینجا نیز $\omega_\circ = 2\pi$ و ضرایب سری فوریه غیر صفر عبارتند از:

$$a_2 = a_{-2}^* = \frac{1}{2} j$$

$$a_3 = a_{-3}^* = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}$$

بدین ترتیب، ضریب غیر صفر FS برای $y(t)$ برابر است با:

$$\begin{cases} b_2 = a_2 H(4j\pi) = \dfrac{1}{2j(4+4\pi j)} \\ b_{-2} = a_{-2} H(-4j\pi) = \dfrac{-1}{2j(4-4\pi j)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_3 = a_3 H(j6\pi) = \dfrac{e^{-j\pi/4}}{2(4+6\pi j)} \\ b-3 = a_{-3} H(-j6\pi) = \dfrac{-e^{-j\pi/4}}{2(4-6\pi j)} \end{cases}$$

۳,۳٤) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید:

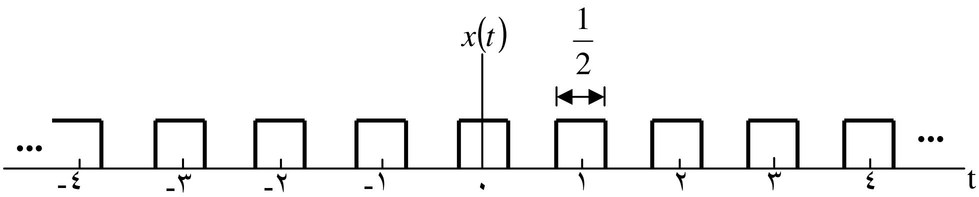
$$h(t) = e^{-4|t|}$$

نمایش سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودیهای زیر در نظر بگیرید.

(الف) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n)$

(ب) $x[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n}\delta(t-n)$

(ج) $x(t)$ شکل م ۳-۳٤



حل:

پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر بدست می آید:

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4(t)}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{4+j^{\omega}}+\frac{1}{4-j^{\omega}}$$

(الف) در اینجا $T=1$ و $\omega_{\circ}=2\pi$ و a_k به ازای تمامی k ها $a_k=1$. ضرایب سری فوریه خروجی برابراست با:

$$b_k=a_kH(jk\omega_{\circ})=\frac{1}{4+j2k\pi}+\frac{1}{4-2jk_n}$$

(ب) در اینجا $\omega_{\circ}=\pi$ و $T=1$ و
$$a_k=\begin{cases}\circ & k \text{ زوج}\\ 1 & k \text{ فرد}\end{cases}$$

بنابراین، ضرایب سری فوریه خروجی برابراست با:

$$b_k=a_kH(jk\omega_{\circ})=\begin{cases}\circ & k \text{ زوج}\\ \dfrac{1}{4+j\pi k}+\dfrac{1}{4-j\pi k} & k \text{ فرد}\end{cases}$$

ج) $T=1$ و $\omega_{\circ}=2\pi$ و
$$a_k=\begin{cases}1/2 & k=\circ\\ \circ & k,k\neq\circ \ \text{زوج}\\ \dfrac{\sin(k\pi)}{k\pi} & k\ \text{فرد}\end{cases}$$

بنابراین، ضرایب سری فوریه خروجی عبارتند از:

$$b_k=a_kH(jk\omega_{\circ})-=\begin{cases}1/4 & k=\circ\\ \circ & k\neq\circ\ ,\ k\ \text{زوج}\\ \dfrac{\sin\left(k\pi/2\right)}{\pi k}\left[\dfrac{1}{4+j2\pi k}-\dfrac{1}{4-2k\pi j}\right] & k\ \text{فرد}\end{cases}$$

۳,۳۵) یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید:

$$H[j\omega]=\begin{cases}1, & |\omega|\geq 250\\ \circ, & \text{درغیر ین صورت}\end{cases}$$

ورودی این سیستم سیگنال $x(t)$ دارای تناوب پایه $T=\pi/7$ و ضرائب سری فوریه a_kاست، و به ازای این ورودی $y(t)=x(t)$ ، به ازای چه مقادیری از k مطمئناً $a_k=\circ$?

حل:

می دانیم، ضرایب سری فوریه $y(t)$ برابراست با $b_k=H(jk\omega_{\circ})a_k$ که $\omega_{\circ}$فرکانس پایه ی $x(t)$ و a_k ضرایب سری فوریه $x(t)$ می باشد.

حال اگر $y(t)$ با $x(t)$ برابر باشد، برای تمامی kها، $a_k=b_k$. توجه کنید به ازاء $|\omega|\geq 250$ $H(j\omega)=\circ$ و می دانیم که برای $|k|\geq 18$ $H(jk\omega_{\circ})=\circ$ (زیرا $\omega_{\circ}=14$. بنابراین به ازاء $|k|\geq 18$، a_k بایستی صفر گردد.

۳,۳٦) یک سیستم LTI علّی گسسته در زمان، با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است.

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$$

ضرائب نمایش سری فوریه خروجی $y[n]$ به ازای ورودیهای زیر را بیابید.

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

نمایش سری فوریه خروجی $y[n]$ را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

(الف) $x[n]=\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$

(ب) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

حل:

ابتدا بایستی پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آوریم. یک ورودی $x[n]$ به صورت $e^{j\omega n}$ فرض کنید. از بحث انجام شده در قسمت ۳,۹، می دانیم که پاسخ به ورودی مذکور برابر است با $y[n]=H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$. بدین ترتیب با جایگاری در معادله ی دیفرانسیل داده شده، خواهیم داشت:

$$H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}e^{j\omega n}H\left(e^{j\omega}\right)=e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

از معادله (۳,۱۳۱) می توان نوشت:

$$y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k H\left(e^{j2k\pi/N}\right)e^{jk(2\pi/N)n}$$

که ورودی برابر $x[n]$ می باشد. فرکانس پایه ی $x[n]$ برابر $\omega_\circ=\frac{2\pi}{N}$ و ضرایب سری فوریه $x[n]$، a_k می باشد. بنابراین ضرایب سری فوریه $y[n]$ برابر است با: $a_k H\left(e^{(2k\pi j/N)}\right)$.

(الف) ازاینجا $N=4$ ضرایب غیر صفر سری فوریه $x[n]$، $a_3=a_{-3}^*=\frac{1}{2j}$ می باشد. بنابراین ضرایب غیر صفر سری فوریه $y[n]$ برابر است با:

$$b_3 = a_1 H\left(e^{3j\pi/4}\right) = \frac{1}{2j\left(1-\frac{1}{4}e^{-3\pi j/4}\right)^*} \quad , \quad b_{-3} = a_{-1} H\left(e^{-3j\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2j\left(1-\frac{1}{4}e^{j3\pi/4}\right)^*}$$

(ب) اینجا $N=8$ و ضرای غیر صفر سری فوریه $x[n]$ برابر است با $a_1 = a_{-1} = 1/2$ و $a_2 = a_{-2} = 1$، بدین ترتیب، ضرایب غیرصفر سری فوریه $y(t)$ عبارتست از:

$$b_1 = a_1 H\left(e^{j\pi/4}\right) = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/4}\right)^*}$$

$$b_{-1} = a_{-1} H\left(e^{-j\pi/4}\right) = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{4}e^{j\pi/4}\right)^*}$$

$$b_2 = a_2 H\left(e^{j\pi/2}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}\right)^*}$$

$$b_{-2} = a_{-2} H\left(e^{-j\pi/2}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{j\pi/2}\right)^*}$$

۱,۳۷) یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

نمایش سری فوریه خروجی $x[n]$ را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

(الف) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4k)$

(ب) $x[n]$ متناوب با $N=6$ و

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm 1 \\ 0, & n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$$

حل:

پاسخ فرکانسی سیستم به راحتی به صورت زیر بدست می آید:

$$h\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{1}{1-2e^{-j\omega}}$$

(الف) ضرایب سری فوریه $x[n]$ برابراست با:

$$a_k=\frac{1}{4}\ ,\quad for\ \ all\ \ k$$

همچنین $N=4$ و ضرایب سری فوریه $y[n]$:

$$b_k=a_kH\left(e^{j2k\pi/N}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\pi/2}}-\frac{1}{1-2e^{-jk\pi/2}}\right]$$

(ب) در این مورد، ضراب سری فوریه $x[n]$:

$$a_k=\frac{1}{6}\left(1+2\cos\left(k\pi/3\right)\right)\quad for\quad all\quad k$$

و نیز $N=6$ بنابراین ضراب سری فوریه $y[n]$ برابر است با:

$$b_k=a_kH\left(e^{j2k\pi/N}\right)=\frac{1}{6}\left(1+2\cos\left(k\,x\pi/3\right)\right)\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\pi/3}}-\frac{1}{1-2e^{-k\pi j/3}}\right]$$

۳,۳۸) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر

$$h[n]=\begin{cases}1, & \circ\le n\le 2\\ -1 & -2\le n\le -1\\ \circ, & \text{درغیر این صورت}\end{cases}$$

دارای ورودی زیرست

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$$

ضرائب سری فوریه خروجی $y[n]$ را بیابید.

حل:

پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر محاسبه می شود:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=-e^{2j\omega}-e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}$$

برای $x[n]$، $N=4$ و $\omega_\circ=\pi/2$. ضرایب FS برای ورودی $x[n]$ برابر است با:

$$a_k=1/4 \quad for \quad all \quad n$$

و ضرایب FS برای خروجی عبارتست از:

$$b_k a_k H\left(e^{jk\omega_\circ}\right)=1/4\left(1-e^{jk\pi/2}+e^{-jk\pi/2}\right)$$

۳,۳۹) پاسخ فرکانسی سیستم LTI گسسته در زمان s عبارت است از

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\pi \\ \circ, & \dfrac{\pi}{8}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

نشان دهید که اگر ورودی $x[n]$ این سیستم دارای تناوب $N=3$ باشد، خروجی $y[n]$ تنها یک ضریب سری فوریه غیرصفر دارد.

حل:

فرض کنیم ضرایب FS ورودی a_k باشد، ضرایب سری فوریه خروجی b_k برابر است با:

$$b_k=a_k H\left(e^{jk\omega_\circ}\right)$$

که $\omega_\circ=2\pi/3$ توجه داشته باشید که در بازه $\circ\le k\le 2$، برای $k=1,2$، $H\left(e^{jk\omega_\circ}\right)=$ بنابراین تنها $b_\circ$ ضریب غیر صفر سری فوریه $y[n]$ در بازه ی $\circ\le k\le 2$ می باشد.

۳,٤۰) $x(t)$ را یک سیگنال متناوب با تناوب پایه T و ضرائب سری فوریه a_k فرض کنید. ضرائب سری فوریه سیگنالهای زیر را بر حسب a_k بیان کنید.

(الف) $x(t-t_\circ)+x(t+t_\circ)$

(ب) $\mathcal{E}\{x(t)\}$

(ج) $\Re e[x(t)]$

(د) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

(هـ) $(3t-1)$ [برای این حالت ابتدا دوره تناوب $(3t-1)$ را بیابید.]

حل:

فرض کنیم a_k ضرایب سری فوریه $a(t)$ باشد،

(الف) $x(t-t_\circ)$ نیز با پریود T، متناوب است. ضرای سری فوریه ی b_k برای $x(t-t_\circ)$ برابر است با:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t-t_\circ)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$
$$= \frac{e^{-jk(2\pi/T)t_\circ}}{T}\int_{\langle T\rangle} x(\tau)e^{-jk(2\pi/T)\tau}d\tau$$
$$= e^{-jk(2\tau/T)t_\circ}a_k$$

به طور مشابه، ضرای سری فوریه $x(t+t_\circ)$ عبارتست از:

$$c_k = e^{jk(2\pi/T)t}a_k$$

و در نهایت ضراب سری فوریه $x(t-t_\circ)+x(t+t_\circ)$ برابر است با:

$$d_k = b_k + c_k = e^{-jk(2\pi/T)}ak + e^{jk(2\pi/T)t_\circ}ak$$
$$= 2\cos\left(k\pi 2^{t_\circ}/T\right)a_k$$

(ب) توجه کنید $\varepsilon r\{x(t)\} = 1/2\{x(t)+x(-t)\}$. ضرایب FS برای $x(-t)$ عبارتست از:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(-t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(\tau)e^{jk(2\pi/T)\tau}d\tau$$
$$= a_{-k}$$

بنابراین ضرایب برای $\varepsilon r\{x(t)\}$ برابر است با:

$$c_k = \frac{a_k+b_k}{2} = \frac{a_k+a-k}{2}$$

(ج) توجه داشته باشید که $\mathrm{Re}\{x(t)\} = x(t)+x^*(t)/2$، ضرایب FS برای $x^*(t)$ برابراست با:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x^*(t)e^{-jk(z\pi/T)t}dt$$

اگر از دو طرف معادله مزدوج بگیریم، داریم:

$$b_k^* = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{jk\left(2\pi/T\right)}dt = \propto_{-k}$$

بنابراین، ضرایب سری فوریه $\mathrm{Re}\{x(t)\}$ برابر است با:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{a_k + a_{-k}^*}{2}$$

(د) از ترکیب سری فوریه معادله داریم:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\left(2\pi/T\right)kt}$$

اگر از دو طرف معادله برحسب t دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -k^2\frac{4\pi^2}{T^2}a_k e^{j\left(2\pi/T\right)kt}$$

با بازرسی و دقت در معادله فوق خواهیم دید که ضرایب سری فوریه $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ عبارتند از $k\frac{4\pi^2}{T^2}$.

(هـ) پریود $x(3t)$، یک سوم برابر $x(t)$ می باشد. بنابراین سیگنال $x(3t-1)$ با پریـود $T/3$ متنـاوب است.

ضرایب سری فوریه $x(3t)$. نیز همچنان a_k می باشد. با استفاده از تحلیل قسمت (الف)، می دانیم کـه ضرایب سری فریه $x(3t-1)$، $a_k e^{-jk\left(6\pi/T\right)}$ می باشد.

۳,٤۱) اطلاعات زیر در مورد یک سیگنال پیوسته در زمان، با دوره تنـاوب ۳ و ضـرائب سـری فوریـه a_k است.

۱. $a_k = a_{k+2}$

۲. $a_k = a_{-k}$

۳. $\int_{-0/5}^{0/5} x(t)dt = 1$

٤. $\int_{0/5}^{1/5} x(t)dt = 2$

$x(t)$ را بیابید.

حل:

چون $a_k = a_{-k}$، باید $x(t) = x(-t)$ همچنین توجه کنید که $a_k = a_{k+2}$، پس باید:

$$x(t) = x(t)e^{-j\left(4\pi/3\right)t}\ .$$

همچنین توجه کنید که $a_k = a_{k+2}$، پس باید:

$$x(t) = x(t)e^{-j\left(4\pi/3\right)t}$$

که بیان می کند، $x(t)$ برای $t = \circ\ , \pm 1.5, 3, \pm 4.5, \ldots$ مقدار غیر صفر دارد.

چون $\int_{-0.5}^{0.5} x(t)dt = 1$، می توان نتیجه گرفت که برای $0.5 \le t \le 0.5$، $x(t) = \delta(t)$

همچنین چون؛ $\int_{0.5}^{1.5} x(t)dt = 2$، می توان نتیجه گرفت که در بازه ی $0.5 \le t \le 3/2$، $x(t) = 2\delta\left(t - 3/2\right)$ بنابراین $x(t)$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - k3) + 2\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - 3k - 3/2\right)$$

۳,٤۲) $x(t)$ یک سیگنال حقیقی با ددوره تناوب پایه T و ضرائب سری فوریه a_k است.

(الف) نشان دهید که $a_k = a_{-k}^*$ و $a_\circ$ حقیقی است.

(ب) نشان دهید که در صورت زوج بودن $x(t)$، ضرائب سری فوریه آن نیز باید حقیقی و زوج باشند.

(ج) نشان دهید که در صورت فرد بودن $x(t)$، ضرئب سری فوریه آن بایـد موهـومی خـالص و فـرد باشند، و $a_\circ = \circ$.

(د) نشان دهید که ضرائب سری فوریه بخش زوج $x(t)$ عبارت اند از $\Re e[a_k]$

(هـ) نشان دهید که ضرائب سری فوریه بخش فرد $x(t)$ عبارت اند از $jg[a_k]$

حل:

(الف) از مسأله ۳,٤۰ (و جدول ۳,۱) می دانیم FS برای $x^*(t)$ برابر a_k^* می باشد. حال می دانیم کـه $x(t)$ حقیقی است. در این صورت $x(t) = x^*(t)$. بنابراین $a_k = a_k^*$ توجه کنید کـه ایـن بیـان مـی کند که $a_\circ = a_\circ^*$، بنابراین $a_\circ$ حقیقی باشد.

(ب) از مسأله ۳,٤۰ (جدول ۳,۱) می دانیم که ضرایب FS. $x(-t)$ برابر a_{-k} مـی باشـد. اگـر $x(t)$ زوج باشد در این صورت، $x(t) = x(-t)$ که بیان می دارد؛

$$a_k = a_{-k} \quad (\text{S.۳,٤۲,۱})$$

رابطه فوق بیان می کند که ضرایب FS زوج هستند. از قسمت قبلی، می دانیم کـه اگـر $x(t)$ حقیقـی باشد:

$$a_k = a_{-k}^* \quad (\text{S۳-٤۲-۲})$$

با استفاده معادله (S۳-٤۲-۱) و (S۳-٤۲-۲) می دانیم که $a_k = a_k^*$، بنابراین a_k برای تمام k حقیقـی است بهرحال، می توان نتیجه گرفت که a_k زوج و حقیقی است.

(ج) از مسأله ۳,٤۰ (و جدول ۳,۱) می دانیم که ضریب FS برای $x(-t)$ برابـر a_{-k} مـی باشـد. اگـر $x(t)$ فرد باشد، در این صورت $x(t)=-x(-t)$ که این بیان مـی دارد کـه $a_k=-a_{-k}$. (۲-٤۲-۵۳-۳)

که بیان می کند، ضرایب FS فرد هستند. از قسمت قبلی، مـی دانـیم کـه اگـر $x(t)$ حقیقـی باشـد در اینصورت:

$$a_k=a_{-k}^{*} \qquad (S۳-٤۲-٤)$$

بـا اسـتفاده از معادلـه (S۳,٤۲-۳) و (S۳,٤۲-٤)، مـی دانـیم کـه $a_k=a_k^{*}$. بنـابراین $\propto_k$ در تمـام $-\infty<k<\infty$ موهومی می باشد. به هر حال، می توانیم نتیجه بگیریم که a_k زوج و حقیقی است. با توجه معادله (S۳,٤۲-۳) بایستی $a_{\circ}=-a$ و این یعنی $a_{\circ}=\circ$.

(د) توجه کندی که $\varepsilon r\{x(t)+x(-t)\}/2$ با استفاده از معادله (S۳,٤۳-۲) می توان نوشـت ضـریب FS برای $\{a_k+a_k^{*}\}/2=\mathrm{Re}\{a_k\}$ می باشد.

(هـ) توجه کنید که $od\{x(t)\}=\{x(t)-x(-t)\}/2$. از قسمت قبلی می دانیم که ضـریب FS بـرای $od\{x(t)\}$برابر با $\frac{1}{2}\{a_k-a_{-k}\}$ خواهد بود. با استفاده از معادلـه (S۳,٤۳-۲) مـی تـوان نوشـت ضریب FS برای $od\{x(t)\}$ برابر با $j\,I_m\{a_k\}=\frac{1}{2}\left(a_k-a_k^{*}\right)$ خواهد بود.

$$x(t)=\sum_{Oddk}a_k e^{jk2/t}$$

۳,٤۳) (الف) سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$، با دوره تناوب T را فرد ـ هماهنگ می نامیم، اگـر در نمایش سری فوریه آن

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t} \qquad (\text{م ۳-٤۳-۱})$$

به ازای مقادیر صحیح زوج k داشته باشیم $a_k = ۰$.

(i) نشاندهید که اگر $x(t)$ معادله (م ۳–۴۳–۲) را برآورده کند، فرد ـ هماهنگ است.

(ب) $x(t)$ را یک سیگنال متناوب فرد ـ هماهنگ، با دوره تناوب ۲ در نظر بگیرید به نحوی که

$$x(t)=t \quad ،۰<t<1 \quad \text{در}$$

$x(t)$ را رسم کنید و ضرایب سری فوریه آن را بیابید.

(ج) به همین قیاس تابع زوج ـ هماهگ را می توان تابعی تعریف کرد که در نمایش معادله (م ۳–۴۳–۱) آن، بهازای مقادیر فرد k داشته باشیم $a_k = ۰$. آیا دوره تناوب پایه چنین تابعی می تواند T باشد؟ در مورد جواب خود توضیح دهید.

(د) نشان دهید، به شرطی T می تواند دوره تناوب پایه $x(t)$ معادله (م ۳–۴۳–۱) باشد که داشته باشیم.

۱. a_1 یا a_{-1} غیر صفر باشد.

یا

۲. دو عدد صحیح k و l بدون عامل مشترک داشته باشیم که به ازای آنها a_k و a_1 هر دو غیر صفر باشند.

حل:

(الف) (i) داریم:

$$x\left(t+T/2\right)=\sum_{Odd k} a_k e^{jk 2/t}\, e^{jk\pi}$$

چون $e^{jk\pi}=-1$ برای k های فرد.

$$x\left(t+\tfrac{T}{2}\right)=-x(t)$$

(ii) ضرایب سری فوریه $x(t)$ برابر است با:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{\circ}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt+\frac{1}{T/2}x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_{\circ}^{T/2}\left[x(t)+x\left(t+\tfrac{t}{2}\right)e^{-jk\pi}\right]e^{-jk\omega_\circ t}dt$$

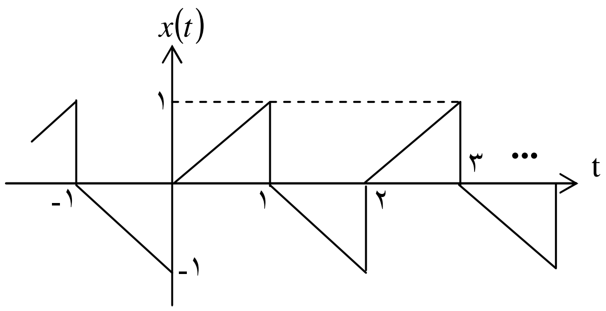
توجه کنید که طرف راست معادله بالا برای مقادیری از K صفر است اگر $x(t)=-x\left(+\tfrac{T}{2}\right)$

(ب) تابع در شکل S۳,٤۳ نشان داده شده اند.

توجه کنید که $T=2$ و $\omega_\circ=\pi$، بنابراین:

$$a_k=\begin{cases}\circ & k\ \text{زوج}\\ \dfrac{1}{jk\pi}+\dfrac{2}{k^2\pi^2} & k\ \text{فرد}\end{cases}$$

(ج) خیر. برای سیگنالها هارمونیک، می توانیم دلیل قسمت $(a-j)$ برای نشان دادن اینکه $x(t)=x\left(t+\tfrac{T}{2}\right)$ را دنبال کنیم. در این مورد، پریود اصلی $T/2$ می باشد.



شکل S۳,٤۳

(د) اگر a_1 یا a_{-1} صفر نباشد.

$$x(t)=a_{\pm 1}e^{\pm 2j\pi/T}+\ldots$$
$$\pm j\frac{2\pi}{T}(t+t_\circ)+\ldots$$
$$x(t+t_\circ)=a_{\pm 1}e^{\pm j\frac{2\pi}{T}(t+t_\circ)+\ldots}$$

کمترین مقدار $|t_\circ|$ (بجز $|t|=\circ$ برای $e^{\pm j\frac{2\pi}{T}t_\circ}$) برابر است که پریودیک اساسی می باشد.

تنها دراین صورت است که $x(t+t_\circ)=a_{\pm 1}e^{\pm 2\pi jt/T}+\ldots=x(t)$

بنابراین بایستی $t_\circ$ تناوب اصلی باشد.

(۲) دوره تناوب $x(t)$ ک. م. م تناوب $e^{jk(2\pi/T)t}$ و $e^{jt\left(\frac{2\pi}{T}\right)\ell}$ می باشد. پریود $e^{jk(2\pi/T)}$ برابر است با T/k و پریود $e^{j\ell\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$ برابر است با T/ℓ بدلیل اینکه k , ℓ ضرایب مشترکی ندارنـد، ک. م. م. T/k و T/ℓ عبارتست از از T.

(۳) تنها ضرایب FS مجهول عبارتند از a_{-2},a_2,a_{-1},a_1 به دلیل اینکه $x(t)$ حقیقی است. $a_1=a_{-1}^*$ و $a_2=a_{-2}^*$. چون a_1 حقیقی است، $a_1=a_{-1}$. حال $x(t)$ به صورت زیر می باشد.

$$x(t)=A_1\cos(\omega_\circ t)+A_2\cos(2\omega_\circ t+\theta)$$

که، که از آن خواهیم داشت:

$$x(t-3)=A_1\cos(\omega_\circ t-3\omega_\circ)+A_2\cos(2\omega_\circ t)+\theta-6\omega_\circ$$

حال اگر، $x(t)=-x(t-3)$، در اینصورت، $3\omega_\circ$و $6\omega_\circ$ هر دو باید ضرایب فردی از πباشند.

بدیهی است که این غیرممکن است، بنابراین $a_2=a_{-2}=\circ$ و

$$x(t)=A_1\cos(\omega_\circ t)$$

حال با استفاده از رابطه بارسئوال در راهنمای۵، داریم:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2=|a_1|^2+|a-1|^2=1/2$$

بنابراین $|a_1|=1/2$. چون a_1 مثبت است، داریم: $a_1=a_{-1}=1/2$، بنابراین $x(t)=\cos(\pi t/3)$

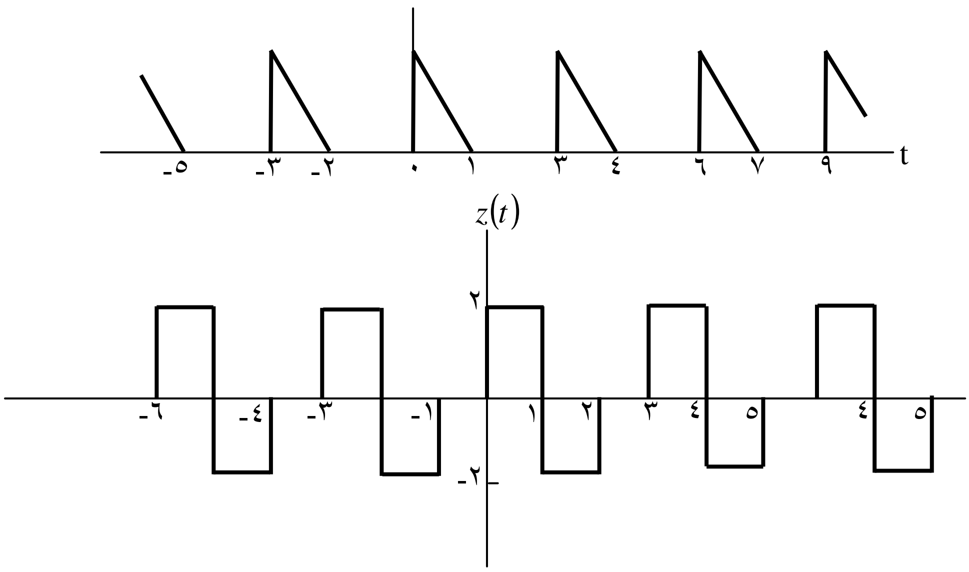
۳,٤۵) $x(t)$ را یک سیگنال حقیقی و متناوب با نمایش سری فوریه سینوسی ـ کسینوسی معادلـه (۳-۳۲) فرض کنید، یعنی

$$x(t)=a_\circ+2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k\cos k\omega_\circ t-C_k\sin k\omega_\circ t] \qquad \text{(م ۳-٤۵-۱)}$$

(الف) نمایش سری فوریه نمایی بخشهای زوج و فرد $x(t)$ را تعیین کنید. یعنی ضـرایب a_k، β_k را بر حسب ضرائب معادله (م ۳-٤۵-۱) بیابید به نحوی که داشته باشیم

$$Ev\{x(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_\circ t}$$
$$Od\{x(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\beta_k e^{jk\omega_\circ t}$$

(ب) رابطه a_k و a_{-k} بند (الف) را بیابید. رابطه β_k و β_{-k} را نیز بیابید.



شکل ۳-٤۵

(ج) فرض کنید سیگنالهای $x(t)$ و $z(t)$ شکل م ۳-٤۵ دارای نمـایش سـری سینوسـی ـ کسینوسی زیرند.

$$x(t)=a_{\circ}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\left[B_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{2}\right)-C_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right]$$

$$z(t)=d_{\circ}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[E_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)-F_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right]$$

سیگنال زیر را رسم کنید.

$$y(t)=4(a_{\circ}+d_{\circ})+2\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[B_k+\frac{1}{2}E_k\right]\cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)+F_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right\}$$

حل:

با دقت بیشتر، نتیجه می گیریم که ضرایب FS برای $x(t)$ برابر است با:

$$\wp_k = \begin{cases} a_\circ & , k=\circ \\ B_{k+jck} & , k>\circ \\ B_{k-jck} & , k<\circ \end{cases}$$

(الف) از مسأله ۳٫٤۲ می دانیم که اگر $x(t)$ حقیقی باشد. ضرای FS برای $\varepsilon v\{x(t)\}$ برابر است با:

$\mathrm{Re}\{\wp_k\}$، بنابراین: $\qquad a_k = B_{|k|}$ و $a_\circ = a_\circ$

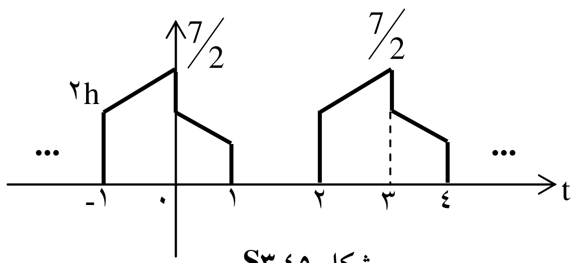
از مسأله ۳٫٤۲ می دانیم که اگر $x(t)$ حقیقی باشد، ضرایب FS برای $od\{x(t)\}$ برابر است با:

$j\,\mathrm{Im}\{\wp_k\}$ بنابراین: $\qquad \beta_\circ = \circ \quad , \quad \beta_k = \begin{cases} jck & k>\circ \\ -jck & k<\circ \end{cases}$

(ب) $\propto_k = \propto_{-k} \ , \ \beta_k = -\beta_{-k}$

(ج) سسیگنال برابر است با: $y(t) = 1 + \varepsilon v\{x(t)\} + \frac{1}{2}\varepsilon v\{x(t)\} - od\{x(t)\}$.

این در شکل ٤٥-S۳ نمایش داده شده است.



شکل S۳,٤٥

۳,٤٦) در این مسئله دو خاصیت مهم سری فوریه پیوسته در زمان، یعنی خاصیت مدولاسیون و قـضیه پارسوال، را به دست می آوریم. فرض کنید سیگنالهای $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال متنـاوب پیوسـته در زمان، با دوره تناوب مشترک $T_\circ$ هستند، نمایش سری فوریه این دو سیگنال عبارت است از

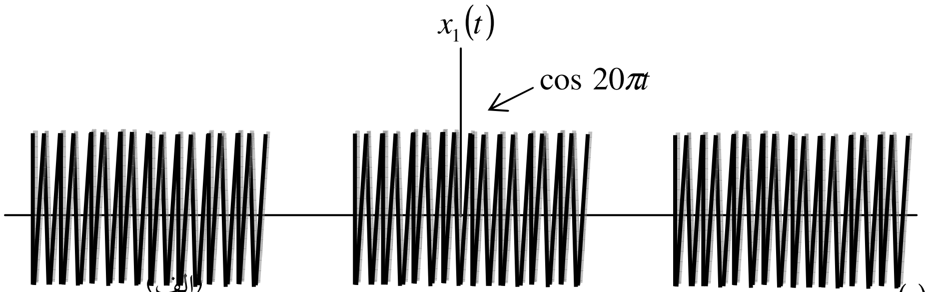
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_o t}, \qquad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \qquad \text{(م ۳-٤٦-۱)}$$

از کانولوشن گسسته زیر به دست می آید.

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}$$

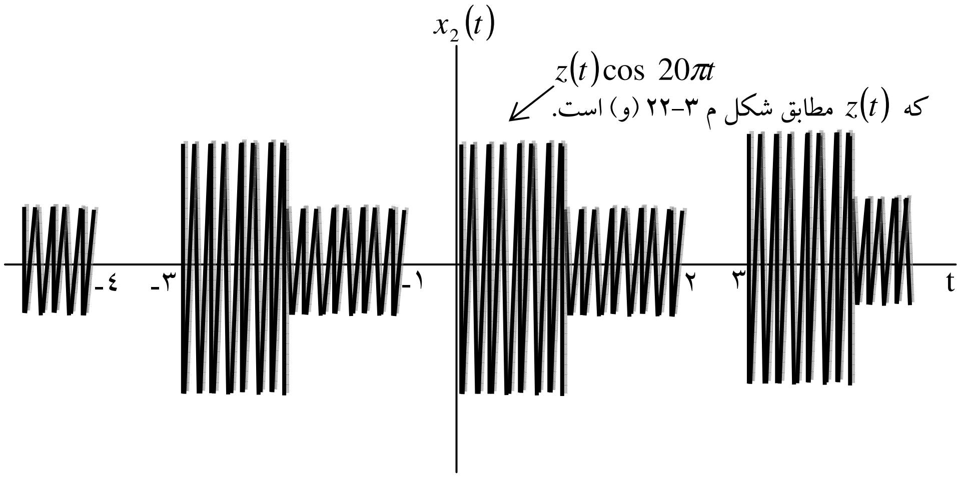
(ب) به کمک نتیجه بند (الف) ضرایب سری فوریه سیگنالهای $x_1(t)$، $x_3(t)$ شکل م ۳-٤٦ را بیابید.

(ج) فرض کنید $y(t)$ معادله (م ۳-٤٦) برابر $x^*(t)$ است. b_k معادله (م ۳-٤٦-۱) را بر حسب a_k بیان کنید.

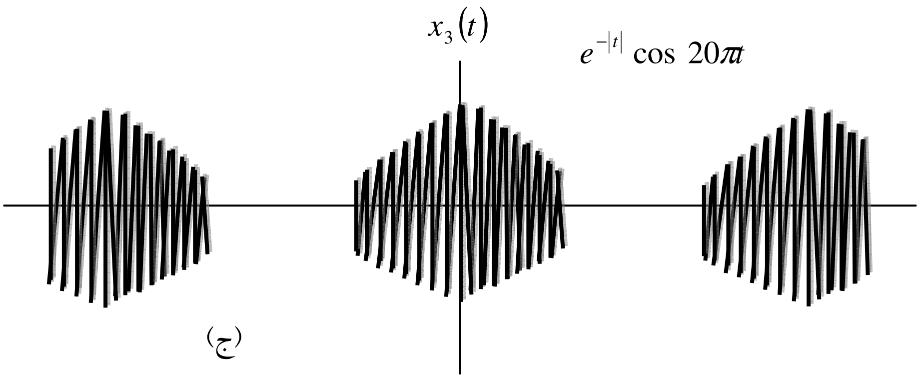


(الف)

که $z(t)$ مطابق شکل م ۳-۲۲ (و) است.



(ب)



(ج)

شکل م ٤٦-٣

و با استفاده از نتیجه بند (الف) قضیه پارسئوال برای سیگنالهای متناوب، یعنی رابطه زیر، را ثابت کنید.

$$\frac{1}{T_\circ}\int_\circ^{T_\circ}|x(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

حل:

ضرایب سری فوریه $z(t)$ برابر است با:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\sum_n\sum_\ell \propto_n b_\ell e^{j(n+1)\omega_\circ t}e^{-jk\omega_\circ t}dt$$
$$= \frac{1}{T}\sum\sum a_n b_\ell\, \delta(k-(n+\ell))$$
$$= \sum_n a_n b_{k-n}$$

ب) (i) در اینجا $T_\circ = 3$, $\omega_\circ = \frac{2\pi}{3}$. بنابراین:

$$c_k = \left[\frac{1}{2}\delta(k-30)+\frac{1}{2}\delta(k+30)\right]*\frac{2\sin\left(kj\pi/30\right)}{2k\pi3/3}$$

با ساده سازی خواهیم داشت:

$$c_k = \frac{\sin\left[(k-30)\frac{2\pi}{3}\right]}{3(k-20)2\pi/3}$$

و

$$c_{\pm 30} = 1/3$$

(ii) $x_2(t)$ را به صورت زیر می توانیم بیان کنیم:

$x_2(t) =$ مجموعوع دو موج مربعی شیفت یافته $\times \cos(20\pi t)$

در اینجا $T_\circ = 3$ و $\omega_\circ = \frac{2\pi}{3}$ بنابراین

$$c_k = \frac{1}{3} e^{-j(k-30)\left(2\pi/3\right)} \frac{\sin\left\{(k-30)\frac{2\pi}{3}\right\}}{(k-30)2\pi/3} + \frac{1}{3} e^{-j(k+30)\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin\left\{(k+30)2\pi/3\right\}}{(k+30)2\pi/3}$$

$$+ \frac{1}{3} e^{-j(k-30)\pi/3} \frac{\sin\left\{(k-30)\pi/3\right\}}{(k-80)\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3} e^{-j(k+30)\left(\pi/3\right)} \frac{\sin\left\{(k+30)\pi/3\right\}}{(k+30)2\pi/3}$$

(iii) اینجا $T_\circ = 4$ و $\omega_\circ = \pi/2$ بنابراین:

$$c_k = \left[\frac{1}{2}\delta(k-40) + \frac{1}{2}\delta(k+40)\right] + \frac{j\left[k\omega_\circ + e^{-1}\{\sin k\omega_\circ - \cos k\omega_\circ\}\right]}{2\left[1+(k\omega_\circ)^2\right]}$$

پس از پیاده سازی

$$c_k = \frac{j\,[k-40]\,\omega_\circ + e^{-1}\left\{\sin(k-40)\,\omega_\circ - \cos(k-40)\,\omega_\circ\right\}}{-4\left[1+\left\{(k-40)\,\omega_\circ\right\}^2\right]}$$

$$+\frac{j\,[k+40]\,\omega_\circ + e^{-1}\left\{\sin(k+40)\,\omega_\circ - \cos(k+40)\,\omega_\circ\right\}\Big]}{4\left[1+\left\{(k+40)\,\omega_\circ\right\}^2\right]}$$

(پ) از مسأله ۳,٤۲ بخاطر داریم که $b_k = a_{-k}^*$ از قسمت (الف) می دانیم که ضرایب سری فوریـه ی $z(t) = x(t)y(t) = x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$ به صورت زیر خواهد بود:

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{n-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a_{n+k}$$

از معادله آنالیز سری فوریه، درایم:

$$c_k = \frac{1}{T_\circ}\int_\sigma^{T_\circ} |x(t)|^2 e^{-j\left(-2\pi/T_\circ\right)kt} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a_{n+k}^*$$

با قرار دادن $k=\circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{T_\circ}\int_\circ^{T_\circ} |x(t)|^2 dt_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

۳,٤۷) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \cos 2\pi t$$

چون $x(t)$ متناوب، و دوره تناوب پایه آن ۱ است، با دوره تناوب N نیز متناوب است که N می تواند هر عدد صحیح دلخواهی باشد. ضرائب سری فوریه $x(t)$ را با فرض این که $x(t)$ با دوره تناوب ۳ متناوب است، بیابید.

حل:

فرض کنید $x(t)$ سیگنالی متناوب با پریود (۱) باشد. ضرایب غیرصفر FS برای $x(t)$ شامل $a_1 = a_{-1} = 1/2$ خواهند بود. حال اگر فرض کنیم $x(t)$، با پریود (۳) متناوب باشد. در اینصورت ضرایب غیر صفر $x(t)$ عبارتند از:

$$b_3 - b_{-3} = 1/2$$

۳,٤۸) فرض کنید $x[n]$ یک رشته متناوب ، با دوره تناوب N و نمایش سری فوریه زیرست

$$x[b]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ٣-٤٨-١)}$$

ضرایب سری فوریه هر یک از سیگنالهای زیر را می توان بر حسب a_k معادله م (٣-٤٨-١) بیان کرد. این ضرائب را بیابید.

(الف) $x[n-n_\circ]$

(ب) $x[n]-x[n-1]$

(ج) $x[n]-x\left[n-\dfrac{N}{2}\right]$ (N را زوج بگیرید)

(د) $x[n]+x\left[n+\dfrac{N}{2}\right]$ (N را زوج بگیرید، توجه کنید که دوره تناوب سیگنال N/٢ است.)

(هـ) $x_*[-n]$

(و) $(-1)^n x[n]$ (N را فرد بگیرید، دقت کنید که دوره تناوب این سیگنال ٢٨ است.)

(ح) $y[n]=\begin{cases} x[n], & n \text{ زوج} \\ \circ, & n \text{ فرد} \end{cases}$

حل:

(الف) ضرایب سری فوریه $x[n-n_\circ]$ برابر است با:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[\eta-\eta_\circ] e^{-j2nk/N} \\ &= \frac{1}{N} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \sum_{n=\circ}^{N-1} x[n] e^{-2nk/N} \\ &= a_k e^{-2\pi jkn_\circ/N} \end{aligned}$$

(ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف)، ضرایب سری فوریه $x[n]-x[n-1]$ به صورت زیر می باشد:

$$\delta_k = a_k - e^{-j2\pi k/n} a_k = \left[1-e^{-2\pi jk/n}\right]a_k$$

(ج) با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمت (الف)، ضرایب سری فوریه $x[n]-x\left[n-N/2\right]$ عبارت است از:

$$\delta_k = a_k\left[1-e^{-jk\pi}\right] = \begin{cases} \circ & k \text{ زوج} \\ 2a_k & k \text{ فرد} \end{cases}$$

(د) توجه کنید که پریود $x[n]+x\left[n+N/2\right]$ برابر است با $\frac{N}{2}$. ضرایب سری فوریه $x[n]+x\left[n-N/2\right]$ عبارتست از:

$$\delta_k = \frac{2}{N}\sum_{n=\circ}^{\frac{N}{2}-1}\left[x[n]+x\left[n+N/2\right]\right]e^{-j4\pi nk/N} = 2a_{2k} \qquad 0 \le k \le N/2-1$$

(هـ) ضرایب سری فوریه $x^*[-n]$ عبارتست از:

$$\delta = \frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x^*[-n]e^{-j2\pi nk/N} = a_k^*$$

(و) ضرایب سری فوریه $(-1)^n x[n]$ برای Nهای زوج عبارتست از:

$$\delta_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]e^{-j\left(2\pi n/N\right)\left(k-N/2\right)} = a_{\left(k-N/2\right)}$$

(ذ) ضرایب صری فوریه $(-1)^n x[n]$ عبارتست از:

$$\delta_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi n/N)(k-N/2)}$$

خ) با N فرد، پریود عبارت $(-1)^n x[n]$ برابر ۲N خواهد بود. بنابراین ضـرایب سـری فوریـه برابـر است با:

$$\delta_k = \frac{1}{2N}\left[\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(\frac{K-N}{2}\right)} + \sum_{n=\circ}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(\frac{K-N}{2}\right)} e^{-j\pi(K-N)}\right.$$

توجه کنید که برای k های فرد، عبارت $\frac{K-N}{2}$عددی صحیح و K-N نیز عدد صحیح فـرد خواهـد بود.

همچنین برای k زوج:
$$\delta_k = \begin{cases} \frac{a_{K-N}}{2} & k \text{ فرد} \\ \circ & k \text{ فرد} \end{cases}$$

ط) در اینجا:
$$y[n] = \tfrac{1}{2}\left\{x[n] + (-1)^n x[n]\right\}$$

برای N زوج:

$$\delta_k = \tfrac{1}{2} - \left[a_k + a_k - \tfrac{N}{3}\right]$$

برای N فرد:
$$\delta_k = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\left[a_k + a\frac{K-N}{2}\right] & k \text{ زوج} \\ \tfrac{1}{2} a_k & k \text{ فرد} \end{cases}$$

۳٫٤۹) فرض کنید $x[n]$ یک شته متناوب با دوره تناوب N و نمایش سری فوریه زیرست

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ٣-٤٩-١)}$$

(الف) فرض کنید N زوج و $x[n]$ معادله زیر را ارضا می کند.

$$x[n]=-x\left[n+\frac{N}{2}\right] \quad \text{برای تمام مقادیر n}$$

نشان دهید که برای تمام مقادیر صحیح زوج k های مضرب ٤ داریم $a_k=0$.

(ج) به طور کلی فرض کنید N مضربی از M باشد و داشته باشیم.

$$\sum_{r=0}^{(N/M)-1} x\left[n+r\frac{N}{M}\right]=0 \quad \text{برای تمام مقادیر n}$$

نشان دهید که برای تمام مضارب M داریم $a_k=0$.

حل:

(الف) ضرایب FS به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}+\frac{1}{N}\sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2-1)} x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}+\frac{e^{-j\pi k}}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n+N/2\right]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=0 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}-\frac{e^{-j\pi k}}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \\
&= 0 \qquad for \quad k \quad even
\end{aligned}$$

(ب) با بکارگیری روشی مشابه قسمت (الف) می توانیم نشان دهیم که:

$$a_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=\circ}^{\frac{N}{4}-1}\left\{1-e^{-jk\pi/2}+e^{-j\pi k}-e^{-j\frac{3\pi k}{2}}\right\}x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}\right]$$

$$= \circ \quad foe \quad k=4r \ , \ r\in z.$$

(ج) اگر N/M یک عدد صحیح باشد. می توانیم از روش کلی قسمت (الف) برای اینکه نشان دهیم:

$$a_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=\circ}^{B-1}\left\{1-e^{-j2\pi r}+e^{-j4\pi r}-\ldots+e^{-j2\pi(M-1)r}\right\}x[n]e^{-j\frac{2\pi nr}{N}}\right]$$

استفاده کنیم که $B=N/M$ و $r=K/M$. از معادله بالا بدیهی است که:

$$a_k = \circ \quad if \quad k=rM \ , \ r\in z$$

۳,۵۰) اطلاعات زیر در مورد سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره تاوب ۸ و ضرائب سری فوریه a_k داده شده است.

۱. $a_k = -a_{k-4}$

۲. $x[2n+1] = (-1)^n$

یک تناوب $x[n]$ را رسم کنید.

حل:

از جدول ۳,۲ می دانیم که اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_{k1}$$

آنگاه

$$(-1)^n x[n] = e^{j(2\pi/N)(N/2)n} x[n] \xleftrightarrow{FS} a(k - k/2)$$

در این مورد N=۸ بنابراین:

$$(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{FS} a_{k-4}$$

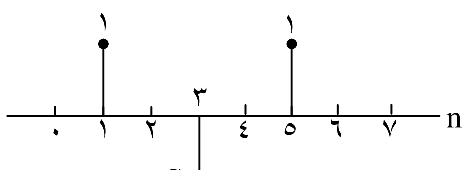
بدلیل اینکه داده شده است که $a_k = -\propto_{k-4}$، داریم:

$$x[n] = -(-1)^n x[n] = (-1)^{n+1} x[n]$$

که نشان می دهد $x[\circ] = x[\pm 2] = x[\pm 4] = \ldots = \circ$

همچنین داده شده که $x[1] = x[5] = \ldots = 1$ و $x[3] = x[7] = -1$

بنابراین یک دوره تناوب $x[n]$ در شکل S۳,۵۰ نشان داده شده است.



شکل S.۳,۵۰

۳,۵۱) $x[n]$ یک سیگنال متناوب با تناوب $N = 8$ و ضرائب سری فوریه $a_k = -a_{k-4}$ است. سیگنال

$$x[n] = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right) x[n-1]$$

با دوره تناوب $N=8$ ایجاد شده است. ضرائب سری فوریه $y[n]$ را b_k بنامیـد. تـابع $f[k]$ را بـه نحوی تعیین کنید که داشته باشیم.

$$b_k = f[k]a_k$$

حل:

داریم:

$$e^{j4(2\pi/8)n}x[n]=e^{j\pi n}x[n]=(-1)^n x[n]\xleftrightarrow{FS}a_{k-4}$$

و بنابراین

$$(-1)^{n+1}x[n]\xleftrightarrow{FS}-a_{k-4}$$

اگـر $a_k=-a_{k-4}$ در ایـن صـورت $x[\circ]=x[\pm 2]=x[\pm 4]=...=\circ$ حـال. توجـه بفرمائیـد کـه سـیگنال $p[n]=x[n-1]$ و $p[\pm 1]=p[\pm 3]=...=\circ$. حـال طـرح سیگنال $x[n]=\left(1+-(-1)^n\right)\times 1/2$ در شکل S۳,۵۱ نشانداده شده است.

بدیهی است که سیگنال $y[n]=x[n]p[n]=p[n]$ زیرا $p[n]$ هنگامیکه $x[n]$ صـفر باشـد، برابـر صفر می باشد. بنابراین $y[n]=x[n-1]$. ضرایب FS برای $y[n]$ برابر است با.

۳,۵۲) $x[n]$ یک سیگنال متناوب حقیقی با دوره تناوب N و ضرایب سری فوریه مخـتلط a_k اسـت. شکل قائم a_k عبارت است از

$$a_k = b_k + jc_k$$

که در آن b_k و c_k حقیقی اند.

(الف) نشان دهید $a_{-k}=a_k^*$. رابطه b_k و b_{-k} را بیابید. رابطه بین c_k و c_{-k} را بیابید.

(ب) N را زوج بگیرید. نشان دهید که $a_{N/2}$ حقیقی است.

(ج) نشان دهید $x[n]$ را می توان به صورت سری فوریه مثلثاتی زیر نوشت: اگر N فرد باشد.

$$x[n]=a_{\circ}+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-c_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

و اگر N زوج باشد

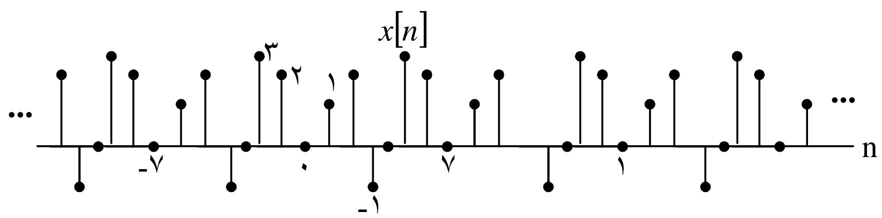
$$x[n]=\left(a_{\circ}+a_{N/2}(-1)^n\right)+2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} b_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-c_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

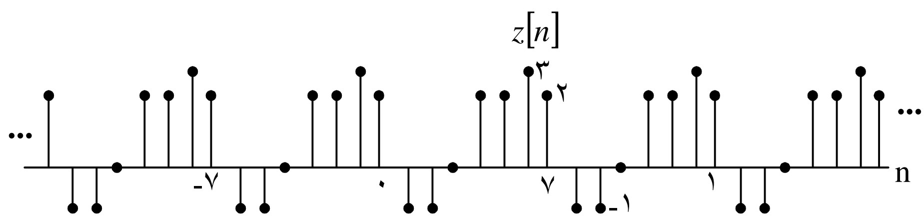
(د) اگر شکل قطبی a_k به صورت $A_k e^{j\theta k}$ باشد، نشان دهید که می توان نمایش سری فوریـه $x[n]$ را به شکل زیر نوشت.

به ازای N فرد
$$x[n]=a_{\circ}+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k\right)$$

به ازای N زوج
$$x[n]=\left(a_{\circ}+a_{N/2}(-1)^n\right)+2\sum_{k=1}^{(N/2)} A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k\right)$$

(هـ) فرض کنید سیگنالهای $x[n]$ و $z[n]$ شکل م ۳-۵۲ دارای نمایش مثلثاتی زیرند.





شکل م ۳-۵۲

$$x[n]=a_{\circ}+2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}$$

$$z[n]=d_{\circ}+2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-f_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}$$

سیگنال زیر را رسم کنید.

$$y[n]=a_{\circ}-d_{\circ}+2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-\left(f_k-c_k\right)\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}$$

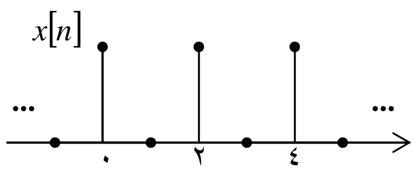
حل:

(الف) اگر سیگنال $x[n]$ حقیقی باشد، داریم $x[n]=x^*[n]$ در این صورت:

$$a_{-k}=\sum_{n}x[n]e^{+j\frac{2\pi nk}{N}}=a_k^*$$

از این نتیجه، داریم:

$$\underline{c}_k=-c_k\ \ ,\ \underline{b}_k=b_k$$



شکل S.۳,۵۱

(ب) اگر N زوج باشد. در این صورت

$$a_{N/2}=\frac{1}{N}\sum_{n}x[n]e^{-j\pi n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n}(-1)^{n}x[n]=\text{حقیقی}$$

(ج) اگر N فرد باشد در اینصورت:

$$k[n]=\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}a_k e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$=\sum_{k=\circ}^{(N-1)/2}a_k e^{j(2\pi/N)k_n}+\sum_{k=1}^{(N-1)/2}a_k^{*}e^{-j(2\pi/N)k_n}$$

$$=a_\circ+\sum_{k=1}^{(N-1)/2}(b_k+j_{ck})r^{j(2\pi/N)kn}\sum_{k=1}^{(N-1)/2}(b_k-jc_k)e^{-j(2\pi/N)kn}$$

$$=a_\circ+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2}b_k\cos\left(2\pi kn/N\right)-c_k\sin\left(2\pi kn/N\right)$$

اگر N زوج باشد در اینصورت:

$$x[n]=\sum_{K=\circ}^{N-1}a_k e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$=a_\circ+(-1)^{n}a_{N/2}+2\sum_{k=1}^{(N-2)/2}a_k\ e^{j(2\pi/N)k_n}-a_k^{*}e^{-j(2\pi/N)k_n}$$

$$= a_\circ + (-1)^n a_{N/2} + 2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} b_k \cos\left(2\pi kn/N\right) - c_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

(د) اگر $a_k = A_k e^{j\in k}$ در اینصورت $b_k = A\cos(\theta_k)$ و $c_k = A\sin\theta_k$ خواهد بود.

با جایگذاری در نتایج قسمت قبلی برای Nهای فرد خواهیم داشت:

$$x[n] = a_\circ + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A\cos(\theta_k)\cos\left(2k\pi n/N\right)$$
$$-c_k \sin(\theta_k)\sin\left(2\pi kn/N\right)$$
$$= a_\circ + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \theta_k\right)$$

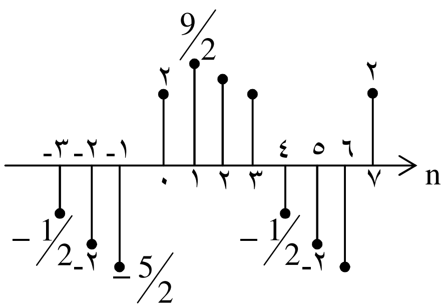
به طور مشابه برای N های زوج:

$$x[n] = a_\circ + (-1)^n a\left(N/2\right) + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A\cos(\theta_k)\cos\left(2k\pi n/N\right)$$
$$-c_k \sin(\theta_k)\sin\left(\frac{2k\pi n}{N}\right)$$
$$= a_\circ = (-1)^n a\left(N/2\right) + 2\sum_{k=1}^{(N-2)} A_k \cos\theta_k\left(\frac{2\pi kn}{N} + \right)$$

(هـ) سیگنال برابر است با:

$$y[n] = d_x c_\circ\{x[n]\} - d.c\{z[n]\} + \varepsilon v\{z\} + od\{x\} - 2od\{z\}$$

که در شکل S۳,۵۲ نمایش داده شده است:



شکل S۳,۵۲

۳,۵۳) $x[n]$ را یک سیگنال متناوب حقیقی با دوره تناوب N و ضرائب فوریه a_k فرض کنید.

(الف) نشاندهید که در صورت زوج بودن N حداقل دو ضریب فوریه a_k (در هر تناوب) حقیقی اند.

(ب) نشاندهید که در صورت فرد بودن N حداقل یک ضریب فوریه a_k (در هر تناوب) حقیقی است.

حل:

داریم:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

توجه کنید که

$$a_0 = 1/N \sum_{\langle N\rangle} x[n]$$

که اگر $x[n]$ حقیقی باشد، حقیقی خواهد بود.

