کتابچه نمونه سوالات چیست:

سایت ما **افتخار** دارد برای اولین بار در ایران توانسته است کتابچه نمونه سوالات تمام دروس پیام نور که هر یک حاوی تمامی آزمون های برگزار شده پیام نور (تمامی نیمسالهای موجود حتی الامکان با جواب) را در یک فایل به نام کتابچه جمع آوری کند و هر ترم نیز آن را آپدیت نماید.

مراحل ساخت یک کتابچه نمونه سوال

(برای آشنایی با زحمت بسیار زیاد تولید آن در هر ترم) :

دسته بندی فایلها – سرچ بر اساس کد درس – چسباندن سوال و جواب – پیدا کردن یک درس در نیمسالهای مختلف و چسباندن به کتابچه همان درس – چسباندن نیمسالهای مختلف یک درس به یکدیگر – وارد کردن اطلاعات تک تک نیمسالها در سایت – آپلود کتابچه و خیلی موارد دیگر..

همچنین با توجه به تغییرات کدهای درسی دانشگاه استثنائات زیادی در ساخت کتابچه بوجود می آید که کار ساخت کتابچه را بسیار پیچیده می کند .

WWW.PNUEB.COM

فهرست مطالب

فصل ۱

سیگنالهای پیوسته و گسسته در زمان

مسئله ۱-۱

➢ اعداد مختلط زیر را به شکل قائم $(x + jy)$ بنویسید

$\frac{1}{2}e^{j\pi}$ ، $\frac{1}{2}e^{-j\pi}$ ، $e^{j\pi/2}$ ، $e^{-j\pi/2}$ ، ، ، $\sqrt{2}e^{j9\pi/4}$ ، $\sqrt{2}e^{-j9\pi/4}$ ، $\sqrt{2}e^{-j/4}$:

حل: با تبدیل مختصات قطبی به کارتزین داریم:

$$\tfrac{1}{2}e^{j\pi} = \tfrac{1}{2}\cos\pi = -\tfrac{1}{2}$$
$$e^{\pi/2j} = \cos(\pi/2) + j\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = j$$
$$e^{5j\pi/2} = j$$
$$\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{j}} = \sqrt{2}e^{3\pi/6} = 1 + j$$
$$\sqrt{2}e^{-3\pi/4} = 1 - j$$

$$\tfrac{1}{2}e^{-jn} = \tfrac{1}{2}\cos(-n) = -\tfrac{1}{2}$$
$$e^{-j\pi/2} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - j\sin\tfrac{\pi}{2} = -j$$
$$\sqrt{2}e^{j\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos j\,\tfrac{n}{4}\right) + j\sin\left(\tfrac{n}{4}\right) = 1 + j$$
$$\sqrt{2}e^{\frac{-3\pi j}{4}} = \sqrt{2}e^{-\frac{j\pi}{4}} = 1 - j$$

مسئله ۲–۱

◄ اعداد مختلط زیر را به شکل قطبی بنویسید ($re^{j\theta}$، با $-\pi < \theta \leq \pi$)

۵، ۲-، $-3j$، $\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$، $1+j$، $(1-j)^2$، $j(1-j)$، $(1+j)/(1-j)$، $\left(\sqrt{2}+j\sqrt{2}\right)/\left(1+j\sqrt{3}\right)$

حل: با تبدیل مختصات کارتزین به قطبی داریم:

$$5 = 5e^{jo} \quad , \quad -2 = 2e^{j\pi} \quad , \quad -3 = 3e^{-j\pi/2}$$

$$1/2 = j\sqrt{3/2} = e^{-j\pi/8}$$

$$\frac{1+j}{1-j} = e^{j\,\pi/2} \quad , \quad \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}\,j} = e^{-j\,\pi/B}$$

مسئله ۳–۱

◄ برای هر یک از سیگنالهای زیر، P_∞ و E_∞ را پیدا کنید.

الف) $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ ب) $x_2(t) = e^{j}\left(2t + \pi/4\right)$

ج) $x_3(t) = \cos t$ د) $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

هـ) $x_2[n] = e^{j}\left(n\pi/2 + \pi/8\right)$ و) $x_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

حل: الف) چون $E_\infty < \infty$،

$$E_\infty = \int_0^\infty e^{-at}dt = \frac{1}{4} \Rightarrow P_\infty = 0$$

ب) $\left|x_2(t)\right| = 1$ ، $x_2(t) = e^{j\left(2t+\pi/4\right)}$. بنابراین

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty}\left|x_2(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = \infty \ ،$$

$$p_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|x_2(t)\right|dt = \underset{N\to\infty}{Lim}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt = 1$$

ج) $x_3(t) = \cos t$ بنابراین:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty}\left|x_3(t)\right|^{+} dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2(t)dt = \infty$$

$$p_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos^2 t\,dt - \underset{N\to\infty}{Lim}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1+\cos(t)}{2}dt = \frac{1}{2}$$

د) چون $x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ و $|x_1[n]|^2=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ پس
چون $E_\infty<\infty$

$$E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x_1[n]|^2=\sum_{0}^{+\infty}(1/4)^n=4 \quad ، \quad p_\infty=0$$

هـ) $x_2[n]=e^{-j\left(2\pi/3+\pi/6\right)}$ و $|x_2[n]|^2=1$ بنابراین

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|x_2[n]|^2=\infty \quad , \quad p_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}|x_2[n]|^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}1=1$$

و) چون $x_3[n]=\cos\left(\pi/4\, n\right)$ از اینرو

$$E_\infty=\sum_{-\infty}^{+\infty}|x_3[n]|^2=\sum_{-\infty}^{+\infty}\cos^2\left(\pi/4\, n\right)=\infty$$

$$p_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}\cos\left(\pi/4\, n\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left(\frac{1+\cos\left(\pi/2\, n\right)}{2}\right)=1/2$$

مسئله ۴ - ۱

فرض کنید $x[n]$ سیگنالی باشد که در $n<2$ و $n>4$ صفر است. هر یک از سیگنالهای زیر در چه بازه‌هایی صفر هستند؟

الف) $x[n-3]$ ب) $x[n+4]$ ج) $x[-n]$
د) $x[-n+2]$ هـ) $x[-n-2]$

حل: الف) سیگنال $x[n]$، 3واحد به سمت راست شیفت یافته است، سیگنال شیفت یافته برای $n<1$ و $n>7$ برابر صفر است.

ب) سیگنال $x[n]$ 4 واحد به سمت چپ شیفت یافته است، سیگنال شیفت یافته برای $n<-6$ و $n>0$ برابر صفر است.

ج) سیگنال $x[n]$ معکوس شده است. پس سیگنال معکوس شده برای $n<-4$ و $n>2$ صفر است.

د) سیگنال $x[n]$ معکوس شده و 2 واحد به سمت راست شیفت یافته است، سیگنال جدید برای $n<-2$ و $n>4$ صفر است.

هـ) سیگنال $x[n]$ معکوس شده و آن هم 2 واحد به سمت شیفت یافته است.

مسئله ۵-۱

فرض کنید $x(t)$ سیگنالی باشد که در $t<3$ صفر شده است. سیگنالهای زیر به ازای چه مقادیری از t صفر خواهند بود؟

الف) $x(1-t)$ ب) $x(1-t)+x(2-t)$ ج) $x(1-t)x(2-t)$

د) $x(3t)$ هـ) $x(t/3)$

حل: الف) $x(1-t)$ از معکوس نمودن و شیفت دادن $x(t)$ به اندازه ۱ واحد به راست به دست می‌آید. پس $x(1-t)$ برای $t>-2$ صفر می‌باشد.

ب) طبق (۱.الف) می‌دانیم $x(1-t)$ برای $t>-2$ صفر خواهد بود. بطور مشابه $x(2-t)$ نیز برای $t>-1$ صفر می‌شود در این صورت $x(1-t)+x(2-t)$ برای $t>-2$ صفر خواهد بود.

ج) $x(3)$ از انقباض خطی $x(t)$ با ضریب 3 بدست می‌آید. $x(3t)$ برای $t<1$ صفر خواهد بود.

د) $x\left(t/3\right)$ از انبساط خطی $x(t)$ با ضریب 3 بدست می‌آید پس $x\left(t/3\right)$ برای $t<9$ صفر خواهد شد.

مسئله ۶-۱

در مورد متناوب بودن یا نبودن سیگنال‌های زیر تحقیق کنید

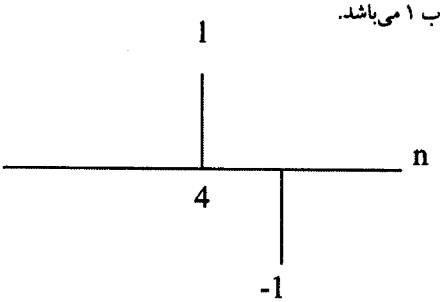
الف) $x(t)=2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$ ب) $x_2[n]=u[n]-u[-n]$

ج) $x_3[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta[n-4k]-\delta[n-1--4k]\}$

حل: الف) $x_1(t)$ متناوب نیست زیرا برای $t>0$ صفر شده است.

ب)به ازای همه مقادیر n، $x[n]=1$ است و تابع متناوب با دوره تناوب ۱ می‌باشد.

ج) $x_3[n]$ در شکل (1.6ج)رسم شده است.



بنابراین دوره تناوب آن ۴ است.

مسئله ۷-۱

برای سیگنالهای زیر مقادیر متغیر مستقل را که به ازای آنها بخش زوج سیگنال صفر می‌شود، پیدا کنید.

الف) $x_1[n]=u[n]-u[n-4]$

ب) $x_2(t)=\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

ج) $x_3[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$

د) $x_4(t)=e^{-5t}u(x+2)$

حل: الف) $\varepsilon v\{x_1[n]\}=\frac{1}{2}\{x_1[n]+x_1[-n]\}=\frac{1}{2}\{u[n]-u[n-4]+u[-n]-u[-n-4]\}$

بنابراین $\varepsilon v\{x_1[n]\}$ برای $|n|>3$ برابر صفر است.

ب) چون سیگنال سیگنالی فرد است،پس $\varepsilon v\{x_2(t)\}$ به ازای تمام مقادیر t صفر است.

ج)

$$\varepsilon v\{x_3(t)\}^{-}\tfrac{1}{2}\{x_1[n]+x_1[-n]\}=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n-3]-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-3]$$

ازاین رو $\varepsilon v\{x_1[n]\}$ برای $|n|>3$ برابر صفر خواهد بود.

د)

$$\varepsilon v\{x_4(t)\}=\tfrac{1}{2}(x_4(t))+(x_4(t)+x_4(-t))=\tfrac{1}{2}\{e^{-5t}u(t+2)-e^{+5t}u(-t+2)]$$

بنابراین $\varepsilon v\{x_4(t)\}$ فقط برای $|t|\to\infty$ برابر صفر است.

مسئله ۸-۱

قسمت حقیقی سیگنالهای زیر را به صورت $Ae^{-at}\cos(\omega t+\phi)$ بنویسید، A، a، ω و ϕ اعداد حقیقی اند و بایستی $A>0$ و $-\pi<\phi\le\pi$ باشد.

الف) $x_1(t)=-2$

ب) $x_2(t)=\sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t+2\pi)$

ج) $x_3(t)=e^{-t}\sin(3t+\pi)$

د) $x_4(t)=je^{(-2+j100)t}$

حل: الف) $Read\{x_1(t)\}y=-2=2e^{0t}\cos(ot+\pi)$

ب) $Re\{x_2(t)\}=\sqrt{2}\cos\left(\pi/4\right)\cos(3t+2n)=\cos 3t=e^{ut}\cos(3t+o)$

ج) $Re\{x_3(t)\}=e^{-t}\sin(3t+n)=e^{-t}\cos\left(3t+\pi/2\right)$

د) $Re\{x_4(t)\}=-e^{-2t}\sin(100t)=e^{-2t}\sin(100t+n)+e^{-2t}\cos(100t+\pi/2)$

مسئله ۹-۱

در مورد متناوب بودن یا نبودن سیگنال‌های زیر تحقیق کنید. برای سیگنالهای متناوب، دوره تناوب اصلی را بیابید.

الف) $x_1(t) = je^{j10t}$ ب) $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$

ج) $x_3[n] = e^{j\nu\pi n}$ د) $x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$

هـ) $x_5[n] = 3e^{j3(n+1/2)/5}$

حل: الف) $x_1(t)$ یک نمایی مختط متناوب است.

$$x_1(t) = je^{j10t} = e^{j\left(10t+\pi/2\right)}$$

دوره تناوب اصلی آن هم برابر است با $\frac{2R}{10} = \frac{R}{5}$

ب) $x_2(t)$ یک نمایی مختط ضرب شده به یک تأخیر نمایی است، ازینرو $x_2(t)$ نامتناوب است.

ج) $x_3[n]$ یک سیگنال نمایی مختلط با دوره تناوب اصلی $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ می‌باشد.

د) $x_4[n]$ سیگنال متناوب با دوره تناوب زیر است :

$$N = m\left(\frac{2\pi}{3\,\pi/5}\right) = m\left(\frac{10}{3}\right)$$

که با انتخاب $m = 3$ ارائه می‌شود، دوره تناوب اصلی را 10 بدست می‌آوریم.

$$N = 3\left(\frac{10}{3}\right) = 10$$

هـ) $x_5[n]$ سیگنالی متناوب نیست. $x_5[n]$ نمایی مختلط با $w_\circ = 35$ است. نمی‌توانیم عددی حقیقی بدست آوریم که بطور مثال $m\left(\frac{2\pi}{\omega_\circ}\right)$ نیز عددی حقیقی باشد؛ پس $x_3[n]$ متناوب نیست.

$$x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$$

مسئله ۱۰-۱

دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$ را بیابید.

حل: پریود جمله ی اول برابر است با $RHS = \frac{2\pi}{10} = \pi/5$ برحسب رادیان

پریود جمله دوم برابر است با $RHS = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$ برحسب رادیان

بنابراین سیگنال کلی با دوره تناوب ک.م.م بین RHSهای سیگنالها خواهد بود. که این مقدار برابر است با $\pi = \frac{\pi}{2}, \left(\frac{\pi}{5}\right)$

ک.م.م $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{n}} - e^{j\frac{2\pi}{5}n}$

مسئله ۱۱-۱

دوره تناوب اصلی سیگنال $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$ را بیابید.

حل: دوره تناوب جمله اول برحسب RHS 1 است.

هر گاه (m=2) باشد، دوره تناوب جمله دوم بر حسب RHS $7 = m\left(\frac{2\pi}{4\pi/7}\right)$ است.

هر گاه (m=2)، دوره تناوب جمله ی سوم برحسب RHS برابر $5 = m\frac{2\pi}{2\pi/5}$ است.

ک.م.م $\{5, 7, 1\} = 35$.

مسئله ۱۲-۱

سیگنال گسسته در زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$$

اعداد M و n_0 را طوری تعیین کنید که بتوان $x[n]$ را به صورت زیر بیان کرد

$$x[n] = u[Mn - n_0]$$

حل:

سیگنال $x[n]$ در شکل 112ـح نشان داده شده است که از معکوس کردن $u[n]$ و انتقال به اندازه 3 واحد به راست بدست می‌آید. بنابراین $x[n] = u[-n+3]$ که در آن: $M = -1 \ , \ n_0 = -3$

مسئله ۱۳-۱

سیگنال پیوسته در زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$$

E_∞ سیگنال زیر را بدست آورید.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

حل:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)dc=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau+2)-\delta(\tau-2)dt$$

$$=\begin{cases}0 & t<-2\\ 1 & -2\le t\le 2\\ 0 & t>2\end{cases}$$

بنابراین $E\infty=\int_{-2}^{2}dt=4$

مسئله ۱۴-۱

سیگنال متناوب $x(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1\\ -2, & 1<t<2\end{cases}$ دارای تناوب $T=2$ است. مشتق این سیگنال به «قطار ضربه» زیر مربوط می‌شود:

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)$$

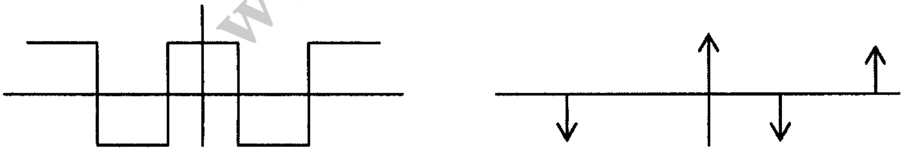
می‌توان نشان داد که:

$$\frac{dx(t)}{dt}=A_1g(t-t_1)+A_2g(t-t_2)$$

مقادیر A_1، t_1، A_2، و t_2 را محاسبه کنید. $x_4(t)=e^{-5t}u(x+2)$

حل: سیگنال $x(t)$ و مشتق آن در شکل 1.14ح نشان داده شده است.

بنابراین:



نمودار شکل ۱۴-۱

$$g(t)=3\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)-3\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k-1)$$

$A_1=3$ و $t_1=0$ و $A_2=-3$ و $t_2=1$ را ارائه می‌کند.

مسئله ۱۵-۱

سیستم S با ورودی $x[n]$ را در نظر بگیرید. این سیستم از اتصال سری سیستم S_1 و S_2 به دست آمده است. روابط ورودی – خروجی S_1 و S_2 به صورت زیرست.

$$S_2 : y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$$

$$S_2 : y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[\pi - 3]$$

سیگنالهای $x_1[n]$ و $x_2[n]$ ورودی‌ها هستند.

الف) رابطه ورودی ـ خروجی سیستم S را بیابید.

ب) آیا با تعویض ترتیب سیستمهای S_1 و S_2 رابطه ورودی ـ خروجی S تغییر می کند یا نه؟

حل: سیگنال $x_2[n]$ (که ورودی S_2 است) بر حسب $y_1[n]$ می‌باشد بنابراین:

الف)

$$\begin{aligned} y_2[n] &= x_2[n-2] + \tfrac{1}{2}x_2[n-3] \\ &= y_1[n-2] + \tfrac{1}{2}y_1[n-3] \\ &= 2x_1[n-2] + 4x_1[n-3] + \tfrac{1}{2}\left(2x_1[n-3] + 4x_1[n-4]\right) \\ &= 2x_1[n-2] + 5x_1[n-3] + 2n_1[n-4] \end{aligned}$$

رابطه خروجی – ورودی برای S برابر است با

$$y[n] = 2[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$$

ب) رابطه خروجی – ورودی اگر مرتبه ی S_1 و S_2 با سری‌هایی به هم مربوط شوند تغییر نمی کند و فقط معکوس می‌شود. می‌توان این شکل را به راحتی با فرض اینکه S_1، S_2 را تعقیب می کند، رسم کرد. در این مورد، سیگنال $x_1[n]$ که ورودی S_1 است مانند $y_2[n]$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} y_1[n] &= 2x_1[n] + 4x_1[n-1] \\ &= 2y_2[n] + 4y_2[n-1] \\ &= 2\left(x_2[n-2] + \tfrac{1}{2}x_2[n-3]\right) + 4\left(x_2[n-3] + \tfrac{1}{2}x_2[n-4]\right) \\ &= 2x_2[n-2] + 5x_2[n-3] + 2x_2[n-2] \end{aligned}$$

رابطه ورودی و خروجی برای S بار دیگر به صورت: $y[n] = 2x[n-2] + Sx[n-3] + 2n[n-4]$ است.

مسئله ۱۶-۱

سیستم گسسته در زمان را با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید. رابطه ورودی ـ خروجی این سیستم به صورت زیر است.

$$y[n]=x[n]x[n-2]$$

الف) آیا سیستم بدون حافظه است؟

ب) خروجی را به ازای ورودی $A\delta[n]$ تعیین کنید، A یک عدد حقیقی یا مختلط است.

ج) آیا سیستم وارونپذیر است؟

حل: الف) سیستم ،بی حافظه نیست زیرا $y[n]$ به مقدار لحظه ی قبلی $x[n]$ بستگی دارد.

ب) خروجی سیستم به صورت $y[n]=\delta[n]\delta[A-2]=0$ خواهد بود.

ج) طبق نتیجه ی قسمت (ب)،می توانیم نتیجه بگیریم که خروجی سیستم همیشه برای ورودیهای $\delta[n-k]$ و $k\in z$ صفر خواهد بود. بنابراین سیستم معکوس پذیر نیست.

مسئله ۱۷-۱

یک سیستم پیوسته در زمان با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$، با رابطه زیر در نظر بگیرید.

$$y(t)=x(\sin(t))$$

الف) آیا سیستم علّی است؟

ب) آیا این سیستم خطی است؟

حل: الف) سیستم کازال نیست زیرا ممکن است، خروجی $y(t)$ در برخی لحظات به مقادیرلحظات آینده ی $x(t)$ بستگی داشته باشد. مثلا $y(-\pi)=x(0)$.

ب) دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را در نظر بگیرید.

$$x_1(t)\rightarrow y_1(t)=x_1(\sin(t))$$

$$x_2(t)\rightarrow y_2(t)=x_2(\sin(t))$$

فرض کنید $x_3(t)$ ترکیب خطی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ باشد. $x_3(t)$ برابر است با:

$$x_3(t)=\alpha x_1(t)+b x_2(t)$$

که α و b اعدادی دلخواه هستند. اگر $x_3(t)$ ورودی سیستم داده شده باشد بنابراین خروجی متاظر $y_3(t)$ برابر است با:

$$\begin{aligned}y_3(t)&=x_3(\sin t)\\&=ax_1(\sin t)+bx_2(\sin(t))\\&=\alpha_1 y_1(t)+by_2(t)\end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

مسئله ۱۸-۱

یک سیستم پیوسته در زمان با ورودی $x(t)$ وخروجی $y(t)$، با رابطه زیر در نظر بگیرید.

$$y[n]=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$$

که در آن n_0 یک عدد صحیح مثبت کراندارست.

الف) آیا این سیستم خطی است؟

ب) آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟

ج) اگر بدانیم $x[n]$ کراندارست (یعنی به ازای هر n، $|x[n]|<B$ که B عددی صحیح است)، می‌توان نشان داد که $y[n]$ نیز کراندارست و کران آن C است. نتیجه می‌گیریم که سیستم پایدار است. C را بر حسب B و n_0 بیابید.

حل: الف) دو ورودی دلخواه $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را در نظر بگیرید:

$$x_1[n]\to y_1[n]=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[k]$$

$$x_2[n]\to y_2[n]=\sum_{n-n_0}^{n+n_0} x_2[k]$$

فرض کنید $x_3[n]$ ترکیب خطی $n_1[n]$ و $n_2[n]$ باشد در این صورت

$$x_3[n]=\alpha x_1[n]+b\,x_2[n]$$

که α و b اسکالرهای دلخواهی هستند. اگر $x_3[n]$ ورودی سیستم داده شده باشند در این صورت خروجی متناظر $y_3[n]$ برابر است با

$$y_2[n]=\sum_{n-n_0}^{n+n_0} x_3[k]$$

$$=\sum_{n-n_0}^{n+n_0}\left(\alpha n_1[k]+bx_2[k]\right)=\alpha\sum_{n-n_0}^{n+n_0} x_1[k]+b\sum_{n-n_0}^{n+n_0} x_2[k]$$

$$=\alpha y_1[n]+by=[n]$$

بنابراین سیستم خطی است.