(الف) اگر N زوج باشد؛ در این صورت:

$$a_{N/2} = \frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} x[n]e^{-j\pi n} = \frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} x[n](-1)^n$$

بدیهی است که $a_{N/2}$ نیز در صورتی که $x[n]$ حقیقی باشد، حقیقی خواهد بود.

(ب) اگر N فرد باشد، تنها $a_\circ$ ضمانت فرد بودن را دارد.

۳,۵٤) تابع زیر در نظر بگیرید.

$$a[k] = \sum_{n=\circ}^{N-1} e^{j}(2\pi/N)kn$$

(الف) نشان دهید که به ازای $k = \circ, \pm N, \pm 3N$ داریم $a[k] = N$

(ب) نشاندهید کهاگر k مضرب صحیحی از N نباشد، آنگاه $a[k] = \circ$. (راهنمایی: فرمول جمع متناهی را به کار برید).

(ج) بندهای (الف) و (ب) را برای تابع زیر تکرار کنید.

$$a[k] = \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(2\pi/N)kn}$$

حل:

فرض کنید $K = PN$ و $p \in z$ در اینصورت:

$$a[PN] = \sum_{n=\circ}^{N-1} e^{j\left(2\pi/N\right)PN^n} = \sum_{n=\circ}^{N-1} e^{j2\pi np} = \sum_{n=\circ}^{N-1} 1 = N$$

(ب) با استفاده از فرمول مجموع محدود؛ خواهیم داشت:

$$a[k] = \frac{1 - e^{j2\pi k}}{1 - e^{j\left(2\pi/N\right)k}} = \circ$$

اگر $k \neq pn$ و $p \in z$

(ج) فرض کنید:

$$a[k]=\sum_{n=q}^{q+N-1} e^{j\left(2\pi/N\right)n}$$

که q عدد صحیح دلخواهی می باشد. با جایگذاری $K = PN$، دوباره به سادگی می توانیم نشان دهیم که:

$$a[PN]=\sum_{n=q}^{q+N-1} e^{j\left(2\pi/N\right)PN_n}=\sum_{n=q}^{q+N-1} e^{j2\pi pn}=\sum_{n=q}^{q+N-1}1-N$$

حال

$$a[k]=e^{j\left(2\pi/N\right)kq}\sum_{n=\circ}^{N-1}e^{j\left(2\pi/N\right)kn}$$

با استفاده از قسمت (ب)، می توان این بحث را انجام داد که

$$\begin{cases} a[k]=\circ \\ for\ \ k\neq PN, P\in z \end{cases}$$

۳,۵۵) $x[n]$ را یک سیگنال متناوب حقیقی با دوره تناوب N و ضرائب فوریه a_k فرض کنید. در این مسئله خاصیت تغییر مقیاس زمانی جدول ۳-۲ را به دست می آوریم.

$$x_{(m)}[n]=\begin{cases} x\left[\dfrac{n}{m}\right] & n=\circ\ , \pm m, \pm 2m \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که دوره تناوب $x_{(m)}[n]$ برابر mN است.

(ب) نشان دهید که اگر

$$x[n]=v[n]+w[n]$$

آنگاه

$$x_{(m)}[n]=v_{(m)}[n]+w_{(m)}[n]$$

(ج) فرض کنید به ازای یک عدد صحیح $k_\circ$، $x[n]=e^{j2\pi k_\circ n/N}$ و نشان دهید که

$$x_{(m)}[n]=\frac{1}{m}\sum_{1=\circ}^{m-1}e^{j2\pi(k_\circ+lN)n(mN)}$$

(ج) یعنی هر نمایی مختلط $x[n]$ در $x_{(m)}[n]$ به ترکیب خطی m نمایی مختلط تبدیل می شود.

(د) به کمک نتایج بندهای (الف)، (ب)، و (ج) نشان دهید که اگر ضرائب فوریه $x[n]$ برابر a_k باشـد، $x_{(m)}[n]$ دارای ضرائب فوریه $\frac{1}{m}a_k$ باشد.

حل:

(الف) توجه داشته باشید که:

$$x_m[n+mN]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{m}+N\right] & n=\circ\,,\pm m \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}=\begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & n=\circ\,,\pm m,\dots \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$
$$x=\lambda_m[n]$$

در نتیجه $x[n]$ با دوره تناوب mN، پریودیک است.

(ب) عملگر اسکیل در حوزه زمان که در این مسئله بحـث شـده اسـت، عملگـری خطـی مـی باشـد. بنابراین اگر $x[n]=v[n]+\omega[n]$ در این صورت $x_m[n]=v_m[n]+\omega_m[n]$

(ج) فرض کنید:

$$y[n]=\frac{1}{m}\sum_{\ell=\circ}^{m-1}e^{j\left(2\pi/_{mN}\right)(k_\circ+\ell N)n}$$
$$=\frac{1}{m}e^{j\left(2\pi/_{mN}\right)k_\circ n}\sum_{\ell=\circ}^{m-1}e^{j\left(2\pi/_{m}\right)\ell n}$$

که به صورت زیر قابل بازنویسی می باشد:

(S۳,۵۵-۱)

$$y[n]=\begin{cases}e^{j\left(2\pi/_{mN}\right)^{k_\circ n}} & n=\circ,\pm N\ ,\ 2N,\dots\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

حال، توجه کنید که با بکارگیری اسکیل – زمانی روی $x[n]$ خواهیم داشت:

$$x_m[n]=\begin{cases}e^{j\left(2\pi/_{mN}\right)k_\circ n} & n=\circ,\pm N,\pm 2N,\dots\\ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

(S۳,۵۵-۲)

با مقایسه (S۳-۵۵-۱) و (S۳-۵۵-۲) ملاحظه می شود که $y[n]=x_{(m)}[n]$

(د) داریم:

$$b_k=\frac{1}{mN}\sum_{n=\circ}^{mN-1}x_{(m)}[n]e^{-j\left(2\pi/_{mN}\right)kn}$$

می دانیم که تنها $m-$ امین مقدار ۰ در سری بالاغیر صفر است؛ پس

$$b_k = \frac{1}{mN}\sum_{n=\circ}^{N-1} x_{(m)}[nm]e^{-j\left(2\beta\pi/_{mN}\right)K_{mn}}$$
$$= \frac{1}{mN}\sum_{n=\circ}^{N-1} x_m[nm]e^{-j(2\pi/_N)k_n}$$

توجه کنید که $x_m[nM] = x[n]$. بنابراین:

$$b_k = \left(\frac{1}{MN}\right)\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/_N)k_n} = \frac{a_k}{m}$$

....

۳,۵۶) $x[n]$ را یک سیگنال متناوب بادوره تاوب N و ضرائب فوریه a_k فرض کنید.

(الف) ضرائب سری فوریه $|x[n]|^2$، یعنی b_k، را برحسب a_k نیز حتماً حقیقی اند؟

حل:

(الف) داریم:

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k \ , \ x^*[n] \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$$

با استفاده از خاصیت ضرب

$$x[n]x^*[n] = |x[n]|^2 \xleftrightarrow{FS} \sum_{\ell=\langle N\rangle} a_{\ell+k}$$

(ب) با توجه به آنچه در قسمت (الف) ذکر شد. بدیهی است که پاسخ مثبت خواهد بود.

....

۳,۵۷) فرض کنید

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ۳-۵۷-۱)}$$

و

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

سیگنالهای متناوب اند. نشان دهید که

$$x[n]y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

که در آن

$$c_k \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k-l} b_l$$

(ب) نتیجه بند (الف) را تعمیم دهید، یعنی نشان دهید که

$$c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{l=\langle N \rangle} a_{k-l} b_l$$

(ج) با استفاده از نتیجه بند (ب) نمایش سری فوریه سیگنالهای زیر را پیدا کنید، $x[n]$ مطابق و معادلـه (م ۳-۵۷-۱) است.

i) $\left(x[n]\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)\right)$

ii) $\left(x[n]\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-rN]\right)$

iii) $x[n]\left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta\left[n-\frac{rN}{3}\right]\right)$

(N را مضرب ۳ بگیرید)

(د) نمایش سری فوریه سیگنال $x[n]y[n]$ را پیدا کنید، که در آن

$$x[n]=\cos(\pi n/3)$$

,

$$y[n]=\begin{cases}1, & |n|\le 3\\ \circ, & 4\le |n|\le 6\end{cases}$$

$y[n]$ دارای دوره تناوب ۱۲ است.

(و) با استفاده از نتیجه بند (ب) نشان دهید که

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]y[n]=N\sum_{l=\langle N\rangle} a_1 b_{-l}$$

و با استفاده از آن رابطه پارسئوال را برای سیگنالهای متناوب گسسته در زمان به دست آورید.

حل:

(الف) داریم:

$$x[n]y[n]=\sum_{k=\circ}^{N-1}\sum_{\ell=\circ}^{N-1}a_k b_\ell e^{j\left(2\pi/N\right)(k+L)n}$$

با جایگذاری $\ell'=k+\ell$ خواهیم داشت:

$$x[n]y[n]=\sum_{K=\circ}^{N-1}\sum_{\ell'=k}^{(K+N-1)}a_k b_{(\ell'-k)}$$

اما از آنجایی که $b_{\ell'-k}$ و $e^{j\left(2\pi/N\right)\ell'}$ بـا پریـود N، پریودیـک هـستند. ایـن را دوبـاره بـه صـورت زیـر بازنویسی می کنیم:

$$x[n]y[n]=\sum_{K=\circ}^{N-1}\sum_{\ell'=\circ}^{N-1}a_k b_{(\ell'-k)}e^{j\left(2\pi/N\right)\ell' n}$$
$$=\sum_{\ell=\circ}^{N-1}\left[\sum_{k=\circ}^{N-1}a_k b_{\ell-k}\right]$$

بنابراین

$$c_k=\sum_{K=\circ}^{N-1}a_k b_{\ell-k}$$

با تعویض a_k و b_k خواهیم داشت:

$$c_k=\sum_{k=\circ}^{N-1}b_k a_{\ell-k}$$

(ب) توجه کنید، بدلیل اینکه a_k و b_k با پریود N، پریودیک هـستند. مـی تـوانیم سـری فـوق را بـه صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$c_k=\sum_{\langle N\rangle}\propto_k b_{\ell-k}=\sum_{\langle N\rangle}b_k\propto_{\ell-k}$$

(ج) (i) اینجا

$$c_k=\sum_{\ell=\circ}^{N-1}[\delta[n-3]+\delta[L-N-3]]a_{k-\ell}$$

بنابراين

$$c_k=\tfrac{1}{2}a_{k-3}+\tfrac{1}{2}a_{k+3-N}$$

(ii) N= دوره تناوب و نيز

$$b_k=\tfrac{1}{N}\,,\ for\ all\ \ k$$

بنابراين

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{\ell=\circ}^{N-1}a_\ell$$

(iii) در اينجا

$$b_k=\frac{1}{N}\left(1+e^{-j2\pi k/3}+e^{-j4\pi k/3}\right)$$

بنابراين

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{\ell=\circ}^{N-1}\left[1+e^{-2\pi j\ell/3}+e^{-j\pi\ell}\right]a_{k-\ell}$$

(ت) ۱۲= دوره تناوب و نيز

$$x[n]\xleftrightarrow{FS}a_2=a_{10}=\tfrac{1}{2}$$

ساير نقاط در بازه $\circ\le k\le 11$، $a_k=\circ$

و $$y[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = \left(\frac{1}{12}\right)\frac{\sin 7\pi k/12}{\sin \pi k/12} \circ \le k \le 11$$

بنابراین در یک دوره تناوب c_k عبارتست از:

$$c_k = \frac{1}{24}\left[\frac{\sin(7\pi(k-2)/12)}{\sin(\pi(k-2)/12)} + \frac{\sin(7\pi(k-10)/12)}{\sin(\pi(k-10)/12)}, \circ \le k \le 11\right.$$

(د) با استفاده از معادله آنالیز خواهیم داشت:

$$N\sum_{\langle N\rangle} a_\ell b_{k-\ell} = \sum_{\langle N\rangle} x[n]y[n]e^{-j\left(2\pi/N\right)k_n}$$

با جایگذاری $k=\circ$ در معادله فوق داریم:

$$N\sum_{\langle N\rangle} a_k b_{-\ell} = \sum_{\langle N\rangle} x[n]y[n]$$

حال با فرض اینکه $y[n]=x^*[n]$ خواهیم داشت $b_\ell = a^*_{-\ell}$، بنابراین:

$$N\sum_{\langle N\rangle} a_\ell a^*_\ell = \sum_{\langle N\rangle} x[n]x^*[n]$$

بنابراین

$$N\sum_{\ell=\langle N\rangle} |a_\ell|^2 = \sum_{N} |x[n]|^2$$

۳,۵۸) $x[n]$ و $y[n]$ را سیگنالهای متناوبی با دوره تناوب N بگیرید و فرض کنید.

$$z[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$$

کانولوشن متناوب آنها باشد.

(الف) نشاندهید که $z[n]$ با دوره تناوب N متناوب است.

(ب) نشاندهید که اگر a_k، b_k، و c_k به ترتیب ضرائب سری فوریه $x[n]$، $y[n]$، و $z[n]$ باشند، آنگاه

$$c_k = Na_k b_k$$

(ج) فرض کنید

$$x[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

و

$$y[n] = \begin{cases} 1, & \circ \le n \le 3 \\ \circ, & 4 \le n \le 7 \end{cases}$$

دو سیگنال با دوره تناوب ۸ هستند. نمایش سری فوریه کانولوشن متناوب این دو سیگنال را بیابید.

(د) بند (ج) را برای دو سیگنال متناوب زیر، که دوره تناوب آنها نیز ۸ است، تکرار کنید.

$$y[n] = \begin{cases} \sin,\left(\frac{3\pi n}{4}\right), & \circ \le n \le 3 \\ \circ, & 4 \le n \le 6 \end{cases}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \circ \le n \le 7$$

حل:

(الف) داریم:

$$x[n-N]=\sum_{\langle L\rangle}x[r]y[n+N-r]$$

چون $y[n]$ با دوره تناوب N، متناوب می باشد،

بنابراین $y[n+N-r]=y[n-r]$

$$z[n+N]=\sum_{\langle \ell\rangle}x[r]y[n-r]=z[n]$$

بنابراین $z[n]$ هم با پریود N، متناوب است.

(ب) ضرایب FS برای $z[n]$ عبارتست از:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{n=\langle N\rangle}a_k b_{n-k}e^{-j2\pi nt/N}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{-2\pi jk\ell/N}\sum_{n=\langle N\rangle}b_{n-k}e^{-j2\pi(n-k)\ell/N}\\
&= 1/N\, Na_l Nb_l\\
&= Na_{lbl}
\end{aligned}$$

(ج) در اینجا n=۸ و ضرایب غیر صفر FS در بازه ی $\circ \le k \le 6$ برای $x[n]$ برابرند با:

$$a_3=a_5^*=1/2j$$

توجه کنید که برای $y[n]$، مقادیر b_3 و b_5 را نیاز داریم:

$$b_3=b_5^*=\frac{1}{4\left(1-e^{-j3\pi/4}\right)}$$

بنابراین تنها ضرایب غیرصفر FS در بازه $\circ \le k \le 7$ برای کانولشن متناوب این سیگنالها عبارتند از

$$c_3 = 8a_5b_5 \ , \ c_3 = 8a_3b_3$$

(د) در اینجا

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{16j}\left[\frac{1-e^{j\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi k}{4}\right)4}}{1-e^{-j\left(\frac{3\pi}{6}-\pi k/4\right)}} - \frac{1-e^{j\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi k}{4}\right)4}}{1-e^{-j\left(3\pi/7\right)+\pi k/4}}\right]$$

,

$$y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k = \frac{1}{8}\left[\frac{1-\left(1/2\right)^8}{1-\left(1/2\right)e^{-jk\pi/4}}\right]$$

بنابراین:

$$z[n] = x[n]y[n] \xleftrightarrow{FS} 8a_kb_k$$

۳,۵۹) (الف) $x[n]$ با دوره تناوب N متناوب است. نشاندهیدکه ضرائب سری فوریه سیگنال متنـاوب زیر

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT)$$

با دوره تناوب N متناوب است.

(ب) فرض کنید $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب است و ضرائب صری فوریه a_k آن بـا دوره تنـاوب N متناوب است. نشان دهیدکه باید یک رشت متناوب $g[n]$ وجود داشته باشد، به نحوی که

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]\delta(t-kT/N)$$

(ج) آیا یک سیگنال پیوسته می تواند ضرائب سری فوریه متناوب داشته باشد؟

حل:

(الف) توجه کنید که سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب NT متناوب است. ضرایب FS

$$a_k = \frac{1}{NT}\int_{\circ}^{NT} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]\delta(t-PT)\Big] e^{-j\left(2\pi/NT\right)kt}dt$$

توجه کنید که حد سری فوق می تواند بر حسب حدود انتگرال عوض شود بنابراین داریم:

$$\propto_k = \frac{1}{NT}\int_{\circ}^{NT}\left[\sum_{p=\circ}^{n-1} x[p]\delta(t-\rho T)e^{-j\left(2\pi/NT\right)kt}dt\right]$$

با تعویض جای انتگرال و سیگما و ساده سازی $\propto_k$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
a_k &= \left(1/NT\right)\sum_{p=\circ}^{N-1} x[p]\int_{\circ}^{NT}\delta(t-pT)e^{-j\left(2\pi/NT\right)kt}dt \\
&= \left(1/NT\right)\sum_{p=\circ}^{n-1} x[p]e^{-j\left(2\pi/N\right)pk} \\
&= \left(\frac{1}{T}\right)\left[\left(1/N\right)\sum_{p=\circ}^{N-1} x[p]e^{-j\left(2\pi/N\right)pk}\right]
\end{aligned}$$

توجه شود که جمله داخل براکت در طرف راست معادله فوق ضرایب FS پیوسته سیگنال $x[n]$ است.

چون، این با تناوب N متناوب است، a_k نیز بایستی با دوره ی تناوب N متناوب باشد.

(ب) اگر ضرایب سری فوریه $x(t)$ با پریود N متناوب باشد، در اینصورت

$$a_k = a_{(K-N)}$$

که بیان می کند

$$x(t) = x(t)e^{j(2\pi/T)Nt}$$

که این اگر $x(t)$ برای همه t ها صفر شود و نیز وقتی $2\pi k = NT\left(2\pi/T\right)$ ممکن است. که $k \in z$.

بنابراین $x(t)$ به صورت زیر است:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]\delta\left(t - kT/N\right)$$

(ج) یک مثال ساده به صورت زیر:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

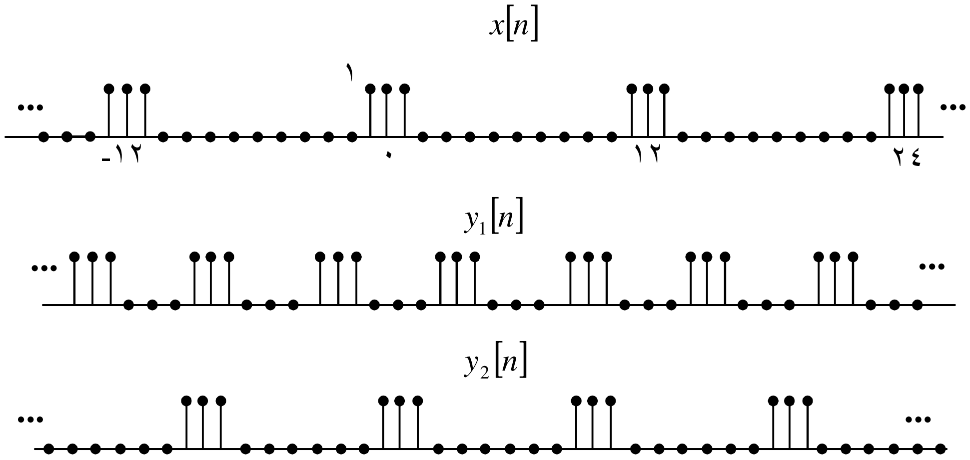
۳,٦۰) زوج سیگنالهای $x[n]$ و $y[n]$ زیر را در نظر بگیرید. به ازای هر زوج تعیین کنید که آیا سیستم LTI گسسته در زمانی وجود دارد که $y[n]$ خروجی متناظر با ورودی $x[n]$ آن باشد. در صورت وجود چنین سیستمی، آیا این سیستم یکتاست (یعنی آیا سیستم دیگری با مشخصه فوق وجود ندراد)؟ برای هر مورد پاسخ فرکانسی سیستم LTI دارای رفتار مطلوب را پیدا کنید. اگر برای یک زوج $x[n]$ و $y[n]$ سیستم LTI وجود ندارد، علت آن را توضیح دهید.

(الف) $$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \quad y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

(ب) $$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

(ج) $$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \; , \quad y[n] = 4^n u[-n]$$

(د) $x[n]=e^{jn/8}\ ,\ y[n]=2e^{jn/8}$



شکل م ۳-٦۰

(هـ) $x[n]=e^{in/8}u[n], y[n]=2e^{jn/8}u[n]$

(و) $x[n]=j^{n}\ , y[n]=2\,j^{n}(1-j)$

(ز) $x[n]=\cos(\pi n/3)\ ,\ y[n]=\cos(\pi n/3)+\sqrt{3}\sin(\pi n/3)$

(ح) $y_1[n]\ ,\ x[n]$ و شکل م ۳-٦۰

(ط) $y_2[n]\ ,\ x[n]$ و شکل م ۳-٦۰

حل:

(الف) سیستم LTI نمی باشد. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ تابع ویژه سیستم های LTI است بنابراین خروجی نیز بایستی به صورت $k\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ باشد که k ثابتی مختلط است.

(ب) می توانیم سیستم LTI ای رایانه رابط ورودی، خروجی بدست آوریم. پاسخ فرکانس این سیستم به صورت $\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)e^{j\omega}\right)/\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)$، سیستم منحصر به فرد نمی باشد.

(ج) می توانیم سیستم LTI ای را با رابطه رابطه ورودی و خروجی بدست آوریم. پاسخ فرکانسی سیستم به صورت $H(i\omega)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)e^{-j\omega}\right)/\left(1-\frac{1}{4}e^{j\omega}\right)$، سیستم منحصر به فرد نیست.

(د) می توان سیستم LTI ای را با رابطه ورودی و خروجی بدست آوریم. سیستم منحصر به فرد نیست زیرا بایستی $H\left(e^{j/8}\right)=2$.

(هـ) همانند قسمتهای قبلی می توان سیستم LTI ای را با رابطه ورودی و خروجی بدست آورد پاسخ فرکانسی سیستم برابر است با $H\left(e^{j\omega}\right)=2$ سیستم منحصر به فرد نیست.

(و) می توان سیستم LTI ای را با رابطه ورودی و خروجی بدست آورد، پاسخ فرکانسی این سیستم برابر است با: $H\left(e^{j\pi/2}\right)=2\left(1-e^{j\pi/2}\right)$.

(ذ) می توان سیستم LTI ای را با رابطه ورودی و خروجی بدست آورد. سیستم منحصر به فرد نیست زیرا ما تنها به $H\left(e^{j\lambda/3}\right)=1-j\sqrt{3}$ نیاز داریم.

(خ) توجه کنید که $x[n]$ و $y_1[n]$ با فرکانس پایه ی مشابه پریودیک است. بنابراین می توان سیستم LTI ای با رابطه ورودی – خروجی بدون نقض خاصیت تابع اصلی بدست آورد. سیستم منحصر به فرد نیست زیرا $H\left(e^{j\omega}\right)$ بایستی مقادیر خاصی تنها برای $H\left(e^{j(2\pi/12)}\right)k$ داشته باشیم. مقدار $H\left(e^{j\omega}\right)$ به دلخواه قابل انتخاب می باشد.

(i) توجه کنید که $x[n]$ و $y_1[n]$ با فرکانس پایه ای مشابهی پریودیک است. علاوه بر آن توجه کنید که $\frac{2}{3}y_2[n]$ پریود $x[n]$ را دارد. بنابراین $y[n]$ بایستی از نهایی های مختلطی تشکیل شده باشد که در

$x[n]$ حضور ندارند. این مطلب خاصیت تابع اصلی سیستم LTI را نقض می کند. بنابراین سیستم نمی تواند LTI باشد.

....

(۳,٦۱) دیدیم که روشهای تحلیل فوریه به این خاطر در بررسی سیستمهای LTI پیوسته در زمان مهم اند که نماییهای مختلط متناوب توابع ویژه سیستمهای LTI هستند. در این مسئله می خواهیم این گزاره را اثبات کنیم: هر چند بعضی از سیستمهای LTI توابع ویژه دیگری هم دارند، ولی توابع نمایی مختلط تنها توابعی اند که تابع ویژه تمام سیستمهای LTI هستند.

(الف) توابع ویژه سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t)$ را بیابید. مقادیر ویژه متناظر با هر تابع ویژه را بیابید.

(ب) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t-T)$ در نظر بگیرید سیگنالی پیدا کنید که به شکل e^{st} نباشد، ولی تابع ویژه این سیستم با مقدار ویژه ۱ باشد. همچنین دو تابع ویژه دیگر با مقدار ویژه $\frac{1}{2}$ و و ۲ پیدا کنید که نمایی مختلط نباشد. (راهنمایی: می توانید قطارهای ضربه ای پیدا کنید که شرایط لازم را ارضا کنند.)

(ج) یک سیستم LTI پایدار با پاسخ ضربه $h(t)$ حقیقی و زوج در نظر بگیرید. نشان دهید که $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ توابع ویژه این سیستم اند.

(د) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=u(t)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $\phi(t)$ تابع ویژه این سیستم با مقدار ویژه متناظر λ باشد. معادله دیفرانسیلی را که $\phi(t)$ باید ارضا کند، تعیین و حل کند. این نتیجه و نتیجه بندهای (الف) تا (ج) مسئله باید بتواند اعتبار گزاره بیان شدهدر ابتدای مسئله را ثابت کند.

حل:

(الف) برای این سیستم

$$x(t) \rightarrow \boxed{s(t)} \rightarrow x(t)$$

بنابراین تمام توابع مقدار قبلی خود را حفظ می کند.

(ب) در زیر تابع اصلی با مقدار ۱ آمده است:

$$x(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$

و تابع اصلی با مقدار ضریب $\frac{1}{2}$

$$x(t) = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(t - kT)$$

و تابع اصلی با ضریب ۲ عبارتست از:

$$x(t) = \sum_k (2)^k \delta(t - kT)$$

(ج) اگر $h(t)$ حقیقی و زوج باشد در این صورت $H(\omega)$ حقیقی و زوج خواهد بود:

$$e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

و

$$e^{-j\omega t} \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow H(-j\omega)e^{-j\omega t} = H(j\omega)e^{-j\omega t}$$

از این دو حالت می توانیم این چنین بحث کنیم که:

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow H(j\omega)\cos \omega t$$

بنابراین $\cos \omega t$ یک تابع ویژه می باشد. بنابراین به طریق مشابه نشان می دهیم که $\sin(\omega t)$ نیـز یـک تابع ویژه است.

(د) داریم:

$$\phi(t) \rightarrow \boxed{u(t)} \rightarrow \lambda\phi(t)$$

بنابراین:

$$\lambda\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(\tau) d\tau$$

با مشتقگیری از طرفین تساوی داریم:

$$\lambda\phi'(t) = \phi(t)$$

با مشتقگیری از طرفین تساوی داریم:

$$\lambda\phi'(t) = \phi(t)$$

فرض کنیم $\phi(\circ) = \phi_\circ$ در اینصورت

$$\phi(t) = \phi_\circ e^{t/\lambda}$$

۳,٦۲) یک روش ساختن منبع تغذیه dc این است که یک سیگنال ac را یکسوی تمام موج کنیم، یعنی سیگنال ac $x(t)$ را از سیستم یعبور دهیم که خروجی آن $y(t) = |x(t)|$ باشد.

(الف) شکل موجهای ورودی و خروجی را بـه ا زای $x(t) = \cos t$ رسم کنید. دوره تناوب پایه ورودی و خروجی را بیابید.

(ب) ضرایب سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t) = \cos t$ بیابید.

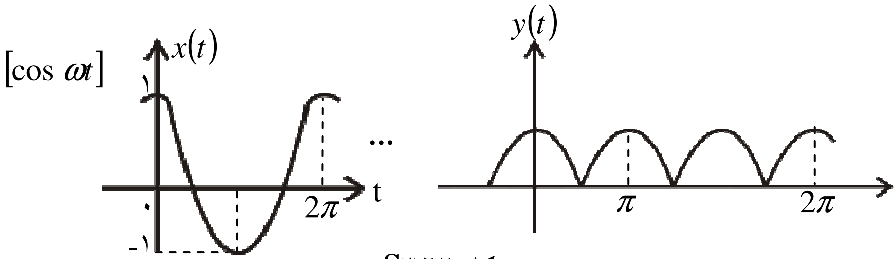
(ج) دامنه مؤلفه dc سیگنال ورودی چقدرست؟ دامنه مؤلفه dc سیگنال خروجی چقدرست؟

حل:

(الف) پریود اصلی ورود برابر است با $T = 2\pi$. پریود اصلی خروجی نیز عبارت است از $T = \pi$.
سیگنالها در شکل S۳,٦۲ نمایش داده شده اند.

(ب) ضرایب FS خروجی برابر است با:

$$b_k = \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k2)}$$



شکل S۳,٦۲

(ج) جزء DC ورودی برابر $-\circ-$است. و جزء DC خروجی $\frac{2}{\pi}$ می باشد.

۳,٦۳) فرض کنید که یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان بـه ورودی یـک سـیتم LTI اعمـال شـده است. نمایش سری فوریه سیگنال به صورت زیرست.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|} e^{jk(\pi/4)t}$$

که در آن a یک عدد حقیقی بین ۰ و ۱ است، و پاسخ فرکانسی سیستم عبارت است از

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le w \\ \circ, & |\omega| > w \end{cases}$$

W باید حداقل چقدر باشد تا انرژی متوسط در هر دوره تناوب خروجی سیستم حداقل ۹۰٪ انرژی متوسط در هر دوره تناوب $x(t)$ باشد.

حل:

توان متوسط هر دوره تناوب برابر است با:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_k |a_k|^2 = \sum_k a^{2|k|} = \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

N را طوری می خواهیم که:

$$\sum_{-N+1}^{N-1} |a_k|^2 = \circ.9 \frac{1+\propto^2}{1-\propto^2}$$

که بیان می کند

$$\frac{1-2a^{2N}+2a^2}{1-\propto^2} = \frac{1+\propto^2}{1-\propto^2}$$

حل:

$$N = \frac{\log\left[1.45a^2 + \circ.95\right]}{2\log a}$$

و

$$\frac{\pi N}{4} < \omega N \frac{(N-1)\pi}{4}$$

۳,٦٤) در این فصل دیدیم که مفهوم تابع ویژه، ابزار بسیار مهمی در مطالعه سیستمهای LTI اســت. در مورد سیستمهای خطی، ولی تغییرپذیر با زمان نیز این حرف درست است. چنـین سیـستمی بـا ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید. سیگنال $\phi(t)$ را تابع ویژه سیستم می نامیم اگر

$$\phi(t) \rightarrow \lambda\phi(t)$$

یعنی اگر به ازای $x(t)=\phi(t)$ داشته باشیم $y(t)=\lambda\phi(t)$، که در آن λ یک ثابت مختلط اســت و مقدار ویژه متناظر با $\phi(t)$ نامیده می شود.

(الف) فرض کنید می توانیم ورودی $x(t)$ سیستم فوق را به صورت ترکیب خطی توابع ویژه $\phi_k(t)$، با مقدار ویژه متناظر λ_k نمایش دهیم؛ یعنی

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\phi_k(t)$$

خروجی $y(t)$ سیستم را بر حسب $\{c_k\}$، $\{\phi_k(t)\}$، و $\{\lambda_k\}$ بیان کنید.

(ب) فرض کنید سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است

$$y(t)=t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+t\frac{dx(t)}{dt}$$

آیا این سیستم خطی است؟ آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟

(ج) نشان دهید که مجموعه توابع زیر

$$\phi_k(t)=t^k$$

توابع ویژه سیستم بند (ب) هستند. مقدار ویژه λ_k متناظر با هر $\phi_k(t)$ را پیدا کنید.

(د) خروجی سیستم فوق را به ازای ورودی زیر بیابید.

$$x(t)=10t^{-10}+3t+\frac{1}{2}t^{4}+\pi$$

حل:

(الف) بسته به خاصیت خطی پذیری، داریم:

$$y(t)=\sum_{k}c_k\lambda_k\phi_k(t)$$

(ب) فرض کنید:

$$x_2(t)\to y_2(t) \quad \text{و} \quad x_1(t)\to y_1(t)$$

و نیز فرض کنید:

$$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\to y_3(t)$$

در این صورت:

$$\begin{aligned}y_3(t)&=t^2\left[ax_1''(t)+bx_2''(t)\right]+t\left[ax_1'(t)+bx_2'(t)\right]\\&=\propto y_1(t)+by_2(t)\end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

حال فرض کنید:

$$x_4(t)=x(t-t_\circ)\to y_4(t)$$

خواهیم داشت:

$$y_4(t)=t^2\frac{d^2x(t-t_\circ)}{dt^2}+t\frac{dx(t-t_\circ)}{dt}\neq y(t-t_\circ)$$

بنابراین، سیستم تغییرپذیر با زمان است.

(ج) برای ورودی برحسب $\phi_k(t)=t^k$، خروجی برابر است با:

$$y(t)=k^2t^k=k^2\phi_k(t)$$

بنابراین $\phi_k(t)$ تابع ویژه با مقدار ویژه $\lambda_k=k^2$ می باشد.

(د) خروجی برابر است با:

$$y(t)=10^3t^{-10}+3t+8t^4$$

۳,٦٥) دو تابع $u(t)$ و $\upsilon(t)$ را در فاصله $(a\ ,\ b)$ متعامد می نامند، اگرل

$$\int_a^b u(t)\upsilon*(t)dt=\circ \qquad \text{(م ۳–٦٥–۱)}$$

همچنین اگر شرط زیر هم برقرار باشد.

$$\int_a^b |u(t)|^2dt=1=\int_a^b|\upsilon(t)|^2dt$$

$u(t)$ و $\upsilon(t)$ را بهنجار و آنها را متعامد بهنجاری می نامند. اگر تمام توابع مجموعه $\{\phi_k(t)\}$، دو به دو متعامد (متعامد بهنجار) باشند، این مجموعه را مجموعه متعامد (متعامد بهنجاری) می نامند.

(الف) زوج سیگنالهای $u(t)$ و $\upsilon(t)$ شکل م ۳–٦٥ را در نظر بگیرید. کدام یک در فاصله (۰ و ٤) متعامدند.

(ب) آیا توابع $\sin m\omega_\circ t$ و $\sin n\omega_\circ t$ در فاصله $(\circ\ ,\ T)$ (با $T=2\pi/\omega_\circ$) متعامدند؟ آیا متعامد بهنجارند؟

(ج) بند (ب) را برای توابع $\phi_n(t)$ و $\phi_m(t)$ زیر تکرار نید.

$$\phi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}[\cos k\omega_\circ t+\sin k\omega_\circ t]$$

(د) نشان دهید که مجموعه توابع $\phi_k(t)=e^{jk\omega_\circ t}$ در هر فاصله ای به طول $T=2\pi/\omega_\circ$ متعامدست. آیا این مجموعه متعامد بهنجار هم است؟

(هـ) $x(t)$ را یک سیگنال دلخواه و $x_\circ(t)$ و $x_e(t)$ را به ترتیب قسمتهای فرد و زوج آن فرض کنید. نشان دهید که به ازای هر T دلخواهی، $x_\circ(t)$ و $x_e(t)$ در فاصله $(-T\ ,\ T)$ متعامدند.

(و) نشان دهید اگر $\{\phi_k(t)\}$ در فاصله (a,b) یک مجموعه متعامد باشد، مجموعه $\{1/\sqrt{A_k})\phi_k(t)\}$، که در آن

$$A_k=\int_a^b |\phi_k(t)|^2dt$$

متعامد بهنجارست.

(ز) فرض کنید $\{\phi_i(t)\}$ در فاصله (a,b) یک مجموعه سیگنال متعامد بهنجار باشد. سیگنالی به شکل زیر در نظر بگیرید.

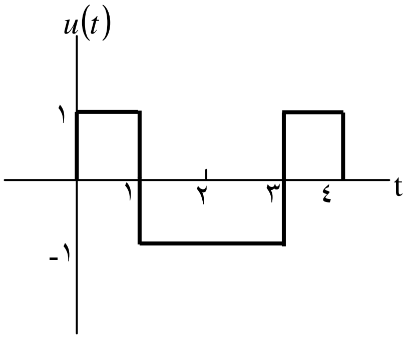
$$x(t)=\sum_i a_i\phi_i(t)$$

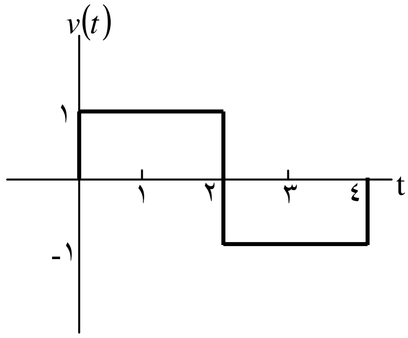
a_i ثابتهای مختلط اند، نشان دهید که

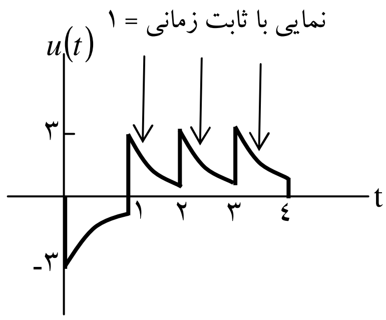
$$\int_a^b |x(t)|^2dt=\sum_i |a_i|^2$$

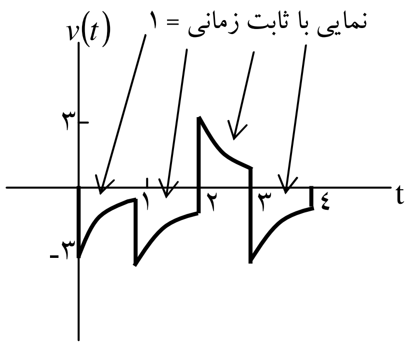
(ح) فرض کنید $\phi_1(t),\ldots,\phi_N(t)$ تنها در فاصله $\circ\le t\le T$ مقداری مخالف صر دارند و در این فاصله متعامد بهنجارند. L_i را یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر فرض کنید.

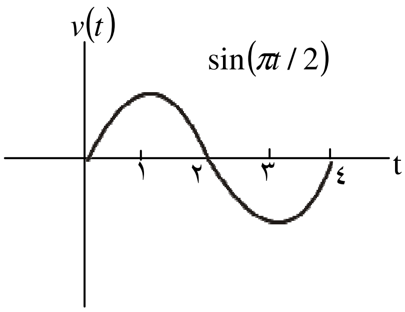
نشاندهید اگر $\phi_j(t)$ به این سیستم اعمال شود، خروجـی در زمـان T بـه ازای $i=j$ برابـر ۱، و بـه ازای $i \neq j$ برابر ۰ است. در مسائل ۲-٦٦ و ۲-٦۷، سیستمی با پاسـخ ضـربه معادلـه (م ۳-٦٥-۲) را فیلتر منطبق سیگنال $\phi_i(t)$ نامیدیم.

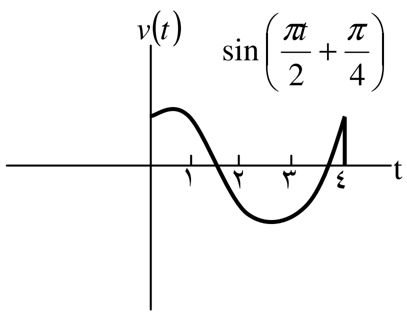


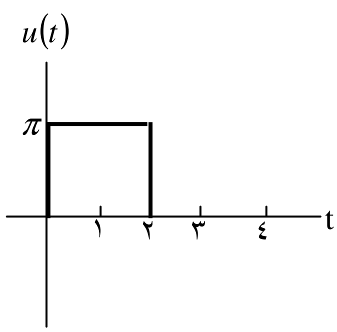


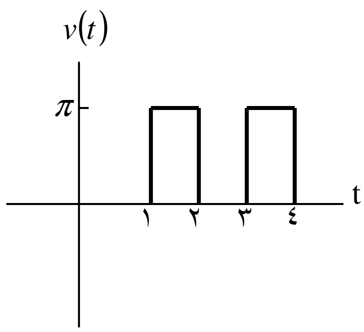












حل:

(الف) جفتهای (الف) و (ب) ارتوگنال هستند. جفتهای (ج) و (د) اورتوگنال نیستند.

اورتوگتال: منظور (توابع متعامد)

(ب) اورتگنال هستند اما اورتونرمال (توابع متعامدیکه) نیستند. $Am = {}^{1}\!/_{\omega_\circ}$

(ج) اورتونرمال.

(د) داریم:

$$\int_{t_\circ}^{t_\circ+T} e^{jm\omega_\circ\tau} e^{-jn\omega_\circ\tau} d\tau$$
$$= e^{j(m-n)\omega_\circ t_\circ} \frac{\left[e^{j(m-n)2\pi} - 1\right]}{[m-n]\omega_\circ}$$

هر گاه $m \neq n$ مقدار عبارت فوق برابر صفر است و وقتـی $m = n$ مقـدار آن برابـر jT مـی باشـد. بنابراین توابع اورتوگنال هستند اما اورتونرمال نیستند.

(هـ) داریم:

$$\begin{aligned}&\int_{-T}^{T} x_e(t)e_\circ(t)\\&=\frac{1}{4}\int_{-T}^{T}[x(t)+x(-t)][x(t)-x(-t)]dt\\&=\frac{1}{4}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt-\tfrac{1}{4}\int_{-T}^{T}x^2(-t)dt\\&=\circ\end{aligned}$$

(و) فرض کنید:

$$\begin{aligned}&\int_a^b \frac{1}{\sqrt{A_k}}\phi_k(t)\frac{1}{\sqrt{A_t}}\phi_\ell^*(t)dt\\&=\frac{1}{\sqrt{a_\ell A_k}}\int_a^b\int_a^b \phi_k(t)\phi_\ell^*(t)dt\end{aligned}$$

که حاصل عبارت فوق برای $k \neq \ell$ صفر و بـرای $k=\ell$ برابـر اسـت بـا $1= A_{k/A\ell}$. بنـابراین توابـع اورتونرمالند.

(ذ) داریم:

$$\begin{aligned}\int_a^b |x(t)|^2 dt &= \int_a^b x(t)x^*(t)dt\\&=\int_a^b \sum_i a_i\phi_i(t)\sum_j aj\phi_j^*(t)dt\\&=\sum_i\sum_j \propto_1 a_2^*\int_a^b\phi_i(t)\phi_j^*(t)dt\\&=\sum_i |a_i|^2\end{aligned}$$

(h) داریم:

$$y(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}hi(T-\tau)\phi_j(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_i(\tau)\phi_j(\tau)d\tau$$

۳,٦٦) هدف این مسئله این است که نشان دهیم نمایش سیگنالهای متناوب دلخواه به صورت سری فوریه، یا در حالتی کلی تر به صورت ترکیب خطی یک مجموعه تابع متعامد، از لحاظ محاسباتی کار است و تقریب خوبی از سیگنال به دست می دهد.

فرض کنید $\{\phi_i(t)\}$، $i=0\,,\pm1\,,\pm2\,,\,....$ در فاصله $a\le t\le b$ یک مجموعه متعامد بهنجاری، و $x(t)$ یک سیگنال دلخواه است. تقریب زیر از سیگنال $x(t)$، در فاصله $a\le t\le b$، را در نظر بگیرید.

$$\hat{x}_n(t)=\sum_{i=-N}^{+N}a_i\phi_i(t) \qquad \text{(م ۳-٦٦-۱)}$$

a_iها ضریب ثابت (و در حالت کلی مختلط) هستند. برای اندازه گیری انحراف بین $x(t)$ و تقریب سری $\hat{x}_N(t)$، سیگنال خطای $e_N(t)$ زیر را تعریف می کنیم.

$$e_N(t)=x(t)-\hat{x}_N(t) \qquad \text{(م ۳-٦٦-۲)}$$

یک معیار معقول و پرکاربرد برای سنجش کیفیت تقریب، انرژی سیگنال خطا در فاصله موردنظر، یعنی انتگرال مجذور دامنه خطا در فاصله $a\le t\le b$ است:

$$E=\int_a^b\left|e_N(t)\right|^2dt \qquad \text{(م ۳-٦٦-۳)}$$

(الف) نشان دهید که برای مینیمم کردن E باید برگزینیم.

$$a_i=\int_a^b x(t)\phi_i*(t)dt \qquad \text{(م ۳-٦٦-٤)}$$

[راهنمایی: به کمک معادلات (م ۳–٦٦–۱) تا (م ۳–٦٦–۳)، E را برحسب a_i، $\phi_i(t)$ و $x(t)$ بیان کنید. سپس a_i را به صورت قائم $a_i = b_i + jc_i$ بیان کرده، ثابت کنید که با انتخاب a_i به صورت معادله (م ۳–٦٦–٤)، روابط زیر ارضا می شوند]

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = \circ \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial E}{\partial x_i} = \circ \ , \ i = \circ \ , \ \pm 2, \dots , N$$

(ب) اگر $\{\phi_i(t)\}$ متعامد باشد ولی بهنجار نباشد و

$$A_i = \int_a^b |\phi_i(t)|^2 \, dt$$

(ج) فرض کنید $\phi_n(t) = e^{jn\omega_\circ t}$ و یک فاصله دلخواه به طول $T_\circ = 2\pi / \omega_\circ$ برگزینید. نشان دهید که اگر a_i به صورت معادله (۳–٥۰) انتخاب شود، F مینیمم می شود.

(د) مجموعه توابع والش مجموعه متعامد بهنجاری است که کاربرد زیادی دارد. (مسئله ۲–٦٦) را ببینید).

شکل م ۳–٦٦ مجموعه ای از پنج تابع والش $\phi_\circ(t)$، $\phi_1(t)$، ...، $\phi_4(t)$ را نشان می دهد، مقیاس زمان را طوری برگزیده ایم که $\phi_i(t)$ در فاصله $\circ \le t \le 1$ غیرصفر و متعامد بهنجار باشد. فرض کنید $x(t) = \sin \pi t$. تقریبی به صورت زیر برای $x(t)$ بیابید.

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=\circ}^{4} a_i \phi_{(t)}$$

به نحوی که مقدار زیر مینیمم شود

$$\int_\circ^1 |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$$

(هـ) نشان دهید که اگر a_iها مطابق معادله (م ۳–٦٦–٤) انتخاب شوند. $\hat{x}_N(t)$ معادله (م ۳–٦٦–۱) و $e_N(t)$ معادله (م ۳–٦٦–۲) متعامدند.

نتایج بندهای (الف) و (ب) بسیار مهم اند، زیرا نشان می دهند هر ضریب a_i مستقل از تمـام a_iهـای دیگرست، $i \neq j$. بنابراین با افزودن جملات بعـدی بـه تقریـب [مـثلاً محاسـبه تقریـب $\hat{x}_{N+1}(t)$]، ضرایب $\phi_i(t)$ قبلی، N، ... ، $i=1$، تغییر نمی کنند. حال یک نوع بسط دیگر یعنی بسط چنـد جملـه ای تیلور را در نظر می گیریم. بسط نامحدود سری تیلور e^t بـه شـکل ... $e^t = 1 + t^2 / 2! +$ اسـت، ولی چنانچه نشان متفاوتی به دست می آوریم.

فرض کنید $\phi_\circ(t)=1$، $\phi_2(t)=t^2$، $\phi_2(t)=t^2$ به همین ترتیب.

(و) آیا $\phi_i(t)$ ها در فاصله $\circ \leq t \leq 1$ متعامدند.

(ز) برای $x(t)=e^t$ در فاصله $\circ \leq t \leq 1$، تقریب زیر را در نظر بگیرید.

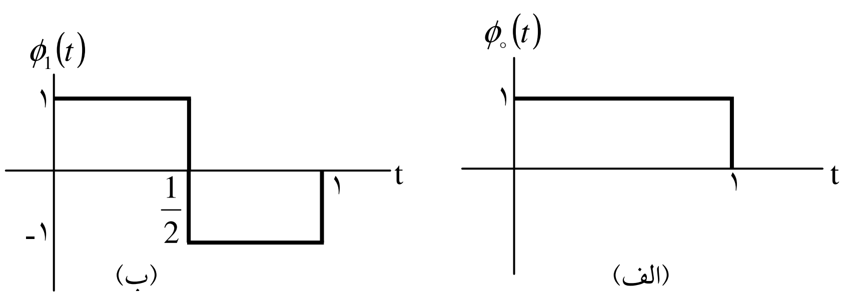
$$\hat{x}_\circ(t) = a_\circ \phi_\circ(t)$$

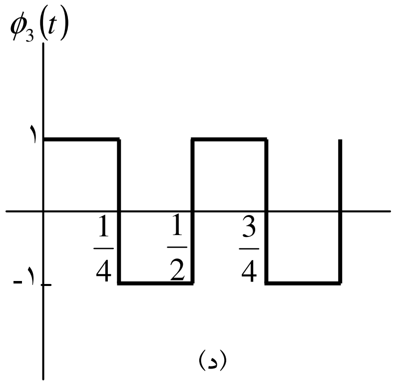
$a_\circ$ را به نحوی پیدا کنید که انرژی سیگنال خطا در فاصله $\circ \leq t \leq 1$ مینیمم شود.

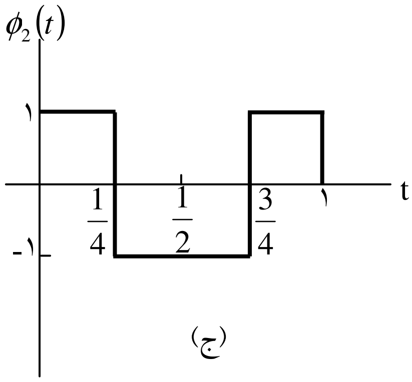
(ح) حال می خواهیم e^t را با دو جمله، به صورت $\hat{x}_1 = a_\circ + a_1 t$ تقریب بزنیم. مقادیر بهینـه $a_\circ$ و a_1 را بیابید. [راهنمایی: E را برحسب $a_\circ$ و a_1 یافته، معادلات همزمان زیر را حل کنید]

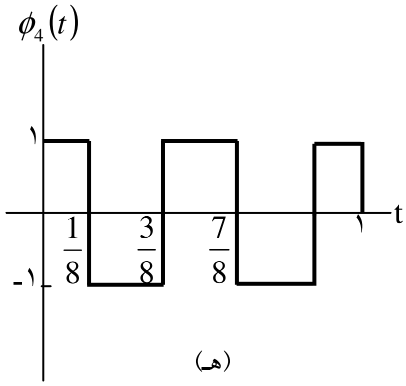
$$\frac{\partial E}{\partial a_\circ} = \circ \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial E}{\partial a_1} = \circ$$

توجه کنید که $a_\circ$ به دست آمده با $a_\circ$ بند (ز) تفاوت دارد. اگر باز هم تعداد جمـلات تقریـب را زیـاد کنیم، تمام ضرائب سری تغییر می کنند. به این ترتیب مزیت بسط برحسب توابـع متعامـد روشـن مـی شود.]









شکل م ۳-٦٦

حل:

(الف) داریم:

$$E=\int_a^b\left[x(t)-\sum_{k=-N}^{N}a_k\phi_k(t)\right]\left[x^*(t)-\sum_{k=-N}^{N}a_k^*(t)\right]dt$$

حال، فرض کنیم $a=b_{i+ja}$، داریم:

$$\frac{\partial E}{\partial b_i}=\circ=-\int_a^b\phi_i^*(t)x(t)dt+2b_i-\int_a^b\phi_i(t)x^*(t)dt$$
$$\frac{\partial E}{\partial -c_i}=\circ=j\int_a^b\phi_i(t)x^*(t)dt+2c_i-j\int_a^b\phi_i^*(t)x(t)dt$$

با ضرب معادله آخر در j و جمع با جمله قبلی داریم:

$$2b_i+2j_{ci}=2\int_a^b x(t)\phi^*(t)dt$$

که بیان می کند:

$$a_i=\int_a^b x(t)\phi^*(t)dt$$

ب) در این مورد، a_i برابر است با:

$$a_i=\frac{1}{A_i}\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt$$

ج) با انتخاب $a_k=\frac{1}{T_\circ}\int_b^{b+T_\circ}x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$

داریم: $E=\int_{T_\circ}\left|x(t)-\sum_{k=-N}^{N}a_ke^{j\omega_\circ kt}\right|^2dt$

با قرار دادن $\frac{\partial E}{\partial a_k}=\circ$ داریم:

$$a_k = \frac{1}{T_\circ}\int_{T_\circ} x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$$

(د) $a_\circ = \frac{2}{\pi_1}$ و $a_1 = a_3 = \circ$ و $a_2 = 2\left(1-2\sqrt{2}\right)/\pi$ و

$$a_4 = \left(1/\pi\right)\left[2 - 4\cos\frac{\pi}{8} + 4\cos \pi 3/8\right]$$

(هـ) داریم:

$$\int_\circ^1 \sum_i a_i\phi_i(t)^*\left[x(t) - \sum_i a_i\phi_i(t)\right]dt$$
$$= \sum_i a_i \int_\circ^1 x(t)\phi_i^*(t)$$
$$- \sum_i\sum_j a_i^* a_j \int_\circ^1 \phi_i^*(t)\phi_j(t)dt$$
$$= \sum_i a_i^* a_i - \sum_i a_i^* a_i = \circ$$

(و) ارتوگنال نیست زیرا بعنوان مثال $\int_\circ^1 \phi_\circ(t)\phi_1(t)dt = \int_\circ^1 tdt = 1 \neq \circ$

(ذ) در اینجا $a_\circ = \int_\circ^1 e^t \phi_\circ^*(t)dt = e-1$

(خ) در اینجا $\hat{x}(t) = a_\circ + a_1 t$، بنابراین

$$E = \int_\circ^1 \left(e^t - a_\circ - a_1 t\right)\left(e^t - a_\circ - a_1 t\right)dt$$

با جایگذاری $\frac{\partial E}{\partial a_1} = \circ = \frac{\partial E}{\partial a_\circ}$ داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} j2\pi n b_n(x) e^{j2\pi nt}$$
$$= \frac{1}{2} k^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 bn(x)}{\partial x^2} e^{j2\pi nt}$$

با معادل کردن ضرایب $e^{j2\pi nt}$ دو طرف معادله داریم:

$$\frac{\partial^2 h_n(x)}{\partial x^2} = \frac{j4\pi n}{k_2} b_n(x)$$

(ن) با انتخاب

$$a_k = \frac{1}{T_\circ} \int_b^{b+T_\circ} x(t) e^{-jk\omega_\circ t} dt$$

خواهیم داشت:

$$E = \int_{T_\circ} \left| xt - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\omega_\circ kt} \right|^2 dt$$

با قرار دادن $\frac{\partial E}{\partial a_k} = \circ$ خواهیم داشت:

$$a_k = \frac{1}{T_\circ} \int_{\langle T_\circ \rangle} x(t) e^{-jk\omega_\circ t} dt$$

....

۳,٦۷) در درس گفتیم که ریشه های تحلیل فوریه را می توان در مسائل فیزیک و ریاضیاتی جست. در واقع انگیزه کار فوریه بررسی مسئله نفوذ گرما بود. در این مسئله نشان می دهیم که چگونه سری فوریه در تحقیق راجع به این مسئله مورد استفاده قرار می گیرد.

فرض کنید می خواهیم دای عمق معینی از زمین را برحسب زمان پیدا کنیم، فرض می کنیم دما در سطح زمین تابع معلومی از زمان، $T(t)$ است. این تابع با دوره تناوب ۱ متناوب است. (واحد زمان یک سال است). $T(x\ ,\ t)$ دمای عمق x زیر سطح را در زمان t نشان می دهد.