ب) ورودی دلخواه $x_2[n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1[n]=\sum_{n-n_0}^{n+n_0} x_1[k]$ خروجی متناظر باشد ورودی دومی برابر صورت $x=[n]$ که از شیفت زمانی $x_1=[n]$ حاصل می‌گردد را در نظر بگیرید.

$$x_2[n]=x_1[n-n_1]$$

خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$y_2[n]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_2[k]=\sum_{n-n_\circ}^{n+n_\circ} x_1[k-n_1]=\sum_{n-n_1-n_\circ}^{n-n_1+n_\circ} n_1[k]$$

بنابراین توجه کنید که $y_1[n-n_1]=\sum_{n-n_1-n_\circ}^{n-n_1-n_\circ} x_1[k]$ بنابراین $y_2[n]=y_1[n-n_1]$

این نشان می‌دهد که سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

ج) اگر $|x[n]|<\beta$ در این صورت $y[n]\le(2n_\circ+1)\beta$

بنابراین $C\le(2n_\circ+1)\beta$

مسئله ۱۹-۱

به ازای روابط ورودی ـ خروجی داده شده تعیین کنید سیستم خطی است، تغییرناپذیر با زمان است، یا هر دو.

الف) $y(t)=t^2x(t-1)$ ب) $y[n]=x^2[n-2]$

ج) $y[n]=x[n+1]-x[n-1]$ د) $y[n]=\vartheta x\{x[n]\}$

حل: i) الف) دو ورودی دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ رادر نظر بگیرید:

$$x_1(t)\to y_1(t)=t^2x_1(t-1)$$
$$x_2(t)\to y_2(t)=t^2x_2(t-1)$$

فرض کنید $x_3(t)$ یک ترکیب خطی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ یعنی:

$$x_3(t)=t_2x_3(t-1)$$

خروجی متناظر $y_3(t)$:

$$=t^2(\alpha n_1(t-1)+bx_2(t-1))=\alpha y_1(t)tby_2(t)$$

بنابراین سیستم خطی است.

ii) ورودی دلخواه $x_1(t)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید.

$$y_1(t)=t^2x_1(t-1)$$

خروجی متناظر باشد، ورودی $x_2(t)$ از شیفت یافتن $x_1(t)$ در زمان بدست خواهد آمد:

$$x_2(t)=x_1(t-t\ \ )$$

خروجی متناظر این سیگنال برابر است با:

$$y_2(t)=t^2x_2(t-1)=t^2x_1(t-1-t_\circ)$$

همچنین بخاطر داشته باشید که

$$y_1(t-t_\circ)=(t-t_\circ)^2x_1(t-1-t_\circ)\ne y_2(t)$$

بنابراین سیستم تغییرپذیر با زمان است.

ب) i) دو روی دلخواه $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را در نظر بگیرید؛

$$x_1[n] \to y_1[n] = x_1^2[n-2]$$
$$x_2[n] \to y_2[n] = x_2^2[n-2]$$

$x_3[n]$را ترکیب خطی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در نظر بگیرید؛

$$x_1[n] \to y_1[n] = x_1^2[n-2]$$
$$x_2[n] \to y_2[n] = x_2^2[n-2]$$

فرض کنید $x_3[n]$ ترکیب خطی $x_3[n]$ و $x_2[n]$ باشد: یعنی

$$x_3[n] = \alpha n_1[n] + b\, x_2[n]$$

که α , b اعدادی دلخواه هستد اگر $x_3[n]$ ورودی سیستم داده شده باشند در این صورت خروجی متناظر برابر است با:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3^2[n-2] \\ &= \left(\alpha x_1[n-2] + b x_2[n-2]\right)^2 \\ &= a^2 x_1^2[n-2] + b^2 . x_2^2[n-2] + 2abx_1[n-2]x_2[n-2] \\ &\neq ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی نیست.

ii) ورودی دلخواهی مانند $x_1[n]$ در نظر بگیرید. فرض کنید

$$y_1[n] = x_1^2[n-2]$$

خروجی متناظر باشد. ورودی دوم $x_2[n]$ در زمان بدست می‌آید:

$$x_2[n] = x_1[n-n_\circ]$$

خروجی متناظر برابر است با:

$$y_2[n] = x_2^2[n-2] = n_1^2[n-2-n_\circ]$$

توجه داشته باشید که:

$$y_1[n-n_\circ] = n_1^2[n-2-n_\circ]$$

بنابراین: $y_2[n] = y_1[n-n_\circ]$

که نشان می‌دهد سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

ج) i) دو ورودی دلخواه $n_1[n]$ و $n_2[n]$ را در نظر بگیرید.

$$x_1[n] \to y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n-1]$$
$$x_2[n] \to y_2[n] = x_2[n+1] - x_2[n-1]$$

فرض کنید $x_3[n]$ ترکیب خطی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ باشد یعنی

$$x_3[n] = \alpha x_1[n] + b\ x_2[n]$$

که a , b اعداد دلخواهی هستند. اگر $x_3[n]$ ورودی سیستم داده باشد. در این صورت خروجی متناظر $y_3[n]$ برابر است با:

$$\begin{aligned}
y_3[n] &= x_3[n+1]-x_3[n-1]\\
&= a.x_1[n+1]+bx_1[n+1]-ax_1[n-1]-bx_2[n-1]\\
&= a\left(x_1[n+1]+x_1[n-1]\right)+b\left(x_2[n+1]-x_2[n-1]\right)\\
& ay_1[n]+by=y[n]
\end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

ii) ورودی $x_1[n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1]$ خروجی متناظر باشد. ورودی دوم $x_2[n]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1[n]=x_1[n+1]-x_1[n-1]$ در حوزه زمانی بدست می‌آید.

اگر $x_2[n]=x_1[n-n_\circ]$ خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$y_2[n]=x_2[n+1]-x_2[n-1]=x_1[n+1=n_\circ]-n_1[n-1-n_\circ]$$

همچنین بیاد داشته باشید که $y[n-n_\circ]=x_1[n+1-n_\circ]-n_1[n-1-n_\circ]$

بنابراین $y_2[2]=y_1[n-n_\circ]$ و بیان می‌کند که سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

i) دو ورودی $x_1[t]$ و $x_2[t]$ را در نظر بگیرد.

$$x_1(t)\rightarrow y_1(t)=od\{x_1(t)\}$$
$$x_2(t)\rightarrow y_2(t)=od\{x_1(t)\}$$

فرض کنید که $x_3(t)$ ترکیب خطی $x_1[t]$ و $x_2[t]$ باشد یعنی

$$x_3(t)=\alpha x_1(t)+bx_2(t)$$

که a , b اعداد دلخواهی هستند. اگر $x_3(t)$ به عنوان ورودی سیستم داده شده تلقی شود دراین صورت خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$\begin{aligned}
y_3(t) &= od\{x_3(t)\}=od\{\alpha x_1(t)+bx_2(t)\}\\
&= a\ od\{x_1(t)\}+b\ od\{x_2(t)\}=ay_1(t)+by_2(t)
\end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

ii) سیگنال دلخواه $x_1(t)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید.

$$y_1(t)=od\{x_1(t)\}=\frac{x_1(t)-x_1(-t)}{2}$$

خروجی متناظر باشد. سیگنال $x_2(t)$ را بعنوان سیگنال ورودی تمام که از انتقال $x_1(t)$ از زمان بدست می‌آید، در نظر بگیرید:

$$x_2(t)=x_1(t-t_\circ)$$

خروجی متناظر با این ورودی برابر است با:

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= od\{x_2(t)\}=\frac{x_2(t)-x_2(-t)}{2}\\
&= \frac{x_1(t-t_\circ)-x_1(-t-t_\circ)}{2}
\end{aligned}$$

همچنین توجه کنید که:

$$y_1(t-t_\circ)=\frac{x_1(t-t_\circ)-x_1(-t_\circ+t_\circ)}{2}\neq y_2(t)$$

بنابراین سیستم، تغییرناپذیر با زمان نیست.

مسئله ۲۰-۱

یک سیستم خطی پیوسته در زمان S با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ دارای رابطه ورودی ـ خروجی زیر است

$$x(t)=e^{j2t}\xrightarrow{S}y(t)=e^{j3t}$$

$$x(t)=e^{j-2t}\xrightarrow{S}y(t)=e^{-j3t}$$

الف) خروجی متناظر با $x_1(t)=cos(2t)$ محاسبه کنید.

ب) خروجی متناظر با $x_2(t)=cos\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)$ را بیابید.

حل: الف) با فرض

$$\begin{cases}x(t)=e^{2jt}\rightarrow y(t)=e^{j3t}\\ x(t)=e^{-j2t}\rightarrow y(t)=e^{-j3t}\end{cases}$$

از آنجا که سیستم خطی است:

$$x_1(t)=\tfrac{1}{2}\left(e^{j2t}+e^{-j2t}\right)\rightarrow y_1(t)=\tfrac{1}{2}\left(e^{j3t}+e^{-j3t}\right)$$

بنابراین $x_1(t)=cos(2t)\rightarrow y_1(t)=cos(3t)$

ب) می‌دانیم:

$$x_2(t)=cos\left(2\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)=\frac{e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{j2t}}{2}$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن داریم:

$$x_1(t)=\tfrac{1}{2}\left(e^{-j}e^{j2t}+e^{j}e^{-2jt}\right)\rightarrow y_1(t)=\tfrac{1}{2}\left(e^{-j}e^{3jt}+e^{j}e^{-j3t}\right)=cos(3t-1)$$

بنابراین $x_1(t)=cos\left(2\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)\rightarrow y(t)=cos(3t-1)$

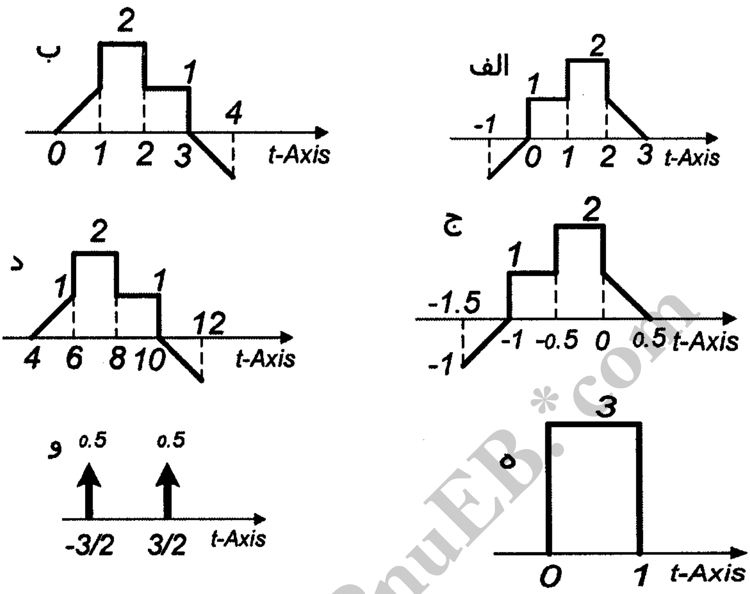
مسئله ۲۱-۱

شکل م۱-۲۱ سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ را نشان می‌دهد. سیگنالهای زیر را رسم و مقداردهی کنید.

الف) $x(t-1)$ ب) $x(2-t)$ ج) $x(2t+1)$

د) $\left(x4-\frac{t}{2}\right)$ هـ) $[x(t)+x(-t)u(t)]$ و) $\left(x(t)\delta\left(t+\frac{3}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)$

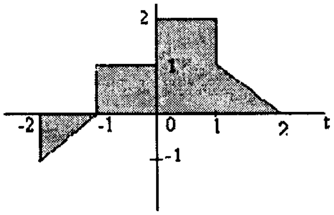
حل: سیگنالها در شکل ح 1.21 رسم شده اند.



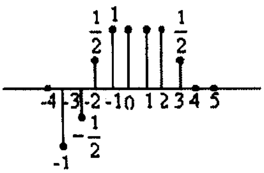
شکل م۲۱-۱

مسئله ۲۲-۱

≺ شکل م ۱-۲۲ سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ را نشان می‌دهد. سیگنالهای زیر را به دقت رسم و مقدارگذاری کنید.



شکل م 1-21



شکل م 1-22

الف) $x[n-4]$

ب) $x[3-n]$

ج) $x[3n]$

د) $x[3n+1]$

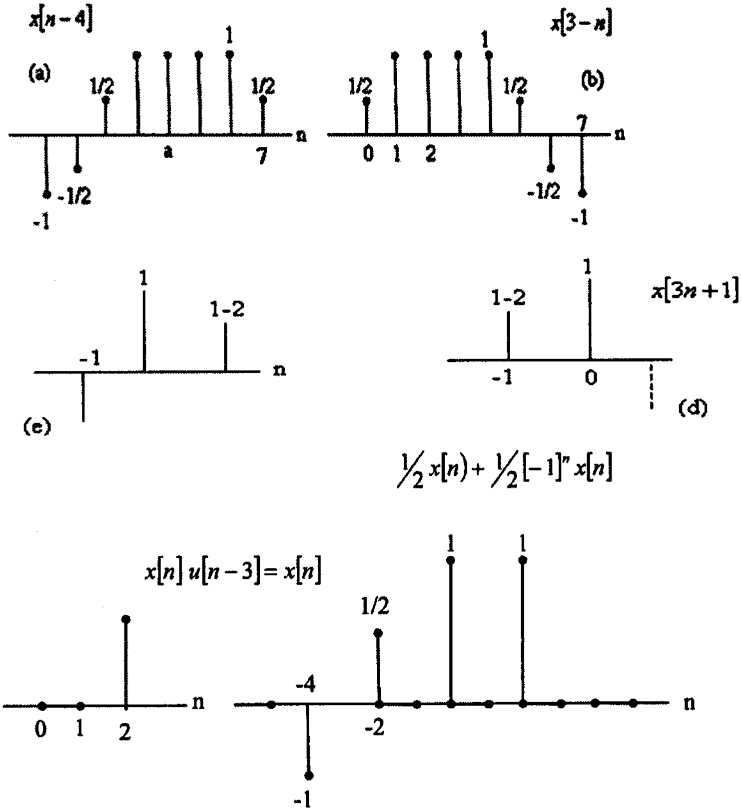
هـ) $x[n]u[3-n]$

و) $x[n-2]\delta[n-2]$

ز) $\frac{1}{2}x[n]+\frac{1}{2}(-1)^n x[n]$

ح) $x\left[(n-1)^2\right]$

سیگنالها در شکل م ۱٫۲۲ نشان داده شده است.

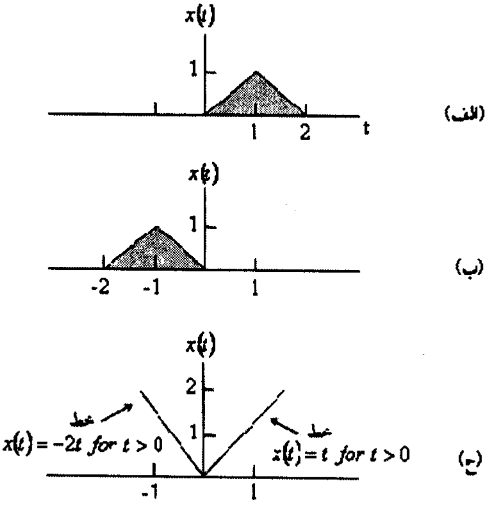


x[n-4]
(a)
1/2
1
1/2
a
7
n
-1/2
-1
x[3-n]
(b)
1/2
1
1/2
0 1 2
7
n
-1/2
-1
1
1-2
-1
n
(c)
1
1-2
x[3n+1]
-1
0
(d)
½x[n)+½[-1]ⁿ x[n]
x[n] u[n-3]=x[n]
0 1 2
n
1/2
1 1
-4
-2
n
-1

شکل م ۱,۲۲

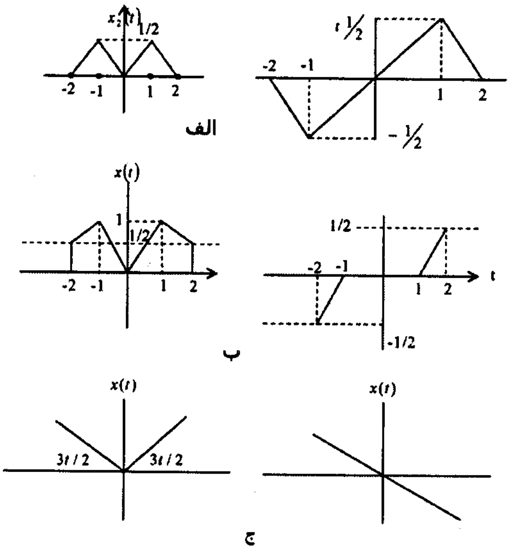
مسئله ۲۳-۱

➢ **بخشهای زوج و فرد سیگنالهای شکل م ۱-۲۳ را تعیین، و آنها را رسم و به دقت مقدارگذاری کنید.**



شکل م ۱-۲۳

حل: قسمتهای زوج و فرد سیگنال در شکل م 1.23 رسم شده است.

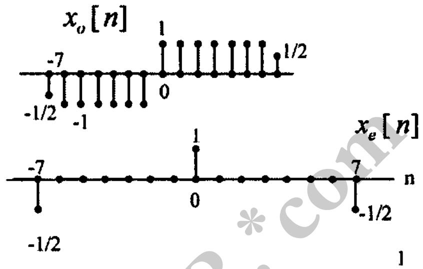


شکل مسئله م1.23

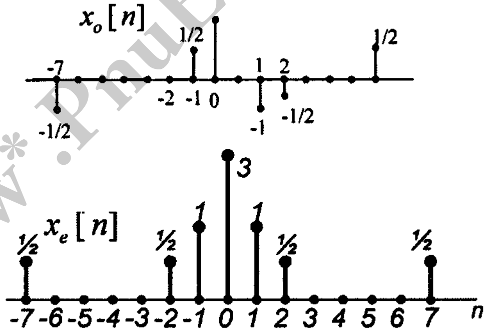
مسئله ۲۴-۱

بخشهای زوج و فرد سیگنالهای شکل م ۱-۲۴ را تعیین، و آنها را رسم و به دقت مقدارگذاری کنید.

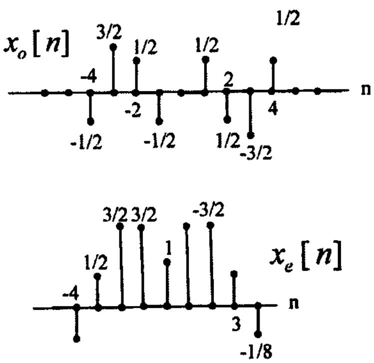
الف



ب



ج



شکل مسئله م1.24

مسئله ۲۵-۱

تعیین کنید کدام یک از سیگنالهای پیوسته در زمان زیر متناوب است؛ دوره تناوب پایه سیگنالهای متناوب را بیابید.

الف) $x(t)=3\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)$ ب) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$

ج) $x(t)=\left[\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)\right]^2$ د) $x(t)=\xi\{\cos(4\pi t)u(t)\}$

هـ) $x(t)=\xi\{\sin(4\pi t)u(t)\}$ و) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-(2t-n)}$

حل: الف) متناوب ، $2\pi/4=\pi/2$ = تناوب

ب) متناوب ، $N=2\pi/\pi=2$

ج) $x(t)=[t]=[1+\cos(4t-2\pi)]/2$ متناوب؛ تناوب $\frac{2\pi}{4}=\pi/2$

د) $x(t)=\cos(4nt)/2$ متناوب؛ $\frac{2\pi}{4\pi}=1/2$ = تناوب

هـ) $x(t)=[\sin(4nt)u(t)-\sin(4\pi t)u(-t)]/2$ متناوب نیست.

و) متناوب نیست.

مسئله ۲۶-۱

تعیین کنید آیا سیگنالهای گسسته در زمان زیر متناوب اند یانه. در صورت متناوب بودن دوره تناوب اصلی آنها را تعیین کنید.

الف) $x[n]=\sin\left[\frac{6\pi}{7}\pi+1\right]$ ب) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{8}-\pi\right)$

ج) $x[n]=\cos\left[\frac{\pi}{8}\pi^2\right]$ د) $x[n]=\cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]\cos\left[\frac{\pi}{4}\pi\right]$

هـ) $x[n]=2\cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]+\sin\left[\frac{\pi}{8}n\right]-2\cos\left[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6}\right]$

حل: الف) متناوب با تناوب 7- ب) نامتناوب.

ج) متناوب با تناوب 8- د) $x[n]=1/2\left[\cos\left(3\pi n/4\right)+\cos\left(\pi n/4\right)\right]$ متناوب با دوره تناوب 8

هـ) متناوب با دوره تناوب 16

مسئله ۲۷-۱

در این فصل چند خاصیت عمومی سیستمها را معرفی کردیم. یک سیستم می‌تواند صفات زیر راداشته یا نداشته باشد.

(۱) بدون حافظه (۲) تغییرناپذیر با زمان (۳) خطی (۴) علّی (۵) پایدار

تحقیق کنید که سیستمهای پیوسته در زمان زیر کدام یک از این خواص را دارند و کدام یک را ندارد. دلیل بیاورید. در هر مورد $y(t)$ خروجی سیستم و $x(t)$ ورودی سیستم می‌باشد.

الف) $y(t)=x(t-2)+x(2-t)$

ب) $y(t)=[(\cos 3t)]x(t)$

ج) $y(t)=\int_{-\infty}^{2t}x(\tau)d\tau$

د) $y(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ x(t)+x(t-2) & , t\geq 0\end{cases}$

هـ) $(yt)=\begin{cases}0 & , x(t)<0\\ x(t)+x(t-2) & , x(t)\geq\end{cases}$

و) $y(t)=x(t/3)$

ز) $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$

حل: الف) خطی پایدار

ب) بی حافظه، خطی، کازال؛ پایدار

ج) خطی

د) تغیر ناپذیر با زمان، خطی، کازال پایدار

هـ) خطی، پایدار

و) تغییرناپذیر با زمان، خطی، کازال

مسئله ۲۸-۱

تحقیق کنید که کدام یک از خواص بیان شده در مسئله قبل برای سیستمهای گسسته در زمان زیر وجود دارند. دلیل بیاورید. در هر مورد $y[n]$ خروجی و $x[n]$ ورودی سیستم است.