این تابع از معادله نفوذ گرما تبعیت می کند.

$$\frac{\partial T(x\ ,\ t)}{\partial t}=\frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{(م ۳-٦٧-۱)}$$

و شرط کمکی آن عبارت است از

$$T(\circ\ ,\ t)=T(t) \qquad \text{(م ۳-٦٧-۲)}$$

K ثابت نفوذ گرمای زمین است $k>\circ$ فرض کنید $T(t)$ را به صورت سری فوری زیر بسط داده ایم.

$$T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{in2\pi t} \qquad \text{(م ۳-٦٧-۲)}$$

همچنین $T(x,t)$ در عمق معین x را نیز برحسب t بسط می دهیم.

$$T(x\ ,\ t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n(x)e^{in2\pi t} \qquad \text{(م ۳-٦٧-٤)}$$

ضراب سری فوریه $b_n(x)$ تابعی از عمق x هستند.

(الف) به کمک معادلات (م ۳-٦٧-۱) تا (۳-٦٧-۱٤) نشان دهید که $b_n(x)$ معادله دیفرانسیل زیر را ارضا می کند.

$$\frac{d^2 d_n(x)}{dx}=\frac{4\pi jn}{k^2}b_n(x) \qquad \text{(م ۳-٦٧-٥ الف)}$$

و شرط کمکی آن عبارت است از

$$b_n(\circ)=a_n \qquad \text{(م ۳–۶۷–۵ ب)}$$

چون معادله (م ۳–۶۷–۵ الف) یک معادله درجه دوم است، شرط مـرزی دیگـری نیـز لازم داریـم. بـر اساس استدلالهای فیزیکی می توان گفت که تغییرات دمای سطح زمین بـر دمـای اعمـاق زمـین اثـری ندارد. یعنی

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ T(x,t)=\text{ثابت} \qquad \text{(م ۳–۶۷–۵ ج)}$$

(ب) نشاندهید که جواب معادله (م ۳–۶۷–۵) به صورت زیرست.

$$b_n(x)=\begin{cases} a_n\exp\left[-\sqrt{2\pi|\pi|}(1+j)x/k\right], & n\geq\circ \\ a_n\exp\left[-\sqrt{2\pi|n|}(1-j)x/k\right], & n\leq\circ \end{cases}$$

(ج) بنابراین نوسانات دما در عمق x، صورتهای میرا شده و تغییر فاز یافته نوسانات دمای سطح است.

برای این که موضوع روشنتر شود فرض کنید.

$$T(t)=a_\circ+a_1\sin 2\pi$$

($a_\circ$ میانگین دمای سالانه است). $T(t)$ و $T(x\ ,\ t)$ را در یک دوره تناوب یکساله، به ازای

$$x=k\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

رسم کنید. فرض کنید که $a_\circ=2$ و $a_1=1$. دقت کنید که در این عمق تغییرات دما هم به شدت میرا شده و هم تغییر فاز پیدا کرده است، به نحوی که در زمستان گرمترین و در تابستان سردترین مقدار خود را دارد. دلیل ساختن انبارهای غله زیرزمینی، همین است.

حل:

(الف) از معادله (p۳,٦٧-۱) و (p۳,٦۱-٤) داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n b_n(x)} e^{j2\pi nt} = \frac{1}{2}k^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 b_n(x)}{\partial x^2} e^{j2\pi nt}$$

با معادلسازی ضرایب $e^{j2\pi nt}$ در دو طرف معادله، داریم:

$$\frac{\partial^2 b_n(x)}{\partial x_2} = \frac{j4\pi n}{k^2} b_n(x)$$

(ب) چون $S^2 = {4\pi jn}/{k^2}$؛ بنابراین

$$S = \pm \frac{2\sqrt{\pi n} e^{j\pi/4}}{k}$$

برای $n > ۰$

$$S = \frac{\sqrt{2\pi n}(1+j)}{k}$$

که یک جواب پایدار است.

و برای $n < ۰$
$$S = -\frac{\sqrt{2\pi(n)}(1-j)}{k}$$

که این نیز جوابی پایدار می باشد. همچنین $b_n(۰) =_n$ و

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n e^{-\sqrt{2\pi n}(1+j)x/k} & n > ۰ \\ a_n e^{-\sqrt{2\pi(n)}(1-j)x/k} & n < ۰ \end{cases}$$

ج) $b_{\circ}=2$ و $b_1=\left(\frac{1}{2}j\right)e^{-(1+j)\pi}$ و $b_{-1}=-\left(\frac{1}{2j}\right)e^{-(1-j)\pi}$

$$T\left(k\sqrt{\pi/2},t\right)=2+e^{-\pi}\sin(2\pi t-\pi)$$

فاز معکوس شده است.

۳,۶۸) مسیر بسته شکل م ۳-۶۸ را در نظر بگیرید. مطابق شکل، این منحنی را می توان اثر نـوک یـک بردار چرخان دارای طول متغیر در نظر رفت. $r(\theta)$ طول بردار بر حسب زاویه θ نشان می دهد. پـس $r(\theta)$ با دوره 2π متناوب است و بنابراین سری فوریـه دارد. ضـرایب سـری فوریـه تـابع $r(\theta)$ را $\{a_k\}$ فرض کنید.

(الف) تصویر بردار $r(\theta)$ بر محور x را مطابق شکل $x(\theta)$ بنامید. ضرایب سری فوریـه $x(\theta)$ را بـر حسب مقادیر a_k پیدا کنید.

(ب) رشته ضرایب زیر را در نظر بگیرید.

$$b_k=a_k e^{jk\pi/4}$$

مسیر متناظر با این ضرایب را در صفحه رسم کنید.

(ج) بند (ب) را به ازای ضرایب زیر تکرار کنید.

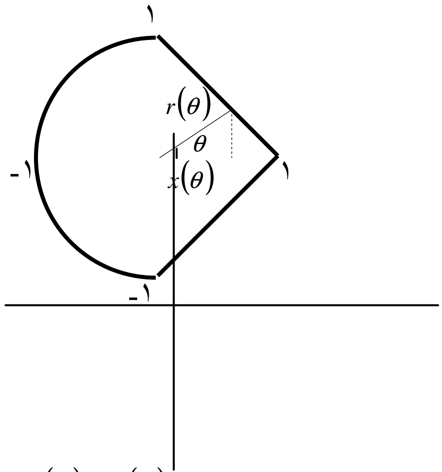
$$b_k=a_k\delta[k]$$

(د) مسیرهایی در صفحه رسم کنید که برای آنها $r(\theta)$ غیر ثابت بوده، خواص زیر را داشته باشد.

(i) $r(\theta)$ زوج باشد.

(ii) دوره تناوب پایه آن π باشد.

(iii) دوره تناوب پایه آن $\frac{\pi}{2}$ باشد.



شکل م ۳–٦۸

حل:

(الف)

$$x(\theta)=r(\theta)\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}r(\theta)e^{j\theta}+\frac{1}{2}r(\theta)e^{-j\theta}$$

اگر $x(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_k e^{j\theta}$ باشد در اینصورت $b_k=\left(\frac{1}{2}\right)\propto_{(k+1)}+\frac{1}{2}a_{(k-1)}$

(ب) $x(\theta)\xleftrightarrow{FS}bk$ در این حالت $x(\theta)=r\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$. طرح کلی در شکل S۳,٦۸ به نمـایش درآمده است.

(ج) $b_\circ=a_\circ$ پایه ی b_k صفر است. بنابراین شکل آن یک داریره به شعاع $a_\circ$ خواهد بود. چنانکـه در شکل S۳,٦۸ نشان داده شده است:

(د) (i) $r(\theta)=r(-\theta)$ زوج، شکل در S۳,٦۸ آمده است.

(ii) $r(\theta+k\pi)=r(\theta)$ شکل در S۳,٦۸ آمده است.

(iii) $r\left(\theta + k\frac{\pi}{2}\right) = r(\theta -)$. شکل در S۳,٦٨ آمده است.

....

۳,٦٩) در این مسئله همتای گسست در زمان مفاهیم بیان شده در مسائل ۳–٦٥ و ۳–٦٦ را در نظر می گیریم. مشابه حالت پیوسته در زمان دو سیگنال گسسته در زمان $\phi_k[n]$ و $\phi_m[n]$ را در فاصله (N_2 ، N_1) متعامد می نامیم.

اگر

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k[n]\phi_m^*[n] = \begin{cases} A_k, & k = m \\ \circ, & k \neq m \end{cases} \qquad (\text{م ۳–٦٩–۱})$$

اگر مقدار A_k و A_m هر دو ۱ باشد، سیگنالها را متعامد بهنجار می نامیم.

(الف) سیگنالهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi_k[n] = \delta[n-k], \qquad k = \circ\ ,\ \pm 1 , \pm 2 , \ldots , \pm N$$

نشان دهید که این سیگنالهای در فاصله $(-N\ ,\ N)$ متعامد بهنجارند.

(ب) نشاندهید که سیگنالهای

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n} \qquad , k = \circ\ ,\ 1,\ldots, N-1$$

در هر فاصله ای به طول N متعامدند.

(ج) نشان دهید اگر

$$x[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i \phi_i[n]$$

و $\phi_i[n]$ روی فاصله (N_1, N_2) متعامد باشد، آنگاه

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 A_i$$

(د) سیگنالهای $\phi_i[n]$، با $i = \circ, 1, \ldots, M$ را که در فاصله (N_1, N_2) متعامدند، در نظر بگیرید. $x[n]$ سیگنال دلخواهی است که می خواهیم آن را به صورت ترکیب خطی $\phi_i[n]$ تقریب بزنیم؛ یعنی

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=\circ}^{M} a_i \phi_i[n]$$

که در آن a_i ضرائب ثابت اند، فرض کنید.

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$

نشاندهید برای مینیمم کردن

$$E = \sum_{n=N_1}^{N_2} |e[n]|^2$$

باید a_i را به صورت زیر برگزینیم

$$a_i = \frac{1}{A_i} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \phi_i^*[n] \qquad \text{(م ۳-٦۹-۲)}$$

[راهنمایی: مانند مسئله ۳-٦٦ E را برحسب a_i، $\phi_i[n]$، A_i و $x[n]$ بیان کرده، a_i را به صورت $b_i + jc_i$ بنویسید. نشاندهید اگر a_i مطابق معادله (م ۳-٦۹-۲) برگزیده شود. روابط زیر را ارضا می کند.

$$\frac{\partial E}{\partial b_i}=\circ \qquad \frac{\partial_E}{\partial c_i}=\circ$$

توجه کنید که اگر $\phi_i[n]$ به صورت بند (ب) باشد، به کار بردن این نتیجه a_k معادله (۳-۹۵) را نتیجه می دهد.]

(هـ) نتیجه بند (د) را به زاویه $\phi_i[n]$ بند (الف) به کار برید و ضرائب a_i را برحسب $x[n]$ بیابید.

حل:

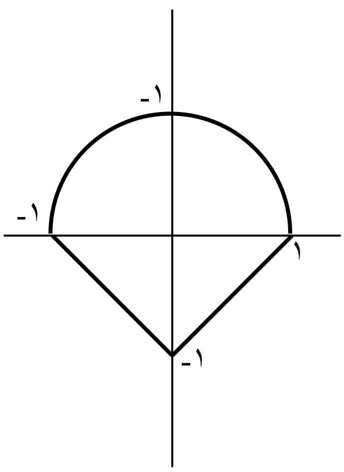
(الف)
$$\sum_{n=-N}^{N}\phi_k[n]\phi_k^*[n]=\sum_{n=-N}^{N}\delta[n-k]\delta[n-m]$$

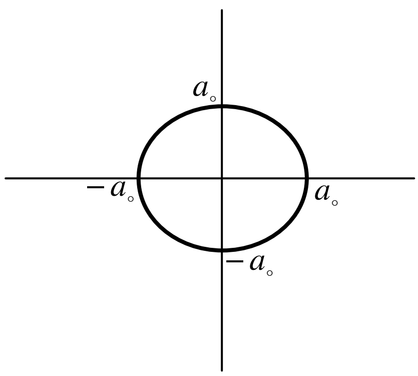
که برای $k=m$ برابر یک (۱) و برای $k\neq m$، صفر است. بنابراین اورتوگنال است.

(ب) داریم:

$$\sum_{n=r}^{r+N-1}\phi_k[n]\phi_m^*[n]=e^{j(2\pi/N)r(k-m)}\left[\frac{1-e^{j2\pi(k-m)}}{1-e^{j(2\pi/N)(k-m)}}\right]=\begin{cases}\circ & k\neq m\\ N & k=m\end{cases}$$

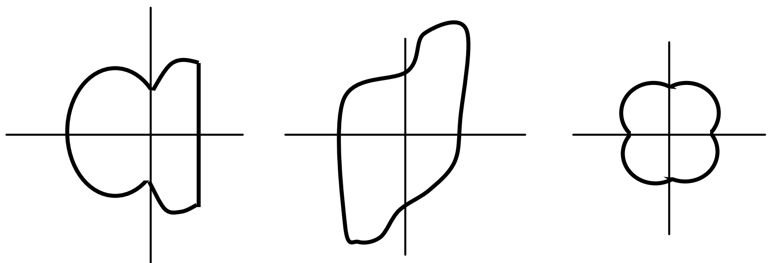
بنابراین اورتوگنال خواهد بود.





(الف)

(ب)



شکل S۳,٦٨

(ج) داریم:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2}\left|x[n]\right|^2=\sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{i=_i1}^{M}a_i\phi_i[n]\sum_{K=1}^{M}\propto_k^*\ \phi_k^*[n]$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}a_ia_k^*\sum_{n=N_1}^{N_2}\phi_k^*\sum_{n=N_1}^{N_2}\phi_k^*[n]\phi_i[n]$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}a_ia_k^*A_i\delta[i-k]=\sum^{M}\left|a_i\right|^2A_i$$

(د) فرض بفرمائید: $a_i=b_i+j_{ci}$ در اینصورت:

$$E=\sum_{n=N_1}^{N_2}|x[n]|^2+\sum_{i=1}^{M}\left(b_i^2+c_i^2\right)A_i-\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\sum_{i=1}^{M}(b_i+j_{ci})\phi_i^*[n]$$
$$-\sum_{n=-N_1}^{N_2}x^*[n]\sum_{i=1}^{M}(b_i+j_{ci})\phi_i[n]$$

حال با قرار دادن $\frac{\partial E}{\partial b}=0$ داریم:

$$b_i=[2A_i]^{-1}\left[\sum_{n=N_1}^{N_2}\{x[n]\phi_i^*[n]+x^*[n]\phi_i[n]\}\right]$$
$$=\frac{1}{A_i}\mathrm{Re}\,al\left\{\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\phi_i^*[n]\right\}$$

به طور مشابه:

$$c_i=\frac{1}{A_i}\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\phi_i^*[n]\right\}$$

بنابراین:

$$a_i=b_i+j_{ci}=\frac{1}{A_i}\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\phi_i^*[n]$$

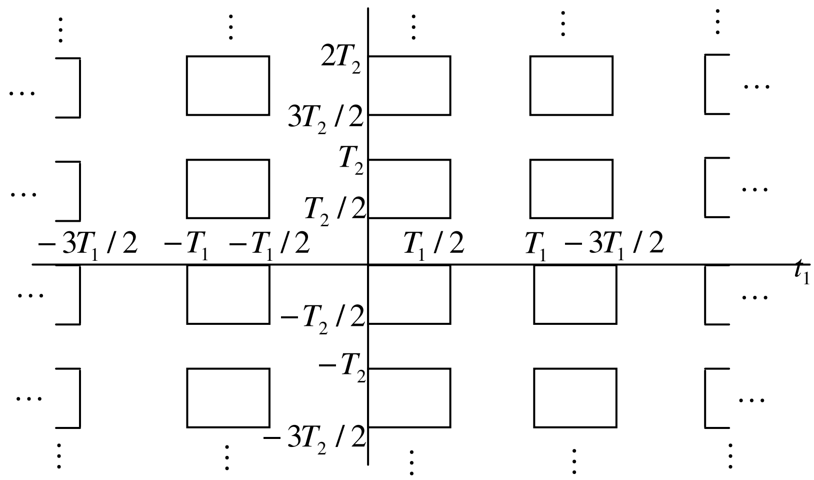
(هـ) $\phi_i[n]=\delta[n-1]$ در اینصورت:

$$a_i=\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]\delta[n-i]=x[i]$$

۳,۷۰) (الف) در این مسئله تعریف سری فوریه دو بعدی برای سیگنالهای دارای دو متغیر متسقل را در نظر می گیریم. سیگنال $x(t_1,t_2)$ را در نظر بگیرید که معادله زیر را برآورده می کند.

برای هر t_1 ، t_2 $$x(t_1,t_2)=x(t_1+T_1,\,t_2+T_2)$$

این سیگنال در جهت t_1 دارای دوره تناوب T_1 و در جهت t_2دارای دوره تناوب T_2 است. این سیگنال نمایش سری فوریه ای به صورت زیر دارد.



شکل م ۳-۷۰

$$x(t_1,t_2)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_{mn}e(m\omega_1 t_1+nm\omega_2 t_2)$$

$$\omega_1=2\pi/T_1 \qquad , \qquad \omega_2=2\pi/T_2$$

a_{mn} را برحسب (t_1,t_2) بیان کنید.

(ب) ضرایب a_{mn} را برای سیگنالهای زیر بیابید.

(i) $\cos(2\pi t_1 + 2t_2)$

(ii) سیگنال شکل م ۳-۷۰

حل:

(الف) داریم:

$$a_{mn} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{\circ}^{T_1} \int_{\circ}^{T_2} x(t_1, t_2) e^{-jm\omega_1 t_1} e^{-jn\omega_2 t_2} dt_1 dt_2$$

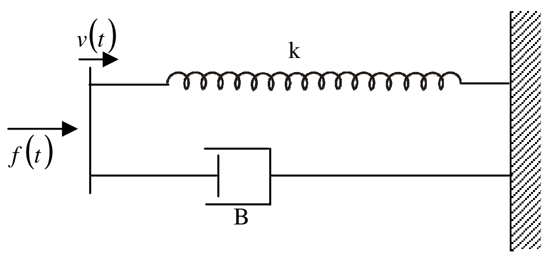
(ب) (i) $T = 1$ و $T_2 = \pi$ $a_{11} = 1/2$ و $a_{-1,-12} = 1$ مقدار تمام ضرایب صفر خواهد بود.

(ii) در اینجا

$$a_{mn} = \begin{cases} 1/n^2(mn) & m,n \text{ فرد} \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۳,۷۱) (الف) سیستم مکانیکی شکل م ۳-۷۱ را در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیلی که سرعت $v(t)$ را به نیروی ورودی $f(t)$ ربط می دهد عبارت است از

$$Bv(t) + k\int v(t)dt = f(t)$$



شکل م ۳-۷۱

(الف) خروجی را $f_s(t)$، یعنی نیروی فشرده کننده فنر فرض کنید، معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $f_x(t)$ و $f(t)$ را بنویسید. پاسخ فرکانسی سیستم را بیابید و توضیح دهید که چرا پاسخ فرکانسی مثل فیلتر پایین گذرست.

(ب) خروجی $f_d(t)$، یعنی نیروی وارد بر ضربه گیر فرض کنید. معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $f_d(t)$ و $f(t)$ را بنویسید. پاسه فرکانسی سیستم را بیابید، و نشان دهید که تقریبی از فیلتر بالا گذرست.

حل:

(الف) معادله دیفرانسیل $f(t)$ و $f_s(t)$ عبارتست از:

$$\frac{B}{K}\frac{df_s(t)}{dt}+f_s(t)=f(t)$$

توجه کنید که برای $\omega=0$، $H(j\omega)=1$ و برای $\omega\to\infty$، $H(j\omega)=0$، بنابراین سیستم تقریبی از یک فیلتر پائین گذراست.

(ب) معادله دیفرانسیل $f_d(t)$ و $f(t)$ عبارتست از:

$$\frac{df_d(t)}{dt}+\frac{k}{B}f_d(t)=\frac{df(t)}{dt}$$

پاسخ فرکانسی سیستم به سادگی از رابطه زیر بدست می آید:

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+(k/B)}$$

توجه کنید که برای $\omega=0$، $H(j\omega)=0$ و برای $\omega\to\infty$، $H(j\omega)=1$. بنابراین سیستم تقریبی از یک فیلتر بالا گذراست.

فصل چهارم:

تبدیل فوریه پیوسته در زمان:

٤,١) با استفاده از معادله تجزیه تبدیل فوریه، معادله (٤-٩)، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید:

(الف) $e^{-2(t-1)u(t-1)}$

(ب) $e^{-2|t-1|}$

اندازه تبدیل فوریه را رسم و مقدار گذاری کنید.

حل:

(الف) فرض کنید $x(t)=e^{-2(t-1)}u(t-1)$ در اینصورت تبدیل فوریه $x(j\omega)$ برای $x(t)$ عبارتــست از:

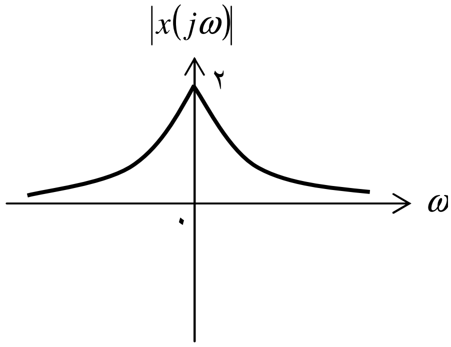
$$\begin{aligned} x(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-1)}u(t-1)e^{-j\omega t} \\ &= \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega} \end{aligned}$$

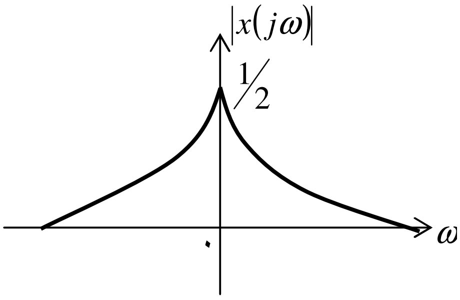
$|x(j\omega)|$ در شکل ح ٤,١. نمایش داده شده است.

(ب) فرض کنید $x(t)=e^{2}|t-1|$ که تبدیل فوریه $x(j\omega)$ عبارتست از:

$$\begin{aligned} x(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|(t-1)|}e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{i} e^{2(t-1)}e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega} + \frac{e^{-j\omega}}{2-j\omega} = \frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^{2}} \end{aligned}$$

(توجه گردد که از تعریف قدر مطلق داریم $|x(t)|=\begin{cases} x(t) & x(t)\ge \circ \\ -x(t) & x(t)\le \circ \end{cases}$ بنابراین $|t-1|$ را به صورت زیر می توان نوشت $|t-1|=\begin{cases} t-1 & t\ge 1 \\ 1-t & t<1 \end{cases}$ یعنی به عبارت دیگر ($|t-1|=(t-1)u(t-1)+(1-t)u(1-t)$) $|x(j\omega)|$. در شکل S٤,١ نمایش داده شده است.





(الف)

شکل ح ٤,١

٤,٢) با استفاده از معادله تجزیه فوریه، معادله (٤–٩)، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید:

(الف) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$

(ب) $e^{-2|t-1|}$

اندازه تبدیل فوریه را رسم و مقدارگذاری کنید.

حل:

(الف) فرض کنید $x_1(t)=\delta(t+1)+\delta(t-1)$، بنابراین تبدیل فوریه $x(t)$ که برابر است با $x_1(j\omega)$؛ عبارتست از:

$$x_1(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t+1)+\delta(t-1)]e^{-j\omega t}dt$$
$$=e^{j\omega}+e^{-j\omega}=2\cos\omega$$

$|x_1(j\omega)|$ در شکل ح ۴,۲ ترسیم شده است.

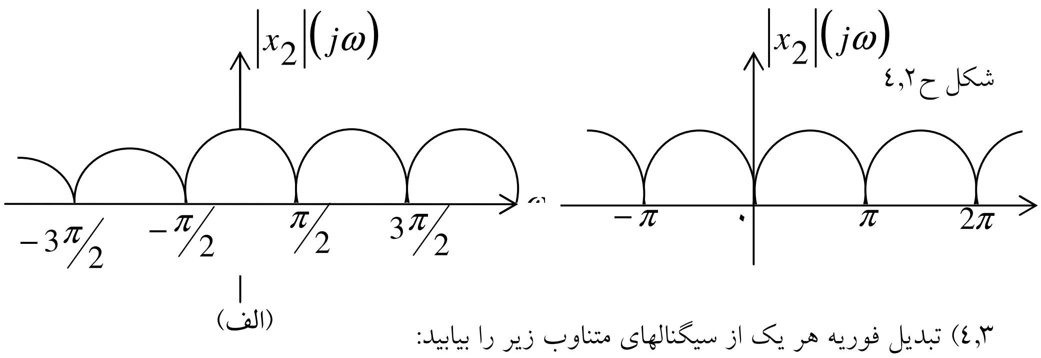
(ب) سیگنال $x_2(t)=u(-2-t)+u(t-2)$ به صورت زیر نشان داده شده است، بدیهیست که:

$$\frac{d}{dt}\{u(-2-t)+u(t-2)\}=\delta(t-2)-\delta(t+2)$$

بنابراین:

$$x_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t-2)-\delta(t+2)]e^{-j\omega t}dt$$
$$=e^{-2j\omega}-e^{2j\omega}=-2j\sin(2\omega)$$

$|x_2|(j\omega)$ در شکل ح ۴,۲ آمده است.



شکل ح ۴,۲

۴,۳) تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای متناوب زیر را بیابید:

(الف) $\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ (ب) $1+\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{8}\right)$

اندازه تبدیل فوریه را رسم و مقدارگذاری کنید.

حل:

(الف) سیگنال $x_1(t)=\sin\left(2\pi t+\pi/4\right)$ با پریود پایه $T=1$ متناوب می باشد.

که منجر به فرکانس پایه $\omega_\circ=2\pi$ می شود. ضرایب غیر صفر سری فوری این سیگنال به صورت زیر قابل بیان می باشد:

$$x_1(t)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\left(2\pi t+\pi/4\right)}\right)-e^{-j\left(2\pi t+\pi/4\right)}$$
$$=\frac{1}{2j}e^{j\pi/4}e^{j2\pi t}-\frac{1}{2j}e^{-j\pi/4}e^{-j2\pi t}$$

بنابراین، ضرایب غیرصفر سری فوریه $x_1(t)$ عبارتند از:

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2j}e^{j\pi/4}e^{j2\pi t} \\ , \\ a_{-1}=\frac{-1}{2j}e^{-j\pi/4}e^{-2j\pi t} \end{cases}$$

از قسمت ٤,٢ می دانیم که برای سیگنالهای متناوب تبدیل فوریه شامل قطارهای ضربه ای است که در نقاط $k\omega_\circ$ رخ می دهند. بعلاوه ناحیه ی هر ضربه 2π برابر (در حوزه زمان) ضرایب سری فوریه a_k می باشد. بنابراین برای $x_1(t)$، تبدیل فوریه متناظر $x_1(j\omega)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$x_1(j\omega)=2\pi a\delta(\omega-\omega_\circ)+2\pi a_{-1}\delta(\omega-\omega_\circ)$$
$$=\left(\pi/j\right)e^{j\pi/4}\delta(\omega-2\pi)-\left(\pi/j\right)e^{-j\pi/4}\delta(\omega+2\pi)$$

(ب) سیگنال $x_2(t)=1+\cos\left(6\pi t+\pi/6\right)$ با پریود $T=1/3$ متناوب است که منجر به فرکانس پایه $\omega_\circ=6\pi$ می شود. ضرایب غیر صفر سری فوریه این سینال به صورت زیر بدست می آید:

$$x_2(t)=1+1/2\left(e^{j(6\pi t+\pi/8)}+e^{-j(6\pi t+\pi/8)}\right)$$
$$=1+1/2\,e^{j\pi/8}e^{j\pi 6t}+\frac{1}{4}e^{-j6\pi}e^{j\pi/8}$$

بنابراین ضرایب FS غیر صفر عبارتند از:

$$a_\circ=1\,,\;a_1=1/2\,e^{j\pi/8}e^{j6\pi}$$
$$a_{-1}=1/2\,e^{-j\pi/8}e^{j6\pi}$$

از قسمت ٤,٢ می دانیم که برای سیگنالهای متناوب، تبدیل فوریه شامل قطارهای ضربه ای می باشد که در نقاط $k\omega_\circ$ رخ می دهند. بعلاوه ناحیه زیر هر ضربه 2π برابر ضرایب تبدیل فوریه a_k می باشد.

$$x_2(j\omega)=2\pi a_\circ\delta(\omega)+2\pi a_1\delta(\omega-\omega_\circ)+2\pi a_{-1}\delta(\omega+\omega_\circ)$$
$$=2\pi\delta(\omega)+\pi e^{j\pi/8}\delta(\pi-6\pi)+\pi e^{-j\pi/8}\delta(\omega+6\pi)$$

٤,٤) معادله ترکیب تبدیل فوریه، معادله (٤-٨) برای تعیین عکس تبدیل فوریه های زیررا به کار برید:

(الف) $X_1(j)=2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-4\pi)+\pi\delta(\omega+4\pi)$

$$X_2(j\omega)=\begin{cases}2, & \circ\le\omega\le 2\\ -2, & -2\le\omega<\circ\\ \circ, & |\omega|>2\end{cases}$$ (ب)

حل:

(الف) برای تبدیل فوریه معکوس داریم:

$$\begin{aligned}x_1(t)&=\left(1/2\pi\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2\pi\delta(\omega+\pi)+\pi\delta(\omega+4\pi)\right]e^{j\omega t}dt\\&=\left(1/2\pi\right)\left[2\pi e^{j\circ t}+\pi e^{j4\pi t}+\pi e^{-j4\pi t}\right]\\&=1+\left(1/2\right)e^{j4\pi t}+\left(1/2\right)e^{-j4\pi t}=1+\cos(4\pi t)\end{aligned}$$

(ب) تبدیل فوریه معکوس عبارتست از:

$$\begin{aligned}x_2(t)&=\left(1/2\pi\right)\int_{-\infty}^{\infty}x_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\\&=\left(1/2\pi\right)\int_{\circ}^{2}2e^{j\omega t}d\omega+\left(1/2\pi\right)\int_{-2}^{\circ}(-2)e^{j\omega t}dt\\&=\left(e^{j2t}-1\right)/\pi jt-\left(1-e^{-j2t}\right)/\pi jt\\&=-\left(4j\sin^2 t\right)/(\pi t)\end{aligned}$$

۴,۵) معادلــه ترکیــب تبــدیل فوریــه، معادلــه (۴-۸) را بــرای تعیــین عکــس تبــدیل فوریــه $|X(j\omega)|e^{j\sphericalangle X(j\omega)}$ به کار برید که در آن:

$$|X(j\omega)|=2\{u(\omega+3)-u(\omega-3)\}$$

$$\sphericalangle X(j\omega)=-\frac{3}{2}\omega+\pi$$

با استفاده از جواب به دست آمده مقادیری از t را بیابید که به ازای آنها $x(t)=\circ$.

حل:

با استفاده از اطلاعات داده شده:

$$x(t)=\left(1/2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\omega)e^{j\omega t}dtu$$
$$=1/2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|x(j\omega)|e^{ic}\{x(j\omega)\}e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3}2e^{-\frac{3}{2}\omega+\pi}e^{j\omega t}dt$$
$$=\frac{-2}{\pi\left(t-3/2\right)}\sin\left[3\left(t-3/2\right)\right]$$

سیگنال $x(t)$ وقتی که $3\left(t-3/2\right)$ حاصلضرب یک عدد غیر صفر صحیح در π باشد، صفر خواهد بود.

که در نتیجه:

$$t=\frac{k\pi}{2}+3/2\ ,\ for\ k\in z\ ,\ k\neq \circ$$

٤,٦) با فرض این که $x(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(j\omega)$ است، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بر حسب $X(j\omega)$ بیابید. از خواص تبدیل فوریه مدرج در جدول ٤-١ استفاده کنید.

(الف) $x_1(t)=x(1-t)+x(-1-t)$

(ب) $x_2(t)=x(3t-6)$

(ج) $x_3(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$

حل:

برای حل این مسئله فرض می کنیم که:

$$x(t)\xleftrightarrow{FT}x_1(j\omega)$$

(الف) با استفاده از خاصیت معکوس زمانی (بخش ٤,٣٥) داریم:

$$x(-t)\xleftrightarrow{FT}x(-j\omega)$$

با استفاده از خاصیت شیفت زمانی (٤,٣,٢ را ببینید.) در این مسأله خواهیم داشت:

$$x(-t+1)\xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t}x(-j\omega) \quad \text{و} \quad x(-t-1)\xleftrightarrow{FT} e^{j\omega t}x(-j\omega)$$

($FT \leftarrow$ تبدیل فوریه)

بنابراین

$$x_1(t)=x(-t+1)+x(-t-1)\xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t}x(-j\omega)+e^{j\omega t}x(-j\omega)$$
$$\xleftrightarrow{FT} 2x(-j\omega)\cos\omega$$

(در این قسمت از خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه استفاده شده است.)

(ب) با استفاده از خاصیت اسکیل در زمان (٤،٣،٥ را ببینید) داریم:

$$x(3t)\xleftrightarrow{FT} \tfrac{1}{3}x\left(j\frac{\omega}{3}\right)$$

با استفاده از خاصیت شیفت زمانی در این قسمت داریم:

$$x_2(t)=x(3(t-2))\xleftrightarrow{FT} e^{-2j\omega}\,\tfrac{1}{3}x\left(j\,\omega/3\right)$$

(ج) با استفاده از خاصیت دیفرانسیل در حوزه زمان (٤،٣،٤ را ببینید ...) داریم:

$$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{T} j\omega x(j\omega)$$

با بکارگیری دوباره این خاصیت، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}\xleftrightarrow{FT} -\omega^2x(j\omega)$$

حال مجدداً در این قسمت نیز با استفاده از خاصیت شیفت زمانی، داریم:

$$x_3(t)=\frac{d^2x(t-1)}{dt^2}\xleftrightarrow{FT} -\omega^2x(j\omega)e^{-j\omega t}$$

٤،٧) با استفاده از خواص تبدیل فوریه مندرج در جدول ٤-١ تعیین کنید که سیگنال حوزه زمان متناظر با تبدیلهای داده شده (i) حقیقی است، موهومی است، با هیچکدام، و (ii) زوج است، فردست، یا هیچکدام. برای جواب دادن، عکس تبدیل فوریه را حساب نکنید.

(الف) $X_1(j\omega)=u(\omega)-u(\omega-2)$

(ب) $X_2(j\omega)=\cos(\omega)\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$

(ج) $x_3(J\omega)=a(\omega)e^{iB(\omega)}$ که در آن $A(\omega)=(\sin 2\omega)/\omega$ و $B(\omega)=2\omega+\frac{\pi}{2}$

(د) $X(j\omega)=\sum k^{\infty}=-\infty\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)$

حل:

(الف) بدلیل اینکه $x_1(j\omega)$ متقارن مزدوج نیست، سیگنال متناظر $x_1(t)$ حقیقی نمی باشد. بـدلیل اینکه $x_1(j\omega)$ زوج بوده و فرد نیست، سیگنال متناظر $x_1(t)$ نیز زوج می باشد و فرد نیست.

(ب) تبدیل فوریه سیگنالهای حقیقی و فرد بطور خالص موهومی و مردمی می باشند. بنابراین مـی توانیم نتیجه بگیریم کـه تبـدیل فوریـه یـک سـیگنال فـرد و موهـومی خـالص حقیقـی و فـرد اسـت. چون $x_2(j\omega)$ موهومی خالص و فرد است.

(ج) فرض کنید سیگنال $y_3(t)$ که اندازه تبدیل فوریه آن $|Y_3(j\omega)|=A(\omega)$ مفروض است و فاز تبـــدیل فوریـــه آن عبارتـــست از $\Delta\{Y_3(j\omega)\}=2\omega$. بـــدلیل اینکـــه $|Y_3(-j\omega)|=|Y_3(j\omega)|$ و $\Delta\{Y_3(j\omega)\}=-\Delta\{Y_3(-j\omega)\}$ می توانیم نتیجه بگیریم که $y_3(t)$ حقیقی است. (جـدول ٤,٣,٣ را ببینید).

حال فرض کنید تبدیل فوریه سیگنال $x_3(t)$ به صـورت $x_3(j\omega)=Y_3(j\omega)e^{j\pi/2}=jY_3(j\omega)$ باشد.

با استفاده از نتیجه پاراگراف قبلی و خاصیت خطی تبدیل فوریه می توان نتیجه گرفت کـه $x_3(t)$ حتماً بایستی موهومی باشد. چون تبدیل فوریه $x_3(j\omega)$ به صورت خـالص موهـومی بـوده و حقیقـی خالص نیست. بنابراین سیگنال $x_3(t)$ نه فرد است و نه زوج.

(د) بدلیل اینکه $x_4(j\omega)$ هم زوج و هم حقیقی است، سیگنال متناظر $x_4(t)$ زوج و حقیقی است.

٤,٨) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

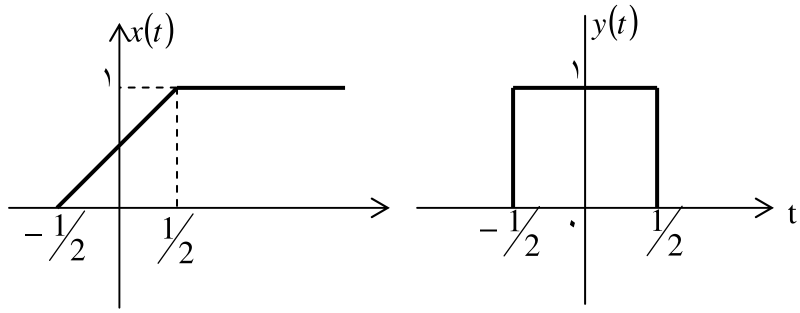
$$x(t)=\begin{cases} \circ \quad , & t<-\frac{1}{2} \\ t+\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\le t\le \frac{1}{2} \\ 1 \quad , & t>\frac{1}{2} \end{cases}$$

(الف) بااستفاده از خواص مشتقگیری و انتگرالگیری جدول ٤-١ و تبدیل فوریه پالس مستطیلی جدول ٤-٢ عبارت ریاضی $X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) تبدیل فوریه $g(t)=x(t)-\frac{1}{2}$ را بیابید.

حل:

(الف) سیگنال سیگنال $x(t)$ در شکل S.٤,٨ به نمایش درآمده است.



شکل ح٤,٨.

می توان سیگنال $x(t)$ را به صورت زیر بیان نمود:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} y(t)dt$$

که $y(t)$ پالس مستطیلی نشان داده شده در شکل ح٤,٨ می باشد. با استفاده از خاصیت انتگرال گیری تبدیل فوریه، داریم:

$$x(t)\xleftrightarrow{FT} x(j\omega)=\frac{1}{j\omega}Y(j\omega)+\pi Y(j_{\circ})\delta(\omega)$$

از جدول ٤,٢ می دانیم که:

$$Y(j\omega)=\frac{2\sin\left(\omega/2\right)}{\omega}$$

بنابراین:

$$x(j\omega)=\frac{2\sin \omega/2}{j\omega^2}+\pi\delta(\omega)$$

(ب) اگـر $g(t)=x(t)=1/2$ در اینـصورت تبـدیل فوریـه $g(t)$ کـه برابـر اسـت بـا $G(j\omega)$ عبارتست از:

$$G(j\omega)=x(j\omega)-\left(1/2\right)(2\pi)\delta(\omega)=\frac{2\sin\left(\omega/2\right)}{j\omega^2}$$

٤,٩) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t)=\begin{cases} \circ & , \quad |t|>1 \\ (t-1)/2 & , \quad -1\le t\le 1 \end{cases}$$

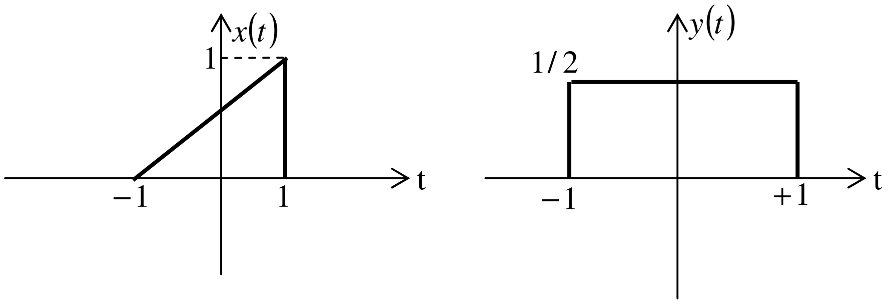
(الف) با استفاده از جدولهای ٤-١ و ٤-٢ عبارت $X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) بخش حقیقی جواب بند (الف) را بیابید و نشان دهیـد کـه تبـدیل فوریـه بخـش زوج $x(t)$ است.

(ج) تبدیل فوریه بخش فرد $x(t)$ را بیابید.

حل:

(الف) سیگنال $x(t)$ در شکل ح٤,٩. به نمایش در آمده است.



شکل ح٤,٩.

مشاهده می کنیم که این سیگنال بسیار مشابه سیگنالی است که در مسأله قبلی فرض کردیم. در حقیقت دوباره می توان گفت که $x(t)$ برحسب پالس مستطیل $y(t)$ که در بالا نشان داده شده به صورت زیر است:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} y(t)dt-\upsilon\left(t-\tfrac{1}{2}\right)$$

با استفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (الف) مسئله قبلی، تبدیل فوریه $x(t)$ که همان $x(j\omega)$ می باشد به صورت زیر است:

$$x(j\omega)=\frac{2\sin\left(\omega/2\right)}{j\omega^2}+\pi\delta(\omega)-FT\left\{u\left\{t-\tfrac{1}{2}\right\}\right\}$$

$$=\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{j^{\omega}}$$

(ب) قسمت زوج $x(t)$ به صورت زیر است:

$$\varepsilon v\{x(t)\}=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

که این در شکل ح٤،٩ نشان داده شده است، بنابراین

$$FT\{\varepsilon v\{x(t)\}\}=\frac{\sin\omega}{\omega}$$

حال قسمت حقیقی جواب قسمت (الف) برابر است با:

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}\right\}=\left(1/\omega\right)\mathrm{Re}\{j(\cos\omega-j\sin\omega)\}=\frac{\sin\omega}{\omega}$$

(ج) تبدیل فوریه قسمت فرد $x(t)$ j برابر است موهومی جواب قسمت (الف) می باشد، داریم:

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}\right\}=-\frac{\sin\omega}{\omega^2}+\frac{\cos\omega}{\omega}$$

بنابراین، نتیجه مطلوب عبارتست از:

$$FT\{dd\{x(t)\}\}=\frac{\sin\omega}{j^{\omega 2}}-\frac{\cos\omega}{j^{\omega}}$$

....

٤,١٠) (الف) با استفادهاز جدولهای ٤-١ و ٤-٢ تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید:

$$x(t)=t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2$$

(ب) با استفاده از رابطه پارسئوال و جواب بند (الف) مقدار عددی انتگرال زیر را بیابید:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 dt$$

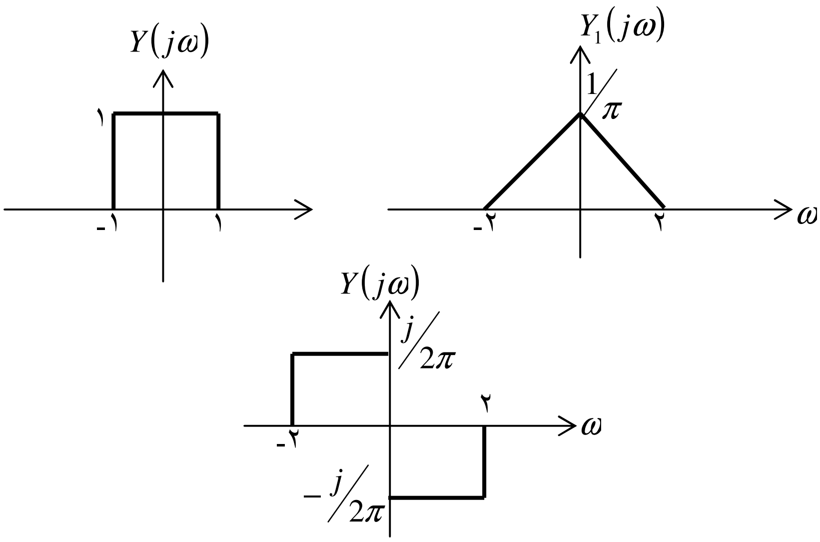
حل:

از جدول ٤,٢ می دانیم که:

[شکل ح٤,١٠ را ببینید] تابع مستطیلی $\frac{\sin t}{\pi t} \xleftrightarrow{FT} \{Y(j\omega)\}$

$\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{FT} \left(\frac{1}{2\pi}\right)$ {تابع مستطیلی $Y(j\omega)$ * }

که این تابع مثلثی $Y_1(j\omega)$ چنانچه در شکل S٤,١٠ آمده است را بوجود می آورد:



شکل ح ٤,١٠

با استفاده از جدول ٤,١ می توانیم بنویسیم:

$$t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{FT} x(j\omega)=j\frac{d}{d\omega}Y_1(j\omega)$$

که این در شکل فوق نشان داده شده است. $x(j\omega)$ به صورت ریاضی عبارتست از:

$$x(j\omega)=\begin{cases} j/2\pi & -2\leq\omega\leq\circ \\ -j/2\pi & \circ\leq\omega/2 \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(ب) با استفاده از رابطه پارسئوال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(j\omega)|^2 d\omega=\frac{1}{2\pi^3}$$

....

٤,١١) روابط زیر را داریم

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

و

$$g(t)=x(3t)*h(3t)$$

تبدیل فوریه $x(t)$ و $h(t)$ به ترتیب $X(j\omega)$ و $H(j\omega)$ است به کمک خواص تبدیل فوریه نشان دهید که تبدیل فوریه $g(t)$ به شکل زیرا ست :

$$g(t)=Ay(Bt)$$

مقادیر A و B را تعیین کنید.

حل:

می دانیم که:

$$x(3t)\xleftrightarrow{FT}\tfrac{1}{3}x\left(\tfrac{j\omega}{3}\right) \quad , \quad h(3t)\xleftrightarrow{FT}\tfrac{1}{3}H\left(\tfrac{j\omega}{3}\right)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} G(j\omega)&=FT\{x(3t)*h(3t)\} \\ &=\frac{1}{9}x\left(\tfrac{j\omega}{3}\right)H\left(\tfrac{j\omega}{3}\right) \end{aligned}$$

حال توجه کنید که:

$$Y(j\omega) = FT\{x(t) * h(t)\}$$
$$= x(j\omega).H(j\omega)$$

با استفاده از این می توان نوشت:

$$Y\left(\frac{j\omega}{3}\right) = x\left(\frac{j\omega}{3}\right)H\left(\frac{j\omega}{3}\right)$$

با استفاده از رابطه (**) داریم:

$$G(j\omega) = \frac{1}{g}Y\left(\frac{j\omega}{3}\right)$$

,

$$g(t) = \frac{1}{3}\, y(3t)$$

بنابراین $A = \frac{1}{3}$ و $B = 3$.

٤,١٢) زوج تبدیل فوریه زیر را در نظر بگیرید

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathfrak{I}} \frac{1}{1+\omega^2}$$

(الف) با استفاده از خواص مناسب تبدیل فوریه، تبدیل فوریه $t\,e^{-|t|}$ را بیابید.

(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) و خاصیت همزادی تبدل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

راهنمایی: مثال ٤–١٣ را ببینید.

حل:

(الف) از مثال ٤,٢ می دانیم که:

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} \frac{2}{1+\omega^2}$$

با استفاده از خاصیت مشتقگیری در فرکانس داریم:

$$te^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{2}{1+\omega^2}\right\} = -\frac{4j\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$$

(ب) از خاصیت دوگان

$$g(t) \xleftrightarrow{FT} G(j\omega)$$
$$G(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi\ g(j\omega)$$

حال :

$$t\ e^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} -\frac{4j\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$$

می توان از خاصیت دوگان برای نوشتن

$$-\frac{4jt}{\left(1+t^2\right)^2} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\omega\ \bar{e}^{|\omega|}$$

استفاده کرد.

اگر دو طرف معادله را در j ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2} \xleftrightarrow{FT} j2\pi\omega\ \bar{e}^{|\omega|}$$

٤,١٣) فرض کنید $x(t)$ دارای تبدیل فوریه زیرست

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega-\pi) + \delta(\omega-5)$$

و

$$h(t) = u(t) - u(t-2)$$

(الف) آیا $x(t)$ متناوب است؟

(ب) آیا $x(t) * h(t)$ متناوب است؟

(ج) آیا کانولوشن دو سیگنال نامتناوب می تواند متناوب باشد؟

حل:

(الف) با گرفتن عکس تبدیل فوریه $x(j\omega)$؛ داریم:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}e^{j\pi t} + \frac{1}{2\pi}e^{j5t}$$

بنـابراین سـیگنال $x(t)$ مجمـوعی ثابـت بـا دو نمـایی مخـتلط اسـت کـه فرکاسـن پایـه آنهـا برابر $\frac{2\pi}{5}\left(rad/\sec\right)$ و $2\left(rad/\sec\right)$ این دو سیگنال مختلط به صورت هارمونیکی بـا هـم رابطـه ای ندارنـد. یعنی فرکانس پایه این نماهای مختلط نمی تواند هیچگاه حاصلضرب انتگرال فرکانـسهای پایـه باشـد. بنابراین، سیگنال پریودیک نیست.

(ب) فرض کنید سیگنال $y(t)=x(t)*h(t)$. با استفاده از خاصیت انتگرال کانولوشن، مـی دانـیم که $Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)$.

نیز از $h(t)$، می دانیم که

$$H(j\omega)=e^{-j\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

تابع $H(j\omega)$ هنگامیکه $\omega=k\pi$، برابر صفر است. که k صحیح غیر صفر است. بنابراین:

$$Y(j\omega)H(j\omega)=\delta(\omega)+\delta(\omega-5)$$

که می دهد:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}e^{j5t}$$

بنابراین $y(t)$ حاصل جمع نمایی مختلطی است که ثابت است. می دانیم کـه یـک نمـایی مخـتلط متناوب می باشد. با افزودن یک ثابت به نمایی مختلط تأثیری روی متناوب بودن آن ایجاد نمـی شـود. بنابراین $y(t)$، سیگنالی با فرکانس پایه ی $2\pi/5$ خواهد بود.

(ج) از نتایج قسمت (الف) و (ب) ملاحظه شود که جواب مثبت است، (بلی)

٤,١٤) سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ را در نظر بگیرید. اطلاعات زیر داده شدهاست:

۱. $x(t)$ حقیقی و غیر منفی است.

۲. $\Im^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\}=Ae^{-2t}u(t)$

۳. $\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega=2\pi$

$x(t)$ را بیابید.

حل:

با گرفتن عکس تبدیل فوریه از طرفین تساوی، داریم

$$F^{-1}\{(1+j\omega)x(j\omega)\}=A2^{-2t}u(t)$$

دوباره داریم:

$$x(j\omega)=\frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)}=A\left\{\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}\right\}$$

با گرفتن تبدیل فوریه معکوس از معادله فوق داریم:

$$x(t)=Ae^{-t}u(t)-Ae^{-2t}u(t)$$

با استفاده ازرا بطه پارسئوال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(j\omega)|^2\,d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$$

با استفاده از این حقیقت که $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(j\omega)|^2\,d\omega=2\pi$ ، داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2.dt=1$$

با جایگذاری $x(t)$ در رابطه فوق داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^2e^{-2t}+A^2e^{-4}-2A^2e^{-3t}\right)u(t)dt=1$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\left(A_2e^{-2t}+Ae^{-4t}-2A^2e^{-3t}\right)dt=1$$

$$\Rightarrow\frac{A^2}{12}=1\Rightarrow\pm\sqrt{12}=A$$

جواب نهایی قابل قبول $+\sqrt{12}$ می باشد زیرا $x(t)$ منفی نمی باشد.

٤,١٥) سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ را در نظر بگیرید. اطلاعات زیر داده شده است:

۱. $x(t)$ حقیقی است.

۲. در $t\leq 0$ ، $x(t)=0$

۳. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Re e\{X(j\omega)\}e^{j\omega t}\,d\omega=|t|e^{-|t|}$

عبارت ریاضی $x(t)$ را بیابید.

حل:

می دانیم $x(t)$ حقیقی است در اینصورت

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} \text{Re}\{x(j\omega)\}$$

دوباره داریم:

$$\ell FT\{\text{Re}\{x(j\omega)\}\} = |t|e^{-|t|}$$

بنابراین:

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} = |t|e^{-|t|}$$

همچنین می دانیم که برای $t \leq 0$ $x(t)=0$. که بیان می کند برای $t>0$، $x(-t)$. می توان نتیجه گرفت

$$x(t) = 2|t|e^{-|t|} \quad for \quad t \geq 0$$

بنابراین

$$x(t) = 2te^{-t}u(t)$$

۴,۱۶) سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)} \delta\left(t - k\frac{\pi}{4}\right)$$

(الف) $g(t)$ را به نحوی تعیین کنیدکه داشته باشیم

$$x(t) = \left(\frac{\sin t}{\pi t}\right) g(t)$$

(ب) با استفاده از خاصیت ضرب تبدیل فوریه نشان دهیـد کـه $X(j\omega)$ را در یـک دوره تنـاوب تعیین کنید.

حل:

(الف) می توان نوشت:

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi/4}\pi\delta\left(t-k\pi/4\right)$$

بنابراین

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta\left(t-k\pi/4\right)$$

(ب) چون $g(t)$ یک قطار ضربه است؛ تبدیل فوریه $G(j\omega)$ قطار ضربه خواهد بود.

از جدول ٤,٢

$$G(j\omega)=\pi\frac{2\pi}{\pi/4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{\pi/4}\right)$$

$$=8\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-8k)$$

ملاحظه می شود که $G(j\omega)$، پریود ۸ پریودیک است. با استفاده از خاصیت ضرب می دانیم که

$$x(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{FT\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\}*G(j\omega)\right\}$$

اگر $FT\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\}$ را با نماد $A(j\omega)$ نشان دهیم؛ در اینصورت

$$x(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[A(j\omega)*8\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A(j\omega-8k)\right]$$

$x(j\omega)$ همان $aA(j\omega)$ که هر $8\,rad/\sec$ تکرار می شود، می باشد. که مشخصاً پریودیک است. با استفاده از جدول ٤,٢، داریم:

$$A(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le 1\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین، $x(j\omega)$ را در یک پریود به صورت زیر می توانیم نشان دهیم:

$$x(j\omega)=\begin{cases}4 & |\omega|\le 1\\ ۰ & 1\le|\omega|\le 4\end{cases}$$

....

٤,١٧) درستی و نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. برای جواب خود دلیل بیاورید.

(الف) تبدیل فوریه یک سیگنال فرد و موهومی همیشه فرد و موهومی است.

(ب) کانولوشن یک تبدیل فوریه فرد و یک تبدیل فوریه زوج همیشه فردست.

حل:

از جدول ٤,١ می دانیم که، سیگنال حقیقی و فرد $x(t)$، تبدیل فوریه ای فـرد و موهـومی خـالص $x(j\omega)$ را خواهد داشت. سیگنال فرد و موهوی خالص $jx(t)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از خطـی بودن، تبدیل فوریه این سیگنال به صورت $jx(j\omega)$ خواهد بـود. بـدیهی اسـت تـابع $jx(i\omega)$ فـرد و حقیقی می باشد. بنابراین حالت داده شده، نادرست است.

(ب) تبدیل فوریه ی متناظر با یک سیگنال فرد، فرد و تبدیل فوریه متنـاظر بـا سـیگنال زوج، زوج خواهد بود. کانولوشن تبدیل فوریه یک سیگنال فرد با یک سیگنال زوج در حـوزه زمـان حاصلـضرب یک سیگنال فرد در یک سیگنال زوج است. همینطور حاصلضرب حاصـل همـواره فـرد خواهـد بـود، تبدیل فوریه این سیگنال فرد نیز فرد خواهد بود. بنابراین حالت موردنظر، صحیح است.

....