الف) $y[n]=x[-n]$

ب) $y[n]=x[n-2]-2x[n-8]$

ج) $y[n]=nx[n]$

د) $\xi\{x[n-1]\}$

هـ) $y[n]=\begin{cases}x[n] & , n\geq 1\\ 0 & , n=0\\ x[n+1] & , n\leq -1\end{cases}$

و) $y[n]=\begin{cases}x[n] & , n\geq 1\\ 0 & , n=0\\ x[n] & , n\leq -1\end{cases}$

ز) $y[n]=x[4n+1]$

حل: الف) خطی، پایدار

ب) تغییرناپذیر با زمان، خطی، کازال، پایدار

ج) بی حافظه، خطی، کازال

د) خطی، پایدار

هـ) خطی، پایدار

و) بی حافظه، خطی، کازال، پایدار

مسئله ۲۹-۱

(الف) نشان دهید سیستم گسسته در زمان دارای ورودی $x[n]$، خروجی $y[n]$ و رابطه ورودی ـ خروجی $y[n]=\{Re\, x[n]\}$ جمع پذیرست. آیا این سیستم به ازای رابطه $y[n]=Re\{e^{j\pi/4}x[n]\}$ جمع پذیرست؟ (در این مسئله $x[n]$ را حقیقی نیست.)

ب) خطی بودن یک سیستم مستلزم این است که سیستم دو خاصیت جمع پذیر و همگنی را داشته باشد. تحقیق کنید هر یک از سیستمهای زیر خاصیت جمع پذیری و یا همگنی را دارند یا نه. دلیل بیاورید، یعنی برای اثبات وجود هر خاصیت برهان بیاورید و برای رد آن مثال نقض بیان کنید.

(i) $$y(t)=\frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]$$

(ii) $$y[n]=\begin{cases}\dfrac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]}, & x[n-1]\neq 0\\ 0, & x[n-1]=0\end{cases}$$

حل: الف) دو ورودی سیستم را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$n_1[n]\xrightarrow{S_1 0}y_1[n]=Re\{x_1[n]\},\ n_2[n]\xrightarrow{S}y_2[n]=Re\{x_2[n]\}$$

حال ورودی سوم را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_3[n]=x_1[n]+x_2[n]$$

خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned}y_3[x]&=Re\{x_3[n]\}\\&=Re\{x_1[n]+x_2[n]\}\\&=Re\{x_1[n]\}+Re\{x_2[n]\}\\&=y_1[n]+y_2[n]\end{aligned}$$

نتیجه می گیریم سیستم جمع پذیر است.

فرض کنیم رابطه خروجی – ورودی به $y[n]=Re\left\{e^{j\pi/4}x[n]\right\}$ تغییر یابد و نیز دو ورودی تغییر یابد و نیز دو ورودی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_1[n] \xrightarrow{S} y_1[n] = Re\left\{e^{j\pi/4} x_1[n]\right\}$$

,

$$x_2[n] \xrightarrow{S} y_2[n] = Re\left\{e^{j\pi/4} x_2[n]\right\}$$

حال سیگنال سومی‌به صورت $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$ را بعنوان ورودی به سیستم فرض کنید. خروجی برابر است با:

$$y_3[n] = Re\left\{e^{j\pi/4} x_3[n]\right\}$$
$$= \cos\left(\pi n/4\right) Re\{x_3[n]\} - \sin\left(n\pi/4\right) I_m\{x_3[n]\}$$
$$+\cos\left(n\pi/4\right) Re\{x_1[n]\} - \sin\left(n\pi/4\right) I_m\{x_1[n]\}$$
$$+\cos\left(n\pi/4\right) Re\{x_2[n]\} - \sin\left(n\pi/4\right) I_m[x_2[n]]$$
$$= Re\left\{e^{jn/4} x_1[n]\right\} + Re\left\{e^{j\pi/4} x_2[n]\right\}$$
$$= y_1[+n] + y_2[n]$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که سیستم جمع پذیر نیست.

ب) i) دو سیگنال ورودی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_1(t) \xrightarrow{S} y_1(t) = \frac{1}{x(t)}\left[\frac{d_1 x_1(t)}{dt}\right]^2, \quad x_2(t) \xrightarrow{S} y_2(t) = \frac{1}{x_1(t)}\left[\frac{d_2 x(t)}{dt}\right]^2$$

حال سیگنال سوم را به صورت $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ خروجی متناظر سیستم عبارتست از:

$$y_3(t) = \frac{1}{x_3(t)}\left[\frac{dx_3(t)}{dt}\right]^2$$
$$= \frac{1}{x_1(t) + x_2(t)}\left[\frac{dx_1(t) + dx_2(t)}{dt}\right] =$$
$$\neq y_1(t) + y_2(t)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که سیستم جمع پذیر نیست.

حال ورودی چهارم را به صورت $x_4(t) = \alpha x_1(t)$ در نظر بگیرید. خروجی متناظر به صورت

$$y_4(t) = \frac{1}{x_4(t)}\left[\frac{dx_4(t)}{dt}\right]^2 = \frac{1}{\alpha x_1(t)}\left[\frac{d\alpha x_1(t)}{dt}\right]^2 = \frac{a}{x_1(t)}\left[\frac{n_1 d(t)}{dt}\right]^2 = \alpha y_1(t)$$

بنابراین سیستم همگن است.

ii) سیستم جمع پذیر نیست. مثال زیر را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$x_1[n] = 2\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 2\delta[n]$$

$$x = [2] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n]$$

خروجی متناظر در $n = 0$ برابر است با:

$$y_1[0] = 2 \quad , \quad y_2[0] = 3/2$$

حال سیگنال را به صورت

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] = 3\delta[n+2] + 4\delta[n+1] + 5\delta[n]$$

در نظر بگیرید.

خروجی متناظر در $n = 0$ برابر است با $y[0] = 15/4$. بطور واضح $y_3[0] \neq y_1[0] + y_2[0]$. این نشان می‌دهد که سیستم جمع پذیر نیست.

هیچ حدودی $x_4[n]$ که به خروجی $y_4[n]$ منجر می‌شود را در نظر بگیرید. می‌دانیم که

$$y_4[n] = \begin{cases} \dfrac{x_4[n]x_4[n-2]}{x_4[n-1]} & x_4[n-1] \neq 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} = ay_4[n]$$

سیستم همگن است.

مسئله ۳-۱

تحقیق کنید هر یک از سیستمهای زیر وارونپذیرند یا نه. در صورت وارو نپذیر بودن سیستم وارون راپیدا کنید. در غیر این صورت دو سیگنال مختلف بیابید که پاسخ سیستم به آنها یکی باشد.

الف) $y(t) = x(t-4)$ ب) $y(t) = \cos[x(t)]$ ج) $y[n] = nx[n]$

د) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ هـ) $x[n] = \begin{cases} x[n-1] , & n \geq 1 \\ 0 , & n = 0 \\ x[n] , & n \leq -1 \end{cases}$ و) $y[n] = x[n]x[n-1]$

ز) $y[n] = x[1-n]$ ح) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$ ط) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

ی) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ ک) $y[n] = \begin{cases} x[n+1] , & n \geq 0 \\ x[n] , & n \leq -1 \end{cases}$

ل) $y(t) = x(2t)$ م) $y[n] = x[2n]$ ن) $y[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$

حل: الف) تغییرناپذیر، معکوس پذیر: $y(t) = x(t+4)$.

ب) تغییر پذیر، سیگنالهای $x(t)$ و $x_1(t) = x(t) + 2\pi$ خروجی‌های یکسانی را می‌دهند.

ج) تغییر پذیر، $\delta[n], s\delta[n]$ خروجی‌های یکسانی را می‌دهند. $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$.

د) تغییرناپذیر، معکوس پذیر.

هـ) تغییرناپذیر، معکوس پذیر؛ برای $n \geq 0$ $y[x]=x[n+1]$ و برای $n<0$، $y[n]=x[n]$.

و) تغییرپذیر، $x[n]$ و $-y[n]$ نتایج یکسانی را ارائه می‌کنند.

ذ) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y[n]=x[1-n]$.

خ) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y(t)=x(t)+dx(t)/dt$.

ط) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y[n]=x[n]-1/2\, x[n-1]$.

ی) تغییرپذیر، اگر $x(t)$ هر ثابت دلخواهی فرض شود، در این صورت $y(t)=0$.

ک) تغییرپذیر، $\delta[n]$ و 2δ نتایج یکسانی $y[n]=0$ را ارائه می‌دهند.

ل) تغییرناپذیر، معکوس پذیر، $y(t)=x(t/2)$.

م) تغییرناپذیر، معکوس پذیر: $y(t)=x(t/2)$.

تغییرپذیر $\begin{cases} x_1[n]=\delta[n]+\delta[n-1] \\ , \\ x_2[n]=\delta[n] \end{cases}$ نتیجه می‌گیریم $y[n]=\delta[n]$

ن) تغییرناپذیر، معکوس پذیر: $y[n]=x[2n]$

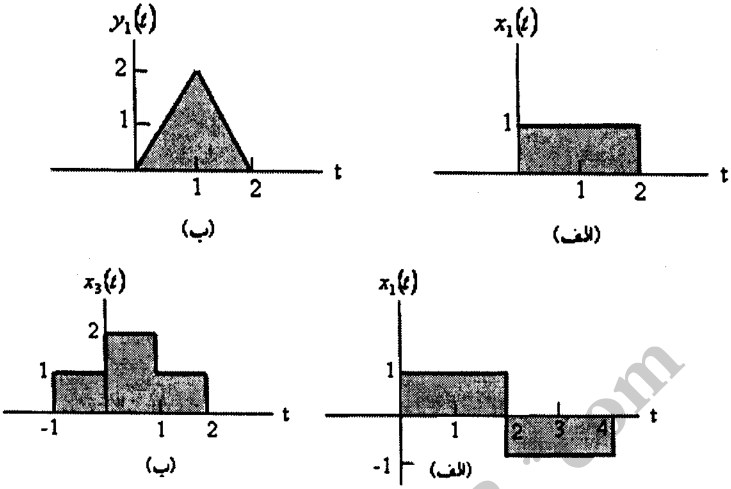
مسئله ۳۰-۱

➢ دراین مثال یکی از مهمترین نتایج خواص خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان را نشان می‌دهیم، یعنی این که اگر پاسخ سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) به یک ورودی یا چند ورودی را بدانیم، می‌توانی پاسخ سیستم بـه ورودیهـای متعدد دیگری را نیز حساب کنیم. قسمت اعظم بقیه این کتاب به کاربرد این حقیقت در پی ریزی روشهایی بـرای تحلیـل و سنتز سیستمهای LTI اختصاص دارد.

الف) یک سیستم LTI در نظر بگیرید که پاسخ آن به سیگنال $x_1(t)$ شکل م ۱-۳۱ (الـف) سـیگنال $y_1(t)$ شکل م ۱-۳۱

(ب) است. پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t)$ شکل م ۱-۳۱(ج) را تعیین و به دقت رسم کنید.

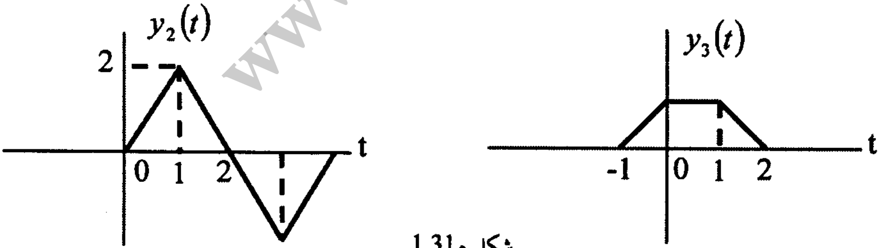
ب) پاسخ سیستم مفروض در قسمت الف را به ورودی $x_3(t)$ شکل م ۱-۳۱ (د) تعیین و رسم کنید.



شکل م ۱-۳۱

حل: الف) توجه داشته باشید که $x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-2)$. بنابراین طبق خطی بودن به $y_2(t)=y_1(t)-y(t-2)$ دست می‌یابیم. که در شکل ح 1.31 نشان داده شده است.

ب) توجه کنید که $x_3(t)=x_1(t)+x(t+1)$. بنابراین، با استفاده از خاصیت خطی بودن $y_3(t)=y_1(t)+y_1(t+1)$. که در شکل ح 1.31 نشان داده شده است.



شکل م1.31

مسئله ۳۲-۱

➢ فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال پیوسته در زمان است و فرض کنید که $y_1(t)=x(2t)$ و $y_2(t)=x(t/2)$

سیگنال $y_1(t)$ نوع سریع شده $x(t)$ است، از این لحاظ که زمان لازم برای ایجاد هر قسمت آن نصف شده است. به طور مشابه، $y_2(t)$ گونه ی کند شدهٔ $x(t)$ است، زیرا مدت آن دو برابر شده است. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

(۱) اگر $x(t)$ متناوب باشد، آنگاه $y_1(t)$ نیز متناوب است.

(۲) اگر $y_1(t)$ متناوب باشد، آنگاه $x(t)$ نیز متناوب است.

(۳) اگر $x(t)$ متناوب باشد، آنگاه $y_2(t)$ نیز متناوب است.

(۴) اگر $y_2(t)$ متناوب باشد، آنگاه $x(t)$ نیز متناوب است.

درستی یا نادرستی هر یک از این گزاره‌ها را تحقیق کنید. در صورت درست بودن یک گزاره، رابطه بین زمان تناوب اصلی دو سیگنال ذکر شده در گزاره را بیان کنید. در صورت نادرست بودن گزاره، مثال نقض بیاورید.

حل: تمامی گزاره‌ها صحیح است.

۱) $x(t)$ با تناوب T، متناوب است. $y_1(t)$، با تناوب $T/2$ پریودیک است.

۲) $y_1(t)$ با تناوب T متناوب است، $x(t)$ با تناوب 2T پریودیک است.

۳) $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T و $y_L(t)$ با دوره تناوب 2T پریودیک است.

۴) $y_2(t)$ متناوب با دوره تناوب T و $x(t)$ با دوره تناوب $T/2$ پریودیک است.

مسئله ۳۳-۱

➢ فرض کنید $x[n]$ یک سیگنال گسسته در زمان باشد و

$$y_1[n]=x[2n] \quad \text{و} \quad y_2[n]=\begin{cases} x[n/2] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

سیگنالهای $y_1[n]$ و $y_2[n]$ به ترتیب گونه‌های سریع شده و کند شده $x[n]$ هستند. البته باید توجه داشته باشید که در حالت گسسته در زمان، نوع‌های سریع شده و کند شده با همتاهای پیوسته در زمان خود تفاوتهای عمده ای دارند. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

(۱) اگر $x[n]$ متناوب باشد، آنگاه $y_1[n]$ نیز متناوب است. (۲) اگر $y_1[n]$ متناوب باشد، آنگاه $x[n]$ نیز متناوب است. (۳) اگر $x[n]$ متناوب باشد، آنگاه $y_2[n]$ نیز متناوب است. (۴) اگر $y_2[n]$ متناوب باشد، آنگاه $x[n]$ نیز متناوب‌است.

درستی یا نادرستی هر یک از این گزاره‌ها راتعیین کنید. در صورت درست بودن یک گزاره، رابطه بین زمان تناوب پایه دو سیگنال را بیان کنید. در صورت نادرست بودن گزاره مثال نقض بزنید.

حل: ۱) صحیح. $x[n]=x[n+N]; y_1[n]=y_1[n+N_\circ]$ یعنی پریودیک با $N_\circ=N/2$ است ،اگر N زوج باشد و $N_\circ=N$ اگر N فرد باشد.

۲) نادرست. $y_1[n]$. پریودیک $x[n]$ پریودیک را ارائه می‌کند یعنی با فرض اینکه $x[n]=g[n]+h[n]$، که

$$g[n]\begin{cases}1 & \text{زوج } n\\ \circ & \text{فرد } n\end{cases} \quad \text{و} \quad h[n]=\begin{cases}\circ & \text{زوج } n\\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{فرد } n\end{cases}$$

در این صورت، $y_1[n]=x[2n]$ پریودیک است امّا، $x[n]$ به طور واضح پریودیک نیست.

۳) صحیح. $y_2[n+N_\circ]=y_2[n]; x[n+N]=x[n]$ که $N_\circ=2N$

۴) صحیح. $x[n+N_\circ]=x[n]; y_2[n+N]=y_2[n]$ که $N_\circ=N/2$

مسئله ۳۴-۱

➢ دراین مسئله چند خاصیت سیگنالهای زوج و فرد را بررسی می‌کنیم.

الف) نشان دهید که اگر $x[n]$ فرد باشد، آنگاه: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]=\circ$

ب) نشان دهید که اگر $x_1[n]$ فرد و $x_2[n]$ زوج باشد، آنگاه $x_1[n]\,x_2[n]$ فردخواهند بود.

ج) فرض کنید $x[n]$ سیگنال دلخواهی با قسمتهای فرد و زوج باشد

$$x_e[n]=\mathcal{E}\{x[n]\} \quad \text{و} \quad x_\circ[n]=\mathcal{O}_d\{x[n]\}$$

نشان دهید که $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n]+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$

د) با اینکه قسمت‌های الف تا ج بر حسب سیگنالهای گسسته در زمان بیان شد، خواص مشابهی هم برای حالت پیوسته در زمان صادق است. ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)dt+\int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)dt$$

که در آن $x_e(t)$ و $x_o(t)$ به ترتیب بخشهای زوج و فرد $x(t)$ هستند.

حل: الف) فرض کنید:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]=x[\circ]+\sum_{n=1}^{\infty}\{x[n]+x[-n]\}$$

اگر $x[n]$ فرد باشد، $x[n]+x[-n]=\circ$ بنابراین مجموع برابر صفر خواهد شد.

ب) فرض کنید $y[n]=x_1[n]x_2[n]$ در این صورت:

$$y[-n]=x_1[-n]x_2[-n]=-x_1[n]x_2[n]=-y[n]$$

این نشان می‌دهد که $y[n]$ فرد است.

ج) فرض کنید:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x_e[n]+x_\circ[n]\}^2$$

$$= \sum x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_\circ^2[n] + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e[n]x_\circ[n]$$

بااستفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) می‌دانیم که $x_e[n]x_o[n]$ همواره سیگنالی فرد است و با استفاده از نتیجه بدست آمده در قسمت (الف) نتیجه می گیریم که:

$$2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e[n]x_o[n] = \circ$$

بنـابراین:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$

د) فرض کنید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)x_e(t)dt$$

همچنین $x_\circ(t)x_e(t)$ نیز سیگنالی فرد است، پس:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_\circ(t)\,x_e(t)dt = \circ$$

بنـابراین:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^{e2}(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_\circ^2(t)dt.$$

مسئله ۳۵-۱

➢ فرض کنید رابطه زیر سیگنال نمایی گسسته در زمان متناوب باشد

$$x[n] = e^{jm(2\pi/N)n}$$

نشان دهید که دوره تناوب اصلی این سیگنال برابر است با $N_\circ = N$ / ب.م.م (m,N)

که (m,N) بزرگترین مقسوم علیه مشترک N , m است.

حل: قصد داریم کوچکترین $N_\circ$ را طوری بیابیم که $m\left(\frac{2\pi}{N}\right)N_\circ = 2\pi k$ یا $N_\circ = k\,N/m$ که k یک عدد صحیح است. اگر $N_\circ$ یک عدد صحیح باشد آنگاه N باید یک ضریبی از m/k باشد و m/k نیز بایستی یک عدد صحیح باشد پس m/k یک ضریب مشترک بین k , m می‌باشد. همچنین، اگر کوچکترین $N_\circ$ را پیدا کنیم، در اینصورت m/k باید ب.م.م N و m باشد.

$$N_\circ = \frac{N}{\text{ب.م.م}(m,N)}$$

مسئله ۳۶-۱

فرض کنید $x(t)$ سیگنال نمایی مختلط پیوسته در زمان زیر باشد

$$x(t)=e^{jm}o^{t}$$

که فرکانس پایه آن ω_0 و دوره تناوب پایه آن $T_0[n]=2\pi/\omega_0$ است. سیگنال گسسته در زمان را در نظر بگیرید که با گرفتن نمونه‌های هم فاصله $x(t)$ به دست می‌آید، یعنی

$$x[n]=x(nt)=e^{\omega j o}nT$$

الف) نشان دهید که $x[n]$ فقط و فقط به شرطی متناوب خواهد بود که T/T_0 عدد گویا باشد، به عبارت دیگر اگر و تنها اگر مضربی از فاصله نمونه گیری دقیقاً برابر مضربی از دوره تناوب $x(t)$ باشد.

ب) فرض کنید که $x[n]$ متناوب است، پس

$$\frac{T}{T_0}=\frac{p}{q} \qquad \text{(م ۱-۳۶-۱)}$$

که در آن p و q اعداد صحیح می‌باشند. دوره تناوب اصلی و فرکانس پایه $x[n]$ را بیابید؟ فرکانس پایه را به صورت کسری از $\omega_0 T$ بیان کنید.

ج) حال فرض کنید که T/T_0 معادله (م ۱-۳۶-۱) را ارضا می‌کند، دقیقاً تعیین کنید که چند تناوب $x(t)$ لازم است تا نمونه‌های یک دوره تناوب $x[n]$ به دست آیند.

حل: الف) اگر $x[n]$ متناوب باشد، $e^{j\omega_0 nT}=e^{j\omega(n+N)T}$ که $\omega_0=2\pi/T_0$ بیان می‌کند که:

$$\frac{2\pi 2NT}{T_0}2K\pi \Rightarrow \frac{T}{T_0}=\frac{K}{N}= \text{یک عدد گویا}$$

ب) اگر $T/T_0=p/q$ در این صورت $x[n]=e^{j2\pi n(P/q)}$. تناوب پایه برابر است با $\frac{q}{\text{ب.م.م}(P.q)}$ و فرکانس پایه برابر است با:

$$\frac{2\pi}{q}(\text{ب.م.م})(p,q)=\frac{2\pi}{p}\frac{p}{q}gcd(p,q)=\frac{\omega_0}{P}gcd(p,q)=\frac{\omega_0 T}{p}gcd(p,q)$$

ج) $\frac{p}{gcd(p,q)}$ تناوب‌های $x(t)$ هستند.

مسئله ۳۷-۱

همبستگی بین دو سیگنال مفهوم مهمی در کاربردهای مخابراتی است. در مسائل انتهای فصل ۲ در این مورد بیشتر بحث خواهیم کرد و طرز کاربرد همبستگی را بیا می‌کنیم. حال به مقدمه ای کوتاهدر مورد توابع همبستگی و خواص آنها می‌پردازیم. فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال باشند، تابع همبستگی به این صورت تعریف می‌شود

$$\Phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)y(t)d\tau$$

تابع $\Phi_{xx}(t)$ را تابع خود همبستگی سیگنال $x(t)$ و $\Phi_{xy}(t)$ را همبستگی متقابل سیگنالهای $x(t)$ و $y(t)$ می‌نامند. الف) $\Phi_{xy}(t)$ و $\Phi_{yx}(t)$ چه رابطه ای دارند؟

ب) قسمت فرد $\Phi_{xx}(t)$ را محاسبه کنید.

ج) فرض کنید $y(t)=x(t+T)$. $\Phi_{xy}(t)$ و $\Phi_{yy}(t)$ را برحسب $\Phi_{xx}(t)$ بیان کنید.

حل: (الف) طبق تعریف $\phi_{xy}(t)$ داریم.

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)y(\tau)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}y(-t+\tau)x(\tau)d\tau\\&=\phi_{yx}(-t)\end{aligned}$$

ب) با توجه به قسمت (الف) $\phi_{xx}=\phi_{xx}(-t)$ که بیان می‌کند ϕ_{xx} زوج است.

بنابراین قسمت فرد $\phi_{xx}(t)$ برابر صفر خواهد شد..

ج) حال $\phi_{yy}(t)=\phi_{xx}(t)$ و $\phi_{xy}(t)=\phi_{xx}(t-T)$

مسئله ۳۸-۱

در این مسئله به بررسی برخی خواص تابع ضربه واحد می‌پردازیم.

الف) نشان دهید که $\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$

توجه: $\delta_\Delta(t)$ را بررسی کنید (شکل ۱-۳۴ را ببینید).

ب) در بخش ۱-۴ ضربه واحد پیوسته در زمان را به صورت حد سیگنال $\delta_\Delta(t)$ تعریف کردیم. در حقیقت، چند خاصیت $\delta(t)$ را با بررسی خواص متناظر δ_Δ بیان کردیم. مثلاً چون سیگنال به پله واحد میل می‌کند.

$$u_\Delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta_\Delta(\tau)d\tau$$

$$u(t)=\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t) \qquad \text{(م ۱-۳۸-۱)}$$

یعنی فرض می‌کنیم $\delta(t)$ مشتق $u(t)$ باشد.

در واقع به جای مشخص کردن مقدار $\delta(t)$ به ازای مقادیر مختلف t، که کاری ناممکن است، این تابع را با خواص آن تعریف کنیم. در فصل ۲ یکی از مشخصه‌های بسیار ساده رفتار تابع ضربه واحد را مطرح می‌کنیم. حال می‌خواهیم این مطلب را بیان کنیم که مفهوم اصلی در استفاده از ضربه واحد، فهم چگونگی رفتار آن است. برای این کار شش سیگنال شکل م ۱-۳۸ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تمام اینها به ازای $\Delta \to 0$ (به صورت ضربه به رفتار می‌کنند)، پس اگر فرض کنیم

$$u^i(t) \int_{-\infty}^{t} r^i \Delta(\tau) d\tau$$

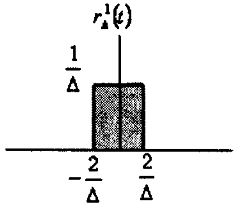
داریم:

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u(t)$$

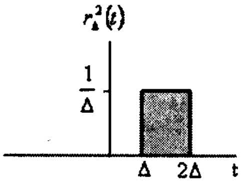
در هر مورد سیگنال $u^i \Delta(t)$ را به دقت رسم و مقداردهی کنید. به خاطر داشته باشید که:

به ازای تمام مقادیر Δ $\qquad r^2\Delta(0) = r^4(0) = 0$

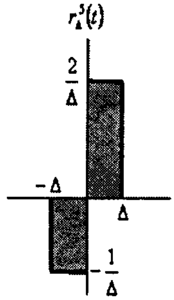
بنابراین فرد فرض کردن $\delta(t)$ که به ازای $t \neq 0$ صفر و به ازای $t = 0$ بینهایت است کافی نیست. برعکس، خواصی نظیر معادله (م ۱-۳۸-۱) است که ضربه را تعریف می‌کند. در بخش ۲-۵ دسته کاملی از سیگنالها به نام توابع ویژه را تعریف خواهیم کرد که با تابع ضربه مرتبط اند و به جای مقادیر بر حسب خواص تعریف می‌شوند.

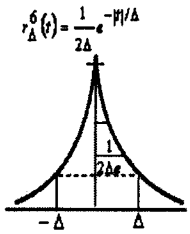


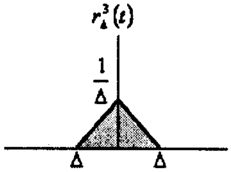
(الف)



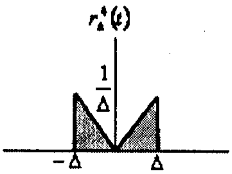
(ب)







(ج)



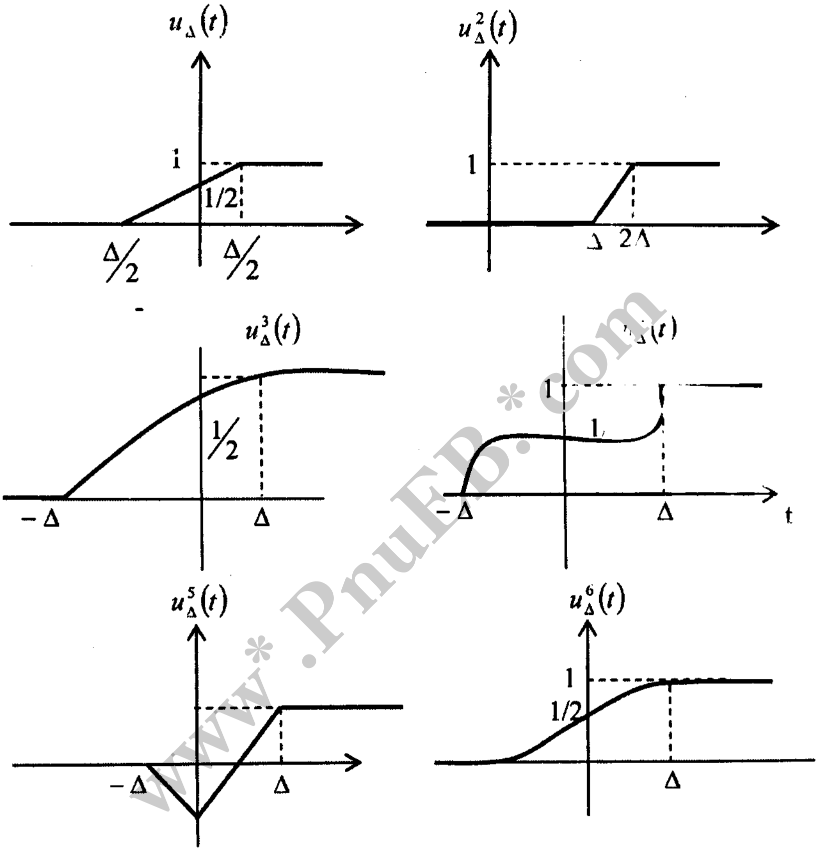
(د)

حل: (الف) می‌دانیم که $2\delta_\Delta(2t) = \delta_{\Delta/2}(t)$ پس:

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(2t) = \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \delta_{\Delta/2}(t)$$

که بیان می‌کند $\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$

(ب) در شکل م1.38 نشان داده شده اند.



شکل م1.38

مسئله ۳۹-۱

◄ نقش $u(t)$، $\delta(t)$ و دیگر توابع ویژه در بررسی سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان ایده آل سازی پدیده‌های فیزیکی است، و این امر این امکان را می‌دهد که نمایش بسیار ساده و مهمی‌از این سیستمها به دست آوریم. اما در استفاده از توابع ویژه باید دقت کنیم. مخصوصاً باید به خاطر داشته باشیم که این توابع، توابعی ایده آل اند، ازینرو هر گاه با استفاده از آنها محاسبه ای انجام می‌دهیم، فرض می کنیم که این محاسبه توصیف دقیقی است از رفتار سیگنالهایی است که قصد ایده آل سازی آنها را داریم. برای بیان این مطلب معادله زیررا در نظر بگیرید.

$$x(t)\delta(0)=x(0)\delta(t) \qquad \text{(م ۱-۱۳۹)}$$

این معادله مبتنی بر این است که

$$x(t)\delta_\Delta(0)\approx x(0)\delta_\Delta(t) \qquad \text{(م ۱-۳۹-۲)}$$

با گرفتن حد ازاین معادله، معادله ایده آل (م ۱-۳۹-۱) به دست می‌آید. اما با بررسی دقیق تر طریقه به دست آوردن معادله (م ۱-۳۹-۲) نشان داده می‌شود که تساوی (م ۱-۳۹-۲) در واقع فقط زمانی معنی دارد که $x(t)$ در $t=0$ پیوسته باشد؛ در غیر این صورت نمی‌توان برای t کوچک نوشت $x(t)\approx x(0)$

برای واضح شدن مطلب، سیگنال پله واحد $u(t)$ را در نظر بگیرید. با توجه به معادله (۱-۷۰) می‌دانیم که به ازای $t<0$، $u(t)=0$ و به ازای $t>0$، $u(t)=1$ خواهد بود؛ اما مقدار آن در $t=0$ تعریف نشده است [برای مثال توجه کنید که به ازای همه مقادیر Δ، $u_\Delta(0)=0$، در حالی که $u_\Delta^1(0)=\frac{1}{2}$، به مسئله ۱-۳۸(ب) مراجعه کنید]. اگر محاسبات انجام شده با استفاده از $u(t)$ به انتخاب مقدار مشخصی برای $u(0)$ بستگی نداشته باشد، تعریف نشدن $u(0)$ مشکلی ایجاد نمی کند. مثلاً اگر $f(t)$ در $t=0$ پیوسته باشد، آنگاه مقدار

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

به $u(0)$ بستگی ندارد. از طرف دیگر تعریف نشدن $u(0)$ می تواند مهم باشد، زیرا به این معنی است که برخی محاسبات شامل توابع ویژه تعریف نشده هستند. فرض کنید می‌خواهیم مقداری برای حاصل ضرب $u(t)\delta(t)$ تعریف کنیم. برای این که بدانید

$$\lim_{\Delta\to 0}\left[u_\Delta(t)\delta(t)\right]=0$$

چنین تعریفی را نمی‌توان ارائه کرد، نشان دهید که ولی

$$\lim_{\Delta\to 0}\left[u_\Delta(t)\delta_\Delta(t)\right]=\frac{1}{2}\delta(t)$$

به طور کلی می‌توان حال ضرب دو سیگنال را بدون هیچ مشکلی تعریف کرد،البته با توجه به اینکه محل نقاط تکین سیگنالها (ناپیوستگی، ضربه یا سایر نقاط تکین گفته شده در بخش ۲-۵) یکی نباشد. اگر مکان نقاط تکین یکسان باشد، حاصل ضرب تعریف نشده است. به عنوان مثال نشان دهید که سیگنال $g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ مشابه $u(t)$ است؛ یعنی در $t<0$ برابر ۰، در $t>0$ برابر ۱، و در $t=0$ تعریف نشده است.

حل: داریم:

$$\lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(0)\delta(t) = 0$$

همچنین:

$$\lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t).\delta_\Delta(t) = (1/2)\delta(t)$$

داریم:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t>0 & \delta(t-\tau)=0 \\ 1 & t<0 & \delta(t-\tau)=u(t)\delta(t) \\ \text{تعریف نشده} & t=0 & \end{cases}$$

مسئله ۴۰-۱

الف) نشان دهید اگر یک سیستم یا جمع پذیر باشد یا همگن ، به ازای ورودی متحد با صفر، خروجی متحد با صفر بدست می‌دهد.

ب) سیستمی(پیوسته یا گسسته در زمان) تعیین کنید که نه جمع پذیر باشد و نه همگن، ولی به ازای ورودی متحد با صفر خروی متحد با صفر ایجاد کند.

ج) با توجه به بند (الف) آیا می‌توان نتیجه گرفت که اگر ورودی یک سیستم خطی بین زمانهای t_1 و t_2 در حال پیوسته در زمان یا بین n_1 و n_2 در حالت گسسته در زمان صفر باشد، خروجی نیز باید در آن فاصله صفر باشد؟ توضیح دهید.

حل: الف) اگر یک سیستم جمع پذیر باشد در اینصورت: $0 = x(t) - x(t) \to y - y(t) = 0$

ب) بعنوان یک سیستم می‌باشد. $y(t) = x^2(t)$

ج) خیر. برای مثال $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ با $x(t) = u(t) = -u(t-1)$ را در نظر بگیرید.

در این صورت $x(t)$ برای $t>1$ برابر صفر است اما $y(t)$ برای $t>1$ مقدار (1) را دارد.

مسئله ۴۱-۱

سیستم S را با ورودی $x[n]$، خروجی $y[n]$ و رابطه ورودی ـ خروجی زیر در نظر بگیرید.

$$y[n] = x[n]\{g[n] + g(n-1)\}$$

الف) نشان دهید اگر به ازای همه مقادیر n، $g[n]=1$ آنگاه سیستم S تغییرناپذیر با زمان است.

ب) نشان دهید که اگر $g[n]=n$، آنگاه سیستم S تغییرناپذیر با زمان نیست.

ج) نشان دهید که اگر $g[n]=1+(-1)^n$، آنگاه سیستم S تغییرپذیر با زمان است

حل:

الف) $y[n]=2x[n]$ بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

ب) $y[n]=(2n-1)x[n]$ سیستم تغییرپذیر با زمان است زیرا $y[n+N_\circ]\neq(2n-1)x[n-N_\circ]$.

پ) $y[n]=x[n]\left(1+(-1)^n+1+(-1)^{n-1}\right)=2x[n]$ بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

مسئله ۴۲-۱

➢ (الف) گزاره زیر درست است یا نادرست؟

اتصال سری دو سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، سیستمی‌خطی و تغییرناپذیر با زمان است. پاسخ خود را با دلیل بیان کنید.

ب) گزاره زیر درست است یا نادرست؟

اتصال سری دو سیستم غیرخطی یک سیستم غیرخطی است. پاسخ خود را با دلیل بیان کنید.

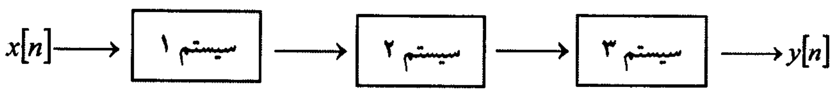
ج) سه سیستم با روابط ورودی ـ خروجی زیر در نظر بگیرید

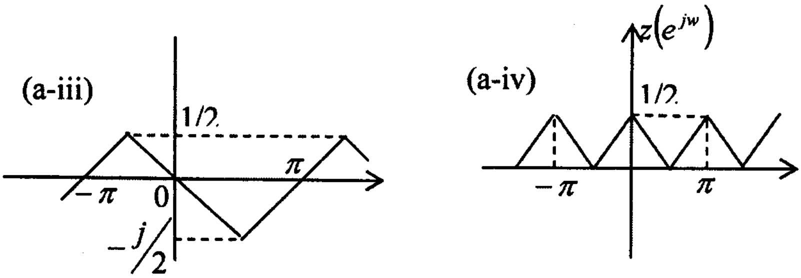
سیستم ۱: $y[n]=\begin{cases} x[n/2] & n\text{زوج} \\ \circ & n\text{فرد} \end{cases}$

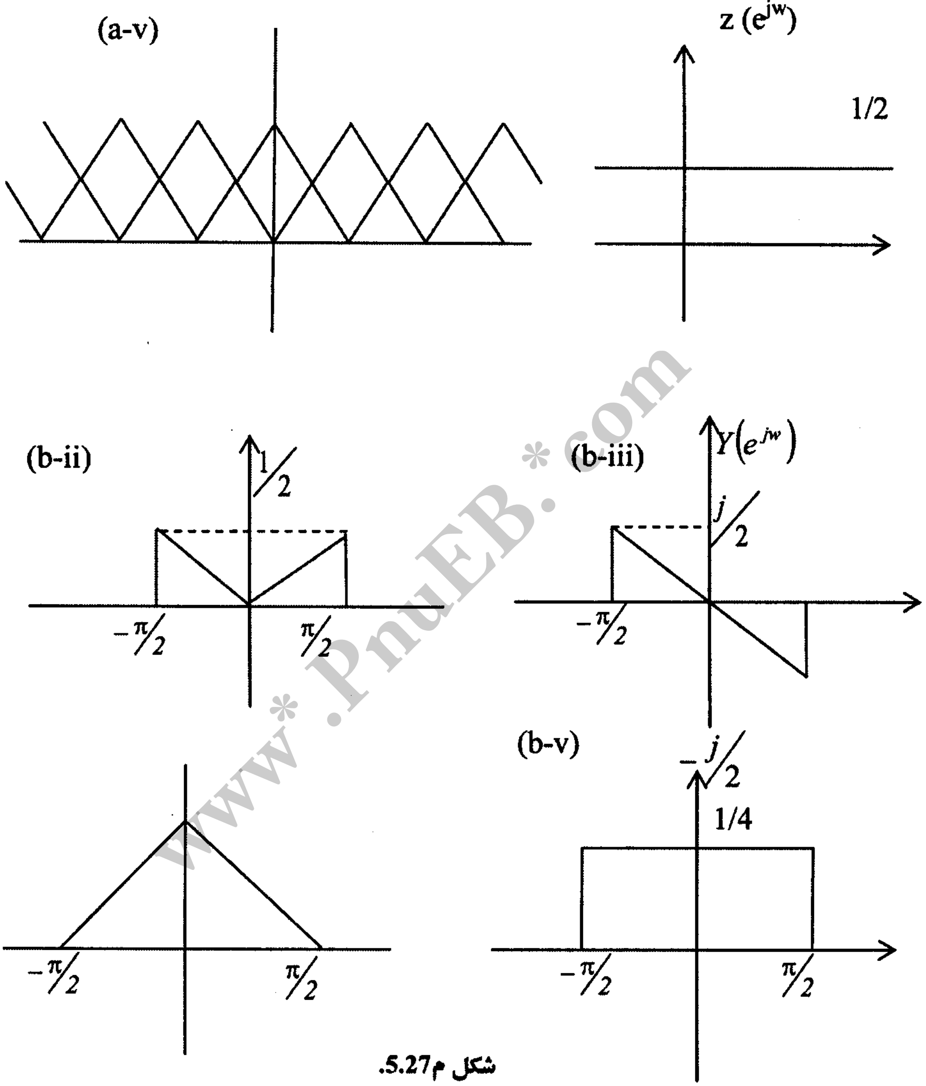
سیستم ۲: $y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]$

سیستم ۳: $y[n]=x[2n]$

فرض کنید که این سیستمها مطابق شکل م ۲-۴۲ به صورت سری بسته شده اند. رابطه ورودی ـ خروجی سیستم کل را بیابید. آیا این سیستم خطی است؟ آیا تغییرناپذیر با زمان است؟







شکل م5.27.

حل: الف) دو سیستم S_1 و S_2 را که به صورت سری بهم وصل شده اند در نظر بگیرید. فرض کنید اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ورودیهای S_1 باشند آنگاه $y_1(t)$ و $y_2(t)$ خروجی‌های آن خواهند بود. همچنین فرض کنید که اگر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ ورودیهای سیستم ۲ باشند در این صورت $z_1(t)$ و $z_2(t)$ خروجی‌های سیستم S_2 خواهند بود. چون S_1 خطی است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$ax_1+bx_2(t)\xrightarrow{si}\alpha y_1(t)+by_2(t)$$

که a , b، ثابت هستند. از آنجایی که S_2 نیز خطی است پس می‌توان نوشت:

$$ay_1(t)+by_2(t)\xrightarrow{S_L}az_1(t)+bz_2(t)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$ax_1(t)+bx_2(t)\xrightarrow{S_1S_2}a_1z_1(t)+bz_2(t).$$

بنابراین ترکیب سری S_1 و S_2 خطی است.

$$x_1(t-T_\circ)\xrightarrow{S_1}y_1(t-T_\circ)y,$$

از آنجایی که S_1 خطی است، می‌توانیم بنویسیم.

$$y_1(t-T_\circ)\xrightarrow{S_2}x_1(t-T_\circ)$$

بنابراین:

$$x_1(t-T_\circ)\xrightarrow{S_1.S_2}Z_1(t-T_\circ)$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که اتصال سری دو سیستم S_1 و S_2 تغییرناپذیر با زمان است.

ب) نادرست،

فرض کنید $y(t)=x(t)+1$ و $z(t)=y(t)-1$ که نشان می‌دهد سیستم 2 غیرخطی اند. اگر سیستم‌ها به صورت سری وصل شوند $z(t)=x(t)$ سیستم خطی خواهد بود.

پ) فرض کنید خروجی سیستم 1/1 $\omega[n]$ وخروجی سیستم 1/2 $z[n]$ بنامیم در اینصورت:

$$\begin{aligned}y[n]=x[2n]&=\omega[2n]+\tfrac{1}{2}\omega[2n-]+\tfrac{1}{4}\omega[2n-2]\\&=x[n]+\tfrac{1}{2}x[n-1]+\tfrac{1}{4}x[n-2]\end{aligned}$$

سیستم کلی خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود

مسئله ۴۳-۱

(الف) سیستم LTI با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر $x(t)$ دوره متناوب با دوره تناوب T باشد، $y(t)$ نیز چنین است. نشان دهید که برای حالت گسسته در زمان نیز نتیجه مشابهی بدست می‌آید.

ب) مثالی از یک سیستم تغییرناپذیر با زمان با سیگنال ورودی نامتناوب $x(t)$ بیان کنید که خروجی $y(t)$ و به صورت متناوب به دست دهد.

حل: الف) داریم:

$$x(t)\xrightarrow{s}y(t)$$
$$x(t-T)\xrightarrow{s}y(t-T)$$

حال اگر، $x(t)$ با تناوب T، متناوب باشد، $x(t)=x(t-T)$ در این صورت نتیجه می‌گیریم که $y(t)=y(t-T)$ با دوره تناوب T، متناوب است. دلیلی مشابه برای سیستم‌های گسسته نیز صدق می‌کند.

مسئله ۴۴-۱

(الف) نشان دهید که علی بودن برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان با بیان زیر هم ارزست:

به ازای هر زمان t_0 و هر سیگنال $x(t)$ با $x(t)=0$ در $t<t_0$، خروجی $y(t)$ نیز باید در $t<t_0$ صفر باشد. برای حالت گسسته در زمان نیز می‌توان گزاره مشابهی بیان کرد.

ب) یک سیستم غیرخطی بیابید که شرط فوق را داشته باشد، ولی علّی نباشد.

ج) یک سیستم غیرخطی بیابید که علّی باشد، ولی این شرط را ارضا نکند.

د) نشان دهید که وارونپذیری یک سیستم گسسته در زمان خطی معادل بیان زیر است:

تنها ورودی ایجادکننده $y[n]=0$، برای تمام مقادیر n، $x[n]=0$، برای تمام مقادیر n، است. برای سیستمهای خطی پیوسته در زمان نیز گزاره مشابهی صدق می‌کند.