٤,١٨) پاسخ ضربه سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر را بیابید.

$$H(j\omega)=\frac{\left(\sin^2(3\omega)\right)\cos\omega}{\omega^2}$$

حل:

با استفاده از جدول ٤,٢، ملاحظه می کنیم کـه پـالس مـستطیلی $x_1(t)$ نـشان داده شـده در شـکل ح٤,١٨ تبدیل فوریه ای به صورت $x_1(j\omega)=\dfrac{\sin(3\omega)}{\omega}$ را خواهـد داشـت. بـا اسـتفاده از خاصـیت کانولوشن تبدیل فوریه می توان نوشت:

$$x_2(t)=x_1(t)*x_1(t)\xleftrightarrow{FT}x_2(j\omega)=x_1(j\omega)$$
$$=\left(\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right)^2$$

سیگنال $x_2(t)$ در شکل ح٤,١٨ نشان داده شده است. با استفاده از خاصـیت شـیفت، متوجـه مـی شویم که

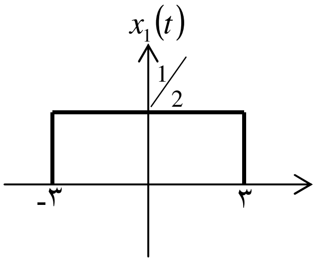
$$\frac{1}{2}x_2(t+1)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}e^{j\omega}\left(\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right)^2$$

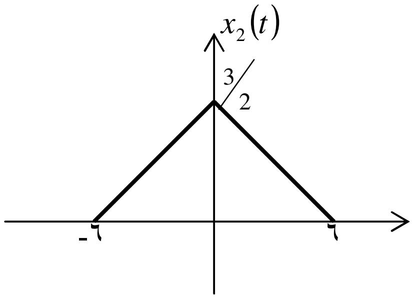
,

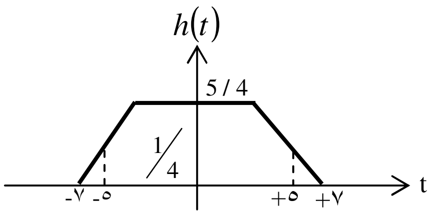
$$\frac{1}{2}x_2(t-1)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2}e^{-j\omega}\left(\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right)^2$$

با جمع کردن دو معادله داریم:

$$h(t)=\frac{1}{2}\left(x_2(t+1)+x_2(t-1)\right)\xleftrightarrow{FT}\cos\omega\left(\frac{\sin 3\omega}{\omega}\right)^2$$







شکل ح٤,١٨

$h(t)$ به صورت ریاضی به صورت زیر می باشد:

$$h(t)=\begin{cases} 5/4 \;, & |t|<1 \\ -\frac{|t|}{4}+\frac{3}{2} & 1\le |t| \le 5 \\ -\frac{|t|}{8}+7/8 & 5<|t|\le 7 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

٤,١٩) یک سیستم LTI علّی با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید.

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+3}$$

این سیستم به ازای ورودی $x(t)$ خروجی زیر را ایجاد کرده است.

$$y(t)=e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

$x(t)$ را بیابید.

حل:

می دانیم که

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}$$

چون $y(t)=e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$ داده شدهاست در نتیجه می توانیم $Y(j\omega)$ را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$Y(j\omega)=\frac{1}{3+j\omega}-\frac{1}{4+j\omega}=\frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}$$

چون $H(j\omega)=1/3+j\omega$ داریم:

$$x(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}=\frac{1}{(4+j\omega)}$$

با گرفتن عکس تبدیل، فوریه داریم:

$$x(t)=e^{-4t}u(t)$$

٤,۲۰) پاسخ ضربه سیستم LTI علّی نشان داده شده با مدار RLC مسئله ۳-۲۰ رادر نظر بگیریـد. برای این منظور عکس تبدیل فوریه پاسخ فرکانسی مدار را بیابیـد. بـرای ایـن محاسـبه مـی توانیـد از جدولهای ٤-۱ و ٤-۲ استفاده کنید.

حل:

از جواب مسئله ۳,۲۰، می دانیم که پاسخ فرکانسی مدار عبارتست از:

$$H(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2+j^{\omega+1}}$$

با شکستن آن به دسته های کوچکتر می توان نوشت:

$$H(j\omega)=\frac{-1}{j\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j+j\omega}+\frac{-1}{1/2+\frac{\sqrt{2}}{2}j+j\omega}\right)$$

با استفاده از جفت تبـدیلات ارائـه شـده در جـدول ٤,۲، از تبـدیل فوریـه $H(j\omega)$، $h(t)$ را بـه صورت زیر بدست می آوریم:

$$h(t)=\frac{-1}{j\sqrt{3}}\left[-e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}+e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)t}\right]u(t)$$

با ساده سازی داریم:

$$h(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-1/2t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

٤,۲۱) تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\left[e^{-at}\cos\omega_0 t\right], a>0$

(ب) $e^{-3|t|}\sin 2t$

(ج) $x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t & , \quad |t|\le 1\\ 0 & , \quad |t|>1\end{cases}$

(د) $\sum_{k=0}^{\infty}a^k\delta(t-kT),(a)<1$

(هـ) $\left[te^{-2t}\sin 4t\right]u(t)$

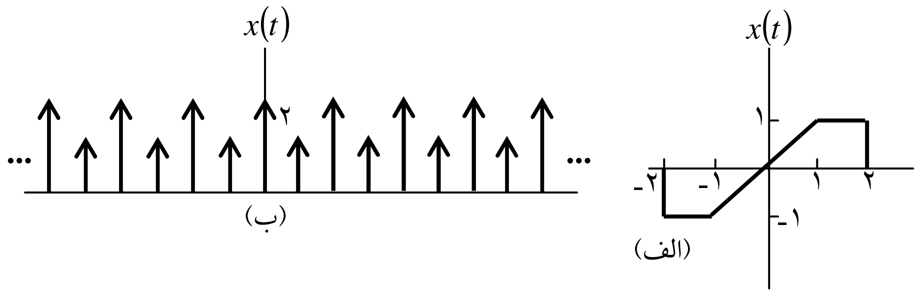
(و) $\left[\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right]\left[\dfrac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$

(ز) $x(t)$ شکل م ٤–۲۱ (الف)

(ح) $x(t)$ شکل م ٤–۲۱ (ب)

(ط) $x(t)=\begin{cases}1-t^2, & \circ<t<1\\ \circ\quad, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$

(ی) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$



شکل م ٤–۲۱

حل:

(الف) سیگنال داده شده عبارتست از:

$$e^{-\infty t}\cos(\omega_\circ t)u(t)=\frac{1}{2}e^{-at}e^{j\omega_\circ t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-at}e^{-j\omega_\circ t}u(t)$$

بنابراین:

$$x(j\omega)=\frac{1}{2[a-j\omega_\circ+j\omega]}-\frac{1}{2[a+j\omega_\circ+j\omega]}$$

(ب) سیگنال داده شده به صورت زیر است:

$$x(t)=e^{-3t}\sin(2t)u(t)+e^{3t}\sin(2t)u(t)$$

داریم:

$$x_1(t)=e^{-3t}\sin 2t\,u(t)\xleftrightarrow{FT}x_1(j\omega)=\frac{1/2j}{3-2j+j\omega}-\frac{1/2j}{3+2j+j^{\omega}}$$

همچنین:

$$x_2(t)=e^{3t}\sin(2t)u(-t)$$
$$=-x_1(-t)\xleftrightarrow{FT}x_2(j\omega)=-x_1(-j\omega)$$
$$=\frac{1/2j}{3-2j-j\omega}-\frac{1/2j}{3+2j-j\omega}$$

بنابراین:

$$x(j\omega)=x_1(j\omega)+x_2(j\omega)$$
$$=\frac{3j}{9+(\omega+2)^2}-\frac{3j}{9+(\omega-2)^2}$$

(ج) بااستفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (٤,٩) داریم:

$$x(j\omega)=\frac{1}{1-a\,e^{-j\omega T}}$$

(هـ) داریم:

$$x(t)=\left(\tfrac{1}{2j}te^{-2t}e^{4jt}u(t)\right)$$
$$-\left(\tfrac{1}{2j}\right)te^{-2t}e^{-4jt}u(t)$$

بنابراین

$$x(j\omega)=\frac{1/2j}{(2-4j+j\omega)^2}-\frac{1/2j}{(2+4j+j\omega)^2}$$

(و) داریم:

$$x_1(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}\xleftrightarrow{FT}x_1(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\pi\\ \circ & ather\end{cases}$$

و نیز

$$x_2(t)=\frac{\sin^2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\xleftrightarrow{FT}x_2(j\omega)=\begin{cases}e^{-2\omega} & |\omega|<2\pi\\ \circ & other\end{cases}$$

$$x(t)=x_1(t)x_2(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2\pi}x_1(j\omega)*x_2(j\omega)$$

بنابراین

$$x(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega|<\pi \\ \left(1/2\pi\right)(3\pi+\omega)e^{-j\omega}, & -3\pi<\omega<-\pi \\ \left(1/2\pi\right)(3\pi-\omega)e^{-j\omega} & \pi<\omega<3\pi \\ \circ & other \end{cases}$$

(ذ) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (٤,۹)، بدست می آوریم:

$$x(j\omega)=\frac{2j}{\omega}\left[\cos 2\omega-\frac{\sin\omega}{\omega}\right]$$

(خ) اگر

$$x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)$$

در اینصورت

$$x(t)=2x_1(t)+x_1(t-1)$$

بنابراین

$$x(j\omega)=x_1(j\omega)\left[2+e^{-\omega}\right]$$
$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\pi)\left[2+(-1)^k\right]$$

(ط) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (٤,۹) داریم:

$$x(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\frac{2e^{-j\omega}}{-\omega^2}-\frac{2e^{-j\omega}-2}{j\omega^2}$$

(ی) $x(t)$ با دوره متناوب (۲) پریودیک است، بنابراین:

$$x(j\omega)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(jk\pi)\delta(\omega-k\pi)$$

که $\tilde{x}(j\omega)$ تبدیل فوریه یک دوره متناوب $x(t)$ می باشد. یعنی

$$x(j\omega)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(jk\pi)\delta(\omega-k\pi)$$

که $\tilde{x}(j\omega)$ تبدیل فوریه یک دوره تناوب $x(t)$ می باشد. یعنی

$$x(j\omega)=\frac{1}{1-e^{-2}}\left[\frac{1-e^{-2(j\omega+1)}}{1+j\omega}-\frac{e^{-2}\left[1-e^{-2(1+j\omega)}\right]}{1-j^{\omega}}\right]$$

....

٤,٢٢) سیگنال پیوسته در زمان مربوط به هر یک از تبدیلهای زیر را بیابید:

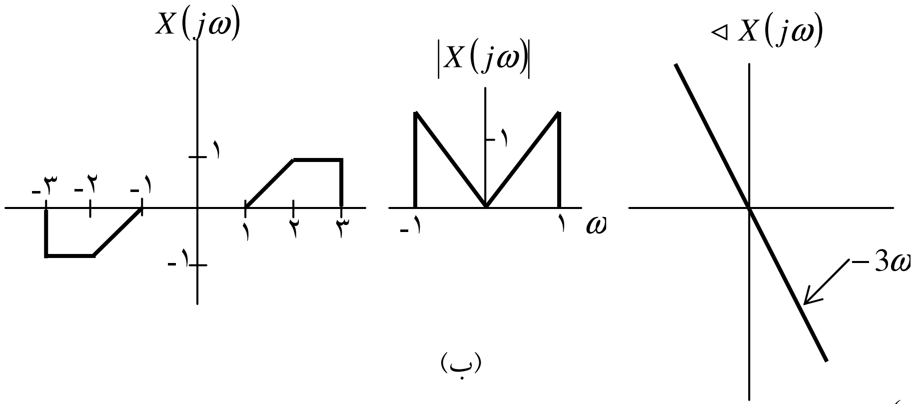
(الف) $X(j\omega)=\dfrac{2\sin[3(\omega-2\pi)]}{(\omega-2\pi)}$

(ب) $X(j\omega)=\cos(4\omega+\pi/3)$

(ج) دامنه و فاز $X(j\omega)$ در شکل م ٤-٢٢ (الف) رسم شده است.

(د) $X(j\omega)=2[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]+3[\delta(\omega-2\pi)+\delta(\omega+2\pi)]$

(هـ) $X(j\omega)$ مطابق شکل م ٤-٢٢ (ب) است.



(الف)

شکل م ٤-٢٢

حل:

(الف) $x(t)=\begin{cases} e^{j2\pi t} & |t|<3 \\ \circ & other \end{cases}$

$$(\text{ب})\; x(t)=\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}\delta(t-4)+\frac{1}{2}e^{j\pi/3}\delta(t+4)$$

(ج) تبدیل فوریه ی معادله (٤,٨) به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(j\omega)|e^{j\sphericalangle x(j\omega)}e^{j\omega t}dt$$

از شکل داده شده دادیم:

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(t-3)}{t-3}+\frac{\cos(t-3)-1}{(t-3)^2}\right]$$

$$(\text{د})\; x(t)=\frac{2j}{\pi}\sin t+\frac{3}{\pi}\cos(2\pi t)$$

(هـ) با استفاده از تبدیل فوریه معادله (٤,٨)؛ داریم:

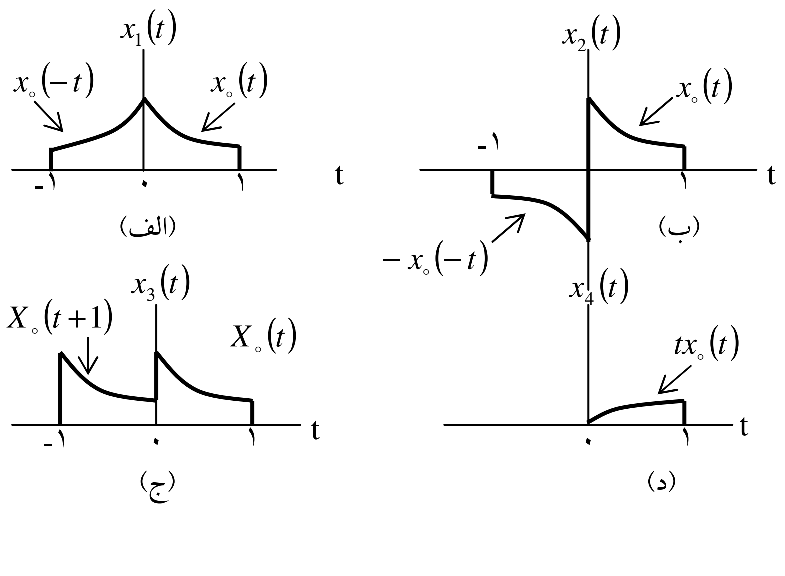
$$x(t)=\frac{\cos 3t}{j\pi t}+\frac{\sin t-\sin 2t}{j\pi t^2}$$

١,٢٣) سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x_\circ(t)=\begin{cases} e^{-t}, & \circ\le t\le 1 \\ \circ\;, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای فوریه هر یک از سیگنالهای شکل م ٤-٢٣ را به دست آورید. باید بتوانید این کار را تنها بامحاسبه تبدیل فوریه $x_\circ(t)$ و سپس استفاده از خواص تبدیل فوریه انجام دهید.

شکل م ٤-٢٣



حل:

برای سیگنال داده شده $x_{\circ}(t)$ از تبدیل فوریه معادله (٤،٨) استفاده می کنیم. بـرای محاسـبه تبـدیل فوریه متناظر داریم:

$$x_{\circ}(j\omega)=\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$$

(i) می دانیم که:

$$x_1(t)=x_{\circ}(t)+x_{\circ}(-t)$$

با استفاده از خواص خطی بودن و معکوس پذیری در زمان، تبدیل فوریه دادیم:

$$x_1(j\omega)=x_{\circ}(j\omega)+x_{\circ}(-j\omega)=\frac{2-2e^{-1}\cos\omega-2\omega e^{-1}\sin\omega}{1+\omega^2}$$

(ii) می دانیم که

$$x_2(t)=x_{\circ}(t)-x_{\circ}(-t)$$

با استفاده از خواص خطی بودن و معکوس پذیری در زمان تبدیل فوریه، داریم:

$$x_2(j\omega)=x_{\circ}(j\omega)-x_{\circ}(-j\omega)=j\left[\frac{-2\omega+2e^{-1}\sin\omega+2\omega e^{-1}\cos\omega}{1+\omega^2}\right]$$

(iii) می دانیم که

$$x_3(t)=x_{\circ}(t)+x_{\circ}(t+1)$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن و خاصیت شیفت زمانی، تبدیل فوریه، داریم:

$$x_3(j\omega)=x_{\circ}(j\omega)+e^{j\omega}x_{\circ}(-j\omega)=\frac{1+e^{j\omega}-e^{-1}\left(1+e^{-j\omega}\right)}{1+j\omega}$$

(iv) می دانیم که

$$X_4(t)=tx_{\circ}(t)$$

با استفاده از خاصیت مشتق در حوزه فرکانسی داریم:

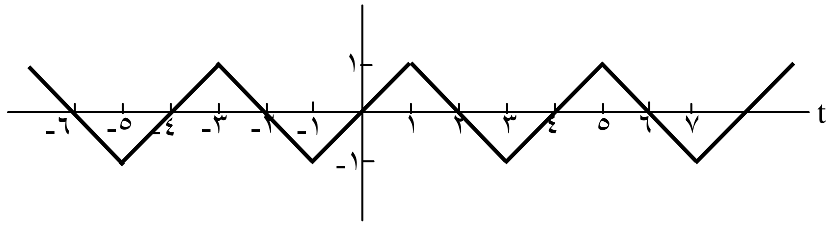
$$x_4(j\omega)=j\frac{d}{d\omega}x_{\circ}(j\omega)$$

بنابراین

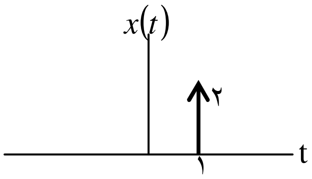
$$x_4(j\omega)=\frac{1-2e^{-1}e^{-j\omega}-j\omega e^{-1}e^{-j\omega}}{(1+j\omega)^2}$$

۲,۲٤) (الف) تعیین کنید تبدیل فوریه کدام یک از سیگنالهای حقیقی شکل م ٤-۲٤، هر یک از شرایط زیر را برآورده می کنند:

$\Re e\{X(j\omega)\}=0$ (۱)

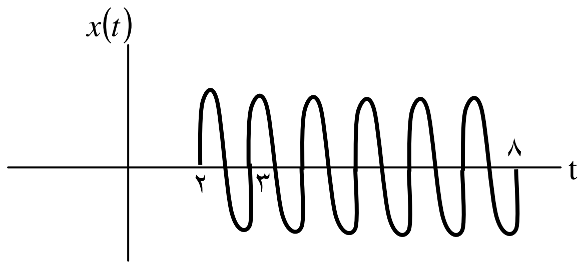


(الف)

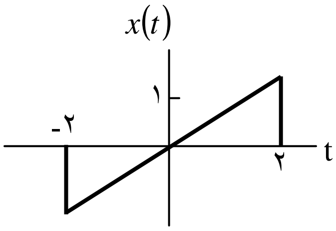


(ب)

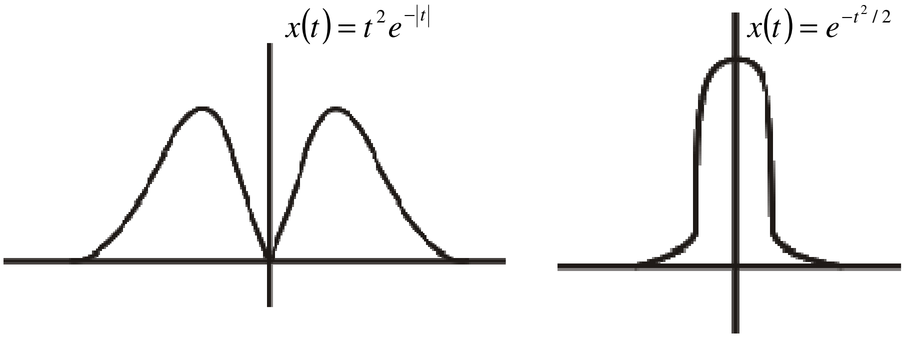
شکل م ٤-۲٤ (الف، ب)



(ج)



(د)



شکل م ٤-٢٤ (ادامه) (ج، د، هــ و)

(٢) $g_m\{X(j\omega)=\circ\}$

(٣) می توان یک a حقیقی به دست آورد به نحوی که $e^{ja\omega}X(j\omega)$ حقیقی باشد.

(٤) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega=\circ$

(٥) $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(j\omega)d\omega=\circ$

(٦) $X(j\omega)$

(ب) سیگنالی بسازید که خصوصیات (١)، (٢)، و (٥) را داشته و بقیه را نداشته باشد.

حل:

(الف) (i) بـرای اینکـه $\mathrm{Re}\{x(j\omega)\}=\circ$ بایـستی سـیگنال $x(t)$ حقیقـی و فـرد باشـد. بنـابراین سیگنالهای شکل های(الف) و (پ) این خاصیت را دارا می باشند.

(ii) برای اینکه $\mathrm{Im}\{x(j\omega)\}=\circ$ بایستی سیگنال $x(t)$ حقیقی و زوج باشد. بنابراین سـیگنالهای اشکال (ث) و (ح) این خاصیت را دارند.

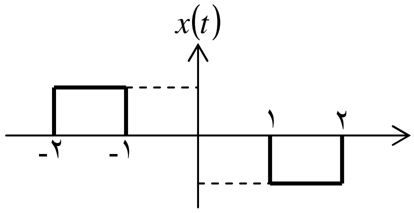
(iii) برای اینکه عددی حقیقی مانند α موجود باشد طوریکه $e^{j\alpha\propto}x(j\omega)$ حقیقی باشد، بایـستی $x(t+\alpha)$ یک سیگنال حقیقی و زوج باشـد. سـیگنالهای اشـکال (الـف) و (ب) و (ث) و (ح) ایـن خاصیت را دارند.

(iv) برای اینکه این شرط صحیح باشد بایستی $x(\circ)=\circ$، بنابراین سیگنالهای (الف) و (ب) و (پ) و (ت) و (ح) این خاصیت را دارا می باشند.

(v) برای این که شرط برقرار باشد بایستی $x(t=\circ)=\circ$ باشد. بنابراین سیگنال در (ب) و (ج) و (د) و (هـ) این خاصیت را دارا می باشند.

(vi) برای اینکه این شرط برقرار باشد بایستی سیگنال $x(t)$ متناوب باشد. تنها سیگنال شکل (الف) این خاصیت را در (ب) برای اینکه سیگنالی شرطهای (i) و (iv) و (v) را برآورده سازند، بایستی فرد و حقیقی باشد و $x'(t)=\circ$ و $x(t)=\circ$

سیگنال در زیر نشان داده شده است.



شکل ح ٤,۲,٤

.....

٤,۲٥) $X(j\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ شکل م ٤–۲٥ است.

(الف) $\sphericalangle X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) $X(j\circ)$ را بیابید.

(ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega$ را بیابید.

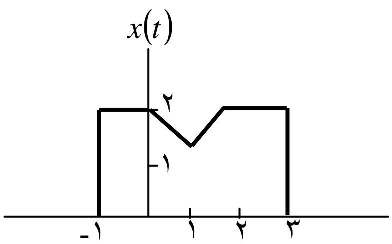
(د) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\dfrac{2\sin\omega}{\omega}e^{j}2\omega d\omega$

(هـ) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

(و) عکس تبدیل فوریه $\Re e\{X(j\omega)\}$ را رسم کنید.

راهنمایی: می توانید تمام این محاسبات را بدون یافتن $X(j\omega)$ انجام دهید.

شکل م ٤–۲٥



حل:

(الف) توجه کنید که $y(t)=x(t+1)$ سیگنالی حقیقی زوج می باشد. بنابراین $Y(j\omega)$ نیز حقیقی و زوج می باشد که بیان می کند $\Delta Y(j\omega)=0$ و نیز چون $Y(j\omega)=e^{j\omega}x(j\omega)$ می دانیم که $\Delta x(j\omega)=-\omega$.

(ب) داریم: $x(j_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=7$

(ج) داریم: $\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\omega)d\omega=2\pi x(0)=4\pi$

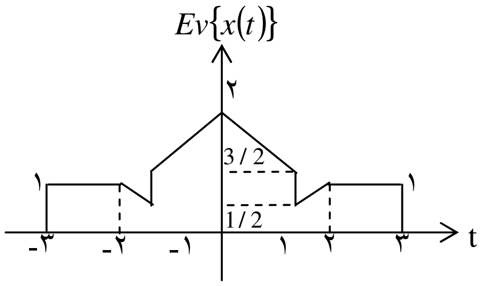
(ت) فرض کنید $Y(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{2j\omega}$. سیگنال خروجی $y(t)$ برابر است با:

$$y(t)=\begin{cases}1 & -3<t<-1\\ 0 & other\end{cases}$$

در این صورت انتگرال داده شده عبارتست از:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=26\pi$$

(د) تبدیل فوریه معکوس $\mathrm{Re}\{x(j\omega)\}$ برابر است با $\varepsilon v\{x(t)\}$ که برابر است با: $[x(t)+x(-t)]/2$ که این مطلب در شکل زیر نشان داده شده است: $\varepsilon v(x(t))$



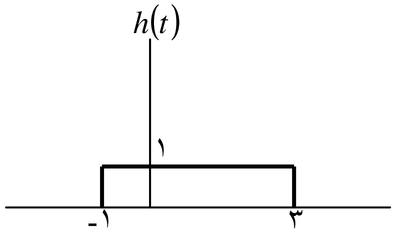
٤,٢٦ (الف) کانولوشن زوجهای $x(t)$ و $H(j\omega)$، استفاده از خاصیت کانولوشن، و عکس تبدیل فوریه به دست آورید.

(i) $h(t)=e^{-4t}u(t)$ و $x(t)=te^{-2t}u(t)$

(ii) $h(t)=te^{-4}u(t)\,,\; x(t)=te^{-2t}u(t)$

$$h(t)=e^{t}u(-t)\ ,\ \ x(t)=e^{-t}u(t) \qquad \text{(iii)}$$

(ب) فرض کنید $x(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$ و $h(t)$ مطابق شکل م ٤-٢٦ است. خاصیت کانولوشن را با توجه به این زوج سیگنال نشاندهید. به این منظور تبدیل فوریه $y(t)=x(t)*h(t)$ و حاصلضرب $H(j\omega)X(j\omega)$ را بیابید.



شکل م ٤-٢٦

حل:

(الف) کانولوشن زوجهای $x(t)$ و $h(t)$ داده شده را با محاسبه $X(j\omega)$ و $H(j\omega)$، استفاده از خاصیت کانولوشن، و عکس تبدیل فوریه به دست آورید.

$$h(t)=e^{-4t}u(t)\,,\ x(t)=te^{-2t}u(t) \quad \text{(i)}$$

(الف) (i) داریم:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=\left[\frac{1}{(2+j\omega)^{2}}\right]\left[\frac{1}{4+j\omega}\right]$$

$$=\frac{114}{4+j\omega}-\frac{1/4}{2+j\omega}+\frac{1/2}{(2+j\omega)2}$$

گرفتن عکس تبدیل فوریه خواهیم داشت:

$$y(t)=\frac{1}{4}e^{-4t}u(t)-\frac{1}{4}e^{-2t}u(t)+{}^{1}\!/_{2}\,te^{-2t}u(t)$$

(ii) داریم:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=\left[\frac{1}{(2+j\omega)^2}\right]\left[\frac{1}{(4+j\omega)^2}\right]$$

$$=\frac{1/4}{2+j\omega}+\frac{1/4}{(2+j\omega)^2}-\frac{1/4}{4+j\omega}+\frac{1/4}{(4+j\omega)^2}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\tfrac{1}{4}e^{-2t}u(t)+\tfrac{1}{4}te^{-2t}u(t)-\tfrac{1}{4}e^{-4t}u(t)+\tfrac{1}{4}te^{-4t}u(t)$$

(iii) داریم:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)$$

$$=\left[\frac{1}{1+j\omega}\right]\left[\frac{1}{1-j\omega}\right]$$

$$y(t)=\tfrac{1}{2}e^{-|t|}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

ب) با استفاده از کانولوشن $x(t)$ و $h(t)$ داریم:

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 1-e^{-(t-1)} & 1<t\leq 5\\ e^{-(t-5)}-e^{-(t-1)} & t>5\end{cases}$$

با گرفتن تبدیل فوریه داریم:

$$Y(j\omega)=\frac{2e^{-j3\omega}}{\omega(1+j\omega)}$$

$$=\left[\frac{e^{-2j\omega}}{1+j\omega}\right]\frac{e^{-j\omega}2\sin 2\omega}{\omega}$$

$$=x(j\omega)H(j\omega)$$

۴,۲۷) سیگنالهای زیر را در نظر بگیرید

$$x(t)=u(t-1)-2u(t-3)$$

و

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$$

که در آن $T>0$. a_k را ضرائب سـری فوریـه $\tilde{x}(t)$، و $X(j\omega)$ را تبـدیل فوریـه $x(t)$ فـرض کنید.

(الف) عبارت ریاضی $X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) عبارت ریاضی ضرائب a_k را یافته، نشاندهید که $a_k=\frac{1}{T}X\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)$.

حل:

سیگنالهای زیر را در نظر بگیرید.

تبدیل فوریه $x(t)$ که همان $x(j\omega)$ است عبارتست از:

$$x(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_1^2 e^{-j\omega t}dt-\int_2^3 e^{-j\omega t}dt$$

$$=2\frac{\sin \omega/2}{\omega}\left(1-e^{-j\omega}\right)e^{-j\omega/2}$$

(ب) ضرایب سری فوریه a_k برابرند با:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\tilde{x}(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt$$

$$=1/2\left\{\int_1^2 e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt^{-}-\int_2^3 e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt\right\}$$

$$=\frac{\sin\left(k\pi/2\right)}{k\pi}\left(1-e^{-jk\pi}\right)e^{-j3k\pi/2}$$

با مقایسه جواب بدست آمده از قسمت (الف) و (ب) داریم:

$$a_k=\frac{1}{T}x\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

که $T=2$.

٤,٢٨) (الف) $X(j\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ و

$$P(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{jn\omega_o t}$$

نمایش سری فوریه سیگنال متناوب $p(t)$، با فرکانس پایه ω_o است. تبدیل فوریه سیگنال زیـر را بیابید.

$$y(t)=x(t)p(t) \qquad \text{(م ٤-٢٨-١)}$$

(ب) فرض کنید $X(j\omega)$ مطابق شکل م ٤-٢٨ (الف) است. طیف $y(t)$ معادله (م ٤-٢٨-١) به ازای هر یک از (pt)های زیر رسم کنید.

(i) $p(t)=\cos(t/2)$

(ii) $p(t)=\cos(t)$

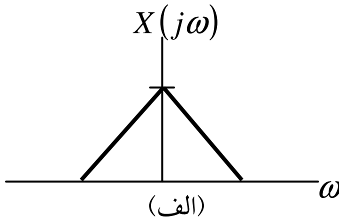
iii) ($p(t)=\cos(2t)$

iv) ($p(t)=(\sin)(\sin 2t)$

v) ($p(t)=\cos 2t-\cos t$

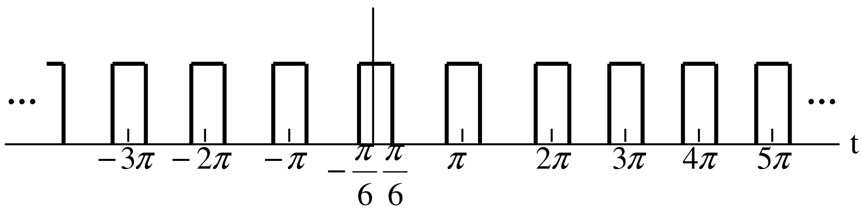
vi) ($p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\pi n)$

vii) ($p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2\pi n)$



(الف)

شکل م ٤-٢٨



(ب)

viii) ($p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-4\pi n)$

ix) ($p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2\pi n)-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\pi n)$

(x) $p(t)$ موج چهارگوش متناوب شکل م ٤-۲۸ (ب)

حل:

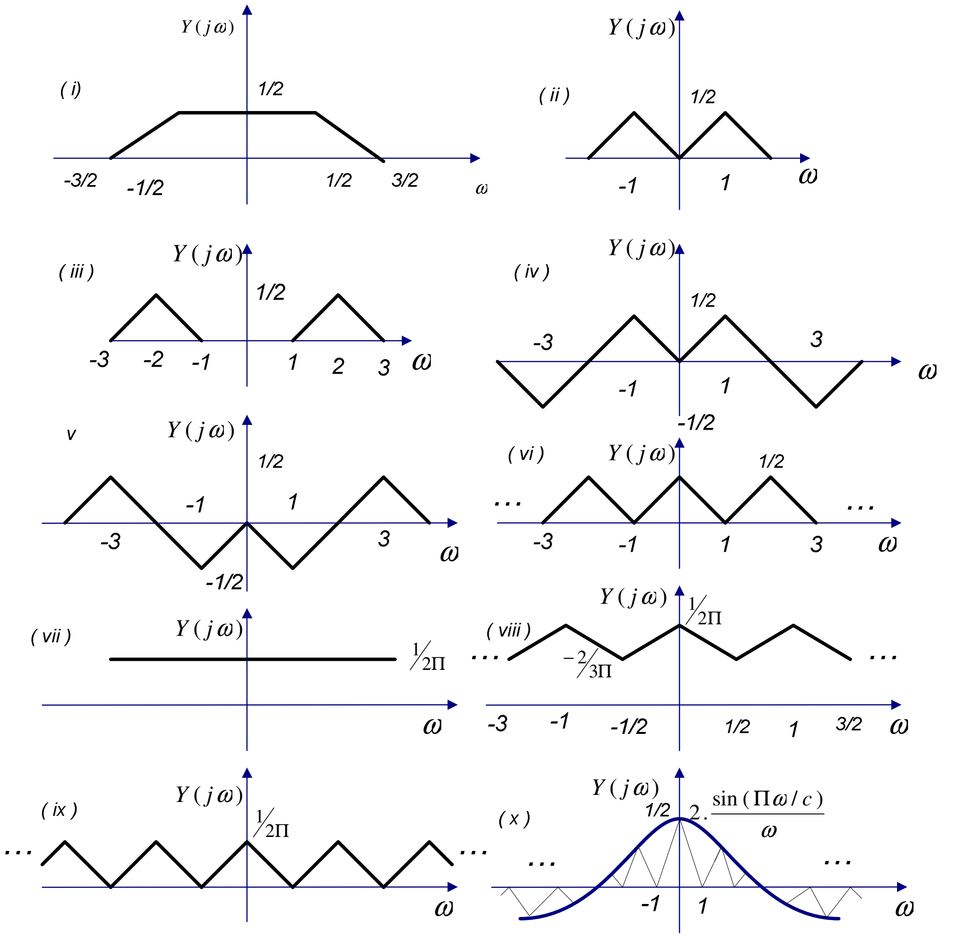
(الف) از جدول ٤,۲ می دانیم که:

$$p(f)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}a_k e^{jn\omega_\circ t}\xleftrightarrow{FT}p(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha\,/\,\delta(\omega-k\omega_\circ)$$

از این مطلب داریم:

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\{x(j\omega)*H(j\omega)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,x(j(\omega-k\omega_\circ))$$

(ب) طیف در شکل ح٤,۲۸. نمایش داده شده است.



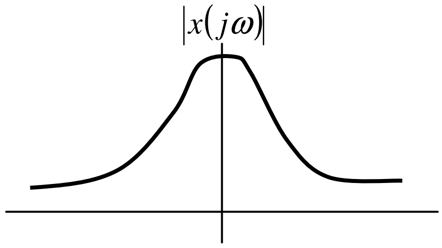
شکل ح٤,٢٨.

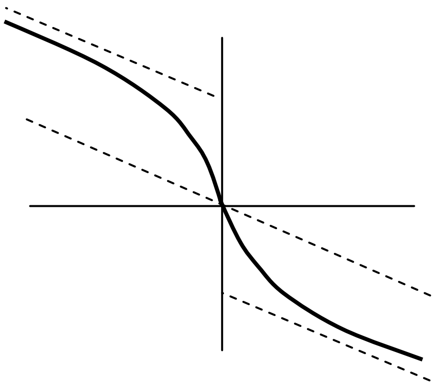
....

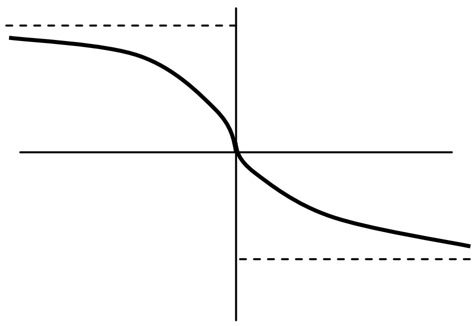
٤,٢٩) $x(t)$ تابع حقیقی پیوسته در زمانی است که شکل م ٤-٢٩ (الف) اندازه و فاز تبدیل فوریه $X(j\omega)$ آن را نشان می دهد.

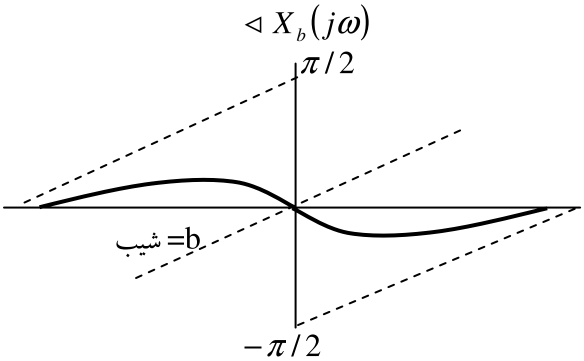
اندازه تبدیل فوریه توابع $x_a(t)$، $x_b(t)$، $x_c(t)$، و $x_d(t)$ همان اندازه $X(j\omega)$ است، ولی فاز تبدیل فوریه هر یک متفاوت، و مطابق شکلهای م ٤-٢٩ (ب) تا (هـ) است. $X_a(j\omega)$ و ⊲

$X_b(j\omega)$ با افزودن یک فاز خطی به $\sphericalangle X(j\omega)$ به دست آمده اند. برای به دست آوردن $\sphericalangle X_c(j\omega)$، $\sphericalangle X(j\omega)$ را حول $\omega=0$ منعکس کرده ایم، و $\sphericalangle X_d(j\omega)$ از جمع $\sphericalangle X_c(j\omega)$ و یک فاز خطی به دست آمده است. به کمک خواص تبدیل فوریه $x_a(t)$، $x_b(t)$، $x_c(t)$، و $x_d(t)$ را بر حسب $x(t)$ به دست آورید.

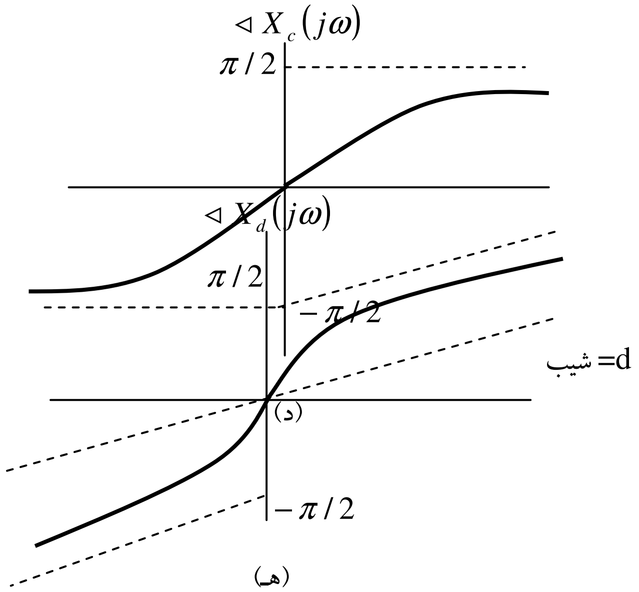








(ج)



(هـ)

حل:

(i) داریم:

$$x_a(j\omega) = |x(j\omega)| e^{jx(j\omega) - j\propto\omega}$$
$$= x(j\omega) e^{-j\propto\omega}$$

از این خاصیت شیفت زمانی داریم:

$$x_\propto(t) = x(t-a)$$

(ii) داریم:

$$x_b\{j\omega\} = |x(j\omega)| e^{j_\circ\, x(j\omega) + jb\omega}$$
$$= x(j\omega) e^{jb\omega}$$

از خاصیت شیفت زمانی می دانیم که:

$$x_b(t)=x(t+b)$$

(iii) داریم:

$$x_c(j\omega)=|x(j\omega)|e^{-j2\ x(j\omega)}=x^*(j\omega)$$

از مزدوج گیری و خاصیت معکوس ـ زمانی می دانیم که:

$$x_c(t)=x^*(-t)$$

چون $x(t)$ حقیقی است، بنابراین $x_c(t)=x(-t)$

(iv) داریم:

$$x_d(j\omega)=|x(j\omega)|e^{-j_\circ x(j\omega)+j\omega d}$$
$$=x^*(j\omega)e^{j\omega}$$

از خاصیتهای مزدوج گیری و معکوس زمانی و شیفت زمانی، می دانیم که:

$$x_d(t)=x^*(-t-d)$$

چون $x(t)$ حقیقی است، $x(-t-d)$ نیز حقیقی می باشد.

٤,٣٠) فرض کنید $g(t)=x(t)\cos$ و $g(t)$ دارای تبدیل فوریه زیرست

$$G(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le 2\\ \circ, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

(الف) $x(t)$ را بیابید..

(ب) تبدیل فوریه $X_1(j\omega)$ سیگنال $x_1(t)$ را به نحوی بیابید. که داشته باشیم.

$$g(t)=x_1(t)\cos\left(\frac{2}{3}t\right)$$

حل:

(الف) می دانیم که:

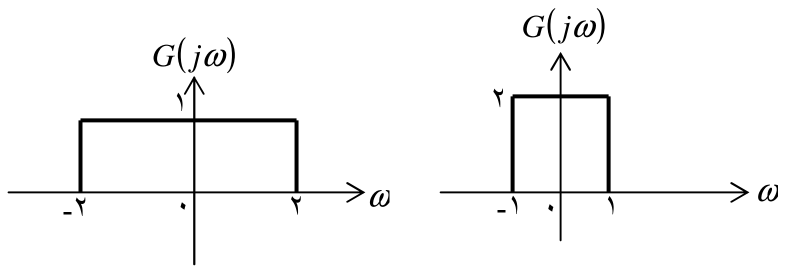
$$\omega(t)=\cos t\xleftrightarrow{FT}\omega(j\omega)=\pi[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)]$$

$$g(t)=x(t)\cos t\xleftrightarrow{FT}G(j\omega)=\frac{1}{2\pi}[x(j\omega)*\omega(j\omega)]$$

بنابراین

$$G(j\omega)=\frac{1}{2}x(j(\omega-1))+{}^{1}\!/_{2}\,x(j(\omega+1))$$

چون $G(j\omega)$ در شکل ح ۴٫۳۰ نمایش داده شده است. از معادله ی فوق واضح است که $x(j\omega)$ همانطوری که در شکل ح ۴٫۳۰ نمایش داده شده است، می باشد.



شکل ح ۴٫۳۰

بنابراین

$$x(t)=\frac{2\sin}{\pi t}$$

(ب) $x_1(j\omega)$ در شکل ح ۴٫۳۰ نمایش داده شده است.

۴٫۳۱) (الف) نشان دهید که هر سه سیستم LTI دارای پاسخ ضربه های زیر

$$h_1(t)=u(t)$$
$$h_2=-2\delta(t)+5e^{-2}u(t)$$
$$h_3(t)=2t^{-t}u(t)$$

به ورودی $x(t)$ پاسخ یکسانی دارند.

(ب) پاسخ ضربه یک سیستم LTI دیگر بیابید که همین پاسخ را بـه ورودی $\cos t$ بدهـد. ایـن مسئله نشان می دهد که پاسخ به $\cos t$ را نمی توان برای مشخص کردن کامل یـک سیـستم LTI بـه کار برد.

حل:

(الف) داریم:

$$x(t)=\cos t \xleftrightarrow{FT} x(j\omega)=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]$$

(i) داریم:

$$h_1(t)=u(t) \xleftrightarrow{FT} H_1(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

بنابراین:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H_1(j\omega)=\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-1)]$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\sin(t)$$

(ii) داریم:

$$h_2(t)=-2\delta(t)+5e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{FT} H_2(j\omega)=-2+\frac{5}{2+j\omega}$$

بنابراین:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H_1(j\omega)=\frac{\pi}{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\sin(t)$$

(iii)

$$h_3(t)=2te^{-t}u(t) \xleftrightarrow{FT} H_2(j\omega)=\frac{2}{(1+j\omega)^2}$$

بنابراین:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H_1(j\omega)=\frac{\pi}{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\sin(t)$$

(ب) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه:

$$h_4(t)=\tfrac{1}{2}[h_1(t)+h_2(t)]$$

پاسخ مشابه $x(t)=\cos t$ را خواهد داشت. می توانیم دیگر پاسخ های ضربه ی مشابهی را با ترکیب خطی و اسکیل $h_1(t)$ و $h_2(t)$ و $h_3(t)$ پیدا کنیم.

....

٤,۳۲) یک سیستم LTI، سیستم s، با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید.

$$h(t)=\frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}$$

خروجی s را به ازای ورودیهای زیر بیابید.:

(الف) $x_1(t)=\cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)$

(ب) $x_2(t)=\sum^{\infty} k=0\left(\frac{1}{2}\right)^k\sin(3kt)$

(ج) $x_3(t)=\frac{\sin 4(t+1)}{\pi(t+1)}$

(د) $x_4(t)=\left(\frac{\sin\ 2t}{\pi t}\right)^2$

حل:

توجه کنید که $h(t)=h_1(t-1)$ که $h_1(t)=\frac{\sin 4t}{\pi t}$، تبدیل فوریه $h_1(t)$ عبارتست از: $H_1(j\omega)$ در شکل S.٤,۳۲ نشان داده شده است.

از شکل بالا واضح است که $h_1(t)$ پاسخ ضربه یک فیلتر پائین گذر ایده آل است که باند گذر آن در بازه $|\omega|<4$ قرار دارد. بنابراین، $h(t)$ پاسخ ضربه یک فیلتر پائین گذرانیده آل است که به اندازه ۱ واحد به سمت راست شیفت یافته است. بااستفاده از خاصیت شیفت:

$$H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega|<4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(الف) داریم:

$$x_1(j\omega)=\pi e^{j\pi/12}\delta(\omega-6)+\pi e^{j\pi/12}\delta(\omega+6)$$

واضح است که:

$$Y_1(j\omega)=x_1(j\omega)H(j\omega)=\circ \Rightarrow y_1(t)=\circ$$

این نتیجه به این معنی است که $x_1(j\omega)$ در باند گذر $H(j\omega)$ صفر است.

(ب) داریم:

$$x_2(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\sum_{k=\circ}^{\infty}\left(1/2\right)\{\delta(\omega-3k)-\delta(\omega+3k)\}\right]$$

بنابراین:

$$Y_2(j\omega)=x_2(j\omega)H(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\left(1/2\right)\{\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)\}e^{-j\omega}\right]$$

که بیان می دارد که:

$$y_2(t)=1/2\sin(3t-1)$$

نتیجه مشابهی با توجه به اینکه تنها یک سینوسی با فرکانس ۳ در $x_2(j\omega)$ در باند گذر $H(j\omega)$ واقع شده است.

(ج) داریم:

$$x_3(j\omega)=\begin{cases} e^{j\omega} & |\omega|<4 \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$Y_3(j\omega)=(j\omega)H(j\omega)=x_3(j\omega)e^{-j\omega}$$

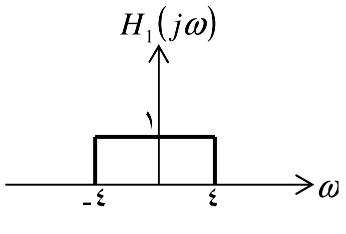
که بیان می دارد:

$$y_3(t)=x_3(t-1)=\frac{\sin 4t}{\pi t}$$

نتیجه مشابهی با توجه به اینکه $x_3(j\omega)$ در باند گذر $H(j\omega)$ قرار دارد، بدست آورد.

(د) $x_4(j\omega)$ در شکل ح٤٫٣٢ نشان داده شده است.

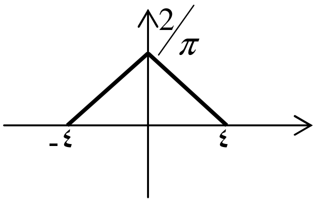
بنابراین



$$\begin{aligned} Y_4(j\omega)&=x_4(j\omega)H(j\omega)\\ &=x_4(j\omega)e^{-j\omega}\end{aligned}$$

که بیان می کند:

$$y_4(t)=x_4(t-1)=\left(\frac{\sin(2(t-1))}{\pi(t-1)}\right)^2$$



شکل ح ۴,۳۲

می توان نتایج مشابهی با توجه به اینکه $x_4(j\omega)$ در باند گذر $H(j\omega)$ واقع شـده اسـت، بدسـت آورد.

٤,٣٣) ورودی و خروجی یک سیستم LTI علی بامعادله دیفرانسیل زیر به هم مربوط اند.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{d\ y(t)}{dt}+8y(t)=2x(t)$$

(الف) پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=te^{-2t}u(t)$ را بیابید.

(ج) بند (الف) را برای سیستم LTI علّی زیر توصیف شده با معادله زیر تکرار کنید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\sqrt{2}\frac{d\ y(t)}{dt}+y(t)=2\frac{d^2x(t)}{dt^2}-2x(t)$$

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله ی دیفرانسیل داده شده، بدست می آوریم:

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{2}{-\omega^2+2j\omega+8}$$

با استفاده از بسط به کسرهای جزئی خواهیم داشت:

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}-\frac{1}{j\omega+4}$$

با گرفتن عکس فوریه:

$$h(t)=e^{-2t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

(ب) از سیگنال داده شده بدست می آوریم:

$$x(j\omega)=\frac{1}{(2+j\omega)^2}$$

بنابراین

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=\frac{2}{\left(-\omega^2+2j\omega+8\right)}\frac{1}{(2+j\omega)^2}$$

با استفاده از روش بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$y(t)=\tfrac{1}{4}e^{-2t}u(t)-\tfrac{1}{2}te^{-2t}u(t)+t^2e^{-2t}u(t)-\tfrac{1}{4}e^{-4t}u(t)$$

(ج) باگرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{2\left(-\omega^2-1\right)}{-\omega^2+\sqrt{2}j\omega+1}$$

با استفاده از بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$H(j\omega)=2+\frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{2}j}{j\omega-\frac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}}+\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{2}j}{j\omega-\frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}}$$

با استفاده از تبیل فوریه عکس معکوس:

$$h(t)=2\delta(t)-\sqrt{2}(1+2j)e^{-(1+j)t/\sqrt{2}}u(t)-\sqrt{2}(1-2j)e^{-(1-j)t/\sqrt{2}}u(t)$$

٤,٣٤) پاسخ فرکانسی سیستم LTI پایدار S به صورت زیرست

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{6-\omega^2+5j\omega}$$

(الف) معادله دیفرانسیلی را که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستم S را به هم مرتبط می کند، بنویسید.

(ب) پاسخ ضربه $h(t)$ سیستم S را بیابید.

(ج) خروجی $y(t)$ به ازای ورودی زیر را بیابید.

$$x(t)=e^{-4t}u(t)-te^{-4t}u(t)$$

حل:

(الف) داریم:

$$\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{j\omega+4}{6-\omega^2+5j\omega}$$

با طرفین وسطین وعکس تبدیل فوریه داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\delta\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$$

(ب) داریم:

$$H(j\omega)=\frac{2}{2+j\omega}-\frac{1}{3+j\omega}$$

با گرفتن عکس تبدل فوریه داریم:

$$h(t)=2e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$$

(ج) داریم:

$$x(j\omega)=\frac{1}{4+j\omega}-\frac{1}{(4+j\omega)^2}$$

بنابراین

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{(4+j\omega)(2+j\omega)}$$

با یافتن بسط کسرهای جزئی و گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t)=\tfrac{1}{2}e^{-2t}u(t)-\tfrac{1}{2}e^{-4}u(t)$$

٤,۳۵) در این مسئله مثالهایی از اثر تغییر غیر خطی در نظر می گیریم.

(الف) یک سیستم LTI پیوسته در زمان، با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید

$$H(j\omega)=\frac{a-j\omega}{a+j\omega}$$

که در آن $a>۰$، دامنه $H(j\omega)$ چقدرست؟ فاز $\triangleleft H(j\omega)$ چقدرست؟ پاسخ ضربه این سیستم را به دست آورید.

(ب) خروجی سیستم بند (الف) را به ازای $a=1$ و ورودی زیر بیابید.

$$\cos(t/\sqrt{3})+\cos+\cos(\sqrt{3}t)$$

ورودی و خروجی را به طور تقریبی رسم کنید.

حل:

(الف) از اطلاعات داده شده:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{a^2+w^2}}{\sqrt{a^2+w^2}} = 1$$

و نیز

$$\circ H(j\omega) = -tg^{-1}\frac{\omega}{a} - tg^{-1}\frac{\omega}{a}$$

$$tg^{-1} = -2tg^{-1}\frac{\omega}{a}$$

و نیز

$$H(j\omega) = -1 + \frac{2a}{a+j\omega}$$

$$\Rightarrow h(t) = -\delta(t) + 2a\,e^{-at}u(t)$$

(ب) با یافتن بسط کسرهای جزئی قسمت (الف)، و گرفتن عکس تبدیل فوریه:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)$$

٤,۳۷) سیگنال $x(t)$ شکل م ٤-۳۷ را در نظر بگیرید.

(الف) تبدیل فوریه $x(t)$ را بیابید.

(ب) سیگنال زیر را رسم کنید.

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4k)$$

(ج) یک سیگنال $g(t)$ بیابید که همانند $x(t)$ نباشد ولی برای آن

$$\tilde{x}(t) = g(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4k)$$

(د) نشاندهیدکه هر چند $G(j\omega)$ و $G(j\omega)$ متفاوت اند، ولی به ازای هر k صحیح $G\left(j\frac{\pi k}{2}\right)=X\left(j\frac{\pi k}{2}\right)$. برای پاسخ به این سئوال لازم نیست $G(j\omega)$ را حساب کنید.

حل:

(الف) توجه کنید که

$$x(t)=x_1(t)*x_1(t)$$

$$x_1(t)=\begin{cases}1 & |\omega|<1/2\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

و نیز تبدیل فوریه $x(t)$ که عبارتست از $x(j\omega)$ برابر است با:

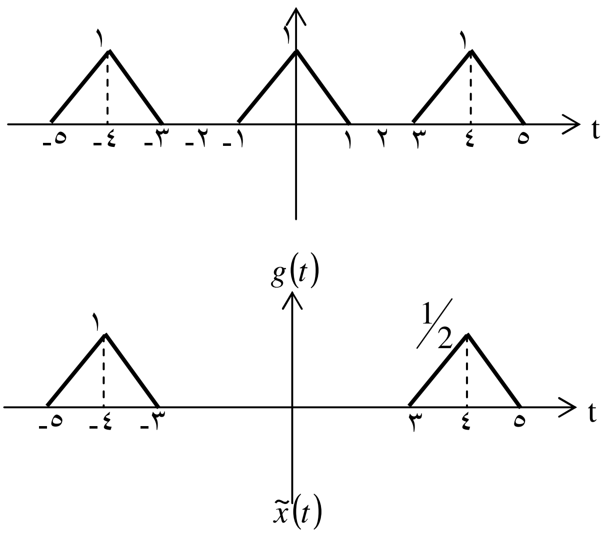
$$x_1(j\omega)=2\frac{\sin \omega/2}{\omega}$$

با استفاده از خاصیت کانولوشن داریم:

$$x(j\omega)=x_1(j\omega)x_1(j\omega)$$

$$=\left[2\frac{\sin(\omega/2)}{\omega}\right]^2$$

(ب) سیگنال $\tilde{x}(t)$ در شکل ح۴٫۳۷. نشان داده شده است:



شکل ح۴٫۳۷

(ج) یک انتخاب ممکن برای $g(t)$ در شکل S٤,۳۷ نشان داده شده است.

(د) توجه کنید که

$$\tilde{x}(j\omega) = x(j\omega)\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(j\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

$$G(j\omega)\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(j\left(\omega - k\pi/2\right)\right)$$

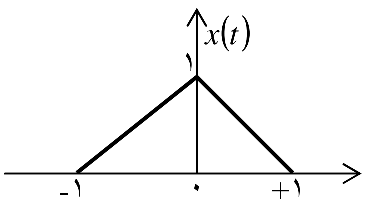
که آن را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$\tilde{x}(j\omega) = \frac{\pi}{2}\sum x\left(jk/2\right)\delta\left(j\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G\left(jk\pi/2\right)\delta\left(j\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

واضح است که این تنها در صورتی امکان دارد که:

$$G\left(jk\pi/2\right) = x\left(j\pi k/2\right)$$

٤,۳۸) $x^2(t)$ را سیگنال دلخواهی با تبـدیل فوریـه $X(j\omega)$ فـرض کنیـد. خاصـیت جابجـایی فرکانسی تبدیل فوریه را می توان به شکل زیر بیان کرد



شکل م ٤-۳۷

(الف) با اعمال جابجایی فرکانسی به معادله تجزیه تبدیل فوریه زیر، خاصیت جابجـایی فرکانـسی را ثابت کنید.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

(ب) خاصیت جابجایی فرکانسی را با استفاده از تبدیل فوریه $e^{j\omega_\circ t}$ و خاصیت ضرب تبدیل فوریه ثابت کنید.