هـ) یک سیستم غیرخطی بیابید که شرط بند (د) را ارضا کند ولی وارونپذیر نباشد.

حل: الف) فرض کنید: اگر $x(t)=0$ برای $t<t_0$، در این صورت برای $t<t_0$، $y(t)=0$ برای اثبات اینکه سیستم کازال است:

فرض کنید $x_1(t)$ سیگنال دلخواهی است. فرض کنیم $x_2(t)$ سیگنال دیگری است که در $t<t_0$ مشابه $x_1(t)$ می‌باشد. اما برای $t<t_0$، $x_2(t)\neq(t)$ است. از آنجایی که سیستم خطی است:

$$x_1(t)-x_2(t)\rightarrow y_1(t)-y_2(t)$$

چون برای $t<t_0$ $x_1(t)-x_2(t)=0$ فرض ما برای $t<t_0$ $y_1(t)-y_2(t)=0$. این نشان می‌دهد که برای $t<t_0$ $y_1(t)-y_2(t)$. به عبارت دیگر برای $t<t_0$ خروجی از ورودی نمی‌پذیرد. ازینرو سیستم سیستم کازال است.

فرض: سیستم کازال است. نشان می‌دهیم که اگر برای $t<t_0$، $x(t)=0$ در اینصورت برای $t<t_0$، $x(t)=0$.

فرض کنید برای $t<t_0$ سیگنال $x(t)$ برابر صفر است: $x(t)=0$.

در این صورت می‌توان بیان کرد $x(t)=x_1(t)-x_2(t)$ که $x_1(t)=x_2(t)$ برای $t<t_0$.

از آنجایی که خروجی سیستم خطی برابر است با $y(t)=y_1(t)-y_2(t)$.

حال، از آنجایی که سیستم کازال است $y_1(t)=y_2(t)$ برای $t<t_0$. بنابراین $t<t_0$، $y(t)=0$.

ب) فرض کنید $y(t)=x(t)x(t+1)$ حال، برای $t<t_0$، $x(t)=0$ بیان می‌دارد که برای $t<t_0$، $y(t)=0$. به خاطر داشته باشید که سیستم غیرخطی و غیرکازال است.

ج) فرض کنید $y(t)=x(t)+1$ ، این سیستم خطی اما کازال است. که شرط قسمت (۱) را ارضاء نمی‌کند.

د) فرض: سیستم تغییرناپذیر با زمان است. نشان می‌دهیم که $y[n]=0$ برای تمام مقادیر n اگر $x[n]=0$ فرض کنید.

$x[n]=0\to y[n]$

چون ورودی در دو معادله ی بالا تغییر نیافت. بایستی $y[n]=2y[n]$. این امر بیان می‌کند که $y[n]=0$. از آنجایی که فرض کردیم سیستم تغییرناپذیر با زمان است، تنها یک ورودی می‌تواند به یک خروجی خاص منجر شود. و این ورودی باید به صورت $x[n]=0$ باشد.

فرض: به ازای همه مقادیر n $y[n]=0$ اگر $x[n]=0$ برای کل n. نشان می‌دهیم که سیستم تغییرناپذیر است:

فرض کنید:

$x_1[n]\to y_1[n]$

,

$x_2[n]\to y_2[n]$

از آنجایی که سیستم خطی است:

$x_1[n]-x_2[n]\to y_1[n]-y_1[n]=0$

با توجه به فرض اصلی، بایستی نتیجه بگیریم که $x_1[n]=x_2[x]$ ، یعنی هر $y_1[n]$ خاصی می‌تواند توسط یک ورودی $x_1[n]$ تولید شود. بنابراین سیستم تغییرناپذیر است.

ت)

$$y[n]=x^2[n]$$

مسئله ۴۵-۱

➢ در مسئله ۱-۳۷ مفهوم تابع همبستگی را معرفی کردیم. محاسبه تابع همبستگی $\Phi_{hx}(t)$ در حالتی که $h(t)$ سیگنال معینی است، ولی $x(t)$ می‌تواند هر سیگنالی باشد، از لحاظ عملی مهم است. برای این منظور سیستم S طراحی می‌کنند که ورودی آن $x(t)$ و خروجی آن $\Phi_{hx}(t)$ باشد.

الف) آیا S خطی است؟ آیا S تغییرناپذیر با زمان است؟ آیا S علّی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

ب) اگر خروجی به جای $\Phi_{hx}(t)$ ، $\Phi_{xh}(t)$ باشد آیا پاسخهای بند (الف) تغییر می‌کند یا نه؟

حل: فرض کنید:

$x_1(t)\xrightarrow{s}y_1(t)=\phi_{hx_1}(t)$

$x_2(t)\xrightarrow{s}y_2(t)=\phi_{hx_2}(t)$

حال فرض کنید: $x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$ خروجی سیستم متناظر برابر است با:

$$
\begin{aligned}
y_3(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_3(\tau)h(t+\tau)d\tau \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)h(t+\tau)d\tau + b\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)h(t+\tau)d\tau \\
&= a\phi_{hx_1}(t) + b\phi_{hx_2}(t) \\
&= ay_1(t) + by_2(t)
\end{aligned}
$$

بنابراین $\$$ خطی است.

حال، فرض کنیم: $x_4(t) = x_1(t-T)$، خروجی سیستم متناظر برابر خواهد بود با:

$$
\begin{aligned}
y_4(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_4(\tau)h(t+\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau-T)h(t+\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)h(t+\tau+T)d\tau \\
&= \phi_{hx_1}(t+T)
\end{aligned}
$$

پر واضح است که $y_4(t) \neq y_1(t-T)$ بنابراین، سیستم تغییرپذیر با زمان است.

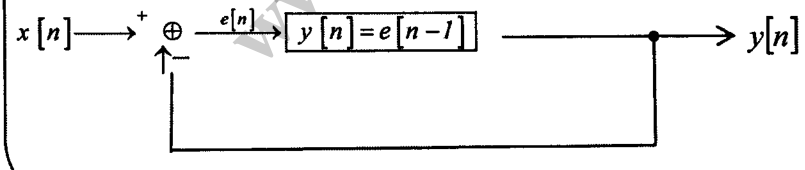
سیستم بطور توصیفی کازال نیست زیرا خروجی درهر زمان به زمان آینده سیگنال ورودی $x(t)$ وابسته است.

مسئله ۴۶-۱

سیستم فیدبک دار شکل ۱-۴۶ را در نظر بگیرید و فرض کنید که به ازای $n < 0$ داریم $y[n] = 0$.

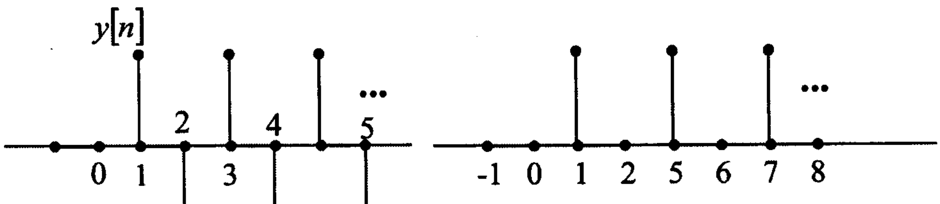
الف) خروجی را به ازای $x[n] = \delta[n]$ رسم کنید

ب) اگر $x[n] = u[n]$ باشد، خروجی را رسم کنید.



شکل م ۱-۴۶

حل: طرح، در شکل م **1.46** رسم شده است.



شکل م **1.46**

مسئله ۴۷-۱

(الف) فرض کنید که S یک سیستم نوعاً خطی، $x_1[n]$ یک سیگنال ورودی دلخواه، و $y_1[n]$ خروجی متناظر با آن است. سیستم شکل م ۱-۴۷ (الف) را در نظر بگیرید. نشان دهید که این سیستم خطی می‌باشد و در واقع رابطه کلی ورودی خروجی بین $x[n]$ و $y[n]$ به انتخاب $x_1[n]$ بستگی ندارد.

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که S را می‌توان به صورت شکل ۱-۴۸ نمایش داد.

ج) کدام یک از سیستمهای زیر نمواً خطی است؟ پاسخ خود را با دلیل بیان کنید و اگر سیستمی‌نمواً خطی است، سیستم خطی L و پاسخ ورودی صفر $y_0[n]$ یا $y_0(t)$ آن را برای نمایش سیستم به صورت شکل ۱-۴۸ بیابید.

(i) $$y[n]=n+x[n]+2x[n+4]$$

(ii) $$y[n]=\begin{cases} n/2 & n \text{ زوج} \\ (n-1)\Big/\left(1+\sum_{k=-\infty}^{(n-1)/2} x[k]\right) & n \text{ فرد}\end{cases}$$

(iii) $$y[n]=\begin{cases} x[n]-x[n-1]+3 & ,\ x[0]\ge 0 \\ x[n]-x[n-1]-3 & ,\ x[0]<0\end{cases}$$

(iv) سیستم شکل م ۱-۴۷ (ب)

(v) سیستم شکل م ۱-۴۷ (ج)

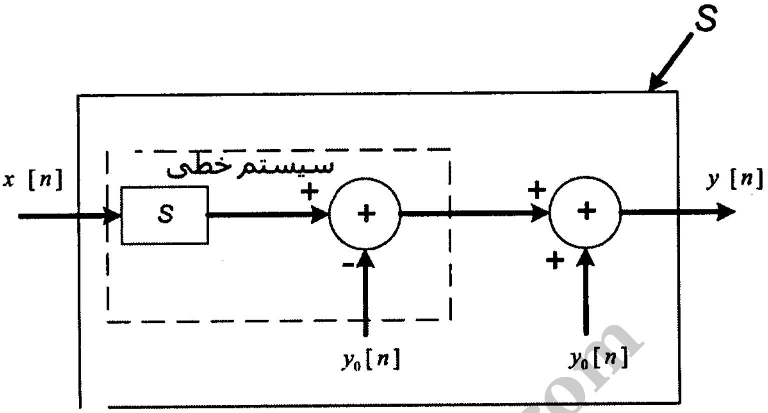
(د) فرض کنید یک سیستم نمواً خطی خاص نمایشی مطابق شکل ۱-۴۸ دارد که L سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان و $y_0[n]$ پاسخ به ورودی صفر آن است. نشان دهید که S تغییرناپذیر با زمان است اگر و تنها S تغییرناپذیر با زمان و $y_0[n]$ ثابت باشد.

حل: الف) پاسخ کلی سیستم شکل م-۴۷ (الف) = $\{(x[n])+x_1[n]$ پاسخ سیستم به $\} - \{x_1[n]$ پاسخ سیستم به $\}$

$= \{(x[n])+x_1[n]$ به L پاسخ ورودی صفر سیستم + پاسخ یک سیستم خطی$\}$

$-\{(x_1[n]$ + پاسخ صفر سیستم) به ورودی L پاسخ یک سیستم خطی$\}$

$= \{\ x[n]$ به L پاسخ یک سیستم خطی $\}$



شکل م1.47

ب) اگر $x_1[n]=0$ برای تمامیn، در این صورت $y_1[n]$ نمایش ورودی صفر $y_0[n]$ خواهد بود.
S ممکن است در این صورت دوباره همانند شکل 1.47 S رسم شود. این مشابه شکل 1.48 است.

ج) i) تعمیم خطی

$$x[n]\to x[n]+2x[n+1] \quad \text{و} \quad y_0[n]=n$$

ii) تعمیم خطی

$$x[n]\to\begin{cases}\sum_{k=-\infty}^{0(n-1)/2} x[k] & n \text{ زوج}\\ & n \text{ فرد}\end{cases}$$

و

$$y_0[n]=\begin{cases}n/2 & n \text{ زوج}\\ (n-2)/2 & n \text{ فرد}\end{cases}$$

iii) تعمیم خطی نیست: با انتخاب $y_0[n]=3$ داریم:

$$y[n]-y_0[n]=\begin{cases}x[n]=x[n-1] & x[0]\geq 0\\ x[n]-x[n-1]-6 & x[0]<0\end{cases}$$

اگر $x_1[n]=-\delta[n]$ و $x_2[n]=-2\delta[n]$ در این صورت $y_1[n]=-\delta[n]+\delta[n-1]-6$ و
$2y_1[n]\neq y_2[n]=-2\delta[n]+2\delta[n-1]-6$

iv) تعمیم خطی:

$$x(t) \to x(t) + t\frac{dx(t)}{dt} - 1 \;\text{و}\; y_\circ(t) = 1$$

V تعمیم خطی:

$$x[n] \to 2\cos(\pi n)x[n] \;\text{و}\; y_\circ[n] = \cos^2(\pi n)$$

$$\text{و}\; x[n] \xrightarrow{s} y[n]$$

د) فرض کنید: $x[n] \xrightarrow{s} y[n]$ و $x[n] \to z[n]$ در این صورت $y[n] = z[n] + c$، برای تغییرناپذیری نیاز داریم که وقتی ورودی $x[n-n_\circ]$ باشد، خروجی با:

$$y[n-n_\circ] = z[n-n_\circ] + c$$

برابر شود، این نشان می‌دهد که: $x[n-n_\circ] \xrightarrow{\ell} z[n-n_\circ]$

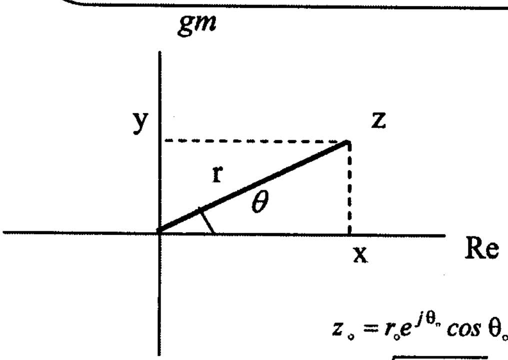
در بازگشت نشان می‌دهد که ℓ باید تغییرناپذیر با زمان باشد. همینطور می‌خواهیم که $y[n] = c \leftarrow c$ ثابت مستقل از n باشد.

مسئله ۱ ۲۸

$z_\circ$ را عدد مختلطی با مختصات قطبی $(r_\circ, \theta_\circ)$ و مختصات دکارتی $(x_\circ, y_\circ)$ فرض کنید. عبارتهایی برای مختصات دکارتی اعداد مختلط زیر برحسب $x_\circ$ و $y_\circ$ پیدا کنید. نقطه‌های $z_\circ$، z_1، z_2، z_3، z_4، و z_5 رادر صفحه مختلط به ازای $r_\circ = 2$ و $\theta_\circ = \pi/4$ و به ازای $r_\circ = 2$ و $\theta_\circ = \pi/2$ رسم کنید. بخشهای حقیقی و موهومی‌هر نقطه را مشخص کنید.

الف) $z_1 = r_\circ e^{-j\theta_\circ}$ ب) $z_2 = r_\circ$ ج) $z_3 = r_\circ e^{j(\theta_\circ + \pi)}$

د) $z_4 = r_\circ e^{j(-\theta_\circ + \pi)}$ هـ) $z_5 = r_\circ e^{j(\theta_\circ + 2\pi)}$



شکل م ۱–۴۸

حل: داریم:

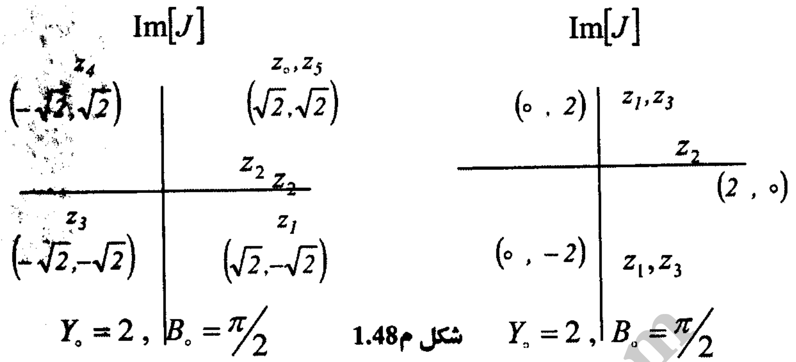
$$z_\circ = r_\circ e^{j\theta_\circ} \cos\theta_\circ tjr \circ \sin\theta = x_\circ + jy_\circ$$

الف) $z_1 = x_\circ - jy_\circ$ ب) $z_2 = \sqrt{x_\circ^2 + y_\circ^2}$

ج) $z_3 = -x_\circ - jy_\circ = -z_\circ$ د) $z_4 = -x_\circ + jy_\circ$

هـ) $z_5 = x_\circ + jy_\circ$

در شکل م ۱,۴۸ نمایشی از نقاط داده شده آمده است.



شکل م1.48

مسئله ۴۹-۱

هر یک از اعداد مختلط زیر رابه شکل قطبی بیان کنید، آنها را در صفحه مختلط نشان دهید و اندازه و زاویه هر عدد را مشخص کنید.

الف) $1+j\sqrt{3}$ ب) -5 ج) $-5-5j$ د) $3+4j$

ه) $\left(1-j\sqrt{3}\right)^3$ و) $(1+j)^5$ ز) $\left(\sqrt{3}+j^3\right)\left(1-j\right)$

ح) $\dfrac{2-j\left(6/\sqrt{3}\right)}{2+j\left(6/\sqrt{3}\right)}$ ط) $\dfrac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$ ی) $j(1+je)^{j\pi/6}$

ک) $\left(\sqrt{3}+j\right)2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$ ل) $\dfrac{e^{j\pi/3}-1}{1+j\sqrt{3}}$

حل: الف) در اینجا $r=\sqrt{1+3}=2$ و نیز $\cos\theta = 1/2$ و $\sin\theta=\sqrt{3/2}$ این بیان می‌دارد که $\theta=\pi/3$ بنابراین.

الف) $1+j\sqrt{3}=2e^{j\pi/3}$ ب) $5e^{j\pi}$ ج) $5\sqrt{2}e^{j3\pi/4}$

د) $5e^{j\tan^{-1}(4/3)}=5e^{j(53.13^\circ)}$ ه) $8e^{-j\pi}$ و) $4\sqrt{2}e^{j\frac{5\pi}{4}}$

ذ) $2\sqrt{2e^{-j\frac{5\pi}{12}}}$ خ) $e^{-j2\pi/3}$ ط) $e^{j\pi/6}$

ک) $\sqrt{2}e^{j11\pi/12}$ ل) $4\sqrt{2}e^{-j\pi/12}$ م) $\frac{1}{2}e^{j\pi/3}$

مسئله ۵۰-۱

(الف) با استفاده از رابطه اویلر یا شکل م ۱-۴۸ عبارتی برای x و y برحسب r و θ بیابید.

ب) عبارتی برای r و θ برحسب x و y تعیین کنید.

ج) اگر r و θ معلوم باشد آیا می‌توانیم x و y را به طور یکتا تعیین کنیم؟ درباره جواب خود توضیح بدهید.

حل: (الف) $x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

(ب) داریم: $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\cos^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = y^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$$

اگر $r = 0$ باشد θ تعریف نشده است. از آنجا که θ و $\theta+2m\pi$ (که در آن m, θ, π) نتیجه مشابهی دارند θ یکتا نمی‌باشد.

(ج) θ و $\theta+\pi$ مقادیر یکسانی از لحظات مثلثاتی دارند تنها می‌دانیم که عدد مختلط برابر است با $z_1 re^{j\theta}$ یا $-z_1 = z_2 = re^{j(\theta+\pi)}$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad (م1.51.1)$$

و

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \qquad (م1.51.2)$$

با ادغام (م1.51-1) و (م1.51-2) داریم:

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(e^{j\theta}+e^{j\theta}\right)$$

(د) با جایگذاری معادله (م1.51.2) در (م1.51.1) داریم:

$$\sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)$$

(هـ) می‌دانیم که $e^{j(\theta+\phi)} = e^{j}e^{j\phi}$ بنابراین:

$$\cos(\theta+\phi)+j\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta sos\phi-\sin\theta\sin\phi)+(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi) \qquad (م\ 1.51.3)$$

با قرار دادن $\theta = \phi$ در معادله ی (م1.51.3) داریم:

$$\cos_2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

و با قرار دادن $\theta = -\phi$ در معادله (م1.51.3-1) داریم:

$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

با جمع زدن دو رابطه فوق و خلاصه سازی خواهیم داشت:

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

و)با معادلسازی قسمت حقیقی (S1.513) با آرگمان $(\theta+\phi)$ و $(\theta-\phi)$ داریم:

$$\cos(\phi+\theta)=\cos\theta\cos\phi-\sin\phi\sin\theta$$

,

$$\cos(\theta-\phi)=\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi$$

با ادغام در رابطه فوق داریم:

$$\sin\theta\sin\phi=\tfrac{1}{2}\left[\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)\right]$$

ز) معادلسازی قسمت موهومی در معادله (S1.51.3) داریم:

$$\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi$$

مسئله ۵۲-۱

z را یک متغیر مختلط فرض کنید، یعنی $z=x+jy=re^{j\theta}$

مزدوج مختلط z فرض کنید، یعنی $z=x+jy=re^{j\theta}$

روابط زیر را به دست آورید، z، z_1 و z_2 اعداد مختلط دلخواهی هستند.

الف) $zz^*=r^2$ ب) $\dfrac{z}{z^*}=e^{j2\theta}$ ج) $z+z^*=2\,Re\{z\}$

د) $z-z^*=2\,jgm\{z\}$ هـ) $(z_1+z_2)^*=z_1^*+z_2^*$ و) $(az_1z_2)^*=az_1^*z_2^*$، a حقیقی است

ز) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^*=\dfrac{z_1^*}{z_2^*}$ ح) $Re\left\{\dfrac{z_1}{z_2}\right\}=\dfrac{1}{2}\dfrac{z_1z_*+z_1^*z_2^*}{z_2z_2^*}$

حل:

الف) $zz^*=re=re^{je}re^{-j\theta}=r^2$

ب) $z/z^*=re^{j\theta}r^{-1}e^{j\theta}=e^{j2\theta}$

ج) $z+z^*=x+jy+x-jy=2x=2\,Re\{x\}$

د) $z-z^*=x+jyx+jy=2jy=2\ Im\{x\}$

هـ) $(z_1+z_2)^*=\left((x_1+x_2)+j(y_1+y_2)\right)^*=x_1-jy_1+x_2-jy_2=z_1^*+z_2^*$

ز) $(\alpha_1z_1z_2)^*$ فرض کنید برای $\alpha>0$

$$(az_1z_2)^*=\left(|a|r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2+\pi)}\right)^*=|a|e^{j\pi}r_1e^{j\theta_1}r_2e^{-j\theta_2}=az_1^*z_2^*$$

برای $a<0$، $a=|a|e^{j\pi}$ بنابراین

$$(az_1z_2)^*=\left(|a|r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2+\pi)}\right)^*=|a|e^{-j\pi}r_1e^{-j\theta_1}r_2e^{-j\theta_2}=az_1^*z_2^*$$

برای $|x_2|\neq 0$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{r_1}{r_2} e - j\theta_1 ej\theta_2 = \frac{r_1 e^{-j\theta_1}}{r_2 e^{-j\theta_2}}$$

ح) از (ج) می‌توان نوشت:

$$Re\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*\right\}$$

با استفاده از (ز) در این مسئله داریم:

$$Re\left\{\frac{Z_1}{Z_2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) + \left(\frac{Z_1^*}{Z_2^*}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*}\right]$$

مسئله ۵۳-۱

روابط زیر را برای اعداد مختلط دلخواه z_1، z_2، و z_3 ثابت کنید.

الف) $\left(e^z\right)^* = e^{z^*}$

ب) $z_1 z_2^* + z_1^* = 2\,Re\left\{z_1, z_2^*\right\} = 2\,Re\left\{z_1^* z_2\right\}$

ج) $\left|z^*\right| = |z|$

د) $\left|z_1 z_2^* + z_1^* z_2\right| \le 2\left|z_1 z_2\right|$

هـ) $g_m\{z\} \le |z|\,,\; Re\{z\} \le |z|$

و) $\left|z_1 z_2^* + z_1^*\right| \le 2\left|z_1 z_2\right|$

ز) $\left(|z_1| - |z_2|\right)^2 \le |z_1|^2 \le \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$

حل: (الف)

$$\left(e^z\right)^* = \left(e^x e^{jy}\right)^* = e^x e^{-jyx - jy} = e^{z^*}$$

(ب) فرض کنید $z_3 = z_1 z_2^*$ و $z_4 = z_1^* z_2$ در این صورت

$$z_1 z_2^* + z_1^* z_2 = z_3 + z_3^* = 2\,Re\{z_3\} = 2\,Re\left\{z_1 z_2^*\right\}$$
$$= z_4^* + z_4 = 2\,Re\{z_4\} = 2\,Re\left\{z_1^* z_2\right\}$$

(ج)

$$|x| = \left|re^{j\theta}\right| = r = \left|re^{-j\theta}\right| = \left|z^*\right|$$

(هـ) از آنجایی که $z = x + jy$ و $|z| = \sqrt{z} = \sqrt{x^2 + y^2}$. با نامساوی مثلثی:

$$Re\{z\} = x \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

,

$$Im\{z\} = y \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

(د)

$$\left|z_1 z_2^* + z_1^* z_2\right| = \left|2\,Re\left\{z_1 z_2^*\right\}\right| = \left|2 r_1 r_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right| \le 2r / r_2 = 2\left|z_1 z_2\right|$$

و) از آنجایی که $r_1 > 0$ و $r_2 > 0$ و $-1 \le \cos(\theta_1 - \theta_2) \le 1$

$$\left(|z_1| - |z_2|\right)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= |z_1 + z_2|^2$$

$$\left(|z_1| + |z_2|\right)^2 = r_1^2 + r_2^2 + z \, r/r_2 \ge |z_1 + z_2|^2$$

مسئله ۵۴-۱

روابط بیان شده در این مسئله در این کتاب زیاد کاربرد دارند.

الف) درستی رابطه زیر را ثابت کنید

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a} & a \ne 1 \text{ هر عدد مختلط} \end{cases}$$

این را فرمول جمع محدود می‌نامند.

ب) نشان دهید اگر $|a| < 1$، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$ این را فرمول جمع نامحدود می‌نامند.

ج) نشان دهید که به ازای $|a| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a^n = \frac{a}{(1-a)^2}$$

(د) جمع زیر را به ازای $|a| < 1$ حساب کنید. $\sum_{n=-2}^{7} e^n$

حل: الف) $\alpha = 1$ کاملاً مشخص است که:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = N$$

برای $\alpha \ne 1$ می‌توان نوشت:

$$(1-\alpha)\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \sum_{n=0}^{N-1} a^n - \sum_{n=0}^{N-1} a^{n+1} = 1 - \alpha$$

بنابراین:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-\alpha}$$

(ب) برای $|\alpha| < 1$ $\Leftarrow$

$$\lim_{N\to\infty} a^N = 0$$

بنابراین از نتیجه قسمت قبلی داریم:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

ج)با مشتق گیری از دو طرف نتیجه قسمت(الف)و(ب) داریم:

$$\frac{d}{d.\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{N}\right)=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$
$$=\sum n\alpha^{n-1}=\frac{1}{(1-\alpha)^{2}}$$

د) می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=k}^{\infty}a^{n}=a^{k}\sum_{n=0}a^{n}=\frac{a^{k}}{1-\alpha}\qquad for\,|\alpha|<1$$

مسئله ۵۵-۱

با استفاده از نتایج مسئله ۱-۵۴ جمعهای زیر را محاسبه کنید و جواب را به شکل قائم بیان کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{9}e^{j\pi n/2}$ ب) $\sum_{n=-2}^{7}e^{j\pi n/2}$ ج) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}e^{j\pi n/2}$

د) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}e^{j\pi n/2}$ هـ) $\sum_{n=0}^{9}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ و) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

حل: الف) مجموع مطلوب عبارتست از :

$$\sum_{n=0}^{9}e\pi^{n}/_{2}=\frac{1-e^{i\pi 10/2}}{1-e^{i\pi/2}}=1+j$$

ب) مجموع خواسته شده برابر است با:

$$\sum_{n=-2}^{7}e^{j\pi n/2}=e^{j\pi n/2}=e^{-j\frac{2\pi}{2}}\sum_{n=0}^{9}e^{jn\pi/2}=-(1+j)$$

ج) حاصل مطلوب عبارتست از:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1/_2\right)^{x}e^{j\pi n/2}=\frac{1}{1-\left(1/_2\right)e^{j\pi/2}}=\frac{4}{5}+j\,\frac{2}{5}$$

د) سری عبارتست از:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1/_2\right)^{n}e^{j\pi n/2}=\left(1/_2\right)^{2}e^{j\pi 2/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1/_2\right)^{n}e^{j\pi n/2}=1/_4\left(\frac{4}{5}+j\,\frac{2}{5}\right)$$

هـ)

$$\sum_{n=0}^{9} \cos\left(n\pi/2\right) = 1/2 \sum_{n=0}^{9} e^{\pi n/2} + 1/2 \sum_{n=0}^{9} ej\pi n/2$$
$$= 1/2(1+j) + 1/2(1-j) = 1$$

و) سری مورد نظر برابر است با:

$$\sum\left(1/2\right)^{\eta} \cos\left(n\pi/2\right) = 1/2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(1/2\right)^{\eta} . e^{j\pi n/2} + 1/2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(1/2\right)^{\eta} e^{-j\pi n/2}$$
$$= 4/10 + j\,2/10 + 4/10 - j\,2/10 = 4/5$$

مسئله ۵۶-۱

انتگرالهای زیر را محاسبه کرده، جواب را به شکل قائم بیان کنید.

الف) $\int_0^4 e^{j\pi t/2}dt$ ب) $\int_0^6 e^{j\pi t/2}dt$ ج) $\int_2^8 e^{j\pi t/2}dt$

د) $\int_0^{\infty} e^{-(1+j)}dt$ هـ) $\int_0^{\infty} e^{-t}\cos t\,dt$ و) $\int_0^{\infty} e^{-2t}\sin(3t)dt$

حل: انتگرال‌های مورد نظر:

الف)

$$\int_0^4 e^{i\pi t/2}dt = \frac{e^{\pi t/2}}{j\pi/2}\int_0^4 = 0$$

ب)

$$\int_0^4 e^{j\pi t/2}dt = \frac{e^{\pi t/2}}{j\pi/2}\int_0^6 = \left(2/\pi j\right)\left[e^{j3\pi} - 1\right] = \frac{4j}{\pi}$$

ج)

$$\int_2^8 e^{j\pi t/2}dt = \frac{e^{\pi t/2}}{j\pi/2}\int_2^8 = \left(2/j\pi\right)\left[e^{j4\pi} - e^{j\pi}\right] = -4\,j/\pi$$

د)

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+j)t}dt = \frac{e^{(1+j)t}}{-(1+j)}\int_0^{\infty} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-j}{2}$$

انتگرال مورد نظر عبارتست از:

هـ)

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos t\,dt = \int_0^\infty\left[\frac{e^{-(1+j)t}+e^{-(1-j)t}}{2}\right]dt = \frac{1/2}{1+j}+\frac{1/2}{1-j} = 1/2$$

و) انتگرال مطلوبست برابر است با:

ذ)

$$\int_0^\infty e^{-2}\sin 3t dt = \int_0^\infty\left[\frac{e^{-(2-3)j}e^{-(2+3)t}}{}\right] = \frac{1/2\,j}{2-3j}+\frac{1/2\,j}{2+3j} = \frac{3}{13}$$

فصل ۳

سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

مسئله ۱-۲

فرض کنید

$$h[n]=2\delta[n+1]+2\delta[n-1] \quad , \quad x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]-\delta[n-3]$$

کانولوشنهای زیر را پیدا کرده و آنها را رسم کنید.

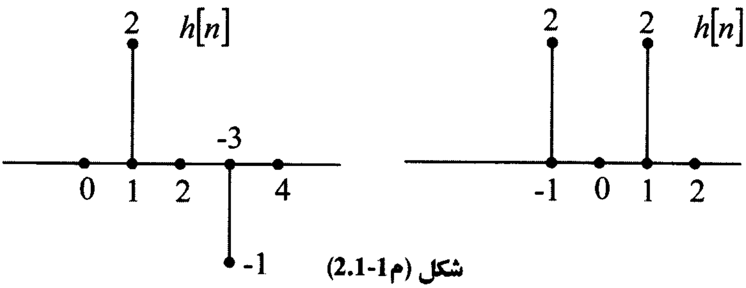
الف) $y_1[n]=x[n]*h[n]$ ب) $y_2[n]=x[n+2]*h[n]$

ج) $y_3[n]=x[n]*h[n+2]$

حل:

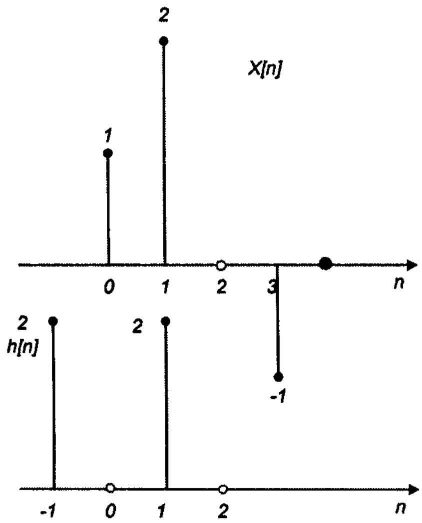
(الف) می‌دانیم که:

$$y_1[n]=h[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$



شکل (م1-2.1)

سیگنالهای $x[n]$ و $h[n]$ در شکل م 2.1 نشان داده شده‌اند.



شکل م1-2

از این شکل‌ها به راحتی می‌توانیم کانولوشن فوق را به صورت زیر خلاصه کنیم:

$$y_1[n] = h[-1]x[n+1] + h[n]x[n-1]$$
$$= 2x[n+1] + 2x[n-1]$$

که نتیجه می‌دهد.

$$y_1[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] - +2\delta[n-2] - 2\delta[2-4]$$

(ب) می‌دانیم که:

$$y_2[n] = x[n+2] * h[n] = \sum_{K=-N}^{+\infty} h[k]x[n+2-k]$$

با مقایسه با معادله (م2.1.1.) داریم:

$$y_2[n] = y_1[n+2]$$

ج) می‌توانیم معادله (م۱,۱,۲) به صورت زیر بنویسیم:

$$y_1[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]h[n-k]$$

به طور مشابه می‌توان داشت:

$$y_3[n] = x[n] * h[n+2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n+2-k]$$

با مقایسه با رابطه(م۱,۱,۲) می‌توان نوشت:

$$y_3[n] = y_1[n+2]$$

مسئله ۲-۲

➢ سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)n-\{u[n+3]-u[n-10]\}$$

A و B را برحسب n به نحوی بیابید که معادله زیر برقرار باشد.

$$h[n-k]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}, & A\le k\le B\\ 0, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

حل: با استفاده از تعریف داده شده برای سیگنال $h[n]$ می‌توان نوشت:

$$h[k]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\{u[k+3]-u[k-10]\}$$

سگینال $h[k]$ تنها دربازه‌ی $-3\le k\le 9$ صفر نیست. از این می‌دانیم که سیگنال $h[-k]$ تنها در بازه‌ی $-9\le k\le 3$ صفر نیست. حال اگر $h[-k]$ رابه اندازه n به سمت راست شیفت دهیم، در اینصورت سیگنال $h[n-k]$ حاصل می‌شود که در بازه $n-9\le k\le n+3$ صفر نیست بنابراین:

$$A=n-9$$
$$B=n+3$$

مسئله ۳-۲

➢ ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ زیر را در نظر بگیرید

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$$
$$h[n]=u[n+2]$$

خروجی $y[n]=x[n]*h[n]$ را بیابید.

حل: فرض کنید سیگنال‌های $x_1[n]$ و $h[n]$ به صورت زیر تعریف شوند.

$$x_1[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

,

$$h[n]=u[n]$$

توجه داشته باشید که $x[n]=x_1[n-2]$ و $h[n]=h_1[n+2]$

حال:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$
$$=x_1[n-z]*h[n+2]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k-z]h_1[n-k+2]$$

با جایگذاری $m+2$ بجای k در سیگمای فوق بدست می‌آوریم.

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m]h_1[n-m]=x_1[n]*x_1[n]*h_1[n]$$

با استفاده از نتیجه مثال 2.1 در متن کتاب درسی، می‌توان نوشت:

$$y[n]=2\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u[n]$$

مسئله ۴-۲

$y[n]=x[n]*h[n]$ را به ازای $x[n]$ و $h[n]$ زیر بیابید و آن را رسم کنید.

$$x[n]=\begin{cases}1 & , \quad 3\le n\le 8\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$
$$h[n]=\begin{cases}1 & , \quad 4\le n\le 15\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

حل: می‌دانیم که:

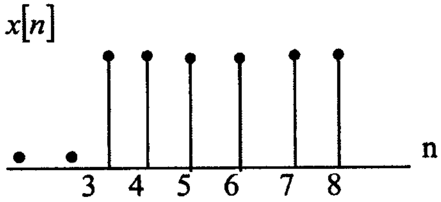
$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[k]h[n-k]$$

سیگنال $x[n]$ و $y[n]$ در شکل م 2.4 نشان داده شده اند.
ازاین شکل ملاحظه می‌شود که مجموع فوق به شکل زیر خلاصه می‌شود:

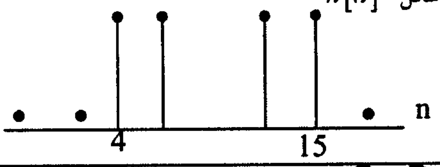
$$y[n]=x[3]h[n-3]+x[4]h[n-4]+x[5]h[n-5]$$
$$+x[6]h[n-6]+x[7]h[n-7]+x[8]h[n-8]$$

که نتیجه می‌دهد:

$$y[n]=\begin{cases}n-6 & 7\le n\le 11\\ 6 & 12\le n\le 18\\ 24-n & 19\le n\le 23\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$



نمودار شکل $h[n]$



مسئله ۵-۲

◄ فرض کنید.

$$\eta[v]=\begin{cases}1 & , \quad 0\le v\le N\\ 0 & , \quad otherwise\end{cases} \quad \text{و} \quad h[n]=\begin{cases}1 & , \quad 0\le n\le 9\\ 0 & , \quad otherwise^*\end{cases}$$

که در آن $N \le 9$ یک عدد صحیح است. N را به نحوی تعیین کنید که برای $y[n]=x[n]*h[n]$ داشته باشیم.

$$x[14]=0 \quad , \quad x[4]=5$$

حل: سیگنال $y[n]$ برابر است با:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{9}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{9}h[n-k]$$

از این رابطه مشخص است که $y[n]$ برابر مجموع شیفت یافته $h[n]$ می‌باشد. از آنجایی که جمله‌ی آخر در $n=9$ اتفاق می‌افتد و $h[n]$ برای $n>N$ برابر صفر است $y[n]$ برای $n>N+9$ صفر است. بااستفاده از این حقیقت که $y[14]=0$، می‌توان نتیجه گرفت که N حداکثر می‌تواند 4 باشد. بعلاوه از $y[4]=5$ می‌توان نتیجه گرفت که $h[n]$ حداقل 5 نقطه فاقد صفر دارد. تنها مقدار N که هر دو شرط را برآورده می‌کند 4 است.

مسئله ۶-۲

◄ کانولوشن $y[n]=x[n]*h[n]$ را به ازای $x[n]$ و $h[n]$ زیر بیابید و آن را رسم کنید.

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}u[-n-1] \quad , \quad h[n]=u[n-1]$$

حل: از اطلاعات داده شده داریم:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(1/3\right)^{-k}x[-k-1]u[n-k-1]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(1/3\right)^{-k}u[n-k-1]$$

$$=\sum_{k-1}^{\infty}\left(1/3\right)^{k}u[n+k-1]$$

جایگذاری k توسط p-1 داریم:

$$y[n]=\sum_{p=0}^{\infty}\left(1/3\right)^{p+1}u[n+p]$$

برای $n\geq 0$ معادله‌ی بالایی به صورت زیر در می‌آید:

$$y[n]=\sum_{p=0}^{\infty}\left(1/3\right)^{p+1}=1/3\,\frac{1}{1-1/3}=1/2$$

برای $n>0$ معادله (م2.6.1) به صورت خلاصه می‌شود:

$$y[n]=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left(1/3\right)^{p+1}=\left(1/3\right)^{-n+1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(1/3\right)^{p}$$
$$=\left(1/3\right)^{-n+1}\frac{1}{1-1/3}=\left(1/3\right)^{-n}1/2=\frac{3^n}{2}$$

بنابراین

$$y[n]=\begin{cases}3^n/2 & n>0\\ 1/2 & n\geq 0\end{cases}$$

مسئله ۷-۲

➢ برای سیستم خطی S رابطه زیر بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ وجود دارد

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-2k]$$

و در آن $g[n]=u[n]-u[n-4]$.

الف) $y[n]$ را به ازای $x[n]=\delta[n-1]$ بیابید.

ب) $y[n]$ را به ازای $x[n]=\delta[n-2]$ بیابید.

ج) آیا S و LTI است؟

د) $y[n]$ را به ازای $x[n]=u[n]$ بیابید.

حل: (الف) فرض بر اینست که: $x[n]=\delta[n-2]$

ملاحظه می‌کنیم که:

$$y[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-2k]=\delta[n-4]$$
$$=u[n-4]-u[n-8]$$

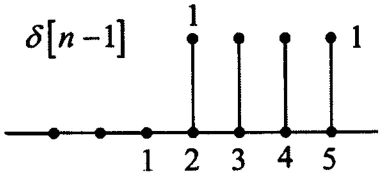
(ب) ورودی سیستم در قسمت (ب) مشابه قسمت (الف) به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست شیفت یافته است. اگر S تغییرپذیر با زمان باشد، در این صورت خروجی سیستم بدست آمده در قسمت (ب) باید با خروجی بدست آمده سیستم در قسمت (الف) با یک شیفت به اندازه‌یک واحد به راست، باشد. واضح است که این، آن مورد ذکر شده نیست بنابراین سیستم LTI نیست.

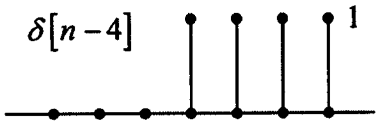
(ج) اگر $x[n]=u[n]$ در این صورت

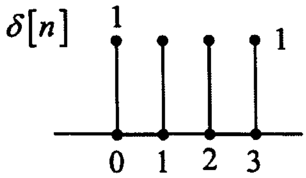
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[k]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-2k]$$

سیگنالهای $\delta[n-2k]$ برای $k=0\,,1\,,\,2$ در شکل م 2.7 رسم شده اند. با توجه به این شکل واضح است که:

$$y[n]=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 2 & n>=2u[n]-\delta[n]-\delta[n-1]\\ 0 & \end{cases}$$







شکل م2.7

مسئله ۸–۲

کانولوشن دو سیگنال زیر را بیابید و نتیجه را رسم کنید.

$$x(t)=\begin{cases}t+1, & 0\le t\le 1\\ 2-1, & 1\le t\le 2\\ 0\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$
$$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$$

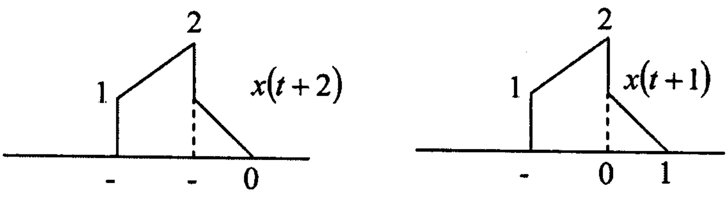
حل: با استفاده از انتگرال کانولوشن داریم:

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$ داده شده است. که باعث می‌شود انتگرال فوق به شکل زیر خلاصه شود:

$$x(t)*y(t)=x(t+2)+2x(t+1)$$

سیگنال $x(t+2)$ و $2x(t+1)$ در شکل م 2.8 نمایش داده شده است.



شکل م2-8

با استفاده از شکل‌های فوق می‌توان به راحتی نشان داد که:

$$y(t)=\begin{cases} t+3 & -2<t\le -1 \\ t+4 & -1t\le \circ \\ 2-2t & \circ<t\le 1 \\ \circ & b \end{cases}$$

مسئله ۹-۲

➢ فرض کنید $h(t)=e^{2t}u(-t+4)+e^{-2t}u(t-5)$ A و B را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau<A \\ \circ\ , & A<\tau<B \\ e^{2(t-\tau)}, & B<\tau \end{cases}$$

حل: با استفاده از تعریف داده شده برای سیگنال $h(t)$، می‌توان نوشت:

$$h(\tau)=e^{2\tau}u(-\tau+4)+e^{-2\tau}u(\tau-5)=\begin{cases} e^{-2\tau} & \tau>5 \\ e^{2\tau} & \tau>4 \\ \circ & 4<\tau<5 \end{cases}$$

بنابراین: $$h(-\tau)=\begin{cases} e^{2\tau} & \tau>-5 \\ e^{-2\tau} & \tau>-4 \\ \circ & -5<\tau-4 \end{cases}$$ پس:

$$A=t-5 \quad , \quad B=t-4$$

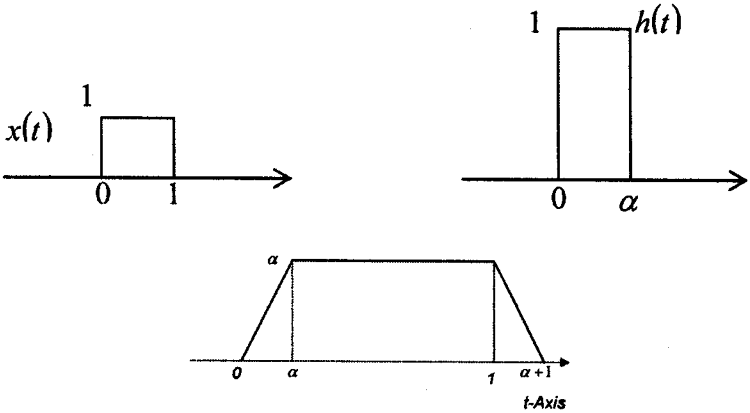
مسئله ۱۰-۲

➢ فرض کنید که $x(\tau)=\begin{cases} 1, & 0\le\tau\le 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت.}\end{cases}$ و $h(t)=x(t/a)$ که در آن $0<a\le 1$

الف) $y(t)=x(t)*h(t)$ را بیابید و آن را رسم کنید.