حل:

(الف) با بکارگیری شیفت فرکانسی برای معادله آنالیز داریم:

$$x(j)(\omega-\omega_\circ)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j(\omega-\omega_\circ)t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{+j\omega_\circ t}e^{-j\omega t}dt$$
$$=FT\left[x(t)e^{j\omega_\circ t}\right]$$

(ب) داریم:

$$\omega(t)=e^{j\omega_\circ t}\xleftrightarrow{FT}w(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_\circ)$$

همچنین

$$x(t)\omega(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2\pi}[x(j\omega)*\omega(j\omega)]$$
$$=x(j\omega)*\delta(\omega-\omega_\circ)$$
$$=x(j(\omega-\omega_\circ))$$

٤,۳۹) تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را $X(j\omega)$ فرض کنید. سیگنال $g(t)$ را مـشکل $X(j\omega)$ در ظنر بگیرید.

یعنی

$$g(t)=X(jt)$$

(الف) نشان دهید تبدیل فوریه $G(j\omega)$ همشکل $2\pi x(-t)$ است، یعنی

$$G(j\omega)=2\pi x(-\omega)$$

(ب) با استفاده از این که

$$\Im\{\delta(t+B)\}=e^{jB\omega}$$

و نتیجه بند (الف) نشان دهید

$$\Im\{e^{jBt}\}=2\pi\delta(\omega-B)$$

حل:

(الف) از معادله آنالیز تبدیل فوریه داریم:

$$G(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(jt)e^{-j\omega t}dt$$

(ح ۱-۳۹،٤.)

و نیز از معادله عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(j\omega)e^{j\omega t}dtu$$

با تعویض t , ω داریم:

$$x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(jt)e^{j\omega t}dut$$

این معادله را به صورت زیر نیزز می توان نوشت:

$$2\pi x(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(jt)e^{-j\omega t}dt$$

با جایگذاری در معادله (ح ۱-۳۹،٤) داریم:

$$G(j\omega)=2\pi x(-\omega)$$

(ب) اگر در قسمت (الف) داشته باشیم $x(t)=\delta(t+B)$، در اینصورت می توان نتیجه گرفت $g(t)=x(jt)=e^{jBt}$ و $G(j\omega)=2\pi x(-\omega)=2\pi\delta(-\omega+B)=2\pi\delta(\omega-B)$.

٤،٤۰) با استفاده از خواص تبدیل فوریه واستقراء ریاضی نشان دهید که تبدیل فوریه سیگنال زیر

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ a>0$$

عبارت است از

$$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$$

حل:

هنگامیکه $n=1$ باشد، $x_1(t)=e^{-at}u(t)$ و $x_1(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$ خواهد بود.

هنگامیکه $n=2$ باشد، $x_2(t)=te^{-at}u(t)$ و $x_2(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)}$ خواهد بود.

حال، فرض کنیم که حالت داده شده برای $n=m$ درست باشد، یعنی

$$x_m=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{FT}x_m(j\omega)=\frac{-1}{(1+j\omega)m}$$

برای $n=m+1$ می توان از دیفرانسیل در حوزه فرکانس استفاده کرد و نوشت:

$$x_{m+1}(t)=\frac{t}{m}x_m(t)\xleftrightarrow{FT}x_{m+1}(j\omega)=\frac{1}{m}j\frac{dx_m(j\omega)}{d\omega}$$
$$=\frac{1}{(1+j\omega)^{m+1}}$$

که نشان می دهد که اگر فرض کنیم که حالت داده شده برای $n=m$ درست باشد، در اینصورت برای $n=m+1$ نیز صحیح خواهد بود. بدلیل اینکه نشان دادیم ک حالت داده شده برای $n=2$ نیز صحیح است، می توانیم برای $n=2+1$ و $n=3+1$ و ... نیز بحث کنیم. بنـابراین حالـت داده شـده برای هر n ای صحیح است.

(پانوشت مترجم: توجه شود که در این مسئله از استقراء ریاضی استفاده شده است).

٤,٤١) (الف) داریم:

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}[x(j\omega)*Y(j\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\theta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}d\omega\right]d\theta$$

(ب) با استفاده از خاصیت شیفت فرکانسی تبدیل فوریه می توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}d\omega=e^{j\theta t}y(t)$$

(ج) با ترکیب نتایج قسمتهای (الف) و (ب):

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\theta)e^{j\theta t}y(t)d\theta$$
$$=y(t)\frac{+1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(j\theta)e^{j\theta t}d\theta$$
$$=y(t)x(t)$$

....

٤,٤۲) فرض کنید

$$g_2(t)=\{[\sin(\omega_\circ t)]x(t)\}*h(t) \quad , \quad g_1(t)=\{[\cos(\omega_\circ t)]x(t)\}*h(t)$$

یک سیگنال حقیقی متناوب و $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI علّی است.

(الف) مقدار $\omega_\circ$ و شرایط لازم $H(j\omega)$ برای داشتن روابط زیر را تعیین کنید.

$$g_2(t)=g_m\{a_5\} \quad , \quad g_1(t)=\Re e\{a_5\}$$

(ب) یک $h(t)$ تعیین کنید، به نحوی که $H(j\omega)$ شرایطی را که در بند (الف) گذاشته ایم ارضا کند. ٤-۳۲ فرض کنید.

$$g(t)=x(t)\cos^2 t*\frac{\sin t}{\pi t}$$

$x(t)$ را حقیقی بگیرید به نحوی که در $|\omega|\geq 1$ داشته باشیم $X(j\omega)=\circ$. نشان دهید که یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان S وجود دارد، به نحوی که

$$x(t)\xrightarrow{S}g(t)$$

حل:

$x(t)$ سیگنالی متناوب با ضرایب سری فوریه a_k می باشد. فرکانس پایه $x(t)$ برابر است با $\omega_f=100\,{}^{rad}\!/_{\sec}$. از بخش ٤,۲ می دانیم که تبدیل فوریه $x(t)$ عبارتست از:

$$x(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-100k)$$

(الف) بدلیل این که:

$$y_1(t)=x(t)\cos(\omega_\circ t)\xleftrightarrow{FT}Y_1(j\omega)=\frac{1}{2}[x(\omega-\omega_\circ)]+x(j(\omega+\omega_\circ))$$

داریم:

$$Y_1(j\omega)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[a_k\delta(\omega-100k-\omega_\circ)+a_k\delta(\omega-100k+\omega_\circ)]$$

$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[a_{-k}\delta(\omega+100k-\omega_\circ)+a_k\delta(\omega-100k+\omega_\circ)]$$

اگر $\omega_\circ=500$، در اینصورت سری فوق با $k=5$ به صورت زیر خواهد بود:

$$x_{a-5}\delta(\omega)+\pi a_5\delta(\omega)$$

چون؛ $x(t)$ حقیقی است $a_k = a_{-k}^*$، بنابراین، بیان معادله بالا بـه صـورت $2\pi \operatorname{Re}\{a_5\}\delta(\omega)$ در خواهـد آمـد کـه ضـربه ای در $\omega = \circ$ مـی باشـد. توجـه نمائیـد کـه تبـدیل فوریـه معکوس $2\pi \operatorname{Re}\{a_5\}\delta(\omega)$ برابر $g_1(t) = \operatorname{Re}\{a_5\}$ می باشد. بنابراین، نیاز داریم تـا $H(j\omega)$ را بـه گونه ای بیابیم که:

$$Y_1(j\omega) = \theta_1(j\omega) = 2\pi \operatorname{Re}\{a_5\}\delta(\omega)$$

به راحتی $H(j\omega)$ را بـا توجـه بـه سـایر جمـلات (جملاتـی غیـر از $k = 5$) در سـری معادلـه (S٤,٤٢) نتیجه ضربه در $\omega = 100m$ و $m \neq \circ$ بدست آوریم. بنابراین، می تـوانیم هـر $H(j\omega)$ را که برای و $\omega = 100m$ و $m = \pm 1, \pm 2, ...$ صفر است انتخاب کنیم:

بطور مشابه چون

$$y_2(t) = x(t)\sin(\omega_\circ t) \xleftrightarrow{FT} Y_2(j\omega)$$
$$= \frac{1}{2j}\{x(j(\omega - \omega_\circ)) - x(j(\omega + \omega_\circ))\}$$

داریم:

$$Y_2(j\omega) = \frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[a_k\delta(\omega - 100k - \omega_\circ) - a_k\delta(\omega - 100k + \omega_\circ)\right]$$
$$= \frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[a_{-k}\delta(\omega + 100k - \omega_\circ) - a_k\delta(\omega - 100k + \omega_\circ)\right]$$

اگر $\omega_\circ = 500$، آنگاه جملات در مجموع فوق با $k = 5$ برابرند با:

$$\frac{\pi}{j}a_{-5}\delta(\omega) - \frac{\pi}{j}a_5\delta(\omega)$$

چون $x(t)$ حقیقی است $a_k = a_{-k}^*$. بنابراین بیان فوق به صورت $2\pi I_m\{a_5\}\delta(\omega)$ خواهد شـد، که ضربه ای در $\omega = \circ$ می باشد. توجه نمائید که تبدیل فوریه معکوس $2\pi \operatorname{Im}\{a_5\}\delta(\omega)$ برابر است با: $g_2(t) = \operatorname{Im}\{a_5\}$. بنابراین، نیاز به یافتن $H(j\omega)$ای به صورت زیر می باشیم:

$$Y_2(j\omega)H(j\omega) = G_2(j\omega) = 2\pi \operatorname{Re}\{a_5\}\delta(\omega)$$

به راحتی بـا توجـه بـه سـایر جمـلات (جملاتـی غیـر از $k = 5$) در مجمـوع سـری (S٤,٤٢-٢) $H(j\omega)$را نتیجه در $\omega = 100m$ و $m \neq \circ$ بدست آوریم. بنابراین، می تـوانیم هـر $H(j\omega)$ای را برای $\omega = 100m$و $m = \pm 1, \pm 2, ...$، انتخاب کنیم.

(ب) یک مثال برای $H(j\omega)$ درست، می تواند پاسخ ضربه یک فیلتر پائین گذر ایده آل، بهره باند گذر واحد و فرکانس قطع $50^{rad/\sec}$ باشد. در این مورد داریم:

$$h(t)=\frac{\sin 50t}{\pi t}$$

٤,٤٣) فرض کنید

$$g(t)=x(t)\cos^2 t*\frac{\sin t}{\pi t}$$

$x(t)$ را حقیقی بگیرید به نحوی که در $|\omega|\geq 1$ داشته باشیم $X(j\omega)=0$. نشان دهید که یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان S وجود دارد، به نحوی که

$$x(t)\xrightarrow{S}g(t)$$

حل:

چون

چون $y_1(t)=\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$

بدست می آوریم:

$$Y_1(j\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}\delta(\omega-2)+\pi/_2\,\delta(\omega+2)$$

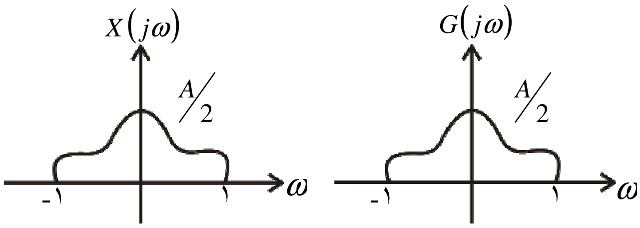
بنابراین:

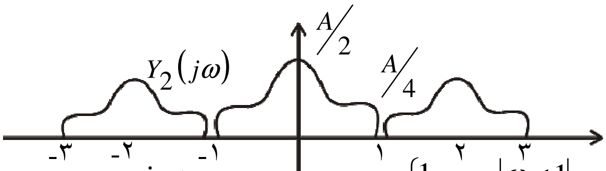
$$y_2(t)=x(t)y_1(t)=x(t)\cos^2 t\xleftrightarrow{FT}Y_2(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\{x(j\omega)*Y_1(j\omega)\}$$

که می دهد:

$$Y_2(j\omega)=\frac{1}{2}x(j\omega)+\frac{1}{4}x(j(\omega-2))+\frac{1}{4}x(j(\omega+2))$$

$x(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)$ در شکل ح٤,٤٣. نشان داده شده است.





شکل ح۴۳،۴.

حال:

$$y_3(t)=\frac{\sin t}{\pi t}\xleftrightarrow{FT}Y_3(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega<1| \\ \circ & other\ wise\end{cases}$$

همچنین:

$$g(t)=y_2(t)*y_3(t)\xleftrightarrow{FT}G(j\omega)=Y_2(j\omega)Y_3(j\omega)$$

از شکل ح۴۳،۴. واضح است که

$$G(j\omega)=\frac{1}{2}x(j\omega)$$

بنابراین یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)$ می تواند برای بدست آوردن $g(t)$ از $x(t)$ مورد استفاده قرار بگیرد.

۴۴،۴) خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI علّی، با معادله زیر به ورودی $x(t)$ آن مرتبط شده است.

$$\frac{d\,y(t)}{d\,t}+10\,y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)z(t-\tau)d\tau-x(t)$$

که در آن $z(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$

(الف) پاسخ فرکانسی این سیستم، $H(j\omega)=Y(j\omega)/X(j\omega)$، را بیابید.

(ب) پاسخ ضربه این سیستم را پیدا کنید.

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله دیفرانسیل داده شده دادیم:

$$Y(j\omega)[10+j\omega]=x(j\omega)[z(j\omega)-1]$$

بدلیل اینکه $3+\frac{1}{1+j\omega}=z\{j\omega\}$ از معادله بالا بدست می آوریم:

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{3+2j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)}$$

(ب) نسبط کسرهای جزئی $H(j\omega)$ را بدست آورده و عکس تبدیل فوریه آن را بدست می آوریم داریم:

$$h(t)=\tfrac{1}{9}e^{-t}u(t)+\frac{17}{9}e^{-10t}u(t)$$

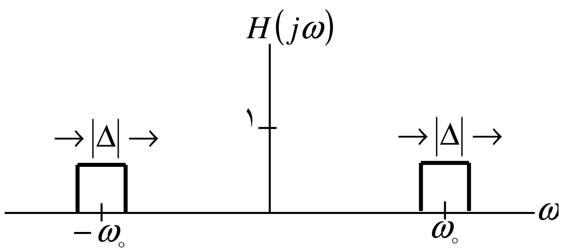
٤,٤٥) در بخش ٤-٣-٧ طی مبحث قضیه پارسئوال برای سیگنالهای پیوسته در زمـان نـشان دادیـم که

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2\,d\omega$$

یعنی انتگرال گیری از $|X(j\omega)|^2$ روی تمام فرکانسها می توان کل انـرژی موجـود در سـیگنال را به دسـت آورد. حـال سـیگنال حقیقـی $x(t)$ رادر نظـر بگیریـد کـه توسـط فیلتـر میانگـذار ایـده آل $H(j\omega)$ شکل م ٤-٤٥ پردازش مـی شـو. انـرژی سـیگنال خروجـی $y(t)$ را بـه صـورت انتگـرال فرکانسی $|X(j\omega)|^2$ بیان کنید.

Δ را به قدر کافی کوچک فرض کنید، طوری که بتوان $H(j\omega)$ در یک فاصله فرکانسی به پهنای Δ را تقریباً ثابت دانست. نشان دهید که انرژی خروجـی فیلتـر میـان گـذار تقریبـاً بـا $\Delta|X(j\omega_\circ)|^2$ متناسب است.

بر مبنای نتیجه فوق $\Delta|X(j\omega_\circ)|^2$ با انرژی سیگنال در پهنای باند Δ حـول فرکـانی ω_c متناسـب است.بر مبنای نتیجه فوق $\Delta|X(j\omega_\circ)|^2$ را غالباً طیف چگالی انرژی سیگنال $x(t)$ می نامند.



$$x(t)\rightarrow\boxed{H(j\omega)}\rightarrow y(t)$$

شکل م ٤-٤٥

حل:

داریم:

$$y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)$$

از رابطه پارسئوال، انرژی کل $y(t)$ عبارتست از:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(j\omega)|^2d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(j\omega)|^2|H(j\omega)|^2d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_\circ-\Delta/2}^{-\omega_\circ+\frac{\Delta}{2}}|x(j\omega)|^2d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_\circ-\frac{\Delta}{2}}^{\omega_\circ+\frac{\Delta}{2}}|x(j\omega)|^2d\omega$$

$$E\approx\frac{1}{2}|x(-j\omega_\circ)|^2\Delta+\frac{1}{2\pi}|x(j\omega_\circ)|^2\Delta$$

برای $x(t)$ حقیقی؛ $|x(j\omega_\circ)|^2$؛ بنابراین:

$$E=\frac{1}{\pi}|x(j\omega_\circ)|^2\Delta$$

٤،٤٦) در بخش ٤-٥-١ کاربرد مدولاسیون دامنه ای باحامل نمایی مختلط در ساختن فیلتر میانگذار را دیدیم. سیستم درشکل ٤-٢٦ نشان داده شده است و اگر تنها بخش حقیقی $f(t)$ را نگه داریم، معادل فیلتر میانگذار شکل ٤-٣٠ است. در شکل م ٤-٤٦ تحقق یک فیلتر میانگذار با استفاده از مدولاسیون سینوسی و فیلتر پایین گذر نشان داده شده است. نشان دهید که خروجی $y(t)$ این سیستم با بخش حقیقی خروجی سیستم شکل ٤-٢٦، یعنی $\Re e\{(f)\}$ یکسان است.

حل:

فرض کنید $g_1(t)$ پاسخ $H_1(j\omega)$ به $x(t)\cos\omega_c t$ باشد. و همچنین $g_2(t)$ پاسخ $H_2(j\omega)$ به $x(t)\sin\omega_c t$ باشد. در اینصورت با مراجعه به

شکل ٤،٣٠ : $y(t)=x(t)e^{j\omega_c t}=x(t)\cos_c t+jx(t)\sin\omega_c t$

و $\omega(t)=g_1(t)+jg_2(t)$

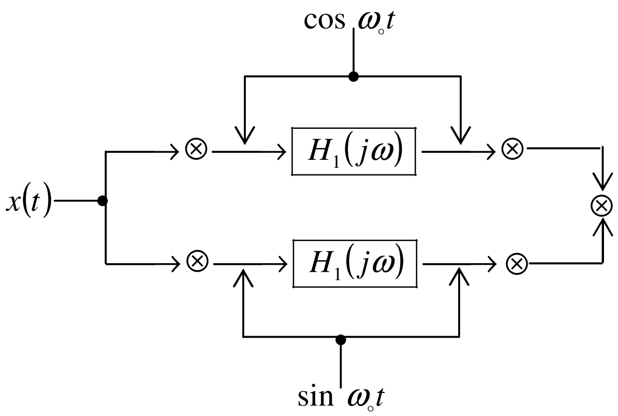
همچنین

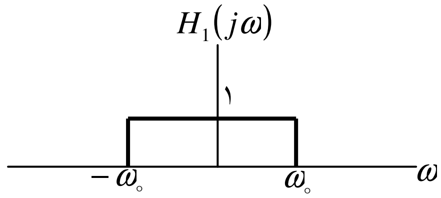
$$f(t) = -e^{-j\omega_c t^{\bullet}}\,\omega(t) = [\cos\omega_c t - j\sin\omega_c t][g_1(t) + jg_2(t)]$$

بنابراین:

$$\mathrm{Re}\{f(t)\} = g_1(t)\cos\omega_c t + g_2(t)\sin\omega_c t$$

٤,٤٧) یکی از خواص پاسخ فرکانسی سیستمهای LTI پیوسته در زمان، با پاسخ ضربه $h(t)$ حقیقی و علّی، این است که قسمت حقیقی $H(j\omega)$ یعنی $\Re e\{H(j\omega)\}$، $H(j\omega)$ را به طور کامل مشخص می کند. این خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی نام دارد و در این مسئله بعضی نتایج ضمنی آن بررسی می شود.





(الف) با بررسی سیگنال $h_e(t)$، که قسمت زوج $h(t)$ است، خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی را ثابت کنید. تبدیل فوریه $h_e(t)$ چیست؟ چگونه می توان $h(t)$ را از $h_e(t)$ به دست آورد.

(ب) بخش حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم علّی عبارت است از

$$\Re e\{H(j\omega)\} = \cos\omega$$

$h(t)$ را بیابید.

(ج) نشان دهید که به ازای همه مقادیر t بجز $t=0$، می توان $h(t)$ را از $h_o(t)$، یعنی قسمت فرد $h(t)$، به دست آورد. اگر $h(t)$ در $t=0$ تابع تکین [$\delta(t)$، $u_1(t)$، $u_2(t)$ و غیره] نداشته باشد، می توان مقدار $h(t)$ را در $t=0$، مقدار محدود دلخواهی فرض کرد بدون اینکه پاسخ فرکانسی زیر تغییر کند.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

به این ترتیب نشان دهید که قسمت موهومی $H(j\omega)$ نیز $H(j\omega)$ را به طور کامل مشخص می کند.

حل:

(الف) داریم:

$$h_e(t) = \frac{h(t)+h(-t)}{2}$$

چون $h(t)$ کازال می باشد، قسمتهای غیر صفر $h(t)$ و $h(-t)$ تنها در $t=0$ روی هم می افتند، بنابراین:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ h_e(t) & t=0 \\ 2h_e(t) & t>0 \end{cases} \qquad (\text{ح}\,٤,٤٧)$$

همچنین از جدول ٤,١ داریم:

$$he(t) \xleftrightarrow{FT} \mathrm{Re}[H(j\omega)]$$

$R_e[H(j\omega)]$ داده شده است پس می توانیم $he(t)$ را بدست آوریم. از $h_e(t)$ دوباره می توانیم $h(t)$ را تحت پوشش قرار دهیم. (و مکرراً $H(j\omega)$ را از معادله (S٤-٤٧-١) بدست می آوریم.)

بنابراین $H(j\omega)$ به طور کامل به $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}$ اختصاص یافته است.

(ب) اگر $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}=\cos=\frac{1}{2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega t}$

در این صورت:

$$he(t)=\frac{1}{4}\delta(t+1)+\frac{1}{2}\delta(t-1)$$

(ج) داریم:

$$h_{\circ}(t)=\frac{h(t)+h(-y)}{2}$$

چون $h(t)$ کازال است. اجزاء غیر صفر $h(t)$ و $h(-t)$ تنها روی $t=\circ$ همپوشانی دارند و $h_{\circ}(t)$ تنها در $t=\circ$ صفر خواهد بود. بنابراین:

(ح۲-٤,٤۷)

$$h(t)=\begin{cases}\circ & t<\circ\\ \text{نامعلوم} & t=\circ\\ 2h_{\circ}(t) & t>\circ\end{cases}$$

همچنین از جدول ٤,۱ داریم:

$$h_{\circ}\xleftrightarrow{FT}\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$$

$\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$ داده شده است پس می توان $h_{\circ}(t)$ را بدست آورد. از $h_{\circ}(t)$، می توانیم $h(t)$ را بجز برای $t=\circ$ ، با استفاده از معادله (S٤,٤۷-۲) پوشش دهیم. اگر در $t=\circ$ هیچ نقطه ی تکینـی در $h(t)$ وجود داشته باشد، در اینصورت $H(j\omega)$ توسط $h(t)$ زوج اگر $h(\circ)$ نـامعلوم باشـد، پوشـش داد. بنابراین $H(j\omega)$ در این مورد فقط به $\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}$ اختصاص یافته است.

٤,٤۸) یک سیستم با پاسخ ضربه علّی $h(t)$ در نظر بگیرید که در $t=\circ$ تکینـی نداشـته باشـد. در مسئله ٤-٤۷ دیدیم که بخش حقیقی یا موهومی $H(j\omega)$ آن را به طور کامل تعیـین مـی کنـد. در ایـن مسئله رابطه صریحی بین $H_R(j\omega)$ و $H_I(j\omega)$، یعنی بخـشهای حقیقـی و موهـومی $H(j\omega)$ بـه دست می آوریم.

(الف) ابتدا توجه کنید که چون $h(t)$ علّی است می توان نوشت

$$h(t)=h(t)u(t) \qquad \text{(م ٤-٤۸-۱)}$$

بجز احتمالاً در $t=0$. چون $h(t)$ در $t=0$ تابع تکین ندارد، تبدیل فوریه دو طرف معادله (م ٤-٤٨-١) باید یکسان باشد. با استفاده از مطلب فوق و خاصیت ضرب نشان دهید که

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(j\eta)}{\omega-\eta}d\eta \qquad \text{(م ٤-٤٨-٢)}$$

بـا اسـتفاده از معادلـه فـوق، $H_R(j\omega)$ را بـر حـسب $H_I(j\omega)$ و $H_I(j\omega)$ را برحـسب $H_R(j\omega)$ بیان کنید.

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d \qquad \text{(م ٤-٤٨-٣)}$$

تبدیل هیلبرت نامیده می شود. که بـرای پاسـخ ضـربه حقیقـی و علّـی $h(t)$، بخـشهای حقیقـی و موهومی تبدیل فوریه را می توان به کمک تبدیل هیلبرت، به یکدیگر ربط داد.

حال معادله (م ۳-٤٨-۳) را در نظر بگیرید و $y(t)$ را خروجی یک سیستم عبارت است از

$$G(j\omega)=\begin{cases}-j, & \omega>0\\ j, & \omega<0\end{cases}$$

(ج) تبدیل هیلبرت سیگنال $x(t)=\cos 3t$ را به دست آورید.

حل:

(الف) با استفاده از خاصیت ضرب داریم:

$$h(t)=h(t)u(t)\xleftrightarrow{FT}H(j\omega)*\left[\frac{1}{\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

طرف راست تساوی فوق را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$H(j\omega)=\frac{1}{2}H(j\omega)+\frac{1}{2\pi j}\left[H(j\omega)*\frac{1}{\omega}\right]$$

یعنی

$$H(j\omega)=\frac{1}{\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(j\eta)}{\omega-y}dy$$

با شکستن $H(j\omega)$ به قسمتهای حقیقی و موهومی داریم:

$$H_R(j\omega)+jH_I(j\omega)=\frac{1}{\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_R(jy)+jH_I(jy)}{\omega-y}dy$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_I(jy)}{\omega-n}dy$$

با مقایسه قسمت حقیقی و موهومی در دو طرف داریم:

$$H_R(j\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_I(jy)}{\omega-y}dy \quad \text{و} \quad H_I(j\omega)=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_R(jy)}{\omega-y}\ dy$$

(ب) از (م۳,٤,٤۸) می توان نوشت:

$$y(t)=x(t)*\frac{1}{\pi t}\Rightarrow Y(j\omega)=x(j\omega)FT\left\{1/_{\pi t}\right\}$$

(ح ۱-.٤,٤۸.)

و نیز از جدول ٤,۲ داریم:

$$u(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

بنابراین

$$2u(t)-1\xleftrightarrow{FT}2\frac{1}{j\omega}$$

با استفاده از خاصیت دوگان، داریم:

$$\frac{2}{jt}\xleftrightarrow{FT}[2u(-\omega)-1]$$

و یا

$$\frac{1}{\pi t}\xleftrightarrow{FT}j[2u(-\omega)-1]$$

بنابراین از معادله (ح ۱-٤,٤۸.) داریم:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)$$

که

$$H(j\omega)=j[2u(-\omega)-1]=\begin{cases}-j & \omega>0\\ +j & \omega<0\end{cases}$$

(ج) فرض کنید $y(t)$ تبدیل هیبرت $x(t)=\cos 3t$ در اینصورت:

$$Y(j\omega)=x(j\omega)H(j\omega)=x[\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)]H(j\omega)=-j\pi\delta(\omega-3)+j\pi\delta(\omega+3)$$

بنابراین:

$$y(t)=\sin(3t)$$

۴٫۴۹) $H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI پیوسته در زمان است، $H(j\omega)$ را حقیقـی، زوج و مثبت فرض کنید. همچنین فرض کنید که

$$\max_{\omega}\{H(j\omega)\} = H(\circ)$$

(الف) نشان دهید

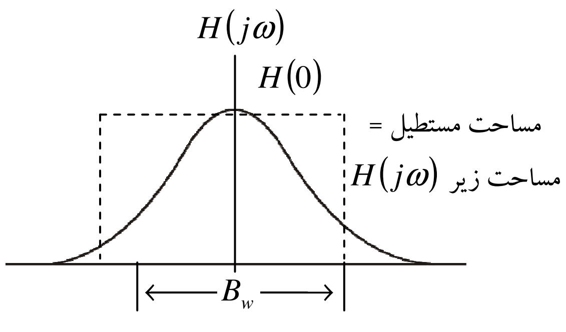
(i) پاسخ ضربه $h(t)$ منتفی است.

(ii) $\max\{|h(t)|\} = h(t)$.

راهنمایی: اگر $f(t,\omega)$ تابع مختلطی از دو متغیر باشد، آنگاه

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\omega) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t,\omega)d\omega|\right|$$

(ب) یکی ز مفاهیم مهم در تحلیل سیستم، پهنای باند سیستم LTI اسـت. بـرای تعریـف ریاضـی پهنای باند راههای گوناگونی وجود دارد، اما اساس همه این تعریفها این ایده کیفی و حسی اسـت کـه در فاصله ای مقدار $G(j\omega)$ بزرگ است، سیگنالهای نمایی مختلط از سیستم (می گذرند). پهنای ایـن فاصله عبور سیگنال پهنای باند نامیده می شود. این ایده در فصل ۶ واضح تر می شود، ولی فعلاً بـرای سیستمهایی به پاسخ فرکانسی آنها خواص قبلاً بیان شده برای $G(j\omega)$ را دارد، یک پهنای باند خـاص تعریف می کنیم. یکی از تعاریف پهنای باند B_w بـرای چنـین سیـستمی، پهنـای مـستطیلی بـه ارتفـاع $H(j\circ)$ است، به شرطی که مساحت آن با سطح زیر $H(j\omega)$ برابر باشد. این مطلب در شکل ۴-۴۹ (الف) تصویر شده است. چون $H(j\circ) = \max_{\omega} H(j\omega)$، فرکانسهای داخل باند نـشان داده شـده در شکل، فرکانسهای داخل باند نشان داده شده در شکل، فرکانسهایی اند کـه بـه ازای آنهـا $H(j\omega)$ بیشترین مقادیر را دارد. البته انتخاب دقیق این پهنا تا حدی دلخواه است، ما در اینجا تعریفی را پذیرفته ایم تا بتوانیم سیستمهای مختلف را با هم مقایسه و یک رابطه مهم بین زمان و فرکانس را به دقت بیـان کنیم.



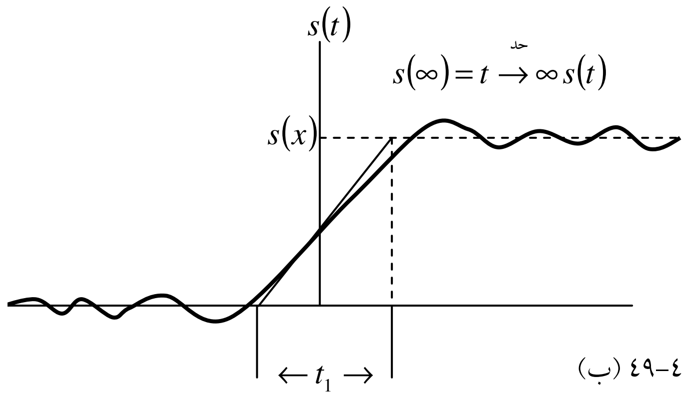
شکل م ۴-۴۹ الف

پهنای باند سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر چقدرست؟

$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ \circ, & |\omega|>W\end{cases}$$

(ج) پهنای باند B_w را برحسب $H(j\omega)$ بنویسید.

(د) $s(t)$ را پاسخ پله سیستم بند (الف) بگیرید. یکی از معیارهای مهم سرعت پاسخ سیستم زمان صعود آن است، که آن هم یک تعریف کیفی است و بنابراین می توان تعاریف ریاضی مختلفی برای آن ارائه داد. در اینجا یکی از این تعاریف را به کار می بریم. زمان صعود، به طور شهودی سرعت رسیدن پاسخ سیستم از صفر به مقدار نهایی زیرست.



شکل م ٤-٤٩ (ب)

پس هر چه زمان زمان صعود کمتر باشد، سیستم سریعتر است. برای سیستم مورد بررسی زمان صعود را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$t_r=\frac{s(\infty)}{h(\circ)}$$

چون

$$s'(t)=h(t)$$

دیدیم که $\max_1 h(t)=h(\circ)$، پس می توان t_r را به صورت زمانی که طول می کشد تا خروجی با ماکزیمم سرعت $s(t)$ از به $s(\infty)$ برسد، تعبیر کرد. این مطلب در شکل م ٤-٤٩ (ب) تصویر شده است.

برای t_r عبارتی بر حسب $H(j\omega)$ بیابید.

(هـ) با ترکیب نتایج بندهای (ج) و (د) نشان دهید که

$$B_w t_r = 2\pi \qquad \text{(م ٤-٤٩-١)}$$

پس نمی توانیم پهنای باند و زمان صعود را به طور مستقل مشخص کنیم. مثلاً اگر بخواهیم سیستم سریعی داشته باشیم (t_r کوچک) بنا به معادله (م ٤-٤٩-١) باید سیستمی با پهنای باند بزرگ انتخاب کنیم. این مصالحه ی اساسی است که در بسیار از مسائل مربوط به طراحی سیستمهای اهمیت کلیدی دارد.

حل:

(الف) (i) چون $H(j\omega)$ حقیقی و زوج است، $h(t)$ نیز حقیقی و زوج است.

(ii)
$$|h(t)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(j\omega)|e^{j\omega t}d\omega$$

چون $H(j\omega)$ حقیقی و مثبت است.

$$|h(t)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=h(\circ)$$

بنابراین

$$\max[|h(t)|]=h[\circ]$$

(ب) پنهانی باند این سیستم برابر است با 2ω.

(ج) داریم: ناحیه زیر $B_\omega H(j\circ)$

بنابراین:
$$B_\omega=\frac{1}{H(j\circ)}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)d\omega$$

(د) داریم:

$$t_r=\frac{s(\infty)}{h(\circ)}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)d\omega}=\frac{H(j\circ)}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)d\omega}=\frac{2\pi}{B\omega}$$

(هـ) بنابراین

$$B_\omega t_r B_\omega \frac{2\pi}{B\omega} = 2\pi$$

۴،۵۰) در مسائل ۱–۴۵ و ۲–۶۷ بعضی تابع همبستگی راتعریف و بعضی خواص آن را بررسی کردیم. در این تابع همبستگی مقابل $x(t)$ و $y(t)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

به همین ترتیب می توان توابع $\phi_{yx}(t)$، $\phi_{xx}(t)$، و $\phi_{yy}(t)$ را تعریف کرد. [دو تابع آخری به ترتیب توابع خود همبستگی $x(t)$ و $y(t)$ نام دارند.]. $\Phi_{xy}(j\omega)$، $\Phi_{yx}(j\omega)$، $\Phi_{xx}(j\omega)$، و $\Phi_{yy}(j\omega)$ را به ترتیب تبدیل فوریه $\Phi_{xy}(j\omega)$ و $\Phi_{yx}(j\omega)$ چه رابطه ای دارند؟

(الف) $\Phi_{xy}(j\omega)$ و $\Phi_{yx}(j\omega)$ چه رابطه ای دارند؟

(ب) $\Phi_{xy}(j\omega)$ را برحسب $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ به دست آورید.

(ج) نشان دهید که $\Phi_{xx}(j\omega)$، برای همه مقادیر ω حقیقی و غیر منفی است.

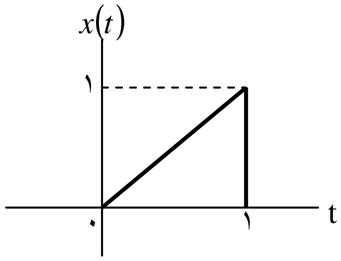
(د) حال فرض کنید $x(t)$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه حقیقی و پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ بیابید.

(هـ) $x(t)$ را به صورت شکل م ۴–۵۰ بگیرید و فرض کنید پاسخ ضربه سیستم LTI، $h(t) = e^{-at}u(t)$ با $a > ۰$ است. با استفاده از نتایج بندهای (الف) تا (د) $\Phi_{xy}(j\omega)$، $\Phi_{xx}(j\omega)$، و $\Phi_{yy}(j\omega)$ را بیابید.

(و) فرض کنید تبدیل فوریه تابع $\phi(t)$ به صورت زیرست

$$\Phi(j\omega) = \frac{\omega^2 + 100}{\omega^2 + 25}$$

پاسخ ضربه دو سیستم LTI علی و پایدار، با تابع خود همبستگی $\phi(t)$ را بیابید. کدام یک از این دو سیستم وارون پایدار و علّی دارد؟



شکل م ۴–۵۰

حل:

(الف) از مسئله های ۱,٤٥ و ۲,۹۷ می دانیم ک:

$$\phi_{xy}(t)=\phi_{yz}(-t)$$

بنابراین

$$\phi_{xy}(j\omega)=\phi_{yx}(-j\omega)$$

چون $\phi_{yx}(t)$ حقیقی است، داریم:

$$\phi_{xy}(j\omega)=\phi_{yz}^{*}(j\omega)$$

(ب) می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)y(\tau)d\tau\\&=x(t)*y(-t)\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\phi_{xy}(j\omega)=x(j\omega)Y(-j\omega)$$

چون $y(t)$ حقیقی است می توان نوشت:

$$\phi_{xy}(j\omega)=x(j\omega)Y^{*}(j\omega)$$

(ج) با استفاده از نتایج قسمت (ب) با $y(t)=x(t)$:

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(j\omega)&=x(j\omega)x^{*}(j\omega)\\&=|x(j\omega)|^{2}\geq ۰\end{aligned}$$

(د) از قسمت ب داریم:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(j\omega)&=\phi(j\omega)Y^{*}(j\omega)\\&=x(j\omega)[H(j\omega)x(j\omega)]^{*}\\&=\phi_{xx}(j\omega)H^{*}(j\omega)\end{aligned}$$

و همچنین:

$$\begin{aligned}\phi_{yy}(t)&=Y(j\omega)Y^{*}(j\omega)\\&=[H(j\omega)x(j\omega)][H(j\omega)x(j\omega)]^{*}\\&=\phi_{xx}(j\omega)|H(j\omega)|^{2}\end{aligned}$$

(هـ) از اطلاعات داده شده، داریم:

$$(j\omega)=\frac{e^{-j\omega}-1}{\omega^2}-j\frac{e^{-j\omega}}{\omega}$$

و

$$H(j\omega)=\frac{1}{\propto+j\omega}$$

بنابراین:

$$\phi_{xx}(j\omega)=|x(j\omega)|^2=\frac{2-2\cos\omega}{\omega^4}-\frac{2\sin\omega}{\omega^2}$$

$$\phi_{xy}(j\omega)=\phi_{xx}(j\omega)H^*(j\omega)=\left[\frac{2-2\cos\omega}{\omega^2}-\frac{2\sin\omega}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\right]\left[\frac{1}{\propto-j\omega}\right]$$

و

$$\phi_{yy}(j\omega)=\phi_{xx}(j\omega)|H(j\omega)|^2=\left[\frac{2-2\cos\omega}{\omega^4}-\frac{2\sin\omega}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\right]\left[\frac{1}{\propto^2+\omega^2}\right]$$

(و) نیاز داریم که:

$$|H(j\omega)|^2=\frac{\omega^2+100}{\omega^2+25}$$

انتخاب برای کازال و پایدار کردن $H(j\omega)$ عبارتست از:

$$H_1(j\omega)=\frac{10+j\omega}{5+j\omega} \quad \text{و} \quad H_2(j\omega)=\frac{10-j\omega}{5+j\omega}$$

پاسخ ضربه متناظر برابر است با:

$$h_1(t)=\delta(t)+5e^{-5t}u(t)$$

$$h_2(t)=-\delta(t)+15e^{-5t}u(t)$$

تنها سیستم با پاسخ ضربه $h_1(t)$ یک جواب پایدار و کازال و معکوس پذیر است.

٤,٥١) (الف) دو سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ و $g(t)$ فرض کنید، و آنها را وارون یکدیگر بگیرید.

همچنین پاسخ فرکانسی این سیستمها را $H(j\omega)$ و $G(j\omega)$ فرض کنید. رابطه بین $H(j\omega)$ و $G(j\omega)$ را بیابید.

(ب) سیستم LTI پیوسته در زمانی با **پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید.**

$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & 2<|\omega|<3 \\ \circ, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

(i) آیا می توان برای این سیستم یک ورودی $x(t)$ یا به نحوی که خروجی به صورت شکل م ٤-٥٠ باشد؟ اگر آری $x(t)$ را بیابید و اگر نه توضیح دهید چرا؟

(ii) آیا این سیستم وارون پذیرست؟ جواب خود را توضیح دهید.

(ج) تالاری را در نظر بگیرید که مشکل پژواک دارد. در مسئله ۲-٦٤ گفتیم که برای مدل اکوستیک تالار می توان یک سیستم LTI در نظر گرفت که پاسخ ضربه آن یک رشته ضربه است، ضربه k ام رشته با پژواک k ام متناظرست. در این مسئله، پاسخ ضربه را به صورت زیر فرض کنید.

$$h(t)=\sum_{k=\circ}^{\infty} e^{-kT}\delta(t-kT)$$

عامل e^{-kT} تضعیف پژواک k ام را نشان می دهد.

برای اینکه بتوانیم صدا را با یک کیفیت خوب ضبط کنیم، باید سیگنال حس شده توسط دستگاه ضبط، را پردازش و پژواکها را حذف کنیم. در مسئله ۲-٦٤ با استفاده از روش کانولوشن، یک پردازنده نمونه و برای یک مدل پژواک متفاوت) طراحی کردیم. در این مسئله از روشهای حوزه فرکانس استفاده می کنیم. $G(j\omega)$ را پاسخ فرکانسی سیستم LTI پردازنده سیگنال صوتی دریافت شده فرض کنید. $G(j\omega)$ را به نحوی برگزینید که تمام پژواکها حذف شود و سیگنال حاصل، کاملاً مشابه سیگنال اصلی روی صحنه باشد.

(د) معادله دیفرانسیل سیستم وارون سیستمی با پاسخ ضربه زیر را بیابید.

$$h(t)=2\delta(t)+u_1(t)$$

(هـ) یک سیستم LTI ابتدائاً ساکن با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{d\,y(t)}{d\,t}+9y(t)=\frac{d^2x(t)}{d\,t^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

وارون این سیستم هم ابتدائاً ساکن است و با یک معادله دیفرانسیل توصیف می شود. این معادله دیفرانسیل را بیابید. $h(t)$ و $g(t)$، یعنی پاسخ ضربه سیستم اصلی و سیستم وارون را به دست آورید.

حل:

(الف) $H(j\omega)=\frac{1}{G(j\omega)}$.

(ب) (i) اگر خروجی را $y(t)$ نشان دهیم، در اینصورت داریم:

$$Y(j0)=\frac{1}{2}$$

چون $H(j0)=0$، غیر ممکن است که داشته باشیم $Y(j0)=x(j0)H(j0)$. بنابراین نمی توان $x(t)$ ای را بیابیم که خروجی با متناسب شکل (م ٤,٥٠) بوجود آورد.

(ii) این سیستم معکوس پذیر نیست زیرا $\frac{1}{H(j\omega)}$ برای هیچ مقداری از ω، تعریف نشده است.

(ج) داریم:

$$H(j\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-KT}e^{-j\omega KT}=\frac{1}{1-e^{-(1+j\omega)T}}$$

حال نیاز داریم تا برای $G(j\omega)$ داشته باشیم:

$$G(j\omega)=1-e^{-(1+j\omega)T}$$

(د) چون $H(j\omega)=2+j\omega$:

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{x(j\omega)}=\frac{1}{2+j\omega}$$

با طرفین وسطین و گرفتن عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

(هـ) داریم:

$$H(j\omega)=\frac{-\omega^2+3j\omega+2}{-\omega^2+6j\omega+9}$$

بنابراین، پاسخ فرکانسی معکوس عبارتست از:

$$G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=\frac{-\omega^2+6j\omega+9}{-\omega^2+3j\omega+2}$$

معادله دیفرانسیلی را که سیستم متناظر را توصیف می کند، عبارتست از:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

بااستفاده از بسط به کسرهای جزئی و اعمال عکس تبدیل فوریه، پاسخ ضربه را به صورت

$$h(t)=\delta(t)-3e^{-3t}u(t)+2te^{-3t}u(t)$$

و

$$g(t)=\delta(t)-e^{-2t}u(t)+4e^{-t}u(t)$$

داشته باشیم.

٤,٥٢) سیستمهای وارون معمولاً در مسائل مشتمل بر وسایل اندازه گیری کامل، کاربرد دارند. مثلاً یک وسیله اندازه گیری دمای مایع را در نظر بگیرید. مدل کردن این وسیله با یک سیستم LTI معقول به نظر می رسد این سیستم به خاطر مشخصات پاسخ عنصر اندازه گیری (مثلاً جیوه دماسنج)، به تغییرات دما به طور ناگهانی پاسخ نمی دهد. پاسخ این سیستم به ورودی پله واحد به صورت زیرست

$$s(t)=\left(1-e^{-t/2}\right)u(t) \qquad \text{(م ٤-٥٢-١)}$$

(الف) یک سیستم جبرانساز طراحی کنید، که پاسخ آن به خروجی وسیله اندازه گیری دمای لحظه ای مایع را به دست دهد.

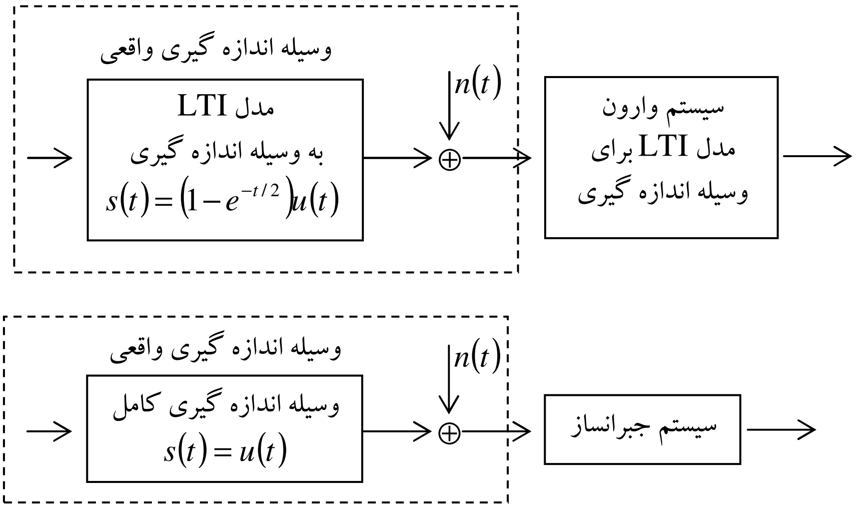
(ب) یکی از مشکلات کاربرد سیستمهای وارون به عنوان جبران ساز وسایل اندازه گیری این است که اگر خروجی واقعی وسیله اندازه گیری به خاطر پدیده های خطاآمیز وسیله خطا داشته باشد، دمای نشان داده شده می تواند خطای بزرگی داشته باشد. چون در سیستمهای حقیقی چنین خطایی همیشه وجود دارد، باید آنها را در نظر گرفت. برای روشن شدن مطلب یک وسیله اندازه گیری در نظر بگیرید که خروجی آن را بتوان به صورت مجموع پاسخ وسیله اندازه گیری مطابق معادله (٤-٥٢-١) و یک سیگنال «نویز» مزاحم $n(t)$ مدل کرد. شکل م ٤-٥٢ (الف) این وضعیت را نشان می دهد. در این شکل سیستم وارون بند (الف) هم گنجانده شده است. فرض کنید $n(t)=\sin\omega t$. سهم خروجی سیستم وارون چیست و با افزایش ω این خروجی چگونه تغییر می کند؟

(ج) مشکل مطرح شده در بند (ب) در بسیاری از کاربردهای سیستمهای LTI اهمیت دارد. در حقیقت باید بین سرعت پاسخ و توانایی سیستم در حذف تداخلهای فرکانس بالا مصالحه ای صورت گیرد. در بند (ب) دیدیم که این مصالحه ایجاب می کند که اگر بخواهیم سیگنالهای مزاحم سینوسی را

هم تقویت می کند. برای روشن شدن مطلب یک وسیله اندازه گیری در نظر بگیرید که بدون تأخیر به ورودی پاسخ دهد، ولی آلوده به نویز هم باشد. پاسخ این سیستم را می توان مطابق شکل م ٤-٥٢ (ب) به صورت مجموع پاسخ یک وسیله اندازه گیری کامل و سیگنال نویز $n(t)$ مدل کرد. فرض کنید بخواهیم مطابق شکل م ٤-٥٢ (ب) نیز تضعیف کند. پاسخ ضربه این سیست جبران ساز را به صورت زیر فرض کنید.

$$h(t) = a\ e^{-at}u(t)$$

A را به نحوی برگزینید که پاسخ کل سیستم شکل م ٤-٥٢ (ب) به تغییرات پله ای دما تا حد امکان سریع باشد، ولی $n(t) = \sin 6t$ خروجی بزرگتر از $\frac{1}{4}$ ایجاد نکند.



شکل م ٤-٥٢

حل:

(الف) چون پاسخ پله $s(t)=\left(1-e^{-t/2}\right)u(t)$ می باشد، پاسخ ضربه عبارتست از:

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-t/2}u(t)$$

پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر است:

$$H(j\omega)=\frac{1/2}{1/2+j\omega}$$

حال می خواهیم برای سیستم فوق، معکوس بسازیم. بنابراین، پاسخ فرکانسی سیستم معکوس بایستی به صورت

$$G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=2\left[1/2+j\omega\right]$$

با گرفتن تبدیل فوریه عکس، داریم:

$$g(t)=\delta(t)+2u_1(t)$$

(ب) وقتی $\sin \omega t$ از طریق سیستم معکوس انتقال یابد، خروجی برابر است با:

$$y(t) = \sin \omega t + 2\omega \cos \omega t$$

ملاحظه می کنیم که خروجی به صورت مستقیم به ω بستگی دارد. بنـابراین، چنانچـه ω افـزایش یابد، سهم خروجی بسته به نویز، افزایش خواهد یافت.

(ج) دراین مورد، نیاز داریم که $|H(j\omega)| \le 1/4$، وقتی که $\omega = 6 -$ چون

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$$

نیاز داریم که

$$\frac{1}{a^2 + 36} \le 1/16$$

بنابراین

$$a \le 6/\sqrt{15}$$

....

٤,٥۳) همانطور که در درس گفتیم، روشهای تحلیل فوریه را مـی تـوان بـه سـیگنالهای دارای دو متغیر مستقل تعمیم داد. این روشها نیز مانند همتاهای یک بعدی شان نقشه مهمی در بعضی کاربردهـا، چون پردازش تصویر دارند. در این مسئله ایده های اولیه تحلیل فوریه دو بعدی را در نظر می گیریم. $x(t_1,t_2)$ را سیگنالی با دو متغیر مستقل t_1 و t_2 فرض کنید. تبدیل فوریه دو بعـدی $x(t_1,t_2)$ بـه صورت زیر تعریف می شود.

$$X(j\omega_1, j\omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1,t_2)e^{-j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}dt_1 dt_2$$

(الف) نشان دهید که این انتگرال دو گانه را می توان به صورت دو تبدیل فوریه یک بعدی متوالی، ابتدا نسبت به t_1 (با فرض ثابت بودن t_2) و سپس نسبت به t_2 محاسبه کرد.

(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) عکس تبـدیل ـ یعنـی $x(t_1,t_2)$ برحـسب $X(j\omega_1, j\omega_2)$ را بیابید.

(ج) تبدیل فوریه دو بعدی سیگنالهای زیر را بیابید.

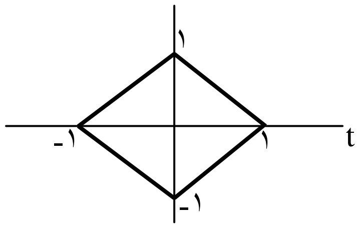
(i) $x(t_1,t_2) = e^{-t_1+2t_2}u(t_1-1)u(2-t_2)$

(ii)
$$x(t_1,t_2)=\begin{cases} e^{-|t_1|-|t_2|}, & -1<t_1\le 1, -1\le t_2\le 1 \\ \circ \quad , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(iii)
$$x(t_1,t_2)=\begin{cases} e^{-|t_1|-|t_2|}, & \circ<t_1\le 1, -1\le t_2\le 1 \\ \circ \quad , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(iv) $x(t_1,t_2)$ شکل م ٤-٥٣

(v) $e^{-|t_1+t_2|-|t_1-t_2|}$



شکل م ٤-٥٣

(د) سیگنال $x(t_1,t_2)$ با تبدیل فوریه دو بعدی زیر را بیابید.

$$X(j\omega_1, j\omega_2)=\frac{2\pi}{4+j\omega_1}\delta(\omega_2-2\omega_1)$$

(هـ) $x(t_1,t_2)$ و $h(t_1,t_2)$ دو سیگنال دو بعدی با تبدیل فوریه های $X(j\omega_1, j\omega_2)$ و $H(j\omega_1, j\omega_2)$ بیابید:

i) $x(t_1-T_1\ ,\ t_2-T_2)$

ii) $x(at_1\ ,\ bt_2)$

iii) $y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1\ ,\ \tau_2)x(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$

حل:

(الف) از تعریف داده شده، داریم:

$$x(j\omega_1, j\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1, t_2) e^{-j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1, t_2) e^{-j\omega_1 t_1} dt_1 \right] e^{-j\omega_2 t_2} dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega_1 t_2) e^{-j\omega_2 t_2} dt_2$$

(ب) از نتیجه قسمت (الف) می توانیم بنوییسم:

$$x(t_1, t_2) = FT_{\omega_1}^{-1}\{FT_{\omega_2}^{-1}(x(j\omega_1, j\omega_2))\} = \frac{1}{4\pi_2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(j\omega_1, j\omega_2) e^{j(\omega_1 t_1 + \omega_2 + t_2)} d\omega_1 d\omega_2$$

(ج)

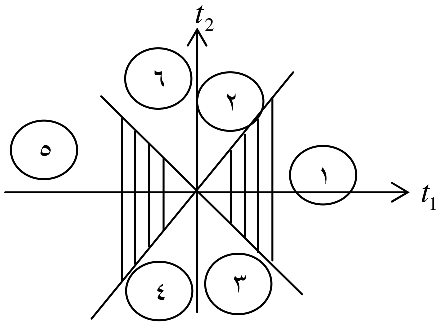
$$\text{(i)}\ x(j\omega_1, \omega_2) = \frac{e^{-(1+j\omega_1)} e^{2(2j\omega_2)}}{(1 + j\omega_1)(2 - j\omega_2)}$$

$$\text{(ii)}\ x(j\omega_1, \omega_2) = \frac{\left(1 - e^{-(1+j\omega_1)}\right)\left(1 - e^{-(1-j\omega_2)}\right)}{(1 + j\omega_1)(1 - j\omega_2)} + \frac{\left(1 - e^{-(1+j\omega_1)}\right)\left(1 - e^{-(1+j\omega_2)}\right)}{(1 + j\omega_1)(1 + j\omega_2)}$$

$$\text{(iii)}\ (x(j\omega_1, \omega_2) = \frac{2 - e^{-(1+j\omega)} - e^{-(1+j\omega_2)} - \left(1 - e^{-(1+j\omega_1)}\right)\left(1 - e^{-(1+j\omega_2)}\right)}{(1 + j\omega_1)(1 + j\omega_2)} + \frac{1 - e^{-(1+j\omega_1)}}{(1 + j\omega_1)(1 - j\omega_2)} + \frac{1 - e^{-(1+j\omega_2)}}{(1 - j\omega_1)(1 + j\omega_2)}$$

$$\text{(iv)}\ x(\omega_1, \omega_2) = \frac{-1}{j\omega_2} \left[\frac{e^{-j\omega_2}\left(1 - e^{j(\omega_1 + \omega_2)}\right) + e^{-j(\omega_1 - \omega_2)} - 1}{-j(\omega_1 - \omega_2)} \right]$$

(v) همانطور که در شکل ح۵۳. نشان داده شده است. ایـن سـیگنال ٦ ناحیـه مختلـف در (t_1, t_2) طرح دارد.



شکل ح۵۳

سیگنال $x(t_1,t_2)$ به صورت زیر است:

$$x(t_1,t_2)\begin{cases} e^{-2t_1} & \text{ناحیه ۱} \\ e^{-2t_2} & \text{ناحیه ۲} \\ e^{2t_2} & \text{ناحیه ۳} \\ e^{2t_2} & \text{ناحیه ۴} \\ e^{2t_1} & \text{ناحیه ۵} \\ e^{-2t_2} & \text{ناحیه ۶} \end{cases}$$

بنابراین:

$$x(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{(2+j\omega_1+j\omega_2)(2+j\omega_1-j\omega_2)}+\frac{1}{(2+j\omega_2)(2+j\omega_1+j\omega_2)}$$
$$+\frac{1}{(2-j\omega)(2+j\omega_1-j\omega_2)}+\frac{1}{(2-j\omega_2)(2-j\omega_1-j\omega_2)}$$
$$-\frac{1}{(2-j\omega_1-j\omega_2)(2-j\omega_1+j\omega_2)}+\frac{1}{(j\omega_2)(2-j\omega_1-j\omega_2)}$$

د) $x(t_1,t_2)=e^{-4(t_1+2t_2)}u(t+2t_2)$

هـ) (i) $e^{-j\omega_1 T_1}e^{-j\omega_2 T_2}x(j\omega_1,j\omega_2)$

(iii) $x(j\omega_1,j\omega_2)H(j\omega_1,j\omega_2)$

فصل پنجم

تبدیل فور یه گسسته در زمان

۵,۱) به کمک معادله تجزیه تبدیل فوریه (۵-۹) تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید:

(الف) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

(ب) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$

اندازه هر تبدیل فوریه را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حل:

(الف) فرض کنیم $x[n]=\left(1/2\right)^{n-1}u[n-1]$ بـا اسـتفاده از معادلـه آنـالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹)، تبدیل فوریه $x\left(e^{j\omega}\right)$ این سیگنال برابر است با:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/2\right)^{n-1}e^{-j\omega n}=\sum_{n=c}^{\infty}\left(1/2\right)^{n}e^{-j\omega(n+1)}$$
$$=e^{-j\omega}\frac{1}{\left(1-1/2\,e^{-j\omega}\right)}$$

(ب) فرض کنید $x[n]=\left(1/2\right)^{n-1}$ با استفاده از معادله آنالیز تبـدیل فوریـه (۹۵,۹، تبـدیل فوریـه $x\left(e^{j\omega}\right)$ این سیگنال عبارتست از:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\circ}\left(1/2\right)^{-(n-1)}e^{-j\omega n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/2\right)^{n-1}e^{-j\omega n}$$

مجموع دوم در طرف راست معادله فوق دقیقاً مشابه نتیجه قسمت (الف) می باشد، حال:

$$\sum_{-\infty}^{\circ}\left(1/2\right)^{-(n-1)}e^{-j\omega n}=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(1/2\right)^{n+1}e^{j\omega n}=\left(1/2\right)\frac{1}{1-1/2\,e^{j\omega}}$$

بنابراین:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\left(1\!\!\diagup\!\!2\right)\frac{1}{1-\left(1\!\!\diagup\!\!2\right)e^{j\omega}}+e^{-j\omega}\frac{1}{1-1\!\!\diagup\!\!2\,e^{-j\omega}}$$
$$=\frac{\circ.75e^{-j\omega}}{1.25-\cos\omega}$$

....

۵,۲) به کمک معادله تجزیه تبدیل فوریه را در یک دوره تناوب رسم کنید.

(الف) $\delta[n-1]+\delta[n+1]$ (ب) $\delta[n+2]-\delta[n-2]$

اندازه هر تبدیل فوریه را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حل:

(الف) فرض کنید $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$. با استفاده از معادله آنالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹). تبدیل فوریه $\left(e^{j\omega}\right)$ برای این سیگنال عبارتست از:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jn}$$
$$=e^{-j\omega}+e^{j\omega}=2\cos\omega$$

(ب) فرض کنید $x[n]=\delta[n+2]-\delta[n-2]$. با استفاده از معادله آنـالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹)، تبدیل فوریه $x\left(e^{j\omega}\right)$ این سیگنال برابر است با:

$$x\left(c^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$
$$=e^{2j\omega}-e^{-2j\omega}=2j\sin(2\omega)$$

....

۵,۳) تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای متناوب زیر را در $-\pi\le\omega<\pi$ به دست آورید:

(الف) $\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)$

(ب) $2+\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)$

حل:

از بخش ۵,۲ توجه کنید که سیگنال متناوب $x[n]$ با نمایش سری فوریه زیر

$$x[n]=\sum_{K=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(2\pi/Nn\right)}$$

تبدیل فوریه زیر را دارد:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=2\pi a_k \delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

(الف) سیگنال $x_1[n]=\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که پریود پایه سیگنال $x_1[n]$ برابر است با $N=6$.

سیگنال را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$x_1[n]=\left(1/2j\right)e^{j\left(\pi/3n+\pi/4\right)}-\left(1/2j\right)e^{-j\left(\pi/3n+\pi/4\right)}=\left(1/2j\right)e^{j\pi/4}e^{j\frac{2\pi}{6}n}-\left(1/2j\right)e^{-j\pi/4}e^{-j\pi/3}$$

بااستفاده از این، ضرایب غیر صفر سری فوریه a_k برای $x_1[n]$ در بازه $-2\le k\le 3$ به صورت زیر بدست می آوریم:

$$a_1=\left(1/2j\right)e^{j\pi/4}\quad,\quad a_{-1}=\left(-1/2j\right)e^{-j\pi/4}$$

بنابراین در این بازه $-\pi\le\omega\le\pi$، بدست می‌آوریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=2\pi a_1\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{6}\right)+2\pi a_{-1}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$=\left(\pi/j\right)\left(e^{j\pi/4}\delta\left(\omega-2\pi/6\right)\right)+e^{-\pi/4}\delta\left(\omega+2\pi/6\right)$$

(ب) سیگنال $x_2[n]=2+\cos\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که پریود پایه سیگنال $x_1[n]$ برابر $N=12$ می باشد. سیگنال به صورت زیر قابل بیان می باشد.

$$x_1[n]=2+\left(1/2\right)e^{j\left(\pi/6n+\pi/8\right)}+1/2\,e^{-j\left(\pi/6n+\pi/8\right)}$$

$$=2+\left(1/2\right)e^{+j\pi/8}e^{j\pi/6n}+\left(1/2\right)e^{-j\pi/8}e^{-j\frac{\pi}{6}n}$$

از این، ضرایب غیر صفر سری فوریه a_k در بازه $-5\le k\le 6$ به صورت زیر بدست می آوریم:

$$a_{\circ}=2 \quad \text{و} \quad a_1=\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{j\pi/8} \quad \text{و} \quad a_{-1}=\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{-j\pi/8}$$

بنابراین در بازه $-\pi\leq\omega\leq\pi$ بدست می آوریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\, a_{\circ}\delta(\omega)+2\pi\, a_1\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{12}\right)+12\pi a_{-1}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{12}\right)$$

$$=4\pi\delta(\omega)+\pi\left\{e^{i\pi/8}\delta\left(\omega-\pi/6\right)+e^{-j\pi/8}\delta\left(\omega+\pi/6\right)\right\}$$

۵,٤) با استفاده از معادله ترکیب فوریه (۵–۸) عکس تبدیل فوریه های زیر را بیابید:

(الف) $X_1\left(e^{j\omega}\right)=\sum k^{\infty}=-\infty\left\{2\pi\delta\left(\omega-2\pi k\right)+\pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)+\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)\right\}$

(ب) $X_2\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}2j\ , & \circ<\omega\leq\pi\\ -2j, & -\pi<\omega\leq\circ\end{cases}$

حل:

(الف) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۸):

$$x_1[n]=\left(\tfrac{1}{2\pi}\right)\int_{-\pi}^{\pi}x_1\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}s\omega$$

$$=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\pi\delta(\omega)\right)+\pi\delta\left(\omega-\pi/2\right)+\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\Big]e^{+j\omega n}d\omega$$

$$=e^{j\omega}+\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{j\pi/2\,n}+\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{-j\left(\pi/2\right)\pi}$$

(ب) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۸)؛

$$x_2[n]=\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi}x_2\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\pi}^{\circ}2je^{j\omega n}d\omega+\left(\tfrac{1}{2\pi}\right)\int_{\circ}^{\pi}2je^{j\omega n}d\omega$$

$$=\left(\tfrac{j}{\pi}\right)\left[-\frac{1-e^{-jn\pi}}{jn}+\frac{e^{jn\pi}}{jn}\right]$$

$$=-\left(\tfrac{4}{n\pi}\right)\sin^2\left(\pi n/2\right)$$

۵,۵) با استفاده از معادله ترکیب (۵-۸) عکس تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ را بیابید، که برای آن

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| < \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & \dfrac{\pi}{4} \le |\omega| \le \pi \end{cases} \quad \text{و} \quad \sphericalangle X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{3\omega}{2}$$

با استفاده از نتیجه به دست آمده مقادیری از n را بیابید که در آنها $x[n]=0$.

حل:

از اطلاعات داده شده:

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(1/2\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \left(1/2\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi} \left|x\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\circ\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}}e^{j\omega n}d\omega \\ &= \left(1/2\pi\right)\int_{-\pi/4}^{\pi} e^{-3/2\,\omega}e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{4}\left(n-3/2\right)\right\}}{\pi\left(n-3/2\right)} \end{aligned}$$

سیگنال $x[n]$ هنگامیکه $\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)$ یک ضریب غیرصفر π باشد و یا هنگامیکه $|n| \to \infty$، صفر خواهد بود. مقدار $\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)$ هرگز مانند حالتی که آن یک ضریب غیرصفر π است باشد. بنابراین $x[n]=0$ تنها وقتی $n=\pm\infty$.

....

۵,٦) $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x[n]$ است. تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید. از خواص مندرج در جدول ۵-۱ استفاده کنید.

(الف) $x_1[n] = x[1-n] + x[-1-n]$

(ب) $x_2[n] = \dfrac{x^*[-n]+x[n]}{2}$

(ج) $x_3[n] = (n-1)^2 x[n]$

حل:

در این مسئله، فرض کنیم که $x[n] \xleftrightarrow{FT} x_1(e^{j\omega})$

(الف) بااستفاده از خاصیت معکوس پذیری (۵٫۳٫٦ را ببنید) داریم:

$$x[-n] \xleftrightarrow{FT} x(e^{-j\omega})$$

با استفاده از خاصیت شیفت زمانی (۵٫۳٫۳ را ببینید) داریم:

$$x[-n-1] \xleftrightarrow{FT} e^{j\omega n} x(e^{-j\omega}) \quad \text{و} \quad x[-n+1] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega n} x(e^{j\omega})$$

بنابراین

$$x_1[n] = x[-n+1] + x[-n-1] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega n} x(e^{-j\omega}) + e^{j\omega n} x(e^{-j\omega})$$
$$\leftrightarrow 2x(e^{-j\omega})\cos\omega$$

(ب) با استفادهاز خاصیت معکوس پذیری (شکل S.۳٫۵) داریم:

$$x[-n] \xleftrightarrow{FT} x(e^{-j\omega})$$

با استفاده از خاصیت مزدوج گیری در این مورد داریم:

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{FT} x^*(e^{j\omega})$$

بنابراین:

$$x_2[n] = (1/2)(x^*[n] + x[n]) \xleftrightarrow{FT} (1/2)(x(e^{j\omega}) + x^*(e^{j\omega}))$$
$$\xleftrightarrow{FT} \mathrm{Re}\{x(e^{j\omega})\}$$

(ج) با استفاده ازخاصیت مشتقگیری در فرکانس (۵٫۳٫۸ را ببینید.) داریم:

$$nx[n] \xleftrightarrow{FT} j\frac{dx(e^{j\omega})}{d\omega}$$

بااستفاده از خاصیت مشتقگیری برای دومین بار:

$$x^2 x[n] \xleftrightarrow{FT} -\frac{d^2 x(e^{j\omega})}{d\omega^2}$$

بنابراین:

$$x_3[n] = n^2 x[n] - 2nx[n] + 1 \xleftrightarrow{FT} -\frac{d^2 x(e^{j\omega})}{d\omega^2} - 2j\frac{dx(e^{j\omega})}{d\omega} + x(e^{j\omega})$$

....

۵,۷) برای هر یک از تبدیل فوریه های زیر، به کمک خواص تبدیل فوریه (جدول ۵-۱) تعیین کنید که آیا سیگنال حوزه زمان (i) حقیقی است، موهومی است، یا هیچکدام، و (ii) زوج است، فردست، یا هیچکدام. عکس تبدیل فوریه را حساب نکنید.

(الف) $X_1\left(e^{j\omega} = e^{-j\omega}\sum_{k=1}^{10}(\sin k\,\omega)\right)$ (ب) $X_2\left(e^{j\omega}\right)$

(ب) $X_2\left(e^{j\omega}\right) = j\sin(\omega)\sin(5\omega)$

(ج) $X_3\left(e^{j\omega}\right) = A(\omega) + e^{jB(\omega)}$ که در آن

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le \dfrac{\pi}{8} \\ 0, & \dfrac{\pi}{8} < |\omega| \le \pi \end{cases} \qquad \text{و} \qquad B(\omega) = -\frac{3\omega}{2} + \pi$$

حل:

(الف) سیگنال $y_1[n]$ با تبدیل فوریه زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_1\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=1}^{10}\sin(k\omega)$$

مشاهده می کنیم که $Y_1\left(e^{j\omega}\right)$ حقیقی و فرد است. جدول ۵,۱ را ببینید که تبدیل فوریه سیگنال حقیقی و فرد است. بابراین، می توان گفت که تبدیل یک سیگنال موهومی خالص و مرد، حقیقی و فرد خواهد بود. با استفاده از این ملاحظه، نتیجه می گیریم که $y_1[n]$ موهومی خالص و فرد است.

توجه کنید که: $x\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega}Y_1\left(e^{j\omega}\right)$

بنابراین $x_1[n]$ همچنین موهومی خالص اما $x_1[n]$ نه زوج و نه فرد است.

(ب) توجه کنید که $x_2\left(e^{j\omega}\right)$ موهومی خالص و فرد است. بنابراین $x_2[n]$ بایستی حقیقی و فرد باشد.

(پ) سیگنال $y_3[n]$ با اندازه تبدیل فوریه $\left|Y_3\left(e^{j\omega}\right)\right| = A(\omega)$ و فاز تبدیل فوریه $\circ\left\{Y_3\left(e^{j\omega}\right)\right\} = -\left(3/2\right)\omega$ را در نظر بگیرید. چون $\left|Y_3\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|Y_3\left(e^{-j\omega}\right)\right|$ و $\circ\left\{Y_3\left(e^{j\omega}\right)\right\} = -\circ\left\{Y_3\left(e^{-j\omega}\right)\right\}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که سیگنال $y_3[n]$، حقیقی است. (جدول ۵,۱ و خاصیت ۵,۳,٤ را ببینید).

حـال، سـیگنال $x_3[n]$ را بـا تبـدیل فوریـه $-Y_3(j\omega)=x_3(e^{j\omega})=Y_3(e^{j\omega})e^{j\pi}$ را در نظـر بگیرید. بااستفاده از نتیجه پاراگراف قبلی و خاصیت خطی تبدیل فوریه، می توانیم نتیجـه بگیـریم کـه $x_3[n]$، بایستی حقیقی باشد.

بدلیل اینکه تبدیل فوریه $x_3(e^{j\omega})$ موهومی خالص و حقیقی خالص نیست، سیگنال $x_3[n]$ نه فرد و نه زوج است.

....

۵,۸) با استفاده از جدولهای ۵–۱ و ۵–۲ $x[n]$ دارای تبدیل فوریه زیر را تعیین کنید:

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\sin}\right)+5\pi\delta(\omega),\ -\pi<\omega\le\pi$$

حل:

$$x_1[n]=\begin{cases}1 & |n|\le 1\\ \circ & |n|>1\end{cases}$$

از جدول ۵,۲ می دانیم که:

$$x_1[n]\xleftrightarrow{FT}x_1(e^{j\omega})=\frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

با استفاده از خاصیت جمعگیری داریم:

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}x_1(e^{j\omega})+\pi x(e^{jc})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

بنابراین، در بازه $-\pi\le\omega\le\pi$:

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}x_1(e^{j\omega})+3\pi\delta(\omega)$$

همچنین، در بازه $-\pi<\omega\le\pi$

$$1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$$

بنابراین در بازه: $-\pi < \omega \le \pi$

$$x[n] = 1 + \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} x_1\left(e^{j\omega}\right) - s\pi\delta(\omega)$$

سیگنال $x[n]$ تبدیل فوریه ی مطلوب را دارد. می توانیم $x[n]$ به صورت ریاضی بـه ایـن ترتیـب داشته باشیم:

$$x[n] = 1 + \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] = \begin{cases} 1 & n \le -2 \\ n+3 & -1 \le n \le 1 \\ 4 & n \ge 2 \end{cases}$$

۵,۹) چهار خاصیت زیر در مورد یک سیگنال $x[n]$ با تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ داده شده است.

۱. $x[n] = ۰$ در $n > ۰$

۲. $x[۰] > ۰$

۳. $g_m\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = \sin\omega - \sin 2\omega$

٤. $\frac{1}{2}\int_{\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = 3$

حل:

از خاصیت ۵,۳,٤ در جدول ۵,۱، می دانیم که برای سیگنال حقیقی $x[n]$.

$$od\{x[n]\} \xleftrightarrow{FT} j\,\mathrm{Im}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

از اطالعات داده شده:

$$j\,\mathrm{Im}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\} = \int \sin\omega - \int \sin 2\omega$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left\{e^{j\omega} - e^{-j\omega} - e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}\right\}$$

بنابراین:

$$od\{x[n]\} = \ell FT\left\{j\,\mathrm{Im}\left\{x\left(r^{j\omega}\right)\right\}\right\}$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left\{\delta[n+1] - \delta[n-1] - \delta[n+2] + \delta[n-2]\right\}$$

همچنین می دانیم که

$$odd\{x[n]\}=\frac{x[n]-x[-n]}{2}$$

و برای $n>0$، $x[n]=c$ است، بنابراین:

$$x[n]=2odd\{x[n]\}=\delta[n+1]-\delta[n+2] \qquad for \quad n<0$$

حال، فقط بایستی $x[0]$ را پیدا کنیم. با استفاده از رابطه پارسئوال، داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^2$$

از اطلاعات داده شده، می توان نوشت:

$$3=(x[0])^2+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|x[n]\right|^2=\{x[0]\}^2+2$$

که می دهد $x[0]=\pm 1$. اما بدلیل اینکه $x[0]>0$، می توان نتیجه گرفت که $x[0]=1$

بنابراین

$$x[n]=\delta[n]+\delta[n+1]-\delta[n+2]$$

۵,۱۰) با استفاده از جدولهای ۵-۱ و ۵-۲ و این حقیقت که

$$X\left(e^{j0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

مقدار عددی A تعریف شده در زیر را بیابید.

$$A=\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حل:

از جدول ۵,۲ می دانیم که

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

با استفاده از خاصیت ۵,۳,۸ جدول ۵,۱ داریم:

$$x[n]=n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\xleftrightarrow{FT} x\left(e^{j\omega}\right)=j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}$$
$$=\frac{\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]=x\left(e^{\circ j}\right)=2$$

....

۵,۱۱) سیگنال $g[n]$ با تبدیل فوریه $G\left(e^{j\omega}\right)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$g[n]=x_{(2)}[n]$$

سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فویه $X\left(e^{j\omega}\right)$ است. عدد حقیقی a را به نحوی تعیین کنید که $G\left(e^{j\omega}\right)=G\left(e^{j(\omega-a)}\right)$ و $\circ<a<2\pi$

حل:

از خاصیت بسط زمانی می دانیم که (جدول ۵,۱ خاصیت ۵,۳,۷):

$$g[n]=x_{(2)}[n]\xleftrightarrow{FT} G(j\omega)=x\left(e^{j2\omega}\right)$$

بنابراین $G\left(e^{j\omega}\right)$ خلاصه کردن $x\left(e^{j\omega}\right)$ با ضریب ۲ بدست می‌آید. از آنجایی که می‌دانیم $x\left(c^{j\omega}\right)$ با دوره تناوب 2π متناوب است. می توانیم نتیجه بگیریم که $G\left(e^{j\omega}\right)$ با پریود $\left(\tfrac{1}{2}2\pi\right)=\pi$ پریودیک است. بنابراین $\propto=\pi$, $G\left(e^{j\omega}\right)=G\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$

....

۵,۱۲) فرض کنید.

$$[n]=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi\ n}\right)^2*\left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi\ n}\right)$$

که در آن * علامت کانولوشن است و $\pi\geq|\omega_c|.|\omega_c$ را مقیدتر کنید به نحوی که داشته باشیم

$$y[n]=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi\ n}\right)^2$$

حل:

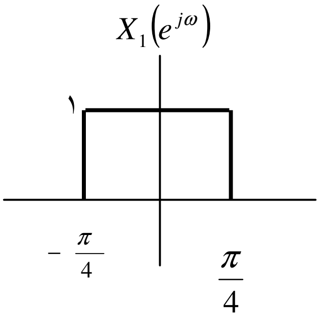
سیگنال $x_1[n]$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

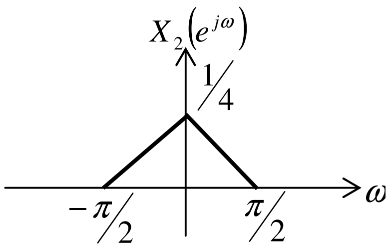
$$x_1[n]=\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}$$

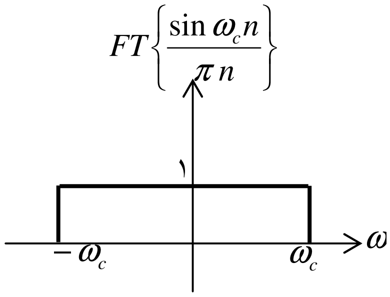
از جدول ۵,۲، تبدیل فوریه $x_1[n]$ به صورت زیر خواهد بود.

$$x_1(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & \circ<|\omega|\le \pi/4\\ \circ & \frac{\pi}{4}<|\omega<\pi|\end{cases}$$

شکل $x_2[n]=\{x_1[n]\}^2$ در شکل ح۵,۱۲ رسم شده است. حال سیگنال $x_2[n]$ را به صورت $x_2[n]=\{x_1[n]\}^2$ فرض کنید. با استفاده از خاصیت ضرب (جدول ۱. خاصیت ۵,۵) تبدیل فوریه $x_2[n]$ را به صورت زیر بدست می آوریم: $x_2(e^{j\omega})=\left(1/2\pi\right)\left(x_1(e^{j\omega})\right)*(e^{j\omega})$ که این در شکل ح۵۵,۱۲ رسم شده است.







شکل ح۵۵,۱۲

از شکل ۵۵,۱۲ واضح است که $x_2\left(e^{j\omega}\right)$ بـه ازاء $|\omega| > \frac{\pi}{2}$ صـفر اسـت. بـا اسـتفاده از خاصـیت کانولوشن (جدول ۵,۱، خاصیت ۵,٤) می‌دانیم که:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = x\left(e^{j\omega}\right) FT\left\{\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}\right\}$$

طرحـواره $FT\left\{\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right\}$ در شـکل ۵۵,۱۲ نمـایش داده شـده اسـت. واضـح اسـت کـه اگـر $Y\left(e^{j\omega}\right) = x\left(e^{j\omega}\right)$ باشد. در اینصورت $\frac{\pi}{2} \le \omega_c \le \pi$.

۵,۱۳) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ با یک سیستم LTI علی دیگر بـا پاسـخ ضربه $h_2[n]$ موازی شده است. پاسخ فرکانسی سیستم کل عبارت است از

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}$$

$h_2[n]$ را بیابید.

حل:

هنامیگه دو سیستم LTI به صورت موازی با هم بسته می شوند. پاسخ ضربه سیستم کلی، مجمـوع پاسخهای ضربه ی تک تک سیستمها به صورت جداگانه می باشد؛ بنابراین:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن (جدل ۵,۱، خاصیت ۵,۳,۲):

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_1\left(e^{j\omega}\right) + H_2\left(e^{j\omega}\right)$$

فرض شده است که $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$، بدست می آوریم:

$$H_1\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

در این صورت:

$$H_2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{-12+5e^{-j\omega}}{12-7e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه:

$$h_2[n]=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

۵,۱٤) اطلاعات زیر در مورد سیستم، LTI و S با پاسخ ضربه $h[n]$ و پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ داده شده است.

۱. $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\rightarrow g[n]$، که در آن $g[n]=0$، در $n\geq 2$ و $n<0$.

۲. $H\left(e^{j\pi/2}\right)=1$

۳. $H\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$

$h[n]$ را تعیین کنید.

حل:

از اطلاعات داده شده، تبدیل فوریه $g[n]$ که برابر $G\left(e^{j\omega}\right)$ را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$G\left(e^{j\omega}\right)=g[0]+g(1)e^{-j\omega}$$

همچنین هنگامیکه ورودی سیستم برابر $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ باشد، خروجی سیستم $g[n]$ خواهد بود:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{G\left(e^{j\omega}\right)}{x\left(e^{j\omega}\right)}$$

از جدول ۵,۲ داریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

بنابراین:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\{g[\circ]+g[1]\}e^{-}$$
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left\{g[\circ]+g[1]e^{-j\omega}\right\}\left\{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right\}=g[\circ]+\{g\ \circ\}e^{-j\omega}-g[1]e^{-2j\omega}$$

بدیهی است که $h[n]$ یک دنباله ۳ جمله ای به صورت زیر است:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=h[\circ]+h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-2j\omega}$$
$$H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)=h[\circ]+h[1]e^{-j(\omega-\pi)}+h[z]e^{-2j(\omega-\pi)}$$
$$=h[\circ]-h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-2j\omega}$$

مشاهده می شود که اگر تنها $h[1]=\circ$ باشد. $H\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$ همچنین، داریم:

$$H\left(e^{j\pi/2}\right)=h[\circ]+h[1]e^{-j\pi/2}+h[2]e^{-2j\pi/2}$$
$$=h[\circ]-h[2]$$

چون داده شده است $H\left(e^{j\pi/2}\right)=1$ داریم:

$$h[\circ]-h[2]=1 \qquad (\text{ح} ۱-۱٤-۵)$$

حال توجه کنید که

$$g[n]=h[n]*\left\{\left(1/4\right)^{n}u[n]\right\}$$
$$=\sum_{k=c}^{2}h[k]\left(1/4\right)^{n-k}u[n-k]$$

با محاسبه مقدار در $n=2$ داریم:

$$g[2]=\circ=1/16\,h[\circ]+1/4\,h[1]+h[2]$$

بدلیل اینکه $h[1]=\circ$؛

$$\frac{1}{16}h[\circ]+h[2]=\circ \qquad (\text{ح} ۲-۵,۱٤)$$

با حل معادلات (ح۱-۵,۱٤) و (ح۲-۵,۱٤) همزمان داریم:

$$h[\circ]=\frac{16}{17} \quad , \quad h[2]=\frac{-1}{17}$$

بنابراین:

$$h[n]=\frac{16}{17}\delta[n]-\frac{1}{17}\delta[n-2$$

۵,۱۵) عکس تبدیل فوریه $Y(e^{j\omega})$ عبارت است از

$$y[n]=\left(\frac{\sin\ \omega_c n}{\pi\ \ n}\right)^2$$

که در آن $\circ<\omega_c<\pi$.ω_c را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$Y(e^{j\pi})=\frac{1}{2}$$

حل:

فرض کنید که $x[n]=\sin\omega_c n/(\pi n)$. تبدیل فوریه $x[n]$ در شکل ح۵,۱۵ نشان داده شده است. توجه کنید که سیگنال $y[n]=x[n]x[n]$ داده شده است. بنابراین $Y(e^{j\omega})$ که همان تبدیل فوریه $y[n]$ است، به صورت

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}x(e^{j\theta})x(e^{j(\omega-e)})d\theta$$

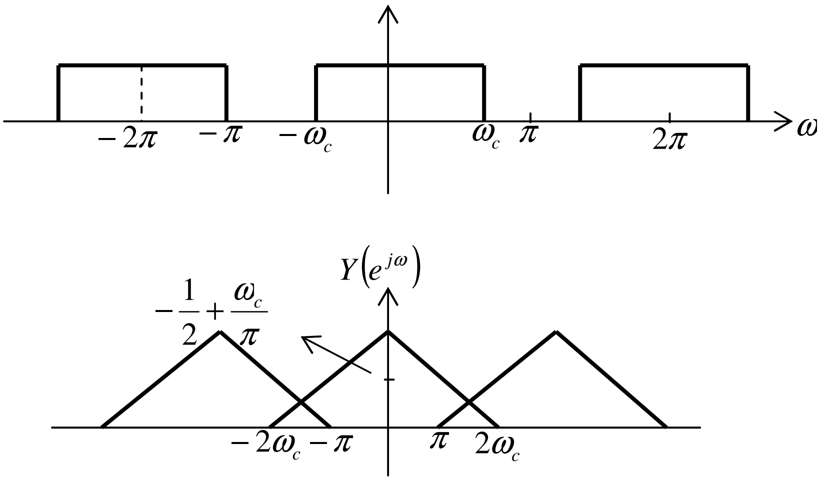
با اعمال روش استفاده شده در ۵,۱۵، می توان کانولوشن فوق را به سیگنال پریودیک با تعریف زیر، تبدیل کرد:

$$\tilde{x}(e^{j\omega})=\begin{cases}x(e^{j\omega}) & -\pi<\omega\le\pi\\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{x}(e^{jt})x(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

ابن، کانولوشن متناوب پالس مستطیلی $\tilde{x}(e^{j\omega})$ نشان داده شده در شکل ح۵,۱۵ با موج مربعی متناوب $x(e^{j\omega})$ می باشد. نتیجه عمل کانولوشن در شکل ح۵,۱۵ نشان داده شده است.



شکل (ح٥،١٥)

از شکل بدیهی ست که بایستی $-1+\left(2\frac{\omega c}{\pi}\right)=\frac{1}{2}$ در نتیجه $\omega c=\frac{3\pi}{4}$.

....

٣،١٦) تبدیل فوریه یک سیگنال خاص به صورت زیرست

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{3}\frac{(1/2)^k}{1-\frac{1}{4}e^{-j(\omega-\pi/2k)}}$$

می توان نشان داد که

$$x[n]=g[n]q[n]$$

که $g[n]$ به شکل $a^n u[n]$ و $q[n]$ سیگنال متناوبی با دوره تناوب N است.

(الف) a را تعیین کنید. (ب) N را تعیین کنید.

(ج) آیا $x[n]$ حقیقی است؟

حل:

می توان نوشت:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}*\left[2\pi\sum_{k=\circ}^{3}\delta\left(\omega-\frac{\pi k}{2}\right)\right]\right\}$$

که $(*)$ کانولوشن متناوب را نشان می دهد. کانولوشن متناوب را مجدداً به صورت زیـر مـی تـوان بازنویسی کرد:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{2\pi}G\left(e^{j\theta}\right)Q\left(e^{j(\omega-\theta)}d\theta\right)$$

,

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$Q\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\sum_{k=\circ}^{3}\delta\left(\omega-\frac{\pi k}{2}\right) \quad ,$$

$$for \quad \circ\le\omega<2\pi$$

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه معکوس $G\left(e^{j\omega}\right)$، (جدول ٥,٢ را مشاهده کنید.) بدست می آوریم

$$q[n]=1+\frac{1}{2}e^{j\left(\pi/2\right)n}+\frac{1}{4}e^{j\pi n}+\frac{1}{8}e^{j\left(3\pi/2\right)n}$$

این سیگنال با تناوب پایه ی $N=4$ متناوب است.

(ج) به راحتی می توانیم نشان دهیم که $x\left(e^{j\omega}\right)$ یک عبارت موهومی است بنابراین $x[n]$ حقیقـی نیست.

....

٥,١٧) سیگنال $x[n]=(-1)^n$ دارای تناوب پایه ٢ و ضرائب سری فوریه a_k است. با اسـتفاده از خاصیت همزادی ضرائب سی فوریه b_k سیگنال $g[n]=a_n$ با دوره تناوب پایه ٢، را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از خاصیت دوگان داریم:

$$(-1)^n \xleftrightarrow{FS} a_k \Rightarrow a_k \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{N}(-1)^{-k} = \frac{1}{2}(-1)^k$$

۵,۱۸) می أانیم که

$$a^{|n|} \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2} \quad , \quad |a|<1$$

با استفاده از همزادی ضرائب سری فوریه سیگنال پیوسته در زمان با تناوب $T=1$ زیر را بیابید:

$$x(t) = \frac{1}{5-4\cos(2\pi t)}$$

حل:

با دانستن اینکه:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{FT} \frac{1-\frac{1}{4}}{1-\cos+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5-4\cos\omega}$$

می توان از معادله آنالیز تبدیل فوریه برای نوشتن مطلب زیر استفاده کرد:

$$\frac{3}{5-4\cos\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} e^{-j\omega n}$$

با جایگذاری $\omega = -2\pi$ در این معادله و جایگذاری متغیر n به جای متغیر k داریم:

$$\frac{1}{5-4\cos 2\pi t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j2\pi kt}$$

با مقایسه با معادله عکس سری تبدیل فوریه، به سرعت می توان گفت که $a_k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$ ضرایب سری فوریه سیگنال $\frac{1}{5-4\cos 2\pi t}$ می باشد.

۵,۱۹) سیستم LTI علی و پایدار S با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ توسط معادله تفاضلی مرتبه دوم زیر به هم مربوط می شوند.

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ سیستم S دارای خاصیت زیرست.

(ب) پاسخ ضربه $h[n]$ سیستم S رل بیلبیذو

حل:

$$\left(\frac{5^{n}}{4}\right)[n] \rightarrow n\left(\frac{4}{5}\right)^{n} u[n]$$

(الف) با گرفتن عکس تبدیل فوریه از طرفین معادله دیفرانسیل، داریم:

$$Y\left(ge^{j\omega}\right)\left[1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-{}^{1}\!/_{6}\,e^{-2j\omega}\right]=x\left(e^{+j\omega}\right)$$

بنابراین

$$H\left({}^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-{}^{1}\!/_{6}\,e^{-2j\omega}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)\left(1-{}^{1}\!/_{3}\,e^{-j\omega}\right)}$$

(ب) با استفاده از بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{{}^{3}\!/_{5}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{{}^{2}\!/_{5}}{1+{}^{1}\!/_{3}\,e^{-j\omega}}$$

با استفاده از جدول ٥,٢ و گرفتن تبدیل فوریه معکوس، داریم:

$$h[n]=\frac{3}{2}\left({}^{1}\!/_{2}\right)^{n}u[n]+\frac{2}{5}\left(-{}^{1}\!/_{3}\right)^{n}u[n]$$

٥,٢٠) سیستم LTI علی و پایدار S دارای خاصیت زیرست

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n} u[n] \rightarrow n\left(\frac{4}{5}\right)^{n} u[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ سیستم S را بیابید.

(ب) معادله تفاضلی ارتباط دنده ورودی $x[n]$ به خروجی $y[n]$ را بیابید.

حل:

(الف) چون سیستم LTI مورد نظر پایدار و کازال است، سیگنال جفت ورودی ـ خروجی کافیست تا پاسخ فرکانسی سیستم را تعیین کنند. دراین مورد، ورودی برابر است با $x[n]=\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$ و خروجی برابر است با $y[n]=\left(4/5\right)^n n\, u[n]$، پاسخ فرکانسی به صورت زیر است:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

که $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $Y\left(e^{j\omega}\right)$، پاسخ فرکانسی به صورت زیر است:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

که $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $Y\left(e^{j\omega}\right)$ به ترتیب تبدیلات فوریه $x[n]$ و $y[n]$ هستند. با استفاده از جدول ۵٫۲ داریم:

$$x[n]=\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{FT} x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

با استفاده از خاصیت مشتقگیری در حوزه فرکانس، (جدول ۵٫۱، خاصیت ۵٫۳۸) داریم:

$$y[n]=n\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{FT} Y\left(e^{j\omega}\right)=j\frac{dx\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}=\frac{\frac{4}{5}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}\right)^2}$$

بنابراین:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\left(4/5\right)e^{-j\omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

(ب) چون $H\left(e^{j\omega}\right)=y\left(e^{j\omega}\right)/x\left(e^{j\omega}\right)$، می توانیم بنویسیم:

$$Y(e^{j\omega})\left[1-\tfrac{4}{5}e^{-j\omega}\right]=x(e^{j\omega})\left[\tfrac{4}{5}e^{-j\omega}\right]$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه از طرفین معادله:

$$y[n]-\frac{4}{5}y[n-1]=\frac{4}{5}x[n]$$

۵,۲۱) تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید.

الف) $x[n]=u[n-2]-u[n-6]$

ب) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-1]$

ج) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}u[-n-2]$

و) $x[n]=\begin{cases} n, & -3\le n\le 3 \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

هـ) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)(n-1)$

ز) $x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\cos(n)$

ح) $x[n]=\sin\left(\frac{5\pi}{3}n\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{3}n\right)$

ط) $x[n]=x[n-6]$ و در $\circ\le n\le 5$، $x[n]=u[n]-u[n-5]$

ی) $x[n]=(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

ک) $x[n]=\left(\frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2}n\right)$

حل:

(الف) سیگنال داده شده برابر است با:

$$x[n]=u[n-2]-u[n-6]=\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]+\delta[n-5]$$

با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۹) داریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=e^{-2j\omega}+e^{-3j\omega}+e^{-4j\omega}+e^{-5j\omega}$$

(ب) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۹):

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n}e^{-j\omega n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}e^{j\omega}\right)^{n}=\frac{e^{j\omega}}{2}\frac{1}{1-\tfrac{1}{2}e^{j\omega}}$$

(ج) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۹):

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{-2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-n}e^{-j\omega n}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}e^{j\omega}\right)^{n}=\frac{e^{2j\omega}}{9}\frac{1}{1-\tfrac{1}{3}e^{j\omega}}$$

(د) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۹) داریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{0}2^{n}\sin\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)e^{-j\omega n}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\sin\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)e^{j\omega n}$$
$$=\frac{-1}{2j}\sum\left(\tfrac{1}{2}e^{jn\pi/4}e^{j\omega n}-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{r}e^{-\pi n/4}e^{j\omega n}\right)$$
$$=\frac{-1}{2j}\left[\frac{1}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{j\pi/4}e^{j\omega}}-\frac{1}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{-j\pi/4}e^{j\omega}}\right]$$

(هـ) با استفاده از آنالیز تبدیل فوریه معادله (۵,۹) داریم:

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|} \cos\left[\left(\pi(n-1)\big/8\right)\right] e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\pi/8}}{1-\frac{1}{2}e^{j\pi/8}e^{-j\omega}} + \frac{e^{j\pi/8}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/8}e^{-j\omega}}\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{e^{j\pi/4}e^{j\omega}}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{j\pi/8}e^{j\omega}} + \frac{e^{-\pi/4}e^{j\omega}}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{-j\pi/8}e^{j\omega}}\right]$$

(و) سیگنال داده شده برابر است با:

$$x[n] = -3\delta[n+3] - 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$$

با استفاده از آنالیز تبدیل فوریه معادله (۵،۹) بدست می آوریم:

$$x(e^{j\omega}) = -3e^{3j\omega} - 2e^{2j\omega} - e^{j\omega} + e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} + 3e^{-3j\omega}$$

(ذ) سیگنال داده شده برابر است با:

$$x[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos n = \frac{1}{2j}\left(e^{j\pi n/2} - e^{-j\pi n/2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{jn} + e^{-jn}\right)$$

$$x(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{1}\left[\delta\left(\omega - \pi/2\right) - \delta\left(\omega + \pi/2\right)\right] + \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))\ for\ \circ \le |\omega| < \pi$$

(خ) سیگنال داده شده، برابر است با:

$$x[n] = \sin\left(5\pi n/3\right) + \cos\left(7\pi n/3\right)$$

$$= -\sin\left(\pi n/3\right) + \cos\left(\pi n/3\right)$$

$$= -\frac{1}{2j}\left[e^{j\pi n/3} - e^{-jn\pi/3}\right] + \tfrac{1}{2}\left[e^{j\pi n/3} + e^{-j\pi n/3}\right]$$

$$x(e^{j\omega}) = -\frac{\pi}{j}\left(\delta\left(\omega - \pi/3\right) - \delta\left(\omega + \pi/3\right)\right) + \pi\left(\delta\left(\omega - \pi/3\right) + \delta\left(\omega + \pi/3\right)\right) in \circ \le |\omega| < \pi$$

(ط) $x[n]$ سیگنالی پریودیک با دوره متناوب $N = 6$ می باشد. ضرایب سری فوریه $x[n]$ به صورت زیر است:

$$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=\circ}^{5} x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{6}\right)n}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=\circ}^{4} 2\pi\left(\frac{1}{6}\right)\left[\frac{1-e^{-j\pi 5k/}}{1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{6}\right)k}}\right]\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{6}-2\pi\ell\right)$$

(ی) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (٥,٩) داریم:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{FT} \frac{4}{5-3\cos\omega}$$

با استفاده از خاصیت دیفرانسیل گیری از حوزه فرکانس بدست می آوریم:

$$n\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{FT} -j\frac{12\sin\omega}{(5-3\cos\omega)}$$

بنابراین:

$$x[n]=n\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}-\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{FT} \frac{4}{5-3\cos\omega}-j\frac{12\sin\omega}{(5-3\cos\omega)^2}$$

(ک) داریم:

$$x_1[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n} \xleftrightarrow{FT} x_1\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & |\omega|<\frac{\pi}{5}\\ \circ & \frac{\pi}{5}\le|\omega|<\pi\end{cases}$$

و نیز:

$$x_2[n]=\cos\left(\frac{7\pi n}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \xleftrightarrow{FT} x_2\left(e^{j\omega}\right)=\pi\left(\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

در بازه $\circ \le |\omega| < n$. بنابراین اگر $x[n]=x_1[n]x_2[n]$ باشد، در اینصورت:

کانولوشن متناوب $x\left(e^{j\omega}\right)=x_2\left(e^{j\omega}\right),\ x_1\left(e^{j\omega}\right)$

با استفاده از مکانیزم تعیین کانولوشن پریودیک در مثال ٥,١٥، در بازه $\circ \le |\omega \le \pi|$ بدست می آوریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & \frac{3\pi}{10}<|\omega|<\frac{7\pi}{10}\\ \circ & other\end{cases}$$

....

۵,۲۲) عبارتهای زیر تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته در زمان هستند. سیگنال متناظر با هر کـدام را بیابید.

(الف) $$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & \frac{\pi}{4}\le|\omega|\le\frac{3\pi}{4}\\ \circ, & \frac{3\pi}{4}\le|\omega|\le\pi\ ,\ \circ\le|\omega|<\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

(ب) $$X\left(e^{j\omega}=1+3e^{-j\omega}+2e^{-2j\omega}-4e^{-3j\omega}+e^{-10j\omega}\right)$$

(ج) $$X\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega/2}$$ در $-\pi\le\omega\le\pi$

(د) $$X\left(e^{j\omega}\right)=\cos^2\omega+\sin^2 3\omega$$

(هـ) $$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}k\right)$$

(و) $$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}^{-2j\omega}}$$

(ز) $$X\left(e^{j\omega}=\frac{e^{-j\omega}-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}\right)$$

(ط) $$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6 e^{-6\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

حل:

(الف) با استفاده از عکس تبدیل فوریه (۵,۸) داریم:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-3\pi/4}^{-\pi/4}e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi n}\left(\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)-\sin\left(\pi n/4\right)\right)$$

(ب) با مقایسه تبدیل فوریه داده شده با معادله آنالیز (۵,۸) داریم:

$$x[n]=\delta[n]+3\delta[n-1]+2\delta[n-2]-4\delta[n-3]+\delta[n-10]$$

(ج) با استفاده از معادله عکس تبدیل فوریه (٥،٨) داریم:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\omega/2}e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

(د) تبدیل فوریه داده شده، برابر است با:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\cos^2\omega+\sin^2(2\omega)$$
$$=\frac{1+\cos(2\omega)}{2}+\frac{1-\cos(3\omega)}{2}$$
$$=1+\frac{1}{4}e^{2j\omega}+\frac{1}{4}e^{-2j\omega}-\frac{1}{4}e^{3j\omega}-\frac{1}{4}e^{3j\omega}$$

با مقایسه تبدیل فوریه با آنالیز معادله (٥،٨) داریم:

$$x[n]=\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n-2]+\frac{1}{4}\delta[n+2]-\frac{1}{4}\delta[n-3]-\frac{1}{4}\delta[n-3]$$

(هـ) آنچه داده شده است تبدیل فوریه یک سیگنال پریودیک با فرکانس پایه $\frac{\pi}{2}$ می باشد.

بنابراین پریود پایه آن ٤ می باشد. و نیز، ضریب سری فوریه این سیگنال $a_k=(-1)^k$ مـی باشـد.

بنابراین سیگنال به صورت زیر است:

$$x[n]=\sum_{k=\circ}^{3}(-1)^k e^{jk\left(\pi/2\right)n}=1-e^{+jn\pi/2}-e^{j3\pi n/2}$$

(و) تبدیل فوریه را به صورت زیر می توان نوشت:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega}\sum_{n=c}^{\infty}\left(1/5\right)^n e^{-j\omega n}-\left(1/5\right)\sum_{n=c}^{\infty}\left(1/15\right)^n e^{-j\omega n}$$
$$=5\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/5\right)^n e^{-\omega n}-1/5\sum_{n=c}^{\infty}\left(1/5\right)^n e^{-j\omega n}$$

با مقایسه هر دو جمله ی در طرف راست معادله فوق با معادله آنالیز تبدیل فوریه (٥،٩) داریم:

$$x[n]=\left(1/5\right)^{n-1}u[n-1]-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}u[n]$$

(ذ) تبدیل فوریه داده شده را به شکل زیر می توان نوشت:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2/9}{1-1/2\,e^{-j\omega}}+\frac{7/9}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

بنابراین:

$$x[n]=\frac{2}{9}\left(1/2\right)^{n}u[n]+7/9\left(-1/4\right)^{n}u[n]$$

(ج) تبدیل فوریه داده دشه را به صورت زیر می توان نوشت:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=1+1/3\,e^{-j\omega}+1/3=e^{-2j\omega}+1/3^{3}\,e^{-j3\omega}+1/3^{4}\,e^{-j4\omega}+\frac{1}{3^{5}}e^{-j5\omega}$$

با مقایسه تبدیل فوریه با آنالیز معادله (۵,۸) داریم:

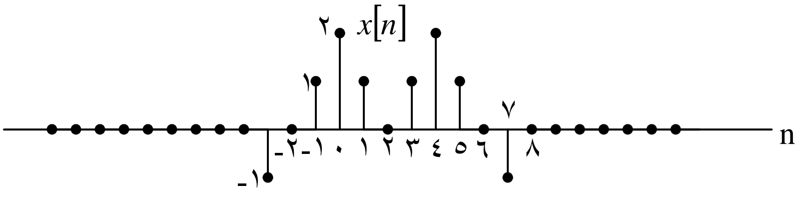
$$x[n]=\delta[n]+1/3\,\delta[n-1]+1/9\,\delta[n-2]+\frac{1}{27}\delta[n-3]$$
$$+\frac{1}{81}\delta[n-4]+\frac{1}{243}\delta[n-5]$$

۵,۲۳) $x\left(E^{J\omega}\right)$ تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ شکل م ۵-۲۳ است. محاسبات زیر را بدون محاسبه صریح $X\left(e^{j\omega}\right)$ انجام دهید:

(الف) $X\left(e^{j\circ}\right)$

(ب) $\int_{-\pi}^{\pi}\triangleleft X\left(e^{j\omega}\right)$

(ج) $X\left(e^{j\omega}\right)d\omega$



شکل م ۵-۲۳

د) $X\left(e^{j\pi}\right)$

هـ) سیگنالی با تبدیل فوریه $\Re e\{X(\omega)\}$ بیابید و آن را رسم کنید.

و) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$ (i) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|s\,X\left(e^{j\omega}\right)/\,d\omega\right|^2 d\omega$ (ii)

حل:

(الف) از معادله (۵,۹) داریم:

$$x\left(e^{j\circ}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]=6$$

(ب) توجه کنید که $y[n]=x[n+2]$ یک سیگنال زوج است. بنابراین $Y\left(e^{j\omega}\right)$ سیگنالی حقیقـی و زوج خواهد بود. این بیان می کند که $\sphericalangle Y\left(e_{j\omega}\right)=\circ$. بعلاوه از خاصیت شیفت تبدیل فوریه داریم: $Y(ej\omega)=e^{j2\omega}x\left(e^{j\omega}\right)$ بنابراین $\sphericalangle c\left(e^{j\omega}\right)=e^{-2j\omega}$

(ج) از معادله (۵,۸) داریم:

$$2\pi\times[\circ]=\int_{-\pi}^{\pi}x\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

بنابراین

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\left(e^{j\omega}\right)d\omega=4\pi$$

(د) از (۵,۹) داریم:

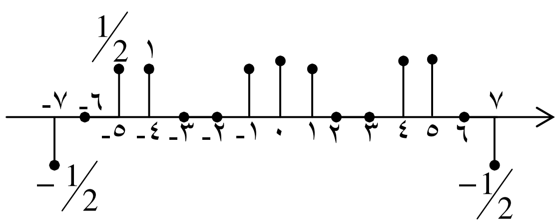
$$x\left(e^{j\pi}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](-1)^n=2$$

(هـ) از جدول ۵,۱ داریم:

$$\varepsilon\{x[n]\}\xleftrightarrow{FT}\operatorname{Re}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

بنابراین: سیگنال مطلوب برابر است با $\varepsilon v\{x[n]\}=\{x[n]+x[-n]\}\big/_{<\,\circ}$ کـه در شـکل ح۵,۲۳ نشان داده شده است.

$\varepsilon v\{x[n]\}$



شکل ح۵,۲۳

(د) (i) از قضیه پارسئوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^2 = 28\pi$$

(ii) با استفاده از خاصیت شیفت در حوزه فرکانس تبدیل فوریه داریم:

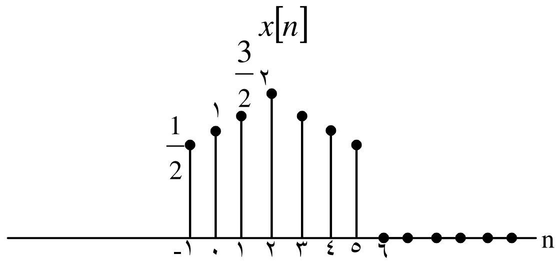
$$nx[n] \xleftrightarrow{FT} j\frac{dx\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

دوباره با استفاده از قضیه پارسئوال داریم:

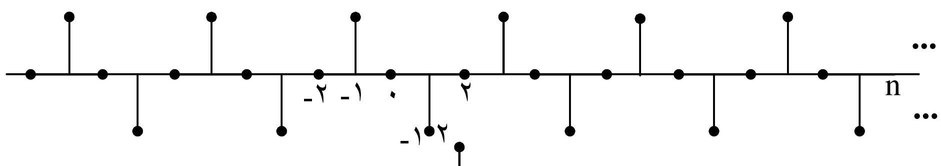
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{dx\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\right|^2 d\omega = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^2 x[n]^2 = 316\pi$$

٥,٢٤) تعیین کنید که تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای داده شده کدام یـک از خاصـیتهای زیـر را دارند:

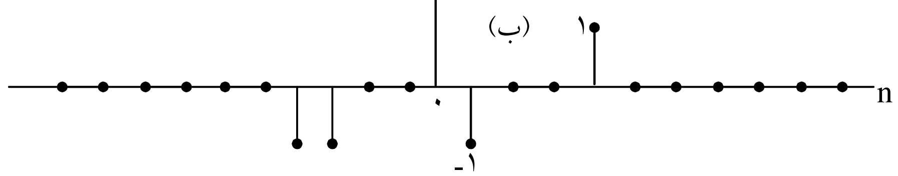
۱. $\Re e\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = ۰$ ۲. $g_m\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = ۰$



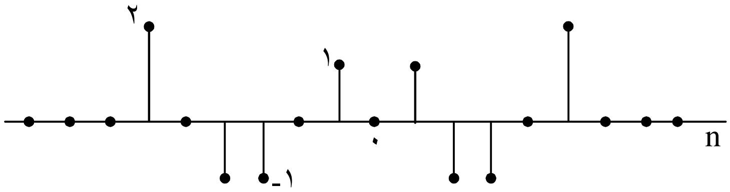
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۳. عدد حقیقی a وجود دارد که به ازای آن $e^{ja\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$ حقیقی است.

٤. $\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|d\omega=0$

٥. $X\left(e^{j\omega}\right)$ حقیقی است.

٦. $X\left(e^{j0}\right)=0$

(الف) $x[n]$ شکل م ٥-٢٤ (الف)

(ب) $x[n]$ شکل م ٥-٢٤ (ب)

(ج) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$

(د) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

(هـ) $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+2]$

(و) $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+3]$

(ط) $x[n]=\delta[n-1]-\delta[n+1]$

(ح) $x[n]$ شکل م ٥-٢٤ (د)

حل:

(١) برای اینکه $\mathrm{Re}\{x(e^{j\omega})\}=0$ باشد، سیگنال بایستی حقیقی و فرد باشد. تنها سیگنالهای (ب) و (ج) حقیقی و فرد هستند.

(٢) برای اینکه $\mathrm{Im}(e^{j\omega})=0$ باشد، سیگنال بایستی حقیقی و زوج باشد، تنها سیگنالهای (ت) و (چ) حقیقی و زوج هستند.

(٣) فرض کنید $Y(e^{j\omega})=e^{ja\omega}\{x(e^{j\omega})\}$، با استفاده از خاصیت شیفت زمانی تبدیل فوریه داریم: $y[n]=x[n+a]$.

اگر $Y(e^{j\omega})$ حقیقی باشد: در اینصورت $y[n]$ حقیقی و زوج خواهد بود. (فرض کنید که $x[n]$ حقیقی است.).

بنابراین $x[n]$ بایستی برحسب α باشد. که این فقط در مورد سیگنالهای (الف) و (ب) و (ت) و ث) و (ح) و (خ) صدق می کند.

(٤) چون $\int_{-\pi}^{\pi}x(e^{j\omega})d\omega=2\pi x[0]$ است، شرط داده شده تنها در حالتی برقرار می شود که $x[0]=0$. یعنی این در مورد سیگنالهای (ب) و (ت) و (ث) و (خ) و (ج) صدق می کند.

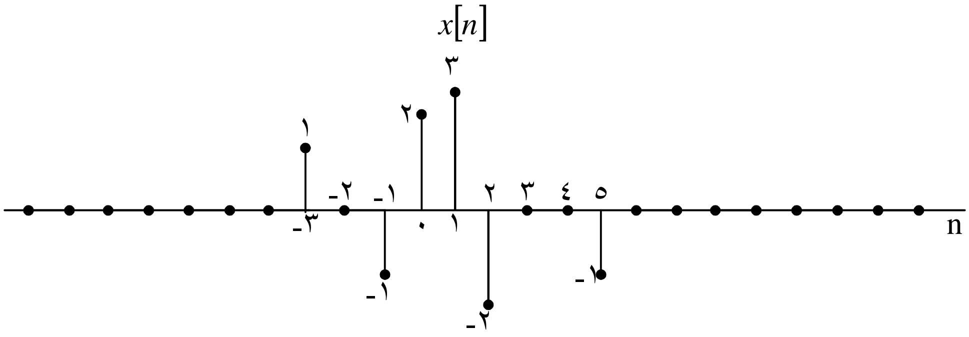
(٥) $x(e^{j\omega})$ با پریود 2π همواره پریود یک است. بنابراین تمام سیگنالهای این شرط را برآورده می کنند.