ب) اگر $dy(t)/dt$ تنها سه ناپیوستگی داشته باشد، مقدار a چقدرست؟

حل: با استفاده از اطلاعات داده شده که می‌توانیم $x(t)$ و $h(t)$ را به شکل، شکل‌های م 2.10 را رسم کنید. (a) به کمک طرحهای شکل م2.10 می‌توان نشان داده $y(t)=x(t)*h(t)$ همنطور که در اشکال م2.10 نشان داده شده اند.



شکل م2.10

بنابراین:
$$y(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le\alpha \\ \alpha & \alpha\le t\le 1 \\ 1+\alpha-t & 1\le t\le 1+\alpha \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

(ب) از شکل بالا برای $y(t)$، واضح است که $\frac{dy(t)}{dt}$ در $0,\alpha,1,1+\alpha$ ناپیوسته است. اگر بخواهیم $\frac{dy(t)}{dt}$ تنها سه نقطه‌ی ناپیوستگی داشته باشد؛ در این صورت بایستی $\alpha=1$ انتخاب گردد.

مسئله ۱۱-۲

➢ فرض کنید: $x(t)=u(t-3)-u(t-5)$, $h(t)=e^{-3t}u(t)$

الف) $y(t)=x(t)*h(t)$ ب) $g(t)=(dx(t))/dt*h(t)$

ج) $g(t)$ چه رابطه ای با $y(t)$ دارد.

حل: (الف) از اطلاعات داده شده ملاحظه می‌کنید که $h(t)$ تنها در بازه $0 \le t \le \infty$ صفر نیست، بنابراین:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{0}^{\infty}e-3\tau\left(u\left(t-\tau-3\right)\right)-u\left(t-\tau-5\right)d\tau$$

براحتی می‌توان نشان داد که $\left(u(t-\tau-3)-u(t-\tau-5)\right)$ تنها در بازه $t-5<\tau<t-3$ صفر نیست. بنابراین به ازای $t \le 3$ انتگرال فوق برابر صفر است. برای $3<t\le 5$ انتگرال فوق به صورت زیر است:

$$y(t)=\int_{0}^{t-3}e^{-3\tau}d\tau=\frac{1-e^{-3(t-3)}}{3}$$

برای $t>5$ انتگرال برابر است با:

$$y(t)=\int_{t-5}^{t-3}e^{-3\tau}d\tau=\frac{\left(1-e^{-5}\right)e^{-3(t-5)}}{3}$$

بنابراین؛ نتیجه کانولوشن به صورت زیر قابل بیان است:

$$y(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 3\\ \dfrac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3>t\le 5\\ \dfrac{\left(1-e^{-5}\right)e^{-3(t-5)}}{3} & 5<t\le\infty\end{cases}$$

(ب) با مشتقگیری از $x(t)$ در حوزه زمان داریم:

$$\frac{dx(t)dt}{dt}=\delta(t-3)-\delta(t-5)$$

بنابراین:

$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$$

$$=e^{-3(t-3)}u(t-3)-^{-(t-5)}u(t-5)$$

ج) از نتیجه (الف) می‌توانیم مشتق $y(t)$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\frac{dy(t)}{dt}=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 3\\ e^{-3(t-3)} & 3<t\le 5\\ \left(e^{-6}-1\right)e^{-3(t-5)} & 5<t\le\infty\end{cases}$$

که این دقیقاً برابر با $g(t)$ است بنابراین $g(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$.

مسئله ۱۲-۲

➢ فرض کنید $y(t)=e^{-t}u(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)$

نشان دهید که در $0\le t<3$، $y(t)=Ae^{-t}$ و A را بیابید.

حل: سیگنال $y(t)$ را می‌توان به صورت

$$y(t)=...+e^{-(t-6)}u(t+6)+e^{-(t+3)}u(t+3)+e^{-t}u(t)+e^{-(t-3)}u(t-3)+e^{-(t-6)}u(t-6)+...$$

در بازه‌ی $0\le t<3$ نوشت؛ می‌توان $y(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$y(t)=...+e^{-(t+0)}u(t+6)+e^{-(t+3)}u(t+3)+e^{-t}u(t)$$
$$=e^{-t}+e^{-(t+3)}+e^{-(t+6)}+...$$
$$=e^{-t}\left(1+e^{-3}+e-6+...\right)=e^{-t}\frac{1}{1-e^{-3}}$$

بنابراین: $A=\dfrac{1}{1-e^{-3}}$ می‌باشد.

مسئله ۱۳-۲

➢ سیستم گسسته در زمان S_1 با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید

$$h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

الف) A را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم $h[n]-A\,h[n-1]=\delta[n]$.

ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) پاسخ ضربه $\delta[n]$ سیستم S_2 را به نحوی تعیین کنید که S_2 وارون S_1 باشد.

حل: (الف) نیاز داریم که بدانیم:

$$\left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n]-A\left(\tfrac{1}{5}\right)^{n-1}u[n-1]=\delta[n]$$

با قراردادن $n=1$ و محاسبه A داریم: $A=\tfrac{1}{3}$

(ب) از قسمت (الف) می‌دانیم که:

$$h[n]-\frac{1}{5}h[n-1]=\delta[n]$$

$$h[n]*\left(\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]\right)=\delta[n]$$

با استفاده از تعریف معکوس سیستم داریم: $g[n]=\delta[n]-\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$

مسئله ۱۴-۲

◄ کدام یک از پاسخ ضربه‌های زیر پاسخ ضربه‌یک سیستم LTI پایدارست؟

الف) $h_1(t)=e^{-(1-2j)t}u(t)$ ب) $h_2(t)=e^{-t}\cos(2t)u(t)$

حل: (الف) ابتدا تعیین می‌کنیم که $h_1(t)$ انتگرال معینی به شکل زیر باشد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h_1(\tau)|d\tau=\int_0^{\infty}e^{-\tau}d\tau=1$$

بنابراین $h_1(t)$ پاسخ ضربه‌یک سیستم پایدار است.

(ب) اگر $h_2(t)$ انتگرال معینی به شکل زیر باشد، تعیین می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h_2(\tau)|d\tau=\int_0^{\infty}e^{-t}|\cos 2t|d\tau$$

این انتگرال به طور واضح مقدار محدودی دارد زیرا $e^{-t}|\cos 2t|$ یک تابع نمایی در بازه $0\le t\le\infty$ است. بنابراین $h_2(t)$ پاسخ ضربه‌ی یک سیستم LTI می‌باشد.

مسئله ۱۵-۲

◄ کدام یک از پاسخ ضربه‌های زیر پاسخ ضربه‌یک سیستم LTI پایدارست؟

الف) $h_1[n]=n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$ ب) $h_2[n]=3^n u[-n+10]$

حل: (الف) اگر $h_1[n]$ مجموع (سیگمای) معینی به شکل زیر باشد، تعیین می‌کنیم:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h_1|k||=\sum_{k=0}^{\infty}k\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right|$$

این سری مقدار محدودی ندارد زیرا با تابع $k\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right|$ با افزایش مقدار k، صعودی است. بنابراین $h_1[n]$ نمی‌توان پاسخ ضربه‌یک سیتم LTI پایدار باشد.

(ب) اگر $h_2[n]$ سری معینی به شکل زیر باشد، تعیین می‌کنیم:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h_2|k||=\sum_{k=-\infty}^{10}3^k\cong 3^{11}/2$$

بنابراین $h_2[n]$ پاسخ ضربه‌یک سیستم پایدار LTI است.

مسئله ۱۶-۲

درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

الف) اگر در $n < N_1$، $x[n]=0$ و در $n < N_2$، $h[n]=0$؛ آنگاه در $n < N_1+N_2$، $y[n]=x[n]*h[n]=0$.

ب) اگر $y[n]=x[n]*h[n]$، آنگاه $y[n-1]=x[n-1]*h[n-1]$.

ج) اگر $y(t)=x(t)*h(t)$، آنگاه $y(-t)=x(-t)*h(-t)$.

د) اگر در $t>T_1$، $x(t)=0$، و در $t>T_2$، $h(t)=0$، آنگاه در $t>T_1+T_2$، $x(t)*h(t)=0$.

حل: (الف) صحیح؛ این مطلب را به راحتی با توجه به اینکه کانولوشن می‌تواند بعنوان یک فرآیند،اصل بر هم نهی $h[n]$ را انجام دهد، به بحث گذاشت. این، می‌تواند بعنوان انعکاسی در محل اولین نمونه صفر $x[n]$ اتفاق بیافتد. در این مورد اولین انعکاس در N_1 اتفاق می‌افتد. انعکاسی از $h[n]$ که در $n=N_1$ اتفاق می‌افتد، اولین نمونه‌ی صفر خود را در محل زمانی N_1+N_2 خواهد داشت، بنابراین برای تمامی‌مقادیر n که N_1+N_2 به خود اختصاص می‌دهد، خروجی $h[n]$ صفر است.

(ب) نادرست؛ فرض کنید:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

از اینرو:

$$y[n-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-1-k]$$
$$=x[n]*h[n-1]$$

این نشان می‌دهد که حالت مفروض، نادرست است.

(ج) صحیح؛ فرض کنید:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

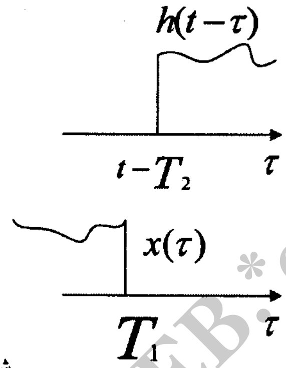
بنابراین:

$$y(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(-\tau-t)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)h(-t+\tau)d\tau$$
$$=x(-t)*h(-t)$$

که نشان می‌دهد وضعیت داده شده صحیح است.

(د) صحیح؛ این مسئله با فرض زیر می‌تواند بحث شود: $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

در شکل م 2.16، $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ را رسم کرده ایم (با فرض اینکه (۱) برای $t>T_1$ $x(t)=0$ و (۲) برای $t>T_2$، $x[n]+x\left[n-N/2\right]$: واضح است، حاصلضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ اگر $t-T_2>T_1$ برابر صفر خواهد بود، بنابراین برای $t>T_1+T_2$، $y(t)=0$.



شکل م ۱۶-۲

مسئله ۱۷-۲

یک سیستم LTI با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ و رابطه خروجی-ورودی زیر در نظر بگیرید

$$\frac{d}{dt}y+4y(t)=x(t) \qquad \text{(م ۲-۱۷-۱)}$$

سیستم در ابتدا ساکن است.

الف) $y(t)$ به ازای $x(t)=e^{(-1+3j)t}$ چیست؟

ب) توجه کنید که $Re\{x(t)\}$ و $Re\{y(t)\}$ معادله (م ۲-۱۷-۱) را ارضا می‌کنند. خروجی $y(t)$ سیستم LTI را به ازای ورودی زیر بیابید:

$$x(t)=e^{-t}\cos(3t)u(t)$$

حل: (الف) می‌دانیم که $y(t)$ مجموع جواب همگن و خصوصی معادله دیفرانسیل داده شده است.

ابتدا پاسخ خصوصی $y_p(t)$ را با استفاده از روش جایگذاری (روشی که در مثال 2.14 آمده است.) بدست می‌آوریم. از آنجایی که ورودی $x(t)=e^{(-1+3j)t}u(t)$ برای $t>0$، اعمال می‌کنیم؛ بدست می‌آوریم.

$$y_p(t)=ke^{(-1+3j)t} \quad \text{برای } t>0$$

با جایگذاری $x(t)$ و $y(t)$ در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$(-1+3j)ke^{(-1+3j)t}+4ke^{(-1+3j)t}=e^{(-1+3j)t}$$

که بدست می‌دهد:

$$(-1+3j)k+4k=1$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{3(1+j)}$$

بنابراین:

$$y_p=\frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t} \qquad t>0$$

برای بدست آوردن جواب همگن، قرار می‌دهیم:

$$y_y(t)=Ae^{st}$$

از آنجایی که حل همگن، باید معادله‌ی دیفرانسیل زیر را ارضاء کند:

$$\frac{dy_h(t)}{dt}+4yh(t)=0$$

بدست می‌آوریم: $2\ Y\ =1$

که بیان می‌کند برای هر مقدار A، S=-4 می‌باشد. جواب کلی معادله به صورت زیر می‌باشد؛

$$y(t)=Ae^{-4t}+\frac{1}{3(1+j)}e^{(-1+3j)t} \quad t>0$$

حال برای تعیین ثابت k ازاین حقیقت استفاده می‌کنیم که سیستم شرایط اولیه را ارضاء می‌کند. داده شده است $y(0)=0$ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$A+\frac{1}{3(1+j)}=0$$

$$\Rightarrow A=\frac{-1}{3(1+j)}$$

بنابراین $t>0$ داریم:

$$y(t)=\frac{1}{3(1+j)}\left[-e^{-4t}+e(-1+3j)t\right] \ ; \ t>0$$

از آنجایی که سیستم باید شرایط اولیه را ارضاء کند، برای $t>0$، $y(t)=0$ بنابراین:

$$y(t)=\frac{1-j}{6}\left(-e^{-4t}+e^{(-1+3j)t}\right)u(t)$$

ب) خروجی، قسمت حقیقی پاسخ بدست آمده در قسمت (الف) خواهد بود.

$$y(t)=\frac{1}{6}\left(e^{-t}\cos 3t+e^{-t}\sin 3t-e^{-4t}\right)u(t)$$

مسئله ۱۸-۲

➢ ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم علّی LTI با معادله تفاضلی زیر به هم مربوط می‌شوند

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+x[n]$$

$y[n]$ را به ازای $x[n]=\delta[n-1]$ بیابید.

حل: از آنجایی که سیستم کازال است، برای $n<1$، $\frac{d^2y(t)}{dt}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=bx(t)$. حال،

$$y[1]=1/_4\,y[0]+x[1]=0+1=1$$
$$y[2]=1/_4\,y[1]+x[2]=1/_4+0=1/_4$$
$$y[3]=1/_4\,y[2]+x[3]=1/_{16}+0=1/_{16}$$
$$\vdots$$
$$y[m]=\left(1/_4\right)^{m-1}$$

بنابراین:
$$y[n]=(n)=\left(1/_4\right)^{n-1}u[n-1]$$

مسئله ۱۹-۲

➢ اتصال سری دو سیستم S_1 و S_2 به صورت شکل م ۲-۱۹ را در نظر بگیرید:

$$x[n]\longrightarrow\boxed{S_1}\xrightarrow{w[n]}\boxed{S_2}\longrightarrow y[n]$$

شکل م ۲-۱۹

S_1: علّی LTI $\quad w[n]=\frac{1}{2}w[n-1]+x[n]$

S_2: علّی LTI $\quad y[n]=\alpha y[n-1]+\beta w[n]$

معادله تفاضلی بین $x[n]$ و $y[n]$ عبارت است از

$$y[n]=-\frac{1}{8}y[n-2]+\frac{3}{4}y[n-1]+x[n]$$

الف) α و β را بیابید.

ب) پاسخ ضربه اتصال سری سیستمهای S_1 و S_2 را بیابید.

حل: (الف) معادله‌ی دیفرانسی مربوط با و $\omega[n]$ را برای S_2 در نظر بگیرید:

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta\omega[n]$$

از این می‌توان نوشت:

$$\omega[n] = \frac{1}{\beta}y[n] - \frac{\alpha}{\beta}y[n-1]$$

و

$$\omega[n-1] = \frac{1}{\beta}y[n-1] - \frac{\alpha}{\beta}y[n-2]$$

با ضرب معادله در $1/2$ و جایگذاری در مرحله قبلی داریم:

$$\omega[n] - 1/2\,\omega[n-1] = \frac{1}{\beta}y[n] - \frac{\alpha}{\beta}y[n-1] - \frac{1}{2\beta}y[n-1] + \frac{\alpha}{2\beta}y[n-2]$$

با جایگذاری این در معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به $\omega[n]$ و $x[n]$ برای S_1 داریم:

$$\frac{1}{\beta}y[n] - \frac{\alpha}{\beta}y[n-1] - \frac{1}{2\beta}y[n-1] + \frac{\alpha}{2\beta}y[n-2] = x[n]$$

یعنی:

$$y[n] = \left(\alpha + 1/2\right)y[n-1] - \frac{\alpha}{2}y[n-2] + \beta x[n]$$

با مقایسه با معادله‌ی داده شده مربوط به $y[n]$ و $x[n]$ داریم:

$$\alpha = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \beta = 1$$

(ب) معادله دیفرانسیل ورودی و خروجی سیستم‌های S_1 و S_2 عبارتند از:

$$\omega[n] = 1/2\,\omega[n-1] + x[n]$$

,

$$y[n] = 1/4\,y[n-1] + \omega[n]$$

از مثال 2.15 می‌توانیم استفاده کنیم تا نشان دهیم که پاسخ ضربه سیستمهای S_1 و S_2 عبارتند از:

$$x[n] = -(-1)^n x[n] = (-1)^{n+1} x[n]$$

پاسخ ضربه کلی سیستم از اتصال کاسکید (آبشاری) سیستمهای S_1 و S_L بدست می‌آید:

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k]$$
$$=\sum_{\circ=k}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)*\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k}u[n-k]$$
$$=\sum_{k=\circ}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k}=\sum_{k=\circ}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2(n-k)}$$
$$=\left(2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}-\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n}\right]u[n]$$

مسئله ۲۰-۲

انتگرالهای زیر را حساب کنید:

الف) $\int_{-\infty}^{\infty}u_\circ(t)\cos(t)dt$ ب) $\int_{\circ}^{5}\sin(2\pi t)\delta(t+3)dt$

ج) $\int_{-5}^{5}u_1(1-t)\cos(2\pi\tau)d\tau$

حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_\circ(t)\cos(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

ب)

$$y_2(t)=Be^{-2t} \qquad t>\circ$$

ج) برای تعیین انتگرال $\int_{-5}^{5}u_1(1-\tau)\cos(2\pi\tau)d\tau$ فرض کنید سیگنال

$$x(t)=\cos(2\pi t)[u(t+5)-u(t-5)]$$

می‌دانیم که:

$$\frac{dx(t)}{dt}=u_1(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_1(t-\tau)x(\tau)d\tau$$
$$\int_{-5}^{5}u_1(t-\tau)\cos(2\pi\tau)d\tau$$

حال، $\left.\frac{dx}{dt}(t)\right|_{t=1}=\int_{-5}^{5}u_1(1-t)\cos(2\pi\tau)d\tau$ که انتگرال مطلوبست: مقدار انتگرال را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=1}=\sin(2\pi t)_t=1=\circ$$

مسئله ۲۱ ۲

◄ کانولوشن $y[n]=x[n]*h[n]$ را به ازای زوج سیگنالهای زیر حساب کنید

الف) $\left.\begin{matrix} x[n]=\alpha^n u[n] \\ h[n]=\beta^n u[n] \end{matrix}\right\} \alpha \neq \beta$

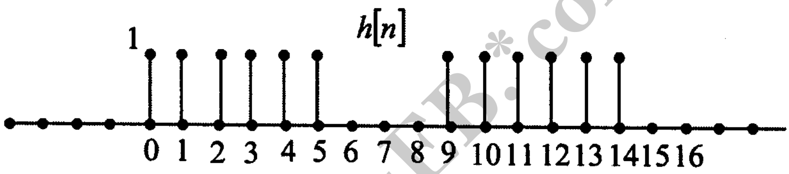
ب) $x[n]=h[n]=\alpha^n u[n]$

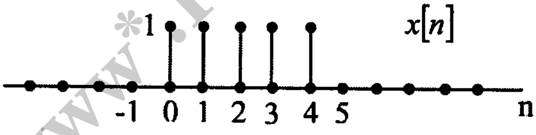
ج) $x[n]=h[n]=\alpha^n u[n]$

ج) $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$

$h[n]=4^n u[2-n]$

د) $x[n]$ و $h[n]$ شکل م ۲-۲۱.





حل: (الف) کانولوشن داده شده به صورت زیر است:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$
$$=\beta^n \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\alpha/\beta\right)^k \qquad \text{برای } n \geq 0$$
$$=\left[\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right]u[n] \qquad \text{برای } \alpha \neq \beta$$

(ب) از (الف)

$$y[n]=\alpha^n\left[\alpha^n\right]\left[\sum_{k=0}^{n} 1\right]u[n]=(n+1)\alpha^n u[n]$$

ج) برای $n \le 6$

$$y[n]=4^n\left[\sum_{k=\circ}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{8}\right)^k-\sum_{k=\circ}^{3}\left(-\tfrac{1}{8}\right)^{k-}\right]$$

برای $n>6$

$$y[n]=4^n\left\{\sum_{k=\circ}^{\infty}\left(-\tfrac{1}{8}\right)^k-\sum_{k=6}^{n-1}\left(-\tfrac{1}{8}\right)^k\right\}$$

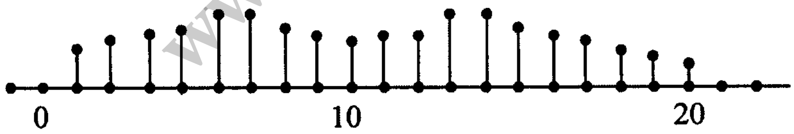
بنابراین:

$$y[n]=\begin{cases}\left(\tfrac{8}{9}\right)\left(-\tfrac{1}{8}\right)^4 4^n & n\le 6\\ \left(\tfrac{8}{9}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n & n>6\end{cases}$$

(د) کانولوشن مطلوب عبارتست از:

$$\begin{aligned}y[n]&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]\\&=x[\circ]h[n]+x[1]h[n-1]+x[2]h[n-2]\\&+x[3]h[n-3]+x[4]h[n-4]\\&=h[n]+h[n-1]+h[n-2]+h[n-3]+h[n-4]\end{aligned}$$

که در شکل زیر نشان داده شده است.