(٦) چون $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]=x(e^{0j})$ ، شرایط داده شده تنها اگر نمونه های سیگنالهای فرد برابر صفر باشند، برآورده می شود.

این در مورد سیگنالهای (ب) و (ح) و (چ) صحیح است.

....

٥,٢٥) سیگنال شکل م ٥-٢٥ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه این سیگنال را به شکل دکارتی یر می نویسیم



شکل م ۵-۲۵

$$X\left(e^{j\omega}\right)=A(\omega)+jB(\omega)$$

تابع زمانی متناظر با تبدیل فوریه یر را پیدا کنید.

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[B(\omega)+A(\omega)e^{j\omega}\right]$$

حل:

اگر تبدیل فوریه $x\left(e^{j\omega}\right)$ باشد در اینصورت:

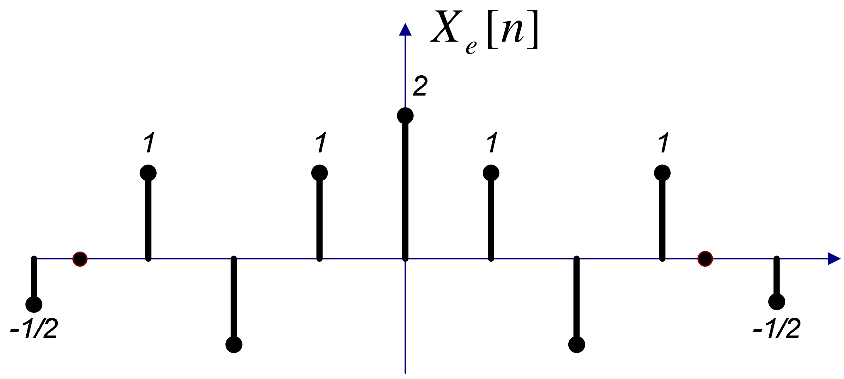
$$x_e[n]=\mathcal{E}v\{x[n]\}=\frac{x[n]+x(-n)}{2}\xleftrightarrow{FT}A(\omega)$$

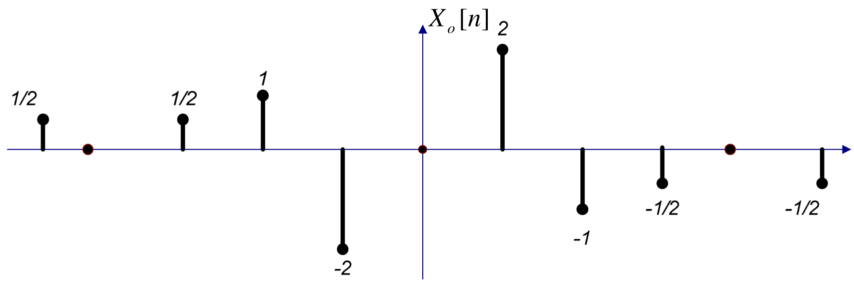
,

$$x_\circ[n]=Od\{x[n]\}=\frac{x[n]-x[-n]}{2}\xleftrightarrow{FT}jB(\omega)$$

بنابراین، تبدیل فوریه $B(\omega)$ برابر است با $-jx_\circ[n]$. همچنین تبدیل فوریه معکوس $e^{j\omega}A(\omega)$ برابر است با $x_e[n+1]$. بنابراین، تابع زمانی متناظر فوریه معکوس $B(\omega)+A(\omega)e^{j\omega}$ با $x_e[n+1]-jx_\circ[n]$ خواهد بود.

که در شکل ح۲۵-۵ نمایش داده شده است.





شکل ح۲۵-۵

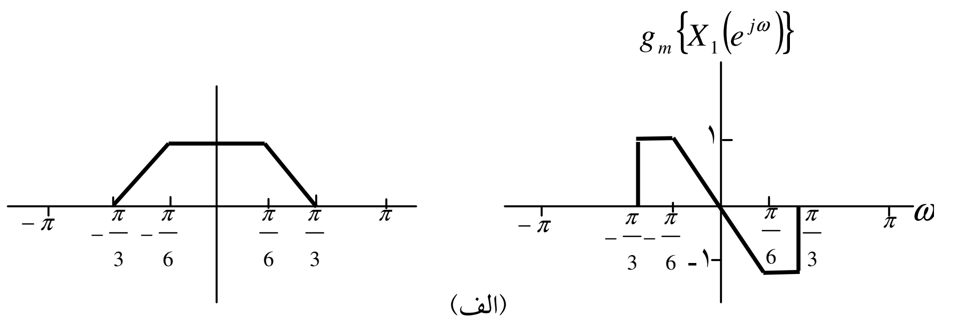
سیگنال مطلوب $= x_e[n+1] - jx_o[n]$

....

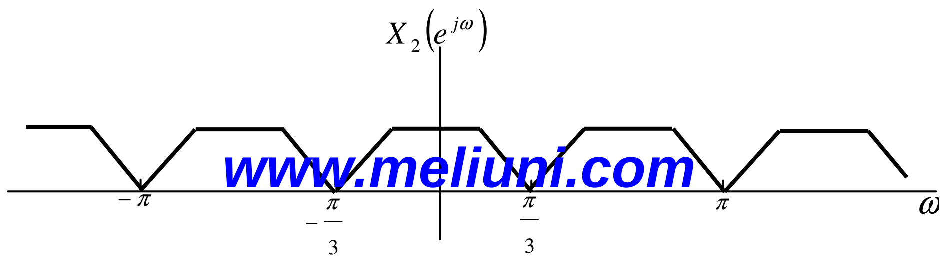
۵,۲۶) فرض کنید $x_1[n]$ سیگنالی با تبدیل فوریه $X_1(e^{j\omega})$ شکل م ۵-۲۶ (الف) است.

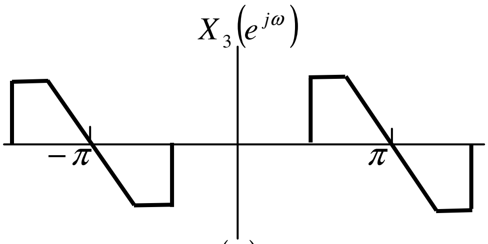
(الف) سیگنال $x_2[n]$ با تبدیل فوریه $X_2(e^{j\omega})$ شکل م ۵-۲۶ (ب) را در نظر بگیرید. $x_2[n]$ را بر حسب $x_1[n]$ بیان کنید. [راهنمایی: ابتدا $x_2(e^{j\omega})$ را برحسب $X_1(e^{j\omega})$ بنویسید و سپس خواص تبدیل فوریه را به کار برید.]

(ب) بند (الف) را برای $x_3[n]$ دارای تبدیل فوریه $X_3(e^{j\omega})$ شکل م ۵-۲۶ (ج) تکرار کنید.



(الف)





شکل م ٥-٢٦

(ج) کمیت زیر را که مرکز گرانش سیگنال $x_1[n]$ است.

$$a = \frac{n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, x_1[n]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]}$$

معمولاً زمان تأخیر سیگنال $x_1[n]$ می نامند. a را بیابید. (برای انجام این کار لازم نیست $x_1[n]$ را

$$h[n] = \frac{\sin \pi / 6}{\pi\, n}$$

$X_4\left(e^{j\omega}\right)$ را رسم کنید.

حل:

الف) می توان $x\left(e^{j\omega}\right)$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$x_2\left(e^{j\omega}\right)=\mathrm{Re}\left\{x_1\left(e^{j\omega}\right)\right\}+\mathrm{Re}\left\{x_1 e^{j(\omega-2\pi/3)}\right\}$$
$$+\mathrm{Re}\left\{x_1\left(e^{j(\omega+2\pi/3)}\right)\right\}$$

بنابراین:

$$x_2[n]=\varepsilon v\left\{1+e^{j2\pi/3}+e^{-j2\pi/3}\right\}$$

ب) $x_3\left(e^{j\omega}\right)$ را به صورت زیر می توانیم بیان کنیم:

$$x_3\left(e^{j\omega}\right)=\mathrm{Im}\left\{x_1\left(e^{j(\omega-n)}\right)\right\}+\mathrm{Im}\left\{x_1\left(e^{j(\pi+\omega)}\right)\right\}$$

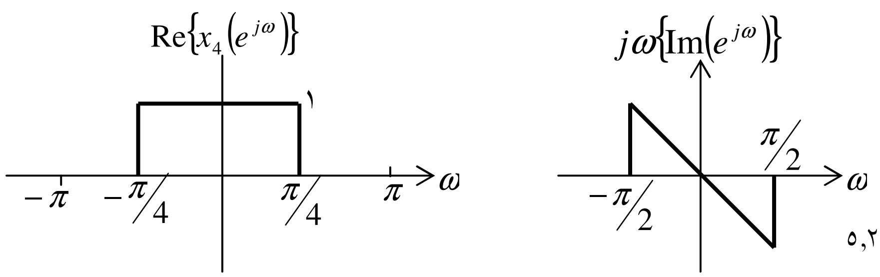
بنابراین:

$$x_3[n]=od\{x_1[n]\}\left[e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}\right]$$
$$=2(-1)^n od\{x_1[n]\}$$

ج) $\propto$ را به صورت زیر می توانیم بیان کنیم:

$$\alpha=\frac{j\dfrac{dx_1\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}}{x_1\left(e^{j\omega}\right)\Big|}=\frac{j\left(-6j/\pi\right)}{1}=6/\pi$$

د) با استفاده از این حقیقت که $H\left(e^{j\omega}\right)$ پاسخ فرکانسی یک فیلتر پائین گذر با ایده آل با فرکـانس قطع π_{16}، می توان $x_4\left(e^{j\omega}\right)$ را مانند شکل ح٥,٢٦ رسم کرد:



شکل ح٥,٢٦

۵٫۲۷ (الف) $x[n]$ یک رشته گسسته در زمان با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ شکل م ۵–۲۷ است. به ازای هر یک از سیگنالهای $p[n]$ زیر تبدیل فوریه $w[n]=x[n]p[n]$ را رسم کنید:

(i) $p[n]=\cos \pi n$

(ii) $p[n]=\cos(\pi n/2)$

(iii) $p[n]=\sin(\pi n/2)$

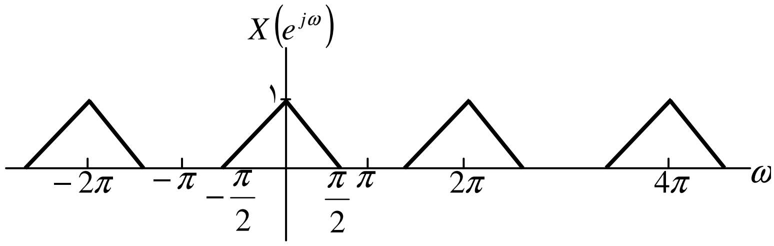
(iv) $p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]$

(v) $p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$

(ب) فرض کنید سیگنال $w[n]$ بند (الف) ورودی یک سیستم LTI، با پاسخ ضربه زیرست

$$h[n]=\frac{\sin \pi n/2}{\pi n}$$

خروجی $y[n]$ را به ازای هر یک از $p[n]$ های بند (الف) تعیین کنید.



شکل م ۲۷–۵

حل:

(الف) $w(e^{j\omega})$ کانولوشن پریودیک $x(e^{j\omega})$ و $p(e^{j\omega})$ خواهد شد. تبدیلات فوریه در شکل ح۵٫۲۷ نشان داده شده اند.

(ب) تبدیل فوریه $y[n]$ که برابر $Y(e^{j\omega})$ می باشد برابر است با $Y(e^{j\omega})=p(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ سیتم LTI، پاسخ نمونه ی $h[n]$ یک فیلتر پائین گذر ایده آل با فرکانس قطع $\pi/2$ می باشد، بنابراین

$Y(e^{j\omega})$ برای هر انتخاب $P[n]$ در شکل ح۲۷,۵ نشان داده شده، در نتیجه $y[n]$ برای هرمورد برا بر است:

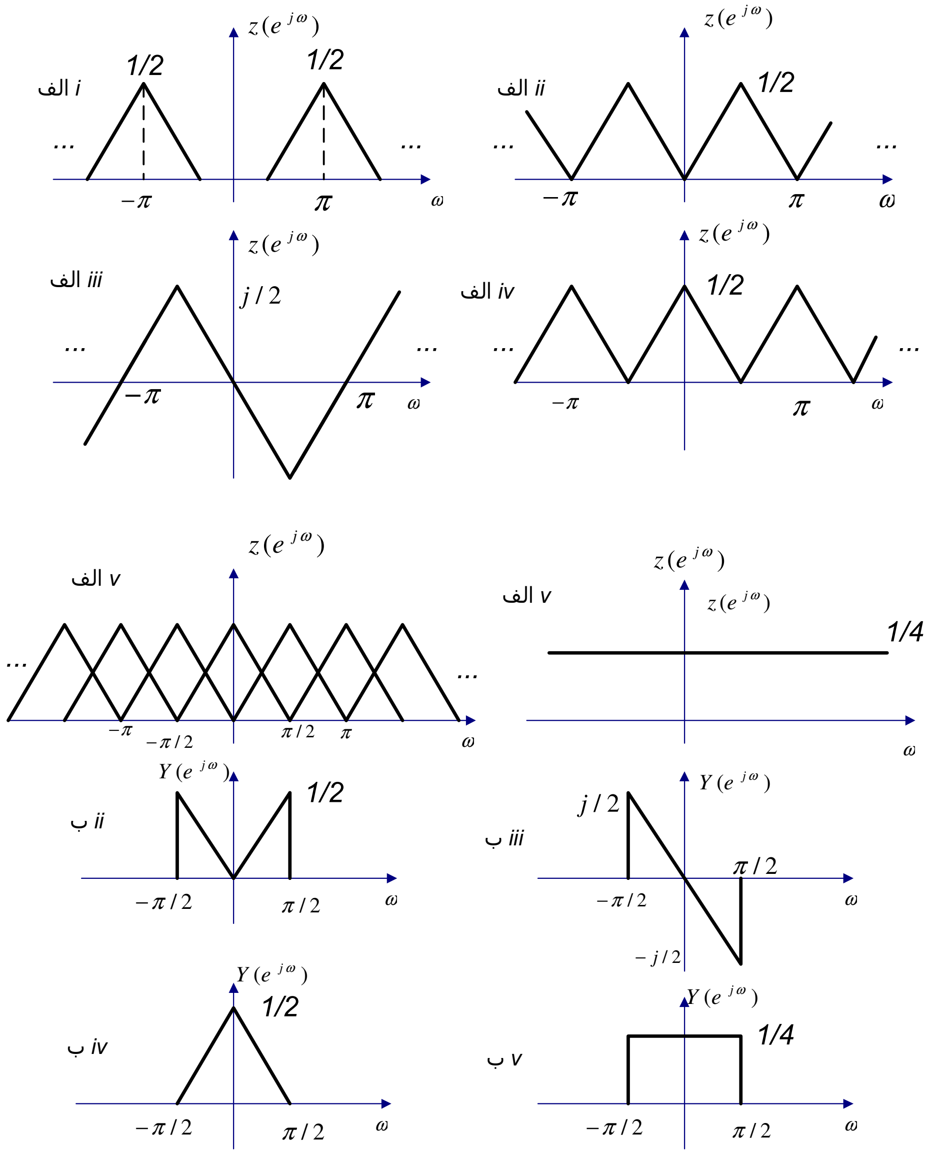
(i) $y[n]=c$

(ii) $y[n]=\dfrac{\sin\left(n\pi/2\right)}{2\pi n}-\dfrac{1-Cos\left(n\pi/2\right)}{\pi^2 n^2}$

(iii) $y[n]=\dfrac{\sin\left(n\pi/2\right)}{\pi^2 n^2}-\dfrac{1-Cos\left(n\pi/2\right)}{\pi^2 n^2}$

(iv) $y[n]=2\left[\dfrac{\sin\left(n\pi/4\right)}{\pi n}\right]^2$

(v) $y[n]=2\left[\dfrac{\sin\left(n\pi/2\right)}{\pi n}\right]^2$


الف i
الف ii
الف iii
الف iv
الف v
ب ii
ب iii
ب iv
ب v
1/2
j / 2
1/4
$z(e^{j\omega})$
$Y(e^{j\omega})$
$-\pi$
π
$-\pi/2$
$\pi/2$
$-j/2$
ω

شکل ح ۵,۲۷

....

۵,۲۸)" سیگنالهای $x[n]$ و $g[n]$ با تبدیل فوریه های $X(e^{j\omega})$ و $G(e^{j\omega})$ داده شده است. همچنین رابطه $X(e^{j\omega})$ و $G(e^{j\omega})$ به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta})G(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = 1+e^{-j\omega} \qquad \text{(م ۵-۲۸-۱)}$$

(الف) به ازای $x[n]=(-1)^n$ سیگنال $g[n]$ را چنان تعیین کنید که تبدیل فوریه $G(e^{j\omega})$ آن معادله (م ۵-۲۸-۱) را ارضا کند. آیا جوابهای دیگری هم برای $g[n]$ وجود دارد؟

(ب) بند (الف) را به ازای $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ تکرار کنید.

حل:

فرض کنید

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(e^{if})G(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$
$$=1+e^{-j\omega}=Y(e^{j\omega})$$

با اعمال عکس تبدلات فوریه داریم:

$$g[n]x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]=y[n]$$

$$y[n]=\frac{-j}{2(1-j)}\left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2(1+j)}\left(\frac{-j}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(ii) در این مورد:

$$y[n]=\frac{Cos\left(n\pi/2\right)}{3}\left[4-\left(1/2\right)^n\right]u[n]$$

(ج) در اینجا:

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=-3e^{-2j\omega}-e^{j\omega}+1-2e^{-j2\omega}$$
$$+6e^{-j\omega}+2e^{-2j\omega}-2e^{-3j\omega}+4e^{-j5\omega}$$
$$+3e^{j5\omega}+e^{j4\omega}-e^{+j3\omega}+2e^{j\omega}$$

بنابراین:

$$y[n]=3\delta[n+5]+\delta[n+4]-\delta[n+3]-3\delta[n+2]+\delta[n+1]+\delta[n]+5\delta[n-1]$$
$$-2\delta[n-3]+4\delta[n-5]$$

۵,۳۰) (الف) پاسخ فرکانسی به این سیتم در شکل ح ۵,۳۰ نشان داده شده است.

(ب) تبدیل فوریه $x(e^{j\omega})$ برای $x(t)$ در شکل ح ۵,۳۰ نشان داده شده است.

(i) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل ح ۵,۳۰ نشان داده شده است، بنابراین $y[n]=Sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)$

(ii) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل های ح ۵,۳۰ به نمایش درآمده است پس:

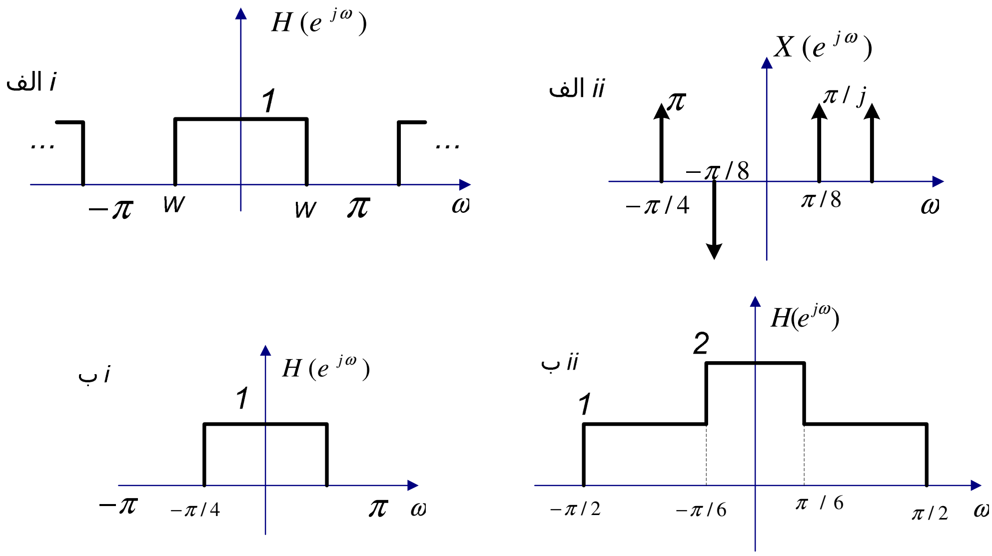
$$y[n]=2\ Sin\left(n\pi/_8\right)-2Cos\left(n\pi/_4\right)$$

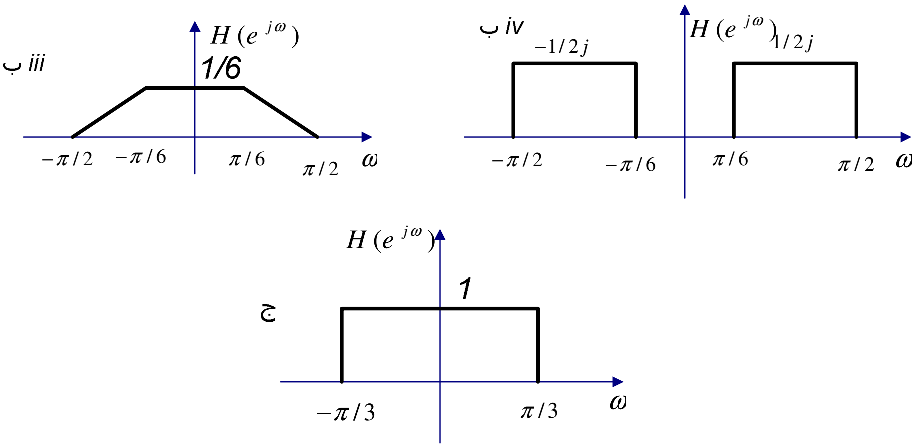
(iii) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل ح ۵,۳۰ نمایش داده شده است پس:

$$y[n]=1/_6\,Sin\left(n\pi/_8\right)-1/_4\,Cos\left(n\pi/_4\right)$$

(iv) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل ح ۵,۳۰ به نمایش درآمده است. بنابراین:

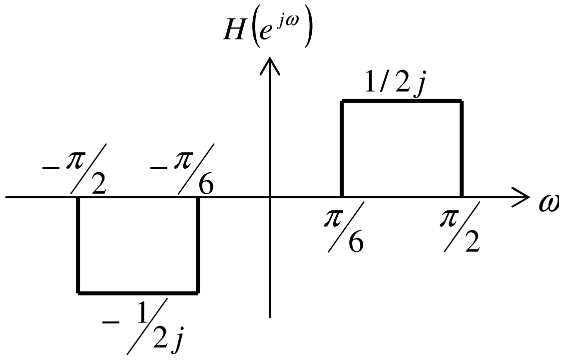
$$y[n]=-Sin\left(\pi n/_4\right)$$





شکل (ح۵٫۳۰)

(توجه کنید که در شکل (بiv) مقدار $-\frac{1}{2j}$ به این معناست که شکل در حالت اصلی بـه شـکی که در زیر آمده است بوده اما با یک انعکاس به سمت بالای محـور x هـا یـک ضـریب (−) بـه خـود گرفته است.) یعنی :



(ج) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل ح۵٫۳۰ آمده است.

(i) سیگنال $x[n]$ با پریود ۸ متناوب است. ضرایب سری فوریه سیگنال عبارتست از:

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\left(2\pi/8\right)kn}$$

تبدیل فوریه سیگنال برابر است با:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - 2k\pi/8\right)$$

تبـدیل فوریـه $Y\left(e^{j\omega}\right)$ خروجـی عبارتـست از $Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$، بنـابراین؛ در بـازه $|\omega| \le \pi$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi\left[a_0\delta(w) + a_1\delta\left(w - \pi/4\right) + a_{-1}\delta\left(\omega + \pi/4\right)\right]$$

بنابراین:

$$y[n] = a_0 + a_1 e^{j\pi n/4} + a_{-1}e^{-j\pi/4}$$
$$= 5/8 + \left[\left(1/4\right) + \left(1/2\right)\left(1/\sqrt{2}\right)\right]Cos\left(n\pi/4\right)$$

(ii) سیگنال $x[n]$ با پریود ۸، متناوب است. ضرایب سری فوریه سیگنال برابرند با:

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\left(2\pi/8\right)kn}$$

تبدیل فوریه سیگنال برابر است با:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - 2k\pi/8)$$

تبدیل فوریه $Y\left(e^{j\omega}\right)$ خروجی برابر می باشد با: $Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$، بنـابرین مطلـب؛ در بازه $0 \le |\omega| \le \pi$:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi\left[a_0\delta(\omega) + a_1\delta\left(\omega - \pi/4\right) + a_{-1}\delta\left(\omega + \pi/4\right)\right]$$

بنابراین:

$$y[n] = a_0 + a_1 e^{j\pi n/4} + a_{-1}e^{-j\pi/4} = 1/8 + \frac{1}{4}Cos\left(n\pi/4\right).$$

(iii) در این مورد $x\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x(t)$ می باشد، بنابراین:

$$y[n] = a_0 + a_1 e^{j\pi n/4} + a_{-1}e^{-j\pi/4} = 1/8 + \left[\left(1/4\right) - \left(1/2\right)\left(1/\sqrt{2}\right)\right]Cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

(iv) در این مورد خروجی برابر است با:

$$y[n]=h[n]*x[n]=\frac{Sin\left(\pi/3(n-1)\right)}{\pi(n-1)}+\frac{Sin\left(\pi/3(n+1)\right)}{\pi(n+1)}$$

....

۵,۳۱) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ دارای این ویژگی است که

$$\cos\omega_\circ n\to\omega_\circ\cos\omega_\circ n,\quad -\pi\le\omega_\circ\le\pi$$ به ازای

الف) $H(e^{j\omega})$ را بیابید.

ب) $h[n]$ را بیابید.

حل:

با استفاده از اطلاعات داده شده؛ واضح است که هنگامیکه ورودی سیستم یـک نهـایی مخـتلط بـا فرکانس $\omega_\circ$ باشد، خروجی نیز یک نهایی مختلط با همان فرکانس اما با اسکیل یـافتن بـه انـدازه $|\omega_\circ|$ خواهد بود.

$$H(e^{j\omega})=|\omega|\qquad for\quad \circ\le|\omega\le\pi|$$

(ب) با گرفتن تبدیل فوریه معکوس پاسخ فرکانسی داریم:

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})e^{+j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\circ}-\omega e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}\omega e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\omega Cos(\omega n)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\omega Cos(\omega n)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{Cos(n\pi)-1}{n^2}\right]$$

....

۵,۳۲) $h_1[n]$ و $h_2[n]$ را پاسخ ضربه هی دو سیستم LTI علی با پاسـخ فرکانـسی $X_1\left(e^{j\omega}\right)$ و $X_2\left(e^{j\omega}\right)$ فرض کنید. آیا معادله زیر در حالت کلی درست است یا نـه؟ بـرای جـواب خـود دلیلـی بیاورید.

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H_1\left(e^{j\omega}\right)d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H_2\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H_1\left(e^{j\omega}\right)H_2\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

از معادله نقیض (۵,۸) داریم:

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_1\left(e^{j\omega}\right)d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_2\left(e^{j\omega}\right)d\omega\right]=h_1[\circ]h_2[\circ]$$

همچنین چون

$$h_1[n]*h_2[n]\xleftrightarrow{FT}H_1\left(e^{j\omega}\right)H_2\left(e^{j\omega}\right)$$

داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_1\left(e^{j\omega}\right)H_2\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$
$$=\left[h_1[n]*h_2[n]\right]_{n=\circ}$$

بنابراین، با قرار دادن مقدار فوق داریم:

$$h_1[\circ]h_2[\circ]=\left[h_1[n]*h_2[n]\right]_{n=\circ}$$

چون $h_1[n]$ و $h_2[n]$ سببی هستند، این بایستی صحیح باشد.

۵,۳۳) سیستم LTI علّی توصیف شده با معادلۀ تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

(الف) پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ سیستم به ورودیهای زیر را بیابید.

(i) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

(ii) $x[n]=\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$

(iii) $x[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$

$$x[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1] \quad \text{(iv)}$$

(ج) پاسخ سیستم را به ورودیهایی با تبدیل فوریهٔ داده شده، پیدا کنید:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad \text{(i)}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad \text{(ii)}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} \quad \text{(iii)}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=1+2e^{-3j\omega} \quad \text{(iv)}$$

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه از معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

(ب) تبدیل فوریه خروجی برابر است با: $Y\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$:

(i) در این مورد

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

بنابراین:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$
$$=\frac{1/2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{1/2}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$y[n]=1/2\left(1/2\right)^n u[n]+1/2\left(-1/2\right)^n u[n]$$

(ii) در این مورد

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1+1/2\,e^{-j\omega}}$$

بنابراین

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]^2$$

با گرفتن عکس فوریه؛ بدست می آوریم:

$$y[n]=(n+1)\left(-1/2\right)^n u[n]$$

(iii) در این مورد

$$X\left(e^{j\omega}\right)=1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

بنابراین:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=1$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$y[n]=-\delta[n]+2\left(-1/2\right)^n u[n]$$

ج) (i)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{2}}-\frac{{}^{1}\!/_{4}\,e^{-j\omega}}{\left(1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{2}}$$

با اعمال تبدیل فوریه معکوس داریم:

$$y[n]=[n+1]\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{4}n\left(-{}^{1}\!/_{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

(ii) داریم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

با اعمال تبدیل فوریه معکوس؛ $y[n]$ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$y[n]=\left({}^{1}\!/_{4}\right)^{n}u[n]$$

(iii) داریم:

$$Y(e^{j\omega})=\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}+\frac{\frac{2}{9}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y[n]=\frac{2}{3}(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n])$$

(iv) داریم:

$$Y(e^{j\omega})=\left[1+2e^{-3j\omega}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$
$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{2e^{-3j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y[n]=\left(-\frac{1}{221}\right)^n u[n]+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}u[n-3]$$

٥,٣٤) سیستمی از اتصال سری دو سیستم LTI با پاسخ فرکانسی زیر تشکیل شده است

$$H_1(e^{j\omega})=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

و

$$H_2(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

(الف) معادله دیفرانسیل توصیف‌کنندهٔ کل سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ ضربه سیستم کل را تعیین کنید.

حل:

(الف) از آنجایی که سیستم دارای اتصال (آبشاری) یا (کاسکد) می باشد، پاسخ فرکانسی، سیستم کلی عبارت است از:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_1\left(e^{j\omega}\right)H_2\left(e^{j\omega}\right)$$
$$=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j3\omega}}$$

بنابراین، تبدیل فوریه، ورودی و خروجی سیستم کلی برابر است با:

$$\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{8}e^{-3j\omega}}$$

با طرفین و وسطین کردن و نیز اعمال تبدیل فوریه معکوس، داریم:

$$y[n]+\frac{1}{8}y[n-3]=2x[n]-x[n-1]$$

(ب) پاسخ فرکانسی کلی را مجدداً به صورت زیر می توانیم بنویسیم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{4/3}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left(1+j\sqrt{3}\right)/3}{1-\frac{1}{2}e^{j120}e^{-j\omega}}+\frac{\left(1-j\sqrt{3}\right)/3}{1-\frac{1}{2}e^{-j120}e^{-j\omega}}$$

با اعمال عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$h[n]=4/3\left(-1/2\right)^n u[n]+\frac{1+j\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j120}\right)^n u[n]$$
$$+\frac{1-j\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}e^{-j120}\right)^n u[n]$$

....

۵,۳۵) یک سیستم LTI با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است

$$y[n]-ay[n-1]=bx[n]+x[n-1]$$

که در آن a حقیقی و کوچکتر از ۱ است.

(الف) مقدار b را به نحوی تعیین ک نید که پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر باشد

برای تمام مقادیر ω ، $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=1$

این سیستم را سیستم تمام‌گذر می‌گویند، چنین سیستمی بـه ازای تمـامِ مقـادیر ω، $e^{j\omega n}$ را بـدون تضعیف عبور می‌دهد. در بقیه این مسئله، همین مقدار b را به کار برید.

(ب) $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ را در فاصلهٔ $0\le\omega\le\pi$، به ازای $a=\frac{1}{2}$ ، به طور تقریبی رسم کنید.

(ج) $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ را در فاصلهٔ $0\le\omega\le\pi$، به ازای $a=-\frac{1}{2}$ ، به طور تقریبی رسم کنید.

(د) خروجی سیستم را به ازای $a=-\frac{1}{2}$ و ورودی زیر محاسبه و رسم کنید

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

این مثال نشان می‌دهد که فاز غیرخطی اثر عمده‌ای بر سیگنال می‌گذارد، بـرخلاف فـاز خطـی کـه تنها اثرش ایجاد یک جابجایی زمانی است.

حل:

با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین معادله دیفرانسیل عبارت زیر حاصل می شود:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{b+e^{-j\omega}}{1-a\ e^{-j\omega}}$$

به منظور اینکه $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ یک باشد، بایستی مطمئن شویم که:

$$\left|b+e^{-j\omega}\right|=\left|1-a\ e^{-j\omega}\right|$$

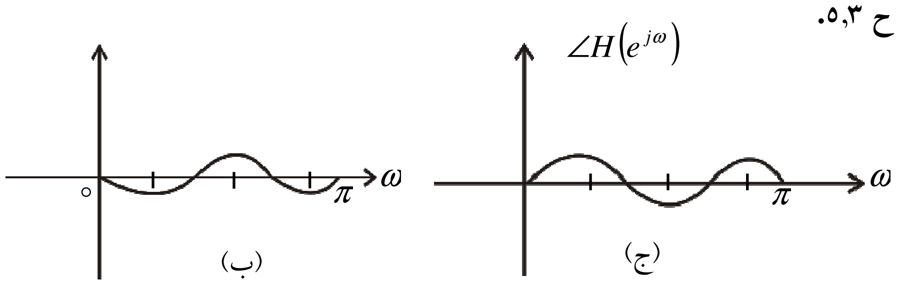
$$\Rightarrow 1+b^2+2b\,Cos\,\omega=1+a^2-2a\,Cos\,\omega$$

این تساوی تنها فقط برای $b=-a$ برقرار است. $\Rightarrow$

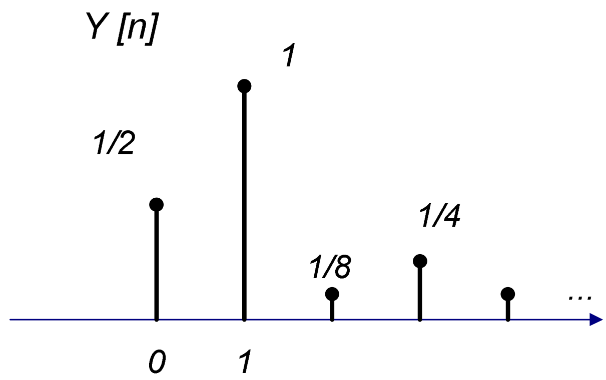
(ب) طرح در شکل ح ٥,٣٥ نمایش داده شده است.

(ج) طرح در شکل ح ٥,٣٥ نمایش داده شده است.

شکل ح ٥,٣.



(د)



(د) وقتی که $a=-\frac{1}{2}$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1/2+e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

همچنین

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

بنابراین

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1/2+e^{-j\omega}}{\left(1+1/2\,e^{-j\omega}\right)\left(1-1/2\,e^{-j\omega}\right)}$$

$$=\frac{5/4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{3/4}{1+1/2\,e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y[n]=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{3}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

طرح این خروجی در شکل ح٥,٣٥ نشان داده شده است:

....

٥,٣٦) (الف) فرض کنید $h[n]$ و $g[n]$ پاسخ ضربه‌های دو سیستم LTI پایدار گسسته در زمان وارون هستند. رابطه بین پاسخ فرکانسی دو سیستم را بیابید.

(ب) سیستمهای LTI علّی توصیف شده با معادلات تفاضلی زیر را در نظر بگیرید. در هر مورد پاسخ ضربهٔ سیستم وارون و معادله تفاضلی توصیف‌کنندهٔ آن را بیابید.

(i) $y[n]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]$

(ii) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$

(iii) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]$

(iv) $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$

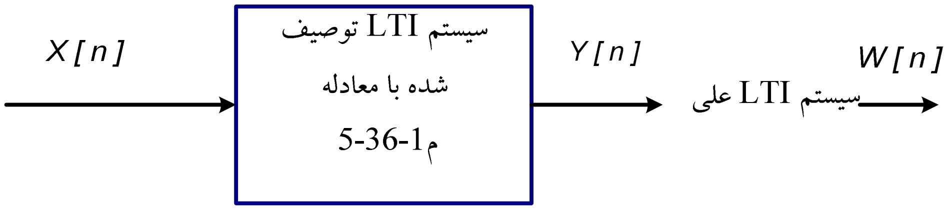
(v) $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$

(vi) $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$

(ج) سیستم LTI علّی توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]+y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2] \qquad \text{(م ٥-٣٦-١)}$$

وارون این سیستم را بیابید. نشان دهیدی که وارون این سیستم علّی نیست. یک سیستم LTI علّی بیابید که



شکل م ٥-٣٦

«وارون تأخیردار» سیستم توصیف شده با معادله (٥-٣٦-١) باشد. مشخص‌تر این که یـک سیـستم LTI علّی بیابید به نحوی که خروجی $w[n]$ شکل م ٥-٣٦ برابر $x[n-1]$ باشد.

حل:

(الف) پاسخ های فرکانسی با بیان زیر به هم مرتبط می شوند:

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{H\left(e^{j\omega}\right)}$$

(ب) (i) در اینجا $H\left(e^{j\omega}\right)=1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}$. ب

نابراین $G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$ و $g[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

معادله دیفرنس بین ورودی و خروجی به شکل زیر است:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]+{}^{1}\!/_{2}\,x[n-1]$$

(iv) در اینجا

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

بنابراین:

$$G(j\omega)=\frac{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

بنابراین:

$$G(e^{j\omega})=1+\frac{2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)e^{-j\omega}}-\frac{2}{1+\left(\frac{1}{4}\right)e^{-j\omega}}$$

,

$$g[n]=\delta[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

بدلیل اینکه:

$$G(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{\left(1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}\right)}$$

معادله دیفرنس بین ورودی و خروجی برابر است با:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y$$

$$=$$

$$x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

در اینجا $H(e^{j\omega})=\dfrac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$. بنابراین $G(e^{j\omega})=\dfrac{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

چون $$G(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

معادله دیفرنس بین ورودی و خروجی به شکل زیر در می آید:

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

(vi) در اینجا $H(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$.

بنابراین

$$G(e^{j\omega})=\left(1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}\right)$$

داریم:

$$g[n]=\delta[n]+\frac{5}{4}\delta[n-1]-\frac{1}{8}\delta[n-2]$$

و معادله دیفرنس بین ورودی و خروجی برابر است با:

$$y[n]=x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

(ج) پاسخ فرکانسی سیستم داده شده عبارتست از:

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{-j\omega}-\frac{1}{2}e_{-2j\omega}}{1+e^{-j\omega}}+\frac{1}{4}e^{-2j\omega}$$

پاسخ فرکانسی سیستم معکوس برابر است با:

$$G(e^{j\omega})=\frac{1}{H(e^{j\omega})}=\frac{e^{j\omega}+1+1/4\,e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

بنابراین

$$g[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1].$$

واضح است که پاسخ $g[n]$، یک پاسخ ضربه سببی نیست.

اگر این پاسخ ضربه را به اندازه ۱ واحد تأخیر دهیم، در اینصورت، کازال خواهد شد. بعلاوه، خروجی سیستم معکوس در اینصورت برابر $x[n-1]$ خواهد بود. پاسخ ضربه این سیستم کازال برابر است با:

$$g_1[n]=g[n-1]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$

....

۵,۳۷) فرض کنید $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x[n]$ است. تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ پیدا کنید. (فرض نکنید که $x[n]$ حقیقی است.)

(الف) $\Re e\{x[n]\}$ (ب) $x^*[-n]$ (ج) $\varepsilon v\{x[n]\}$

حل:

داده شده که

$$x[n]\overset{FT}{\longleftrightarrow}x\left(e^{j\omega}\right)$$

(i) چون

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

می توان نوشت:

$$X^*\left(e^{-j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*[n]e^{-j\omega n}$$

با مقایسه با معادله (۵,۹) نتیجه می گیریم که:

$$x^*[n]\overset{FT}{\longleftrightarrow}X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

بنابراین:

$$\mathrm{Re}\{x[n]\}=\frac{x[n]+x^*[n]}{2}\overset{FT}{\longleftrightarrow}\frac{x\left(e^{j\omega}\right)+x^*\left(e^{-j\omega}\right)}{2}$$

(ii) چون

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

می توان نوشت:

$$X\left(e^{-j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[-n]e^{-j\omega n}$$

بنابراین:

$$x[-n]\overset{FT}{\longleftrightarrow}X\left(e^{-j\omega}\right)$$

از قسمت قبلی می دانیم که:

$$x^*[n]\overset{FT}{\longleftrightarrow}X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

بنابراین، با ترکیب دو وضعیت با همدیگر داریم:

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{FT} X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

(iii) از نتایج قبلی می دانیم که:

$$\varepsilon\{x[n]\} = \frac{x[n]+x[-n]}{2} \xleftrightarrow{FT} \frac{x\left(e^{j\omega}\right)+x\left(e^{-j\omega}\right)}{2}$$

....

۵,۳۸) فرض کنید $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه سیگنال حقیقی $x[n]$ است. نشان دهید که $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x[n] = \int_0^{\pi} \{B(\omega)\cos\omega + C(\omega)\sin\omega\} d\omega$$

عبارتهایی برای $B(\omega)$ و $C(\omega)$ برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ پیدا کنید.

حل:

از معادله نقیض (۵,۸) بدست می آوریم:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} x\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\left(e^{-j\omega}\right)e^{-j\omega n} d\omega$$

چون $x[n]$ حقیقی است، $x\left(e^{j\omega}\right) = x^*\left(e^{j\omega}\right)$؛ بنابراین:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{n} \mathrm{Re}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}\left\{e^{\omega n} + e^{-j\omega n}\right\} d\omega$$

$$+ \frac{j}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{Im}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}\left\{e^{\omega n} - e^{-j\omega n}\right\} d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{Re}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\} 2\cos(\omega n) d\omega$$

$$- \frac{j}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{Im}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}\left\{Sin\,\omega n\, d\omega\right\}$$

بنابراین:

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\{x(e^{j\omega})\}Cos\,\omega n$$

,

$$-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\{x(e^{j\omega})\}Sin\,\omega n$$

۵,۳۹) خاصیت کانولوشن زیر را ثابت کنید

$$x[n]*h[n]\xrightarrow{\Im}X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

حل:

فرض کنید:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

در اینصورت:

$$\begin{aligned}Y(e^{j\omega})&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{x[n]\}*h[n]e^{-j\omega n}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n-k]e^{-j\omega n}\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-j\omega k}H(e^{j\omega})\\&=H(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-j\omega k}\\&=H(e^{j\omega})x(e^{j\omega})\end{aligned}$$

۵,٤٠) $x[n]$ و $h[n]$ دو سیگنال هستند و $y[n]=x[n]*h[n]$. دو عبارت برای $y[0]$ بنویسید: یکی بر حسب $x[n]$ و $h[n]$ (با استفاده از جمع کانولوشن) و یکی برحسب $X(e^{j\omega})$ و $H(e^{j\omega})$ (با استفاده از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه). با انتخاب سنجدهٔ $h[n]$ و استفاده از دو عبارت فوق، رابطه پارسوال را ثابت کنید یعنی نشان دهید که

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2\,d\,\omega$$

به همین روش رابطه زیر را که تعمیم رابطهٔ پارسوال است بیابید.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) Z^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

حل:

فرض کنید $y[n]=x[n]*h[n]$ در اینصورت با استفاده از مجموع کانولوشن:

$$y[\circ]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k]$$

(ح۱-۵,٤۰.)

با استفاده از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه داریم:

$$y[c]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right) d\omega \qquad (\text{ح۲-۵,٤۰})$$

حال، فرض کنید $h[n]=x^*[-n]$. در اینصورت $H\left(e^{j\omega}\right)=X^*\left(e^{j\omega}\right)$. با جایگذاری طرف راست معادله (ح۱-۵,٤۰) و (ح۲-۵,٤۰) و برابر قرار دادن آنها داریم:

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} x[k]x^*[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(e^{j\omega}\right)x^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

بنابراین:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|x\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

حال فرض کنید که $h[n]=x^*[-n]$ در اینصورت،، جایگذاری طرف راست معادلـه (۱-S۵,٤۰) و (ح۲-۵,٤۰) و برابر قرار دادن آنها:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x^*[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\omega}\right)z^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

....

۵,٤۱) فرض کنید $\tilde{x}[n]$ سیگنال متناوبی با دوره تنـاوب N اسـت. سـیگنال دارای عمـر محـدود $x[n]$ به ازای یک عدد صحیح n_o با $\tilde{x}[n]$ رابطهٔ زیر را داراست

$$x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & n_o \le n \le n_o+N-1 \\ \circ, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

یعنی $x[n]$ در یک تناوب با $\tilde{x}[n]$ برابر است و بقیهٔ جاها صفرست.

(الف) a_k ضرائب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ و $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریهٔ $x[n]$ است. نشان دهید کـه مـستقل از مقدار $n_\circ$ داریم

$$a_k = \frac{1}{N} X\left(e^{j2\pi/N}\right)$$

(ب) دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = u[n] - u[n-5]$$
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

که در آن N یک عدد مثبت است. a_k را ضـرائب فوریـهٔ $\tilde{x}[n]$ و $X(e^{j\omega})$ را تبـدیل فوریـه آن فرض کنید.

(i) عبارت $X(e^{j\omega})$ را بیابید.

(ii) با استفاده از نتیجه بند (الف) عبارتی برای ضرائب فوریه a_k بیابید.

حل:

(الف) تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ برابر است با $x(e^{j\omega})$ و

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n_\circ}^{n_\circ+N+1} x[n] e^{-j\omega n}$$

بنابراین:

$$X\left(e^{j2\pi k/N}\right) = \sum_{n=n_\circ}^{n_\circ+N-1} x[n] e^{-j\left(2\pi/N\right)kn} \qquad \text{(ح ۱-٥,٤١)}$$

حال، می توانیم ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-j\left(2\pi/N\right)kn}$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=n_\circ}^{n_\circ+N-1} x[n] e^{-j\left(2\pi/N\right)kn}$$

(چون $x[n] = \tilde{x}[n]$ در بازه $n_\circ \le n \le n_\circ + k - 1$). بامقایسه معادلاتبالا بـا معادلـه (ح ۱-٥,٤١) خواهیم داشت:

$$a_k = \frac{1}{N} x\left(e^{j2\pi k/N}\right)$$

(ب) (i) از اطلاعات داده شده:

$$\dot{x}\left(e^{j\omega}\right)=1+e^{j\omega}+e^{-2j\omega}+e^{-3j\omega}$$
$$=e^{-j\left(3/2\right)\omega}\left\{e^{j\left(3/2\right)\omega}+e^{-j\left(3/2\right)\omega}\right\}+e^{-j\left(3/2\right)\omega}e^{j\left(1/2\right)\omega}+e^{-j\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$=2e^{-j\left(3/2\right)\omega}\left\{Cos\left(3\omega/2\right)+Cos\,\omega/2\right\}$$

(ii) از قسمت (الف) داریم:

$$a_k=\frac{1}{N}X\left(e^{j2k\pi/N}\right)$$
$$=\frac{1}{N}2e^{-j\left(3/2\right)2\pi k/N}$$
$$\{Cos(6\pi k/2N)\}$$
$$+Cos\left(\pi k/N\right)$$

....

۵,٤٢) در این مسئله خاصیت جابجایی فرکانسی تبدیل فوریه گسسته در زمان را به عنـوان حالـت خاصی از خاصیت ضرب ثابت می‌کنیم. $x[n]$ را یک سیگنال گسسته در زمان دلخواه با تبـدل فوریـه $X\left(e^{j\omega}\right)$ بگیرید و فرض کنید.

$$g[n]=e^{j\omega_{\circ}n}x[n]$$

(الف) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید و آن را رسم کنید

$$p[n]=e^{j\omega_{\circ}n}$$

(ب) خاصیت ضرب تبدیل فوریه می‌گوید که چون

$$g[n]=p[n]x[n]$$
$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}X\left(e^{j\theta}\right)P\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

با محاسبه این انتگرال نشان دهید که

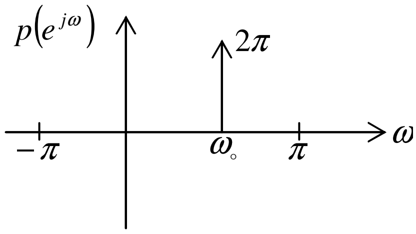
$$G\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega-\omega_{\circ})}\right)$$

حل:

(الف)

$$p\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\delta(\omega-\omega_{\circ})\quad for\quad |\omega|<\pi$$

این مطلب در شکل ح ۵٫۴۲ نشان داده شده است.



شکل ح ۵٫۴۲

(ب) از خاصیت ضرب تبدیل فوریه، داریم:

$$G = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\theta}\right)p\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\theta}\right)2\pi\delta(\omega-\theta-\omega_\circ)d\theta$$
$$= X\left(e^{j(\omega-\omega_\circ)}\right)$$

۵٫۴۳) $x[n]$ را سیگنالی با تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ بگیرید و فرض کنید

$$g[n] = x[2n]$$

سیگنالی با تبدیل فوریهٔ $G\left(e^{j\omega}\right)$ است. در این مسئله رابطه بین $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $G\left(e^{j\omega}\right)$ را به دست می‌آوریم.

(الف) فرض کنید

$$v[n] = \frac{\left(e^{-j\pi n}x[n]\right)+x[n]}{2}$$

تبدیل فوریه $V\left(e^{j\omega}\right)$ را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید.

(ب) با توجه به این که برای n های فرد $x[n]=\circ$، نشان دهید که تبدیل فوریهٔ $v[2n]$ برابر $Ve(j\omega/2)$ است.

(ج) نشان دهید که

$$x[2n] = v[2n]$$

و نتیجه بگیرید که

$$G\left(e^{j\omega}\right) = V\left(e^{j\omega/2}\right)$$

حال با استفاده از نتیجه بند (الف) $G\left(e^{j\omega}\right)$ را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید.

حل:

(الف) با استفاده از شیفت فرکانسی و خاصیت خطی داریم:

$$V\left(e^{j\omega}\right)=\frac{X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)+x\left(e^{j\omega}\right)}{2}$$

(ب) فرض کنید که $y[n]=v[2n]$ در اینصورت:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\upsilon[2n]e^{-j\omega n}$$

بدلیل اینکه نمونه های با اندیس فرد $\upsilon[n]$ صفر می باشد، می توان $m=2n$ را در معادله بالا قرار دهیم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\upsilon[m]e^{j\omega m/2}=V\left(e^{j\omega/2}\right)$$

(توجه کنید که: تعویض n با ۲m تنها اگر اندیس های فرد در سری فوق صفر گردد.)

(ج) $x[2n]$ یک دنباله جدید است که شامل نمونه هایی بـا انـدیس زوج $x[n]$ مـی باشـد. $\upsilon[n]$ دنباله ای است که نمونه های با اندیس فرد آن برابر $x[n]$ شود. نمونه هـای بـا اندیسـه – فـرد $\upsilon[n]$ صفر است. $\upsilon[2n]$ دنباله ای جدیدی است که تنهاشامل نمونه های با اندیس زوج است. این ایده در شکل ح ٥,٤٣ رسم شده است. از قسمت (الف)

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{x\left(e^{j\left(\omega/2-\pi\right)}\right)+x\left(e^{j\omega/2}\right)}{2}$$

٥,٤٤) (الف) فرض کنید

$$x_1[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

و تبدیل فوریه آن را با $X_1\left(e^{j\omega}\right)$ نشان دهید. $x_1[n]$ و سـیگنالهای دارای تبـدیل فوریـۀ زیـر را رسم کنید:

(i) $X_2\left(e^{j\omega}\right)=X_1\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega},\ |\omega|<\pi$

(ii) $X_3\left(e^{j\omega}=X_1\right)\left(e^{j\omega}\right)e^{-j3\omega/2},|\omega|<\pi$

(ب) فرض کنید

$$w(t) = \cos\left(\frac{\pi\, t}{3\, T}\right) + \sin\left(\frac{\pi\, t}{2\, T}\right)$$

یک سیگنال پیوسته در زمان است. توجه کنید که $x_1[n]$ را می‌توان نمونه‌های متساوی‌الفاصلهٔ $w(t)$ به حساب آورد، یعنی

$$x_1[n] = w(n\, T)$$

نشان دهید که

$$x_2[n] = w(n\, T - \alpha)$$

و

$$x_3[n] = w(n\, T - \beta)$$

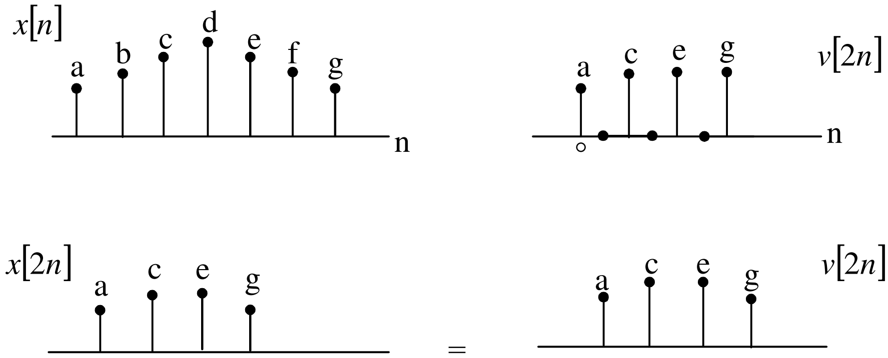
و مقادیر α و β را بیابید. با استفاده از این نتایج نشان دهید که $x_2[n]$ و $x_3[n]$ نیز نمونه‌های متساوی‌الفاصلهٔ $w(t)$ هستند.

حل:

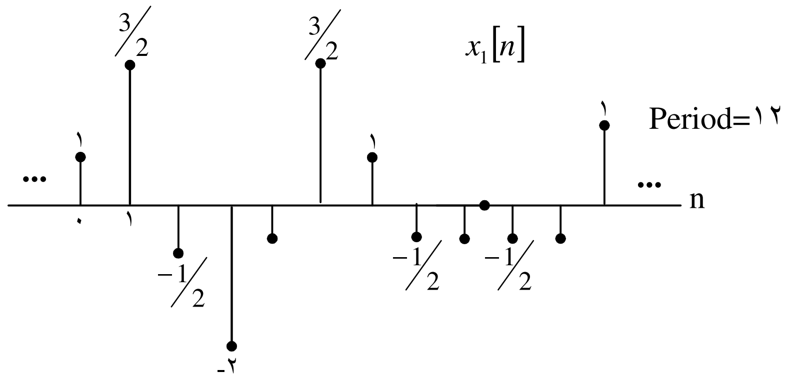
(الف) سیگنال $x_1[n]$ در شکل ح ٤٤–٥ نشان داده شده است.

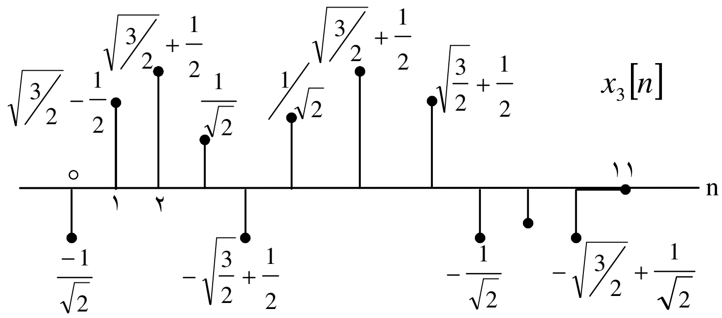
(i) با گرفتن عکس تبدیل فوریه، سیگنال $x_2[n]$ برابر است با:

$$x_2[n] = x_1[n+1]$$



شکل ح ٥,٤٣





شکل ح ٥,٤٤

(ii) با گرفتن تبدیل فوریه معکوس، $x_2[n]$ برابر است با:

$$x_2[n]=x_1\left[n-\tfrac{3}{2}\right]=Sin\left(\pi n/3\right)+Sin\left(\pi n/2\right)Cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$-Cos\left(\pi n/2\right)Sin\left(3\pi/4\right)$$

که در شکل ح ٥,٤٤. نمایش داده شده است.

(ب) در قسمت (الف)

$$x_2[n]=x_1[n+1]=\omega[nT+\mathrm{T}]$$

و نیز

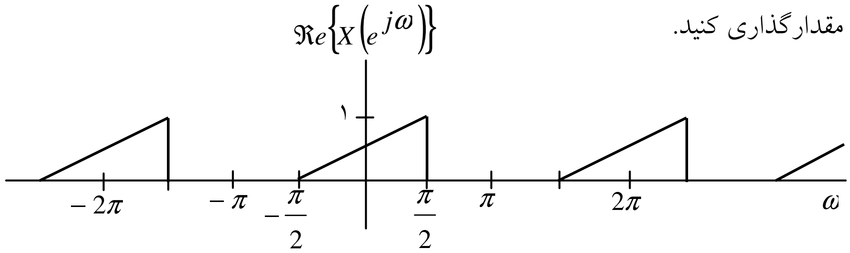
$$x_3[n]-x_1\left[n-\tfrac{3}{2}\right]=w\left[nT-\tfrac{3T}{2}\right]$$

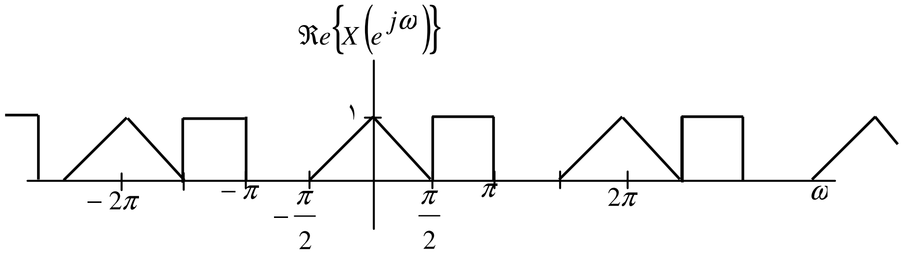
بنابراین:

$$\beta = 3/2 \;,\;\; \propto = -1$$

....

٥,٤٥) سیگنال $x[n]$ با تبدیل فوریهٔ شکل م ٥-٤٥ را در نظر بگیرید. سیگنالهای پیوسته در زمان زیر را رسم و مقدارگذاری کنید.





شکل م ٥-٤٥

(الف) $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j(2\pi/10)nt}$

(ب) $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{j(2\pi/10)nt}$

(ج) $x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vartheta d\{x[n]\} e^{j(2\pi/8)nt}$

(د) $x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Re e\{x[n]\} e^{j(2\pi/6)nt}$

حل:

از معادله آنالیز تبدیل فوریه:

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

(الف) با مقایسه معادله برای $x_1(t)$ با معادله بالا، بدست می آوریم:

$$x_1(t) = X\left(e^{-j\left(2\pi/10\right)t}\right)$$

بنابراین $x_1(t)$ در شکل ح٥,٤٥ نشان داده شده است.

(ب) مقایسه معادله برای $x_2(t)$ با معادله برای $X\left(e^{j\omega}\right)$ داریم:

$$x_2(t) = X\left(e^{j(2\pi 10)t}\right) = x_1(-t)$$

بنابراین $x_2(t)$ در شکل ح٥,٤٥ نشان داده شده است.

(ج) نمی‌دانیم $od\{x[n]\} = (x[n] - x[-n])/2$ بنابراین:

$$\frac{x\left(e^{j\omega}\right) - x\left(e^{-j\omega}\right)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} od\{x[n]\} e^{-j\omega n}$$

با مقایسه این نتیجه با معادله داده شده برای $x_3(t)$، داریم:

$$x_3(t) = \frac{x\left(e^{-j\left(2\pi/8\right)t}\right) - x\left(e^{\left(2\pi/8\right)t}\right)}{2}$$

بنابراین $x_3(t)$ همان شکلی رادارد که در شکل ح٥,٤٥ نشان داده شده است.

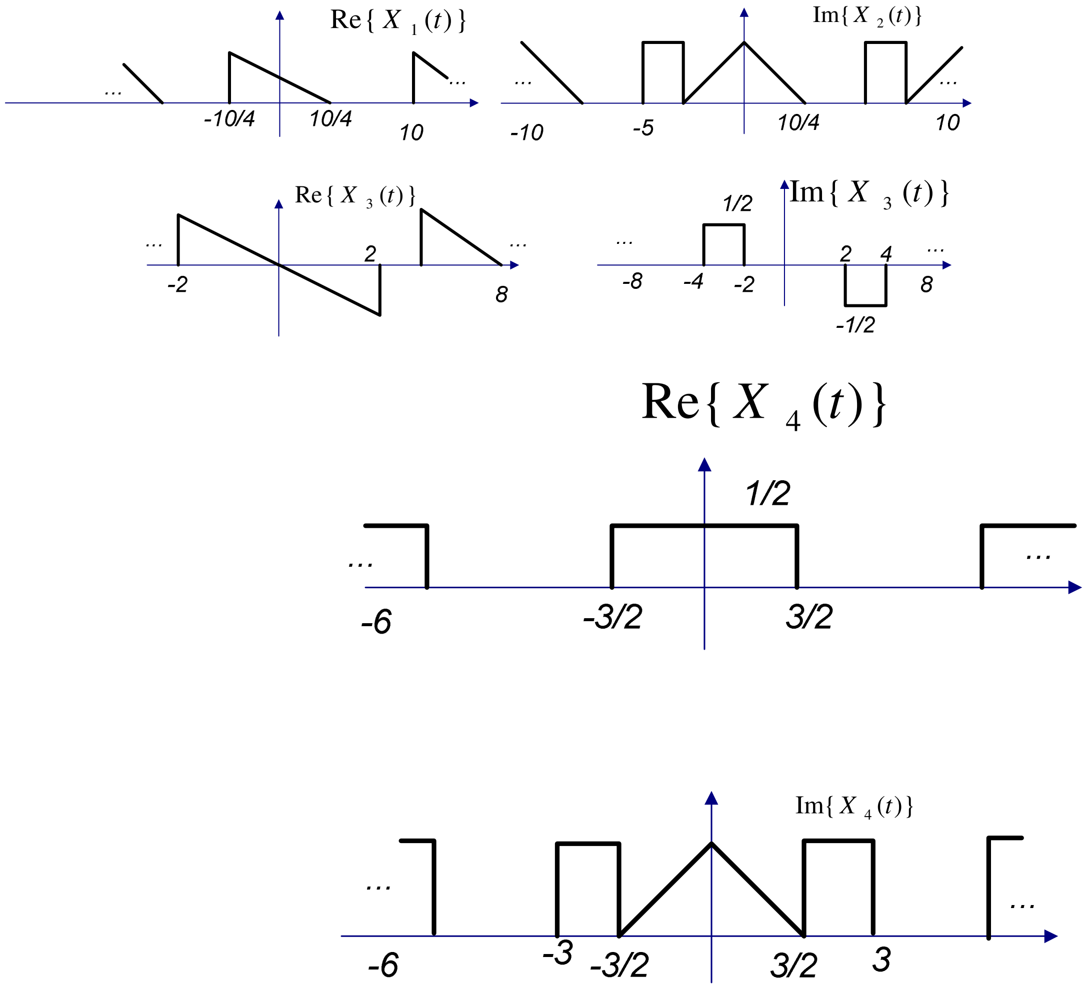
(د) می دانیم که $\text{Re}\{x[n]\} = \left(x[n] + x^*[n]\right)/2$، بنابراین:

$$\frac{x\left(e^{j\omega}\right) - x^*\left(e^{-j\omega}\right)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re}\{x[n]\} e^{-j\omega n}$$

با مقایسه این معادله داده شده برای $x_4(t)$ بدست می‌آوریم.

$$x_4(t) = \frac{x\left(e^{-j\left(2\pi/6\right)t}\right) + X^*\left(e^{j\left(2\pi/6\right)t}\right)}{2}$$

بنابراین $x_4(t)$ همان گونه است که در شکل ح٥,٤٥ نشان داده شده است.



شکل ح٥,٤٥

٥,٤٦) در مثال ٥–١ دیدیم که به ازای $|a|<1$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{1-a\,e^{-j\omega}}$$

(الف) با استفاده از خواص تبدیل فوریه نشان می‌دهید که

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{\Im} \frac{1}{\left(1-a\,e^{-j\omega}\right)^2}$$

(ب) با استفاده از استقراء نشان دهید که عکس تبدیل فوریهٔ

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-a\;e^{-j\omega}\right)^r}$$

عبارت است از

$$x[n]=\frac{(n+r-1)}{n!(r-1)!}a^n u[n]$$

حل:

(الف) فرض کنید $x[n]=a^n u[n]$، در این صورت $x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\alpha\, e^{-j\omega}}$، با استفاده از خاصیت مشتقگیری در فرکانس داریم:

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{FT} j\frac{dx(t)}{d\omega}=\frac{a\;e^{-j\omega}}{\left(1-a\,e^{-j\omega}\right)^2}$$

بنابراین:

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{FT} j\frac{dx(t)}{dt}+x\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\propto e^{-j\omega}\right)^2}$$

(ب) از قسمت (الف)، واضح است که نتیجه برای $r=1$ و $r=2$ صحیح است. فرض کنید که همچنین برای $K=r-1$ صحیح باشد. تلاش خواهیم کرد تا اثبات ک نیم نتیجه برای $k=r$ نیز صحیح است و داریم:

$$x_{r-1}[n]=\frac{\{n+r-2\}!}{n!(r-2)!}a^n u[n] \xleftrightarrow{FT}$$

$$x_{r-1}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^{r-1}}$$

از خاصیت مشتقگیری در حوزه فرکانس

$$n\,x_{r-1}[n] \xleftrightarrow{FT} \frac{a(r-1)e^{-j\omega}}{\left(1-a\,e^{-j\omega}\right)^{r-1}}$$

بنابراین:

$$\frac{(n+1)x_{r-1}[n+1]}{a(r-1)} \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{\left(1-a\,e^{-j\omega}\right)^{r}}$$

طرف چپ معادله بالا برابر است با:

$$\frac{(n+1)x_{r-1}[n+1]}{a(r-1)} = \frac{(n+1-r)!}{n!(r-1)!}a^{n}u[n] = x_r[n]$$

بنابراین، نشان دادیم که اگر مسئله برای $r-1$ صحیح باشد، نتیجه برای r نیز صحیح خواهد بود. چون می دانیم که نتیجه برای $r=2$ صحیح است می توانیم نتیجه بگیریم که برای $r=3$ و $r=4$ و ... (بهمین ترتیب) نیز صحیح خواهد بود.

(٥,٤٧ (الف) اگر $X\left(e^{j(w-1)}\right)=x\left(e^{j\omega}\right)$ با پریود 2π، پریودیک می باشد. این تنها در صورتی است که $X\left(e^{j\omega}\right)$ برای همه ی ω عدد ثابتی باشد. این بیان می کند که $x[n]$ برحسب $k\delta[n]$ می باشد و حال اینکه k عدد ثابتی است. بنابراین، حالت داده شده، صحیح می باشد.

(ب) اگر $X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)=x\left(e^{j\omega}\right)$ در اینصورت $X\left(e^{j\omega}\right)$ با پریود π، متناوب خواهد بود. همچنین می دانیم که $X\left(e^{j\omega}\right)$ با پریود 2π متناوب خواهد بود. این دو شرط می توانند حتی زمانیکه $X\left(e^{j\omega}\right)$ هر شکل دلخواهی در بازه ی $\left|w\pi/2\right|\leq 0$ برقرار باشند. بنابراین $X\left(e^{j\omega}\right)$ لازم نیست که حتماً ثابت باشد.

به طور مکرر، $x[n]$ لازم نیست که فقط یک ضربه باشد، بنابراین حالت داده شده نادرست است.

(ج) از مسئله ح٤٣. می دانیم که تبدیل فوریه معکوس $x\left(e^{j\omega/2}\right)$ دنباله ای به صورت $v[n]=\left(x[n]+e^{j\pi n}x[n]\right)/2$ می باشد. نمونه های اندیس زوج $v[n]$ بااندیس های زوج نمونه های $x[n]$. که بیان می کند نمونه های اندیس زوج $x[n]$ فرو هستند. بنابراین $x[n]$ لزوماً نبایستی یک ضربه باشد. بنابراین حالت داده شده صحیح نیست.

(د) از جدول ٥,١ می دانیم که تبدلی فوریه $X\left(e^{j2\omega}\right)$ سیگنالی بسط زمانی است یعنی:

$$x_{(2)}[n]=\begin{cases} x[n/2] & n=\circ,\pm 2,4,... \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

اگر $x(e^{2j\omega})=x(e^{j\omega})$ باشد در اینصورت: $x[n]=x_{(2)}[n]$ این تنها در صورتی ممکـن اسـت که $x[n]$ یک ضربه باشد. بنابراین حالت داده شده صحیح می باشد.

....

٥,٤٨) یک سیستم LTI گسسته در زمان علّی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ داده شـده اسـت. این سیستم با دو معادله تفاضلی، برحسب سیگنال واسطهٔ $w[n]$ مشخص شده است.

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]+w[n]+\frac{1}{2}w[n-1]=\frac{2}{3}x[n]$$
$$y[n]-\frac{5}{4}y[n-1]+2w[n]-2w[n-1]=-\frac{5}{3}x[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربهٔ این سیستم را به دست آورید.

(ب) یک معادلهٔ تفاضلی پیدا کنید که $x[n]$ و $y[n]$ این سیستم را به هم ربط دهد.

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله و حذف جمله $w(e^{j\omega})$ از دو طرف، داریم:

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

با گرفتن عکس تبدل فوریه از بسط کسرهای جزئی معادله فوق داریم:

$$h[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(1/4\right)^n u[n]$$

(ب) می دانیم که:

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

با طرفین وسطین کردن و گرفتن عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$y[y]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y(n-2)=3x[n]-\frac{1}{2}n[n-1]$$

....

٥،٤٩) (الف) $y[n]$ پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه این سیستم را به دست آورید.
به صورت زیر به هم مرتبطاند

$$Y(e^{j\omega})=2\ X(e^{j\omega})+e^{-j\omega}X(e^{j\omega})-\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

(i) آیا سیستم خطی است؟ استدلالی روشن برای جوابتان بیاورید.

(ii) آیا سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟ استدلال کنید.

(iii) به ازای $x[n]=\delta[n]$، $y[n]$ را بیابید.

(ب) سیستم گسسته در زمانی را در نظر بگیرید که تبدیل خروجی $Y(e^{j\omega})$ آن و تبدیل فوریهٔ ورودیاش به صورت زیر به هم مرتبط باشد.

$$Y(e^{j\omega})=\int_{\omega-\pi/4}^{\omega+\pi/4}X(e^{j\omega})d\omega$$

$y[n]$ را برحسب $x[n]$ پیدا کنید.

حل:

(الف) (i) فرض کنید $x[n]=ax_1[n]+bx_2[n]$ که a و b ثابت هستند. در اینصورت $x(e^{j\omega})=ax_1(e^{j\omega})+bx_2(e_{j\omega})$ همچنین فرض کنید پاسخ سیستم به $x_1[n]$ و $x_2[n]$ به ترتیب برابر $y_1[n]$ و $y_2[n]$ باشد.

با جایگذاری برای $X(e^{j\omega})$ در معادله داده شده و ساده سازی، بدست می آوریم $Y(e^{j\omega})=aY_1(e^{j\omega})+by_2(e^{j\omega})$. بنابراین سیستم خطی است.

(ii) فرض کنید سیگنال $x[n]=x[n-1]$، در اینصورت $x_1(e^{j\omega})=e^{-j\omega}x(e^{j\omega})$. فرض کنیم، پاسخ سیستم به این سیگنال برابر $y_1[n]$ باشد. از معادله داده شده:

$$\begin{aligned}Y_1(e^{j\omega})&=2x_1(e^{j\omega})+e^{-j\omega}x_1(e^{j\omega})-\frac{dx_1(e^{j\omega})}{d\omega}\\&=e^{-j\omega}\left[2x(e^{j\omega})+e^{-j\omega}x(e^{j\omega})-\frac{dx(e^{j\omega})}{d\omega}\right]+je^{-j\omega}x(e^{j\omega})\\&\neq e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})\end{aligned}$$

بنابراین سیستم تغییرپذیر با زمان است.

(iii) اگر $x[n]=\delta[n]$، $X(e^{j\omega})=1$، در اینصورت:

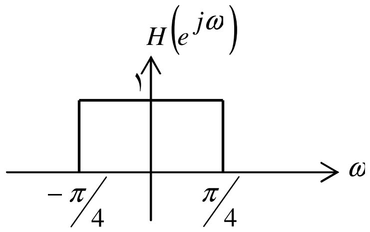
$$Y(e^{j\omega})=2+e^{-j\omega}$$

بنابراین، $y[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]$.

(ب) می توانیم بنویسیم:

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega-\frac{\pi}{4}}^{\omega+\frac{\pi}{4}}x(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

که $H(e^{j\omega})$ در شکل ح٥,٤٩ نشان داده شده است:



شکل ح٥,٤٩

با استفاده از خاصیت ضرب تبدیل فوریه و جدول ٥,٢ بدست می آوریم:

$$y[n]=2x[n]\frac{Sin\left(n\pi/4\right)}{n}$$

٥,٥٠) (الف) می‌خواهیم یک سیستم LTI گسسته در زمان طرح کنیم که به ازای ورودی زیر

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

خروجی زیر را ایجاد کند

$$y[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$

(i) پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی سیستم LTI دارای مشخصات بالا را پیدا کنید.

(ii) معادله تفاضلی ارتباط‌دهنده $y[n]$ و $x[n]$ این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ یک سیستم به ورودی $(n+2)(1/2)^n u[n]$ عبارت است از $(1/4)^n u[n]$. اگر خروجی $\delta[n]-(-1/2)^n u[n]$ باشد، ورودی چیست؟

حل:

(الف) (i) از اطلاعات داده شده

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$h[n]=3\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]-2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(ii) از قسمت (الف)، می دانیم که:

$$\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{j\omega}\right)}$$

با طرفین و وسطین نمودن و گرفتن عکس تبدل فوریه داریم:

$$y[n]-\frac{7}{12}y[n-1]+\frac{1}{12}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

(ب) از اطلاعات داده شده:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}{2\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}$$

حال می‌خواهیم، $X\left(e^{j\omega}\right)$ را زمانیکه $Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}e^{-j\omega}\Big/\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2$ را بدست آوریم.

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{-j\omega}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{2}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{2}\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه از بسط کسرهای جزئی معادله بالا داریم:

$$x[n]=\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]+\frac{3}{8}\left(1/2\right)^{n-1}u[n-1]+\frac{1}{8}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1].$$

۵,۵۱) (الف) یک سیستم گسسته در زمان با پاسخ ضربهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

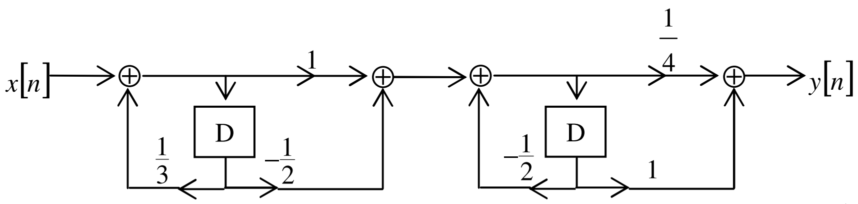
یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت بیابید که رابطه ورودی و خروجی این سیستم را توصیف کند.

(ب) شکل م ۵-۵۱ نمودار جعبه‌ای یک سیستم LTI علّی را نشان می‌دهد.

(i) معادله تفاضلی بیان‌کنندهٔ رابطهٔ ورودی و خروجی این سیستم را بیابید.

(ii) پاسخ فرکانسی این سیستم را بیابید.

(iii) پاسخ ضربه سیستم را به دست آورید.



شکل م ۵-۵۱

حل:

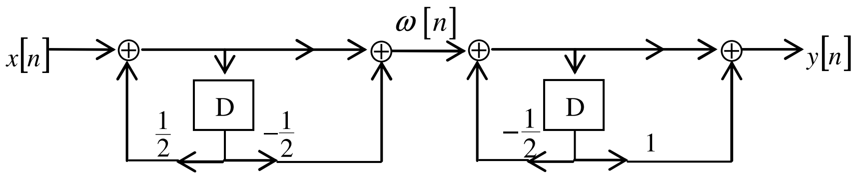
(الف) با گرفتن تبدیل فوریه معکوس $h[n]$، بدست می آوریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=Y\left(e^{j\omega}\right)\Big/x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

با طرفین وسطین کردن تبدیل فوریه معکوس داریم:

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=\frac{3}{2}X[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

(ب) (i) فرض کنید خروجی میانی را $\omega[n]$ بنامیم (شکل ح ٥,٥١.) را ببینید.



شکل ح ٥,٥١

در اینصورت می توانیم معادله تفاضلی (دیفرنس) را به صورت زیر بنویسیم:

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=\frac{1}{4}\omega[n]+\omega[n-1]$$

و

$$\omega[n]-\frac{1}{3}\omega[n-1]=x[n]x[n-1]$$

با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله و حذف $w\left(e^{j\omega}\right)$ از طرفین معادله، داریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{7}{8}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}$$

با طرفین وسطین و گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=\frac{1}{4}x[n]+{}^{7}\!/_{8}\,x[n-1]-{}^{1}\!/_{2}\,x[n-2]$$

(ii) از (i)

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{7}{8}e^{-j\omega}e^{2j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}$$

(iii) با گرفتن عکس تبدیل فوریه از بسط به کسرهای جزئی $H\left(e^{j\omega}\right)$ داریم:

$$h[n]=2\delta[n]-\frac{21}{16}\left(-\frac{21}{16}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{7}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

....

۵,۵۲) (الف) $h[n]$ پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI حقیقی، علّی و گسسته در زمان است. نشان دهید که بخش حقیقی پاسخ فرکانسی برای مشخص کردن کامل این سیستم کافی است.: این همتای گسسته در زمان خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی است که در مسئله ٤-٤٧ برای سیستمهای پیوسته در زمان بیان شد.

(ب) $h[n]$ را حقیقی و علّی فرض کنید. اگر

$$\Re e\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=1+a\cos 2\omega \qquad (a \text{ حقیقی})$$

$h[n]$ و $H\left(e^{j\omega}\right)$ را بدست آورید.

(ج) نشان دهید که $h[n]$ را می‌توان به طور کامل از $\Re e\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$ و $h[0]$ به دست آورد.

(د) دو سیستم LTI حقیقی و علّی پیدا کنید که قسمت موهومی پاسخ فرکانسی آنها $\sin\omega$ باشد.

حل:

(الف) بدلیل اینکه $h[n]$ کازال است، مقادیر نمونه‌ای غیر صفر $h[n]$ و $h[-n]$ تنها در $n=0$ همپوشانی دارند.

بنابراین

$$\mathcal{E}v\{h[n]\}=\frac{h[n]+h[-n]}{2}=\begin{cases}h[n]/2 & n>0\\ h[0] & n=0\\ h[-n]/2 & n<0\end{cases}$$

به عبارت دیگر

$$h[n]=\begin{cases}2\mathcal{E}v\{h[n]\} & n>0\\ \mathcal{E}v\{h[0]\} & n=0\\ 0 & n<0\end{cases} \qquad (\text{ح}۱\text{-}۵,۵۲)$$

توجه کنید که اگر

$$h[n]\xleftrightarrow{FT}H\left(e^{j\omega}\right)$$

در اینصورت:

$$\mathcal{E}v\{h[n]\}=\frac{h[n]+h[-n]}{2}\xleftrightarrow{FT}\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}$$

واضح است که می توانیم $\mathcal{E}v\{h[n]\}$ را از $\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}$ وصول نمائیم. از $\mathcal{E}v\{h[n]\}$ می تـوانیم معادله (ح۵,۵۲,۱) را برای وصول $h[n]$ اسـتفاده کنـیم. مشخـصاً، از $h[n]$ یکبـار دیگـر مـی تـوانیم $H(e^{j\omega})$ را بدست آوریم. بنابراین سیستم کاملاً توسط $\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}$ معلوم می شود.

ب) با گرفتن عکس تبدیل فوریه $\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}$؛ بدست می آوریم.

$$\mathcal{E}v\{h[n]\}=\delta[n]+\frac{a}{2}\delta[n-2]+\frac{a}{2}\delta[n+2]$$

بنابراین

$$h[n]=\delta[n]+a\,\delta[n-2]$$

,

$$H(e^{j\omega})=1+a\,e^{-2j\omega}$$

ج) چون $h[n]$ کازال است، مقادیر نمونه های $h[n]$ و $h[-n]$ تنها در $t=0$ همپوشانی دارند.

بنابراین:

$$od\{h[n]\}=\frac{h[n]-h[-n]}{2}$$

$$=\begin{cases} h[n]/2 & n>0 \\ 0 & n=0 \\ -h[-n]/2 & n<0 \end{cases}$$

به بیان دیگر:

$$h[n]=\begin{cases} \{h[n]\} & n>0 \\ \text{هر مقداری} & n=0 \\ 0 & n<0 \end{cases} \qquad \text{ح}(۵,۵۲,۲)$$

حال، توجه داشته باشید که:

$$od\{h[n]\}=\frac{h[n]-h[-n]}{2}\overset{FT}{\longleftrightarrow} j\ \mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}$$

واضح است، $od\{h[n]\}$ را از $\mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}$ وصول کنیم. از $od\{h[n]\}$ می توانیم معادله (ح۲-۵٫۵۲) را برای وصول $h[n]$ استفاده کنیم. مشخصاً، از $h[n]$ یکبار دیگر می توانیم $H(e^{j\omega})$ را بدست آوریم. بنابراین سیستم کاملاً توسط $\mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}$ معلوم می شود.

د) فرض کنیم $Sin\omega=\mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}$. در اینصورت:

$$od\{x[n]\}=\frac{1}{2}\delta[n-1]-\frac{1}{2}\delta[n+1]$$

بنابراین:

$$h[n]=h[\circ]\delta[n]+\delta[n-1]$$

مقادیر مختلفی را برای $h[\circ]$ می توان انتخاب کرد تا دو سیستم مختلف که پاسخ فرکانسی قسمت های موهومی آنها برابر $Sin\omega$ بدست آورد.

۵٫۵۳) یکی از دلایل رشد عظیم کاربرد روشهای گسسته در زمان برای تحلیل و طراحی سیگنالها و سیستمها پیشرفت ابزارهای کارآمد محاسبات تحلیل فوریهٔ سیگنالهای گسسته در زمان بوده است. قلب این روشها را روشی مرتبط با تبدیل فوریهٔ گسسته در زمان تشکیل می‌دهد که برای پیاده‌سازی روی کامپیوترهای دیجیتال و سخت‌افزارهای دیجیتال بسیار مناسب است. این روش تبدیل فوریهٔ گسسته DFT سیگنالهای $x[n]$ را سیگنالی را با عمر محدود فرض کنید، یعنی یک عدد صحیح N_1 وجود دارد، به نحوی که

$x[n]=\circ\ ,\ \circ\le n\le N_1-1$ در خارج فاصله

$X(e^{j\omega})$ را تبدیل فوریهٔ سیگنال $x[n]$ فرض کنید. می‌توانیم سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ را به نحوی بسازیم که در یک تناوب با $x[n]$ برابر باشد. دقیقتر این که به ازای عدد صحیح N بزرگتر یا مساوی N_1، می‌توان $\tilde{x}[n]$ را با دوره تناوب N به نحوی ساخت که

$$x[n]=x[n]\quad ,\quad \circ\le n\le N_1-1$$

ضرائب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ عبارت‌اند از

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

فاصله جمع‌بندی را فاصله‌ای در نظر می‌گیریم که در آن $\tilde{x}[n]=x[n]$. پس

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ٥-٥٣-١)}$$

ضرائب تعریف شده با معادله (م ٥-٥٣-١) DFT سیگنال $x[n]$ را تشکیل می‌دهند. معمولاً DFT سیگنال $x[n]$ را با $\tilde{X}[k]$ نشان می‌دهند، و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$\tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}, \; k=0 \text{ و } k = 0, 1, \dots, N-1 \qquad \text{(م ٥-٥٣-٢)}$$

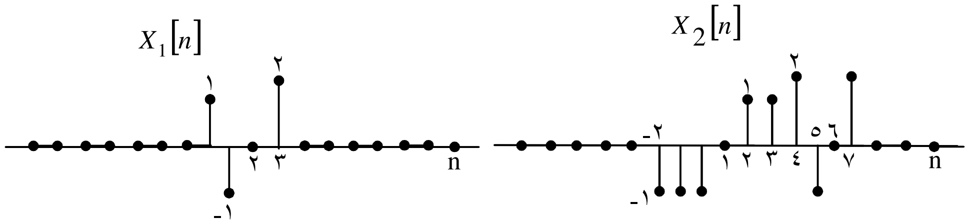
اهمیت DFT از چند جا ریشه می‌گیرد. اول این که سیگنال دارای عمر محدود اصلی را مـی‌تـوان از DFT بازسازی کرد. در واقع داریم.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n}, \; n = 0, 1, \dots, N-1 \qquad \text{(م-٥-٥٣-٣)}$$

پس سیگنال دارای عمر محدود را می‌توان هم با مقادیر غیرصفر آن مشخص کرد و هم بـا مقـادیر $\tilde{X}[k]$ آن. اهمیت دیگر DFT در این است که الگوریتم بسیار سریعی، موسوم به تبدیل فوریـهٔ سـریع FFT برای محاسبه آن وجود دارد (این روش بسیار مهم در مسئله ٥-٥٤ معرفی شده است). همچنـین به خاطر رابطهٔ نزدیکی که بین سری فوریهٔ گسسته در زمان و تبدیل فوریه وجـود دارد، DFT برخـی خواص مهم آن را داراست.

(الف) فرض کنید $N \geq N_1$. نشان دهید که

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X\left(e^{j(2\pi k/N)}\right)$$



شکل م ٥-٥٣

که در آن $\tilde{X}[k]$، DFT سیگنال $x[n]$ است. یعنـی DFT نمونـه‌هـای $X\left(e^{j\omega}\right)$، بـا فاصـله‌هـای $2\pi/N$ است. معادله (م ٥-٥٣-٣) ما را به این نتیجه رهنمون می‌شود که $x[n]$ را می‌تـوان بـه طـور یکتا از نمونه‌های $X\left(e^{j\omega}\right)$ باز یافت.

(ب) نمونه‌های $X\left(e^{j\omega}\right)$ به فاصله $2\pi/M$، با $M < N_1$، را در نظر بگیرید. این نمونه‌ها بیش از یک رشته به طول N_1 را تعیین می‌کند. برای نشان دادن این مطلب دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ شکل م ٥-٥٣ را در نظر بگیرید. نشان دهید که به ازای $M = 4$ داریم.

$$X_1\left(e^{j(2\pi k/4)}\right) = X_2\left(e^{j(2\pi k/4)}\right)$$

حل:

(الف) معادله آنالیز تبدیل فوریه برابر است با:

$$x\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

با مقایسه با معادله (م٢-٥,٥٣) داریم:

$$\widetilde{x}\{k\} = \frac{1}{N}x\left(e^{j(2\pi k/N)}\right)$$

,

$$x_2\left(e^{j\omega}\right) = -e^{-2j\omega} - e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} + 2e^{-j4\omega} - e^{-j5\omega} + 2e^{j}$$

حال:

$$x_1\left(e^{j\left(2\pi k/4\right)}\right) = 1 - e^{-j\pi k/2} + 2e^{-3j\pi k/2}$$

,

$$x_2\left(e^{j\left(2\pi k/4\right)}\right) = 1 - e^{-j\pi k/2} + 2e^{-3j\pi/2} = x_1\left(e^{j\left(2\pi k/4\right)}\right)$$

٥,٥٤) همان‌طور که در مسئله ٥-٥٣ گفتیم مسائل بسیاری با ا همیت وجود دارد که مستلزم محاسبه تبدیل فوریهٔ گسسته (DFT) سیگنالهای گسسته در زمان است. این سیگنالها غالباً عمر طولانی دارند و در این موارد باید روشهای محاسباتی کارآمدی به کار بُرد. یکی از دلایل رشد قابل توجه به کار بردن تکنیکهای کامپیوتری در تحلیل سیگنالها، پی‌ریزی روش محاسباتی سریعی موسوم به الگوریتم تبدیل فوریه سریع FFT است. با این روش می‌توان DFT سیگنالهای دارای عمر محدود را پیدا کرد. در این مسئله اصول الگوریتم FFT را بررسی می‌کنیم.

$x[n]$ را سیگنالی فرض کنید که در خارج از فاصله $0 \le n \le N_1 - 1$ صفرست. به ازای $N \ge N_1$، N DFT- نقطه‌ای $x[n]$ عبارت است از

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}, k=\circ, 1, \dots, N-1 \qquad (م ۵-۵٤-۱)$$

بهترست معادله (م ۵-۵٤-۱) را به صورت زیر بنویسیم.

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]\,W_N^{nk} \qquad (م ۵-۵٤-۲)$$

(الف) یک روش محاسبه $\tilde{X}[k]$، محاسبه مستقیم معادله (م ۵-۵٤-۲) است. تعداد ضرهای مختلط لازم برای محاسبه (م ۵-۵٤-۲)، معیار خوبی از پیچیدگی محاسبه ناست. نشان دهید که تعداد ضرهای لازم برای مختلط است و W_N^{nk} قبلاً محاسبه و در جدولی ذخیره شده است. برای آسانی، از اینکه به ازای مقادیر خاصی از n و k، W_N^{nk} برابر ± 1 یا $\pm j$ است و در حقیقت ضرب مختلط کامل لازم نیست، چشم بپوشید.

(ب) N را زوج بگیرید. فرض کنید $f[N]=x[2n]$ نمونه‌های شماره زوج $x[n]$ و $g[n]=x[2n+1]$ نمونه‌های شماره فرد $x[n]$ است.

(i) نشان دهید که $g[n]$ و $f[n]$ خارج از فاصله $\circ \le n \le (N/2)-1$ برابر صفرند.

(ii) نشان دهید که DFT N- نقطه‌ای $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر بیان صفرند.

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{(N/2)-1} f[n]W_{N/2}^{nk}+\frac{1}{N}W_{N/2}^{nk}\sum_{n=\circ}^{(N/2)-1} g[n]\,W_{N/2}^{nk}$$

$$=\frac{1}{2}\tilde{F}[k]+\frac{1}{2}\,W_N^{nk}\;\tilde{G}[k],\; k=\circ, 1, \dots, N-1 \qquad (م ۵-۵٤-۳)$$

که در آن

$$\tilde{F}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{(N/2)} f[n]\,W_{N/2}^{nk}$$

$$\tilde{G}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{(N/2)} g[n]\,W_{N/2}^{nk}$$

دقت کنید که $\tilde{F}[k]$ با $k=\circ,\circ,1,\dots\; N/2-1$ و $\tilde{G}[k]$ با $k=\circ,1,\dots,N/2-1$ به ترتیب $N/2$ DFT – نقطه ای $f[n]$ و $g[n]$ هستند. بنابراین معادله (م ۵-۵٤-۳) نشان می‌دهد که N DFT – نقطه‌ای $x[n]$ را می‌توان برحسب دو $N/2$ DFT – نقطه‌ای به دست آورد.

(iv) تعداد ضربهای مختلط لازم برای محاسبه $\tilde{X}[k]$ با $k=0,1,..,N-1$، از معادلـه (م ٥-٥٤-٣) چقدر است؟ [از فرضهای بند (الف) استفاده کنیـد و ضـرب در $\frac{1}{2}$ را در معادلـۀ (م ٥-٥٤-٣) حساب نکنید].

(ج) اگر $N/2$ هم زوج باشد، می‌توان $f[n]$ و $g[n]$ را باز هم به نمونه‌های شـماره زوج و فـرد تجزیه کرد و DFT آنها را به روشی شبیه معادله (م ٥-٥٤-٣) محاسبه کـرد. بـه عـلاوه اگـر N تـوان صحیحی از ۲ باشد، می‌توان با ادامه این فرآیند، وقت زیادی در محاسبات صرفه جـویی کـرد. در ایـن صورت به ازای ٤٠٩٦ و ١٠٢٤، ٢٥٦، ٣٢= N تقریباً چند ضرب مختلط لازم است؟ نتیجه را بـا روش مستقیم بند (الف) مقایسه کنید.

حل:

الف) از معادله (م١-٥،٥٤) واضح است که برای محاسبه $\tilde{x}\{k\}$ برای مقدار ویژه k، لازم است که ضرب مختلط N را انجام دهیم. بنابراین به منظـور محاسـبه $\tilde{X}[k]$ بـرای N مقـادیر مختلـف k، لازم است ضرب مختلط $N.N=N^2$ را انجام دهیم.

ب) (i) چون $f[n]=x[2n]$، داریم: $f[0]=x[0]$، $f[1]=x[2]$ و ... و $f\left(N/2\right)\{-1\}=x[N-2]$. بدلیل اینکه $x[n]$ تنهـا دربـاره $0\le n\le N-1$ غیـر صـفر اسـت، $f[n]$ تنها در بازه $0\le n\le\left(N/2\right)-1$ غیر صفر است.

به طور مشابه، بدلیل اینکه $g[n]=x[2n+1]$، داریم: $g[0]=x[1], g[1]=x[3]$ و ... و $g\{[N/2]-1\}=x[N]$. بدلیل اینکه $x[n]$ تنها در بازه $0\le n\le N-1$ غیر صفر است. $g[n]$ در بازه $0\le n\le\frac{N}{2}-1$ غیر صفر است.

(ii) معادله (١-٥،٥٤) را به صورت زیر می توان بازنویسی کرد:

$$\tilde{x}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x[2x]W_N^{2nk}+W_N^K\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1}x[2n+1]\times W_N^{2nk}$$

بدلیل اینکه $W_N^{2nk}=W_{N/2}^{2nk}$ می توانیم معادله بالا را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\tilde{x}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1}f[n]W_{N/2}^{nk}+W_n^k\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1}g[n]W_{N/2}^{nk}$$

(S٥,٥٤-١)

(iii) داریم:

$$\tilde{F}\left[k+\frac{N}{2}\right]=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)} f[n]W_{N/2}^{kn}=\tilde{F}[k]$$

به طور مشابه

$$\tilde{G}\left[k+N/2\right]=\tilde{G}[k]$$

(iv) چون $\tilde{F}[k]$ یک نقطه $\frac{N}{2}$، برای DFT است، می توانیم از روش مشابه آنچه در قسمت (الف) آمده استفاده کنیم تا نشان دهیم که به ضرب مختلط $\frac{N^2}{4}$ برای محاسبه آن نیاز داریم. به طور مشابه می توانیم نشان دهیم که محاسبه $\tilde{F}[k]$ به ضرایب $\frac{N^2}{4}$ نیاز دارد.

از معادله (ح۱-٥,٥٤) بدیهیست که به ضرب مختلط $\frac{N^2}{2}+N$ برای محاسبه $\tilde{X}[K]$ نیاز داریم.

ج) با تجزیه $g[n]$ و $f[n]$ به نمونه های اندیس زوج و فرد، می توانیم با فراهم ساختن عدد محاسباتی به $\frac{N^2}{4}+N/2$ این تجزیه را به اندازه $\log_2^N$ تکرار کنیم. محاسبات لازم برای $N\log_2^N$ بار انجام می دهیم. جدول محاسباتی زیر با استفاده از دو روش مستقیم و FFT برای مقادیر مختلف N ترتیب داده ایم:

N	روش مستقیم	روش FFT
٣٢	١٠٢٤	١٦٠
٢٥٦	٦٥٥٣٦	٢٠٤٨
١٠٢٤	١٠٤٨٥٧٦	١٠٢٤٠
٤٠٩٦	١٦٧٧٧٢١٦	٤٩/٥٢

٥,٥٥) در این مسئله مفهوم قاب کردن را، که هم در طراحی سیستمهای LTI و هم در تحلیل طیفی سیگنالها اهمیت بسزایی دارد معرفی می‌کنیم: منظور از قاب کردن، ضرب سیگنال $x[n]$ در سیگنال دارای عمر محدود $w[n]$، موسوم به سیگنال قاب است یعنی

$$p[n]=x[n]w[n]$$

دقت کنید که $p[n]$ هم عمر محدود دارد.

اهمیت قاب کردن در تحلیل طیفی از اینجا ریشه می‌گیرد که در کاربردهای بسیاری لازم است ک تبدیل فوریهٔ یک سیگنال اندازه‌گیری شده حساب شود. چون در عمل تنها می‌توان $x[n]$ را در یک فاصله محدود (**پنجره زمانی**) اندازه گرفت، سیگنال قابل دسترس برای تحلیل فوریه عبارت است از

$$p[n]=\begin{cases} x[n], & -M\le n\le M \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $-M\le n\le M$ قاب یا پنجره زمانی است. بنابراین

$$p[n]=x[n]w[n]$$

که $w[n]$ قاب یا پنجرهٔ مستطیلی است؛ یعنی

$$p[n]=\begin{cases} 1, & -M\le n\le M \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قاب کردن در طراحی سیستمهای LTI هم نقش مهمی بازی می‌کند. به دلایل مختلف (مثلاً توانایی به کار بردن الگوریتم FFT، مسئله ٥-٥٤ را ببنید) بهتر است برای انجام پردازش موردنظر سیستمی طراحی کنیم که پاسخ ضربهٔ محدودی داشته باشد. به عبارت دیگر معمولاً از پاسخ فرکانسی مطلوب $H(e^{j\omega})$ شروع می‌کنیم که عکس تبدیل فوریه آن، یعنی پاسخ ضربهٔ $h[n]$ عمر نامحدودی (یا حداقل بسیار طولانی) دارد. باید یک پاسخ ضربه محدود $g[n]$ طراحی کنیم که تبدیل فوریهٔ آن $G(e^{j\omega})$ تقریب مناسبی از $H(^{j\omega})$ باشد. یک روش کلی انتخاب $g[n]$، یافتن یک تابع قاب $w[n]$ مناسب است، به نحوی که $[h\ n]w[n]$ مشخصات دلخواه $G(e^{j\omega})$ را برآورد کند.

مسلّم است که قاب کردن سیگنال بر طیف آن اثر می‌گذارد. در این مسئله، این اثرها را بررسی می‌کنیم.

(الف) برای درک اثر قاب کردن، سیگنال زیر

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k]$$

را با پنجرهٔ مستطیلی معادله (م ٥-٥٥-١) قاب می‌کنیم.

(i) $X(e^{j\omega})$ را بیابید.

(ii) تبدیل فوریهٔ $p[n]=x[n]w[n]$ را به ازای $M=1$ رسم کنید.

(iii) بند پیش را به ازای $M=10$ تکرار کنید.

(ب) حال سیگنالی با تبدیل فوریهٔ زیر در نظر بگیرید.

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1\ , & |\omega|<\pi/4\\ \circ\ , & \pi/4<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

فرض کنید $p[n]=x[n]w[n]$، که $w[n]$ پنجره مستطیلی معادلـه (م ٥-٥-١) اسـت. $P\left(e^{j\omega}\right)$ را به طور تقریبی، به ازای ١٦، ٨، ٤ = M رسم کنید.

(ج) یکی از مشکلات استفاده از پنجره مستطیلی ایجاد تموج در تبدیل $P\left(e^{j\omega}\right)$ است. (این تموج با پدیدهٔ گیبس مرتبط است.) به همین علت سیگنالهای پنجره دیگری پی‌ریزی شده است. این سیگنالها به تدریج از ٠ به ١ می‌رسند، نه مثل پنجرهٔ مستطیلی که گذر آن ناگهانی است. اثر این تـدرّج، کـاهش دامنهٔ تموج $P\left(e^{j\omega}\right)$ است که بـه قیمـت افـزایش انـدکی اعوجـاج و همـوارتر شـدن $X\left(e^{j\omega}\right)$ تمـام می‌شود.

برای روشن کردن نکات فوق، سیگنال $x[n]$ بند (ب) را با پنجره مثلثی یا بارتلت زیر

$$w[n]=\begin{cases}1-\dfrac{1-|n|}{M+1}\ , & -M\le n\le M\\ \circ\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در نظر بگیرید و فرض کنید $p[n]=x[n]w[n]$. تبدیل فوریه $p[n]$ را به ازای ١٦، ٨، ٤= M، به طور تقریبی رسم کنید [راهنمایی: توجه کنید که سیگنال مثلثی، حاصل کانولوشن سیگنال مـستطیلی بـا خودش است. با توجه به این مطلب عبارت مناسبی برای $W\left(e^{j\omega}\right)$ به دست آورید.]

(د) فرض کنید $p[n]=x[n]w[n]$ سیگنال کسینوسی بالا رفته موسـوم بـه پنجـره هنینـگ اسـت؛ یعنی

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[1+\cos(\pi n/M)\right], & -M\le n\le M\\ \circ\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$P\left(e^{j\omega}\right)$ را به ازای ١٦، ٨، ٤ = M به طور تقریبی رسم کنید.

حل:

الف) (i)

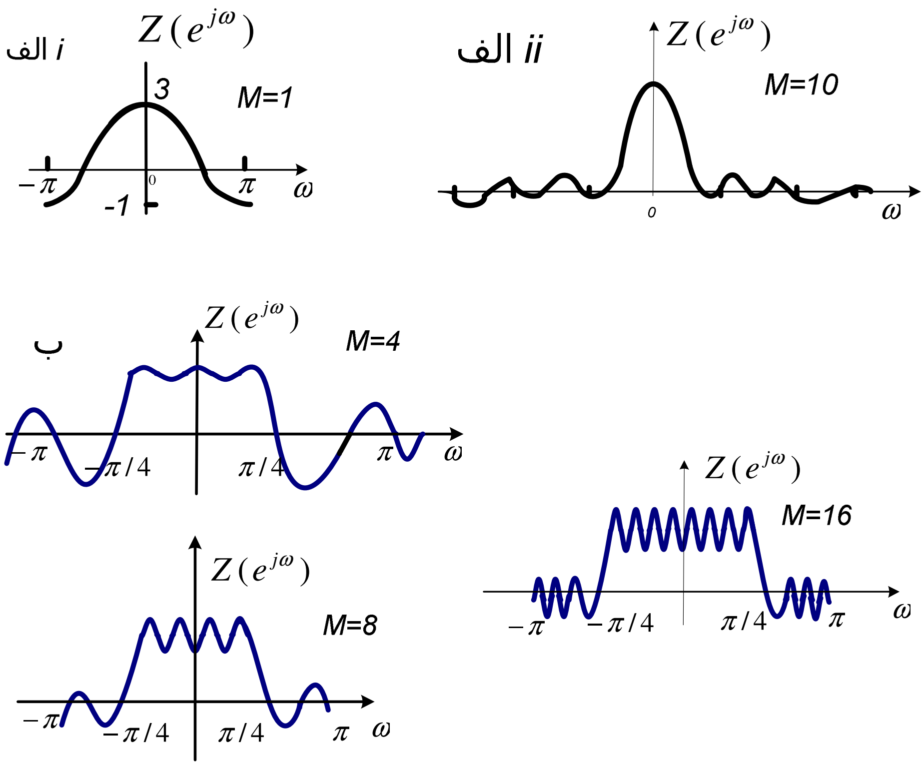
$$x\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

(ii) وقتی $M = 10$ می توانیم از جدول ۵٫۲ برای پیدا کردن اینکه

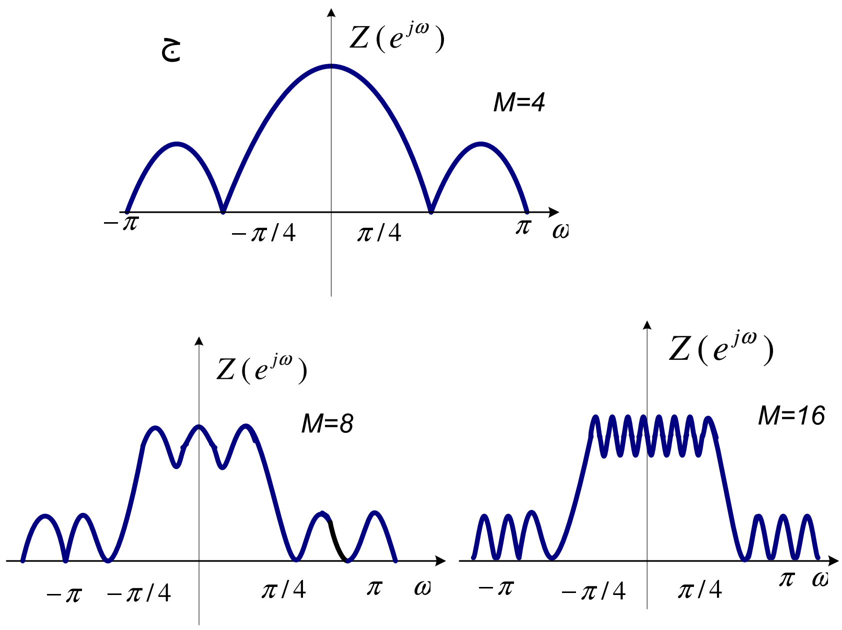
$$p\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Sin(2/\omega/2)}{\omega/2}$$

استفاده کنیم.

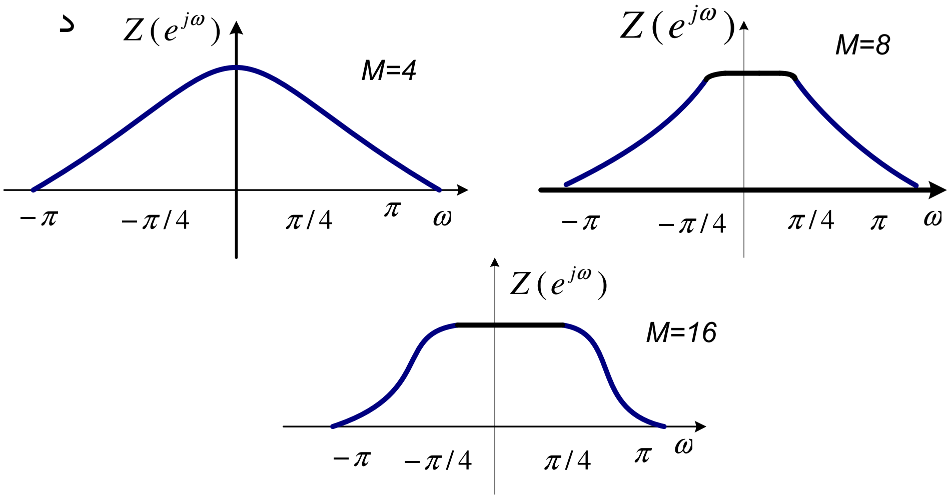
ب) طرحها در شکل ح۵٫۵۵. نشانداده شده اند.



ج


ج
$Z(e^{j\omega})$
M=4
$-\pi$
$-\pi/4$
$\pi/4$
π
ω
$Z(e^{j\omega})$
M=8
$-\pi$
$-\pi/4$
$\pi/4$
π
ω
$Z(e^{j\omega})$
M=16
$-\pi$
$-\pi/4$
$\pi/4$
π
ω

د)


د
$Z(e^{j\omega})$
M=4
$-\pi$
$-\pi/4$
$\pi/4$
π
ω
$Z(e^{j\omega})$
M=8
$-\pi$
$-\pi/4$
$\pi/4$
π
ω
$Z(e^{j\omega})$
M=16
$-\pi$
$-\pi/4$
$\pi/4$
π
ω

شكل ح ٥,٥٥.

ج) داریم $W\left(e^{jw}\right)=\dfrac{Sin^2\left[(M+1)\omega/2\right]}{Sin^2\left(\omega/2\right)}$. طرحها در شکل ح٥,٥٥ نشان داده شده اند.

د) طرحها در شکل ح٥,٥٥. نشان داده شده اند.

٥,٥٦) $x[m,n]$ سیگنالی با دو متغیر مستقل گسسته m و n است. به قیاس سیگنال یک بعدی و حالت پیوسته در زمان بیان شده در مسئله ٤-٥٣، می‌توانیم تبدیل فوریه دوبعدی $x[m,n]$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[m,n]e^{-j(\omega_1 m+\omega_2 n)} \qquad \text{(م ٥-٥٦-١)}$$

(الف) نشان دهید که می‌توانیم معادله (م ٥-٥٦-١) را به صورت دو تبدیل فوریهٔ یک بعدی حساب کنیم، یعین ابتدا n را ثابت بگیریم و جمع را برحسب m محاسبه کنیم و سپس محاسبه را برحسب n انجام دهیم، با استفاده از این نتیجه $x[m,n]$ را برحسب $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ به دست آورید.

(ب) فرض کنید
$$x[m,n]=a[m]b[n]$$

که در آن $a[m]$ و $b[n]$ توابع یک متغیره‌اند. تبدیل فوریهٔ این دو سیگنال به ترتیب $A\left(e^{j\omega}\right)$ و $B\left(e^{j\omega}\right)$ است. $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ را برحسب $A\left(e^{j\omega}\right)$ و $B\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید.

(ج) تبدیل فوریه دو بعدی سیگنالهای زیر را پیدا کنید.

(i) $x[m,n]=\delta[m-1]\delta[n+4]$

(ii) $x[m,n]=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-m}u[n-2]u[-m]$

(iii) $x[m,n]=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\cos(2\pi m/3)u[n]$

(iv) $x[m,n]=\sin\left(\dfrac{\pi n}{3}+\dfrac{2\pi n}{5}\right)$

(د) سیگنال $x[m,n]$ با تبدیل فوریه زیر را بیابید

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\begin{cases}1, & |\omega_1|\le\pi/4\ ,\ |\omega_2|\le\pi/2\\ ٠, & \pi/4<|\omega_1|\le\pi \text{ یا } \pi/2<|\omega_2|\le\pi\end{cases}$$

هـــ) $x[m,n]$ و $h[m,n]$ دو ســـیگنال بـــا تبـــدیل فوریـــه دو بعـــدی $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ و $H\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ هستند. تبدیل سیگنالهای زیر را برحسب $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ و $H\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ بیـان کنید:

(i) $x[m,n]e^{jW_1m}e^{jW_2n}$

(ii) $y[m,n]=\begin{cases}x[k,r], & \text{اگر } n=3\,r,\ m=2k\\ \circ, & \text{در صورتی که m مضرب ۲ و n مضرب ۳ نباشد}\end{cases}$

(iii) $y[m,n]=x[m,n]h[m,n]$

حل:

الف) داریم:

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m,n]e^{-j(\omega_1m+w_2n)}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m,n]e^{-j\omega_1m}\right]e^{-j\omega_2n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(e^{j\omega_1},n\right)e^{-j\omega_2n}$$

بنابراین، می توانیم بنویسیم:

$$X\left(e^{j\omega_1},n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)e^{j\omega_2n}d\omega_2$$

ازاین رابطه داریم:

$$x[m,n]=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)e^{j\omega_1m}e^{j\omega_2n}d\omega_1d\omega_2$$

ب) به سادگی می توان نشان داد که:

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=A\left(e^{j\omega}\right)B\left(e^{j\omega}\right)$$

(ج) از نتیجه قسمت قبلی در چند مسئله این قسمت استفاده می کنیم:

(i) $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=e^{-j\omega_1}e^{j\omega_2}$

(ii) $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\left[\dfrac{e^{-j2\omega_2}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_2}\right)}\right]\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_1}}\right]$

(iii)
$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_2}}\right]\left[\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_1 - \frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right)\right]$$
$$+\pi \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_1 + \frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right)$$

(iv) در اینجا $x[n,m] = \{u[m+1] - u[m-2]\}\{u[n+4] - u[n-5]\}$

$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \left[\frac{Sin\left(7\omega_2/2\right)}{Sin\left(\omega_2/2\right)}\right]\left[\frac{Sin\left(3\omega_1/2\right)}{Sin\left(\omega_1/2\right)}\right]$$

(v) از تعریف تعریف تبدیل فوریه ۲D (دو بعدی) داریم:

$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(\omega_1 - \frac{2\pi}{5} + 2\pi l\right)\delta\left[\omega_2 - \frac{\pi}{3} - 2\pi r\right]\right]$$
$$-\delta\left[\omega_1 + \frac{2\pi}{5} + 2\pi l\right]\delta\left[\omega_2 + \frac{\pi}{3} + 2\pi r\right]$$

د) (i) $x\left(e^{j(\omega_1 - w_1)}\right), e^{j(\omega_2, W_2)}$

(ii) $x\left(e^{2\omega_1}, e^{3\omega_2}\right)$

(iii) $\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{[j]}, e^{j\theta}\right)H\left(e^{j(\omega_1 - j)}, e^{j(\omega_1-\theta)}d\right]d\theta$