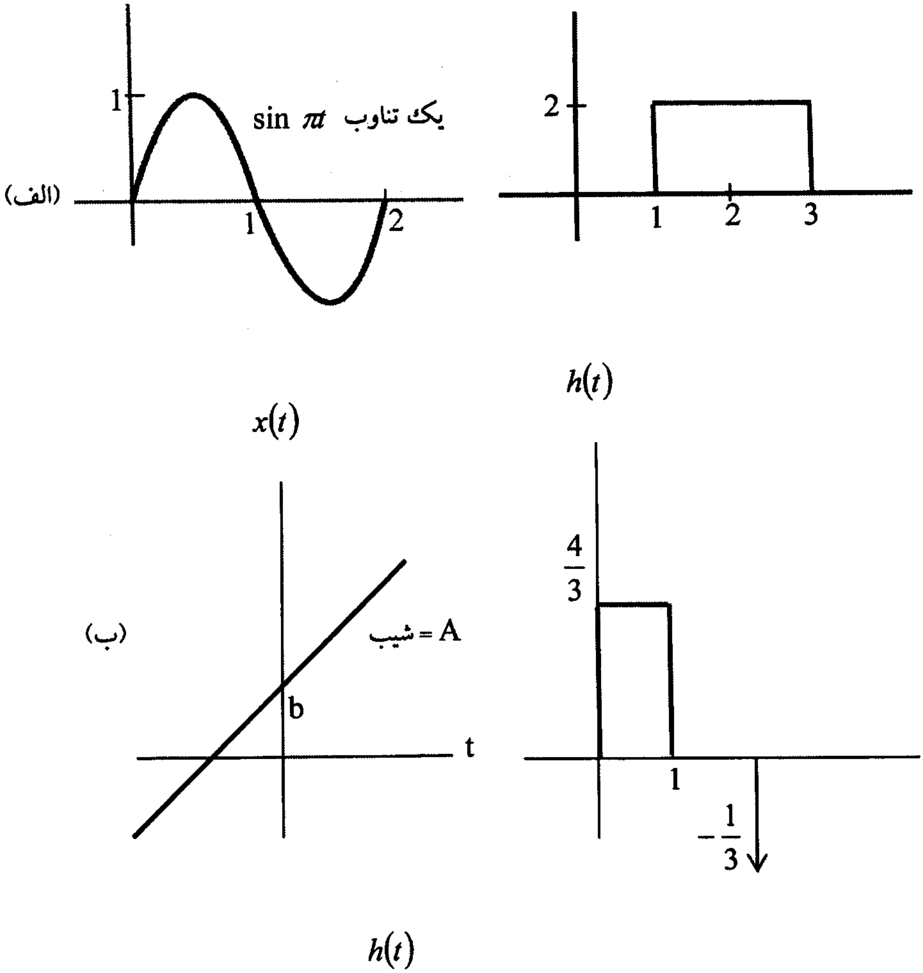


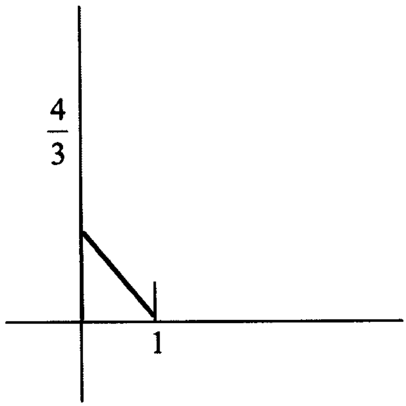
مسئله ۲۲-۲

به ازای زوج سیگنالهای داده شده، با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ $y(t)$ سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)$ به ورودی $x(t)$ را بیابید. نتایج را رسم کنید.

الف) $\begin{cases}x(t)=e^{-\alpha t}u(t)\\ h(t)=e^{-\beta t}u(t)\end{cases}$ (هم به ازای $\alpha\ne\beta$ و هم به ازای $\alpha=\beta$)

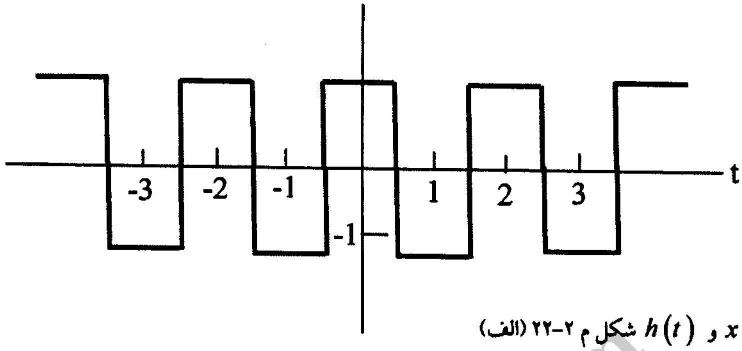
ب) $\begin{aligned}x(t)&=u(t)-2u(t-2)+u(t-5)\\ h(t)&=e^{2t}u(1-t)\end{aligned}$


(الف)
1
sin πt یک تناوب
1
2
2
1
2
3
$x(t)$
$h(t)$
(ب)
A = شیب
b
t
$\frac{4}{3}$
1
$-\frac{1}{3}$
$h(t)$


$\frac{4}{3}$
1

شکل م ۲-۲۲

(ج)



ج) $x(t)$ و $h(t)$ شکل م ۲-۲۲ (الف)

د) $x(t)$ و $h(t)$ شکل م ۲-۲۲ (ج)

هـ) $x(t)$ و $h(t)$ شکل م ۲-۲۲ (ج)

حل:

کانولوشن مطلوب عبارت است از:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_0^t e^{-\alpha t}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau \qquad t\geq 0$$

در این صورت:

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{-5t}\left(e^{-(\alpha-\beta)t}-1\right)}{\beta-\alpha}u(t) & \alpha\neq\beta\\ te^{-\beta t}u(t) & \alpha=\beta\end{cases}$$

ب) کانولوشن مطلوب عبارت از:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^2 h(t-\tau)d\tau-\int_2^5 h(t-\tau)d\tau$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$y(t)=\begin{cases}\int_0^2 e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_2^5 e^{2(t-\tau)}d\tau & t\leq 1\\ \int_{-1}^2 e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_2^5 e^{2(t-\tau)}d\tau & 1\leq t\leq 3\\ -\int_{-1}^5 e^{2(t-\tau)}d\tau 3\leq t\leq 6 & 3\leq t\leq 6\\ 0 & 6<t\end{cases}$$

بنابراین:

$$y(t)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)\left[e^{2t}-2e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}\right] & t\le 1\\ \left(\frac{1}{2}\right)\left[e^{2}+e^{2(t-5)}-2e^{2(t-2)}\right]1\le t\le 3 & 1\le t\le 3\\ \left(\frac{1}{2}\right)\left[e^{2(t-5)}-e^{2}\right] & 3\le t\le 6\\ 0 & 6<3\end{cases}$$

(ج) سیگنال مطلوب عبارتست از:

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\\ &=\int_{0}^{2}\sin(\pi t)h(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

که می‌دهد:

$$y(t)=\begin{cases}0 t<1 & t<1\\ \left(\frac{2}{\pi}\right)\left[1-\cos\left[\pi(t-1)\right]\right] & 1<t<3\\ \left(\frac{2}{\pi}\right)\left[\cos\left[\pi(t-3)\right]-1\right] & 3<t<5\\ 0 & 5<t\end{cases}$$

فرض کنید، $h(t)=h_1(t)-\frac{1}{3}\delta(t-2)$ که

$$h_1(t)=\begin{cases}\frac{4}{3} & 0\le t\le 1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

حال، $y(t)=h(t)*x(t)=\left[h_1(t)*x(t)\right]-\frac{1}{3}x(t-2)$

داریم:

$$h_1(t)*x(t)=\int_{-3}^{t}\frac{4}{3}(\alpha\tau+b)d\tau\left(\frac{1}{2}at^2-\frac{1}{2}a(t-1)^2+bt-b(t-1)\right)$$

بنابراین،

$$y(t)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}at^2-\frac{1}{2}\alpha(t-1)^2+bt-b(t-1)\right]-\frac{1}{3}\left(a(t-2)+b\right)=at+b=x(t)$$

(د) $x(t)$ پریودیک، $y(t)$ پریودیک را ارائه می‌کند: تنها یک پریودیک را تعیین می‌کنیم. داریم: $x_1(t)$

پریود $y(t)$ برابر 2 می‌باشد.

مسئله ۲۳-۲

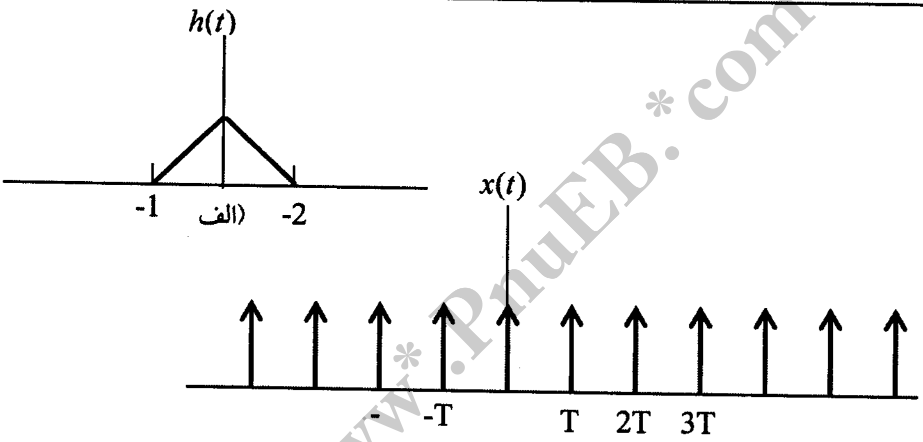
➢ $h(t)$ را پالس مستطیلی شکل م ۲-۲۳ (الف) و $x(t)$ را قطار ضربه شکل م ۲-۲۳ (ب) فرض کنید؛ یعنی

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k)$$

$y(t)=x(t)*h(t)$ را به ازای Tهای زیر بیابید آن را رسم کنید.

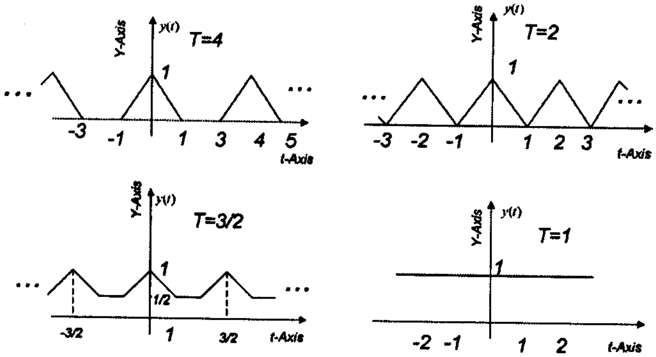
الف) $T=4$ ب) $T=2$ ج) $T=\frac{3}{2}$ د) $T=1$

حل:



شکل م 2-2

$y(t)$ برای مقادیر مختلف T در شکل م 2.23 رسم شده است.



شکل م 2.23

مسئله ۲۴-۲

ترکیب سری سیستم علی LTI به صورت نشان داده شده در شکل م ۲-۲۴ (الف) را در نظر بگیرید.
پاسخ ضربه $h_2[n]$ عبارت است از $h_2[n]=u[n]-u[n-2]$ و پاسخ ضربه سیستم کل مطابق شکل م ۲-۲۴ (ب) است.

الف) پاسخ ضربه $h_2[n]$ را بیابید.

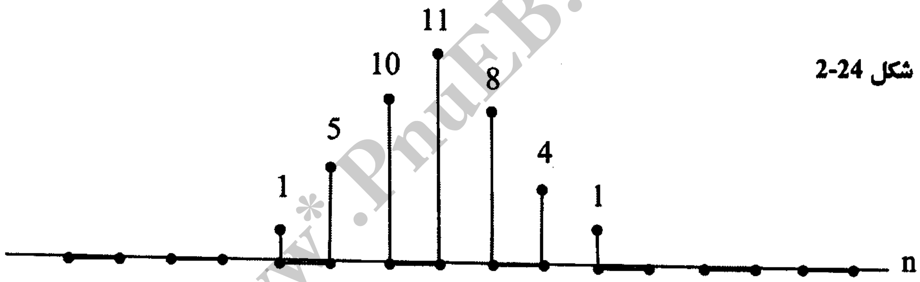
ب) پاسخ سیستم کل به ورودی زیر را بیابید.

$$x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

(الف)

شکل 2-24



(ب)

حل: (الف) فرض بر اینست که $h_2[n]=\delta[n]+\delta[n-2]$، بنابراین:

$$h_2[n]*h_2[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

از آنجایی که $h[n]=h_1[n]*\left[h_2[n]*h_2[n]\right]$

داریم:

$$h[n]=h_1[n]+2h_1[n-1]+h_1[n-2]$$

بنابراین،

$$h[0]=h_1[0]\Rightarrow h_1[0]=1$$
$$h[1]=h_1[1]+2h_1[0]\Rightarrow h_1[1]=3$$
$$h[2]=h_1[2]+2h_1[1]+h_1[0]\Rightarrow h_1[2]=3$$
$$h[3]=h_1[3]+2h_1[2]+h_1[1]\Rightarrow h_1[3]=2$$
$$h[4]=h[4]+2h_1[3]+h_1[2]\Rightarrow h_1[4]=1$$
$$h[5]=h_1[5]+2h_1[4]+h_1[3]\Rightarrow h_1[5]=0$$
$$h_1[n]=0 \qquad for \qquad n<0 \quad , \quad n>5$$

ب) در این مورد

$$y[n]=x[n]*h[n]=h[n]-h[n-1]$$

مسئله ۲۵-۲

سیگنال $y[n]=x[n]*h[n]$ را به ازای $x[n]=3^n u[-n-1]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ و $h[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$ در نظر بگیرید.

(الف) $y[n]$ را بدون استفاده از خاصیت پخشی کانولوشن بیابید.

(ب) $y[n]$ را با استفاده از خاصیت پخشی کانولوشن بیابید.

حل:

(الف) $x[n]$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x[n]=\left(1/3\right)^{|n|}$$

حال کانولوشن مطلوب عبارتست از:

$$y[n]=h[n]*x[x]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(1/3\right)^{-k}\left(1/4\right)^{n-k}u[n-k+3]$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(1/3\right)^{k}\left(1/4\right)^{n-k}u[n-k+3]$$
$$=\left(1/12\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1/3\right)^{k}\left(1/4\right)^{n+k}u(n+k+4)$$
$$+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1/3\right)^{k}\left(1/4\right)^{n-k}u[n-k+3]$$

با در نظر گرفتن هر کدام از سری‌ها در معادله فوق به صورت جداگانه، می‌توان نشان داد که:

$$y[n]=\begin{cases}\left((12)\frac{4}{11}\right)3^n & n<-4\\ \left(\frac{1}{11}\right)4^4 & n=-4\\ \left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{11}\right)+(-3)\left(\frac{1}{4}\right)^n+3(256)\left(\frac{1}{3}\right)^n & n\geq -3\end{cases}$$

(ب) حال کانولوشن را در نظر بگیرید:

$$y_1[n]=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right]*\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]\right]$$

می‌توان نشان داد که

$$y_1[n]=\begin{cases}0 & n<-3\\ -3\left(\frac{1}{4}\right)^n+3(256)\left(\frac{1}{3}\right)^n & n\geq -3\end{cases}$$

نیز کانولوشن را در نظر بگیرید:

$$y_2[n]=\left[(3)^n u[-n-1]*\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]\right]\right]$$

می‌توان نشان داد که:

$$y_2[n]=\begin{cases}\left((12)^{\frac{4}{11}}\right)3^n & n<-4\\ \left(\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{11} & n\geq -3\end{cases}$$

بطور واضح؛ $y_1[n]+y_2[n]=y[n]$ از قسمت قبلی بدست می‌آید.

مسئله ۲۶-۲

عبارت $y[n]=x_1[n]*x_2[n]*x_3[n]$ را به ازای $x_1[n]=0/5^n[n]$، $x_2[n]=u[n+3]$ و $x_2[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$ در نظر بگیرید.

الف) $x_1[n]*x_2[n]$ را حساب کنید.

ب) کانولوشن نتیجه بند (الف) با $x_3[n]$ را برای محاسبه $y[n]$ حساب کنید.

ج) $x_2[n]*x_3[n]$ را حساب کنید.

د) کانولوشن نتیجه بند (الف) با $x_1[n]$ را برای $y[n]$ حساب کنید.

حل:

(الف) داریم:

$$y_1[n]=x_1[n]*x_2[n]$$
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}x_1[x]x_2[n-k]$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}(0.5)^x u[n+3-k]$$

که برابر است با

$$y_1[n]=x_1[n]*x_2[n]=\begin{cases}2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}\right) & ,n\geq -3\\ 0 & ,else\end{cases}$$

(ب) حال:

$$y[n]=x_3[n]*y_1[n]=y_1[n]-y_1[n-1]$$

بنابراین،

$$y_1(t)=\frac{k}{4}\left[e^{2t}-e^{-2t}\right]u(t)$$

بنابراین،

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}u[n+3]$$

(ج) داریم:

$$y_2[n]=x_2[n]*x_3[n]$$
$$=u[n+3]-u[n+2]=\delta[n+3]$$

(د) با استفاده از نتیجه قسمت (ج) داریم:

$$y[n]=y_2[n]*k_1[n]=x_1[n+3]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}u[n+3]$$

مسئله ۲۷-۲

سطح زیر منحنی سیگنال پیوسته در زمان $v(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_v = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,dt$$

نشان دهید که اگر $y(t) = x(t) = x(t) * h(t)$، آنگاه $A_y = A_x A_h$

حل: اثبات این موضوع در زیر آورده شده است:

$$\begin{aligned} Ay &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t\tau)d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)dtd\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)Ay\,d\tau \\ &= AxAy \end{aligned}$$

مسئله ۲۸-۲

سیگنالهای زیر پاسخ ضربه‌های سیستمهای LTI گسسته در زمان هستند. آیا این سیستمها پایدار و/ یا علّی هستند؟ دلیل بیاورید.

الف) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

ب) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1/\circ)^n [n-1]$

ج) $h[n] = (\circ/8)^n u[n+2]$

د) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1/\circ 1)^n u[1-n]$

هـ) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

و) $h[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n [n-1]$

ز) $h[n] = (5)^n u[3-n]$

حل: (الف) کازال است زیرا $h[n]$ برای $n > \circ$ برابر صفر است.

پایدار است زیرا $\sum_{n=\circ}^{\infty} \left(1/5\right)^n = 5/4 < \infty$

(ب) کازال نیست زیرا برای $n < \circ$، $h[n] \neq \circ$ پایدار زیرا $\sum (0.8)^n = 5 < \infty$.

(ج) کانتی – کازال زیرا برای $n > 0$، $h[n] = 0$، پایدار نیست زیرا $\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty$

(د) کازال نیست زیرا $h[n] \neq 0$ برای $n < 0$، پایدار زیرا $\sum_{n=-\infty}^{3} 5^n = \frac{625}{4} < \infty$

(هـ) کازال زیرا برای $n < 0$، $h[n] = 0$، پایدار نیست زیرا جمله دوم زمانیکه $n \to \infty$ نامحدود است.

(و) کازال نیست زیرا برای $n < 0$، $h[n] \neq 0$. پایدار است زیرا $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \frac{305}{3} < \infty$

(ز) کازال است زیرا برای $n < 0$، $h[n] = 0$. پایدار است زیرا $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 1 < \infty$

مسئله ۲۹-۲

➢ سیگنالهای زیر پاسخ ضربه‌های سیستمهای LTI پیوسته در زمان هستند. آیا این سیستمها پایدار و / یا علّی هستند؟ دلیل بیاورید.

الف) $h(t) = e^{-4t}u(t-2)$

ب) $h(t) = e^{-6t}u(3-t)$

ج) $h(t) = e^{2t}u(-1-t)$

د) $h(t) = e^{2t}u(-1-t)$

هـ) $h(t) = e^{-6|t|}$

و) $h(t) = te^{-t}u(t)$

ز) $h(t) = \left(2e^{-t} - e^{-(t-100)/100}\right)u(t)$

حل:

(الف) کازال است زیرا برای $t < 0$، $h(t) = 0$، پایدار است زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = e^{-8/4} < \infty$

(ب) کازال نیست زیرا برای $t < 0$، $h(t) \neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| = \infty$

(پ) کازال نیست زیرا برای $t < 0$، $h(t) \neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = e^{50} < \infty$

(ت) کازال نیست زیرا برای $t < 0$، $h(t) \neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = e^{-2/2} < \infty$

(ث) کازال نیست زیرا برای $t < 0$، $h(t) \neq 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \frac{1}{3} < \infty$

(ج) کازال است زیرا برای $t < 0$، $h(t) = 0$. پایدار است زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = 1 < \infty$

(چ) کازال است زیرا برای $t < 0$، $h(t) = 0$. پایدار نیست زیرا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \infty$

مسئله ۳۰-۲

◄ معادله تفاضلی مرتبه اول را در نظر بگیرید $y[n]+2y[n-1]=x[n]$
با فرض سکون ابتدائی (یعنی اگر در $n<n_\circ$، $x[n]=\circ$؛ آنگاه در $n<n_\circ$، $y[n]=\circ$) پاسخ ضربه سیستمی را که رابطه ورودی ـ خروجی آن با این معادله تفاضلی توصیف شده است بیابید. شاید بهتر باشد معادله تفاضلی را به صورتی بازنویسی کنید که $y[n]$ را بر حسب $x[n-1]$ و $x[n]$ بیان کند، و مقادیر $y[\circ]$، $y[1]$، $y[2]$ و ... را به ترتیب بیابید.

حل: بایستی خروجی سیگنال را وقتی ورودی برابر $x[n]=\delta[n]=\delta[n]$ بیابیم. از آنجایی که از ما خواسته شده است تا فرض کنیم جواب نهایی را مختصر کنیم. می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای $n<\circ$ $y[n]=\circ$. حال،

$$y[n]=x[n]-2y[n-1]$$

بنابراین:

$$y[\circ]=x[\circ]-2y[-1]=1$$

و

$$y[1]=x[1]-2y[\circ]=-2$$

و

$$y[2]=x[2]+2y[2]=-4$$

به همین ترتیب،جواب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y[n]=(-2)^n u[n]$$

این پاسخ ضربه سیستم است.

مسئله ۳۱-۲

◄ سیستم LTI ابتدائا ساکن توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]+2x[n-2]$$

پاسخ این سیستم به ورودی نشان داده شده در شکل م ۲-۳۱ را با حل بازگشتی معادله تفاضلی بیابید.

حل: جواب نهایی مختصر بیان می‌دارد که برای $n<-2$، $y[n]=\circ$ حال،

$$y[n]=x[n]+2x[n-2]-2y[n-1]$$

بنابراین، $y[-2]=1\ ,\ y[-1]=\circ\ ,\ y[\circ]=5\ ,\ \ldots$

برای $y(1)=1$ $y[5]=-110\ ,\ \ldots y[n]=-110(-2)^{n-5}$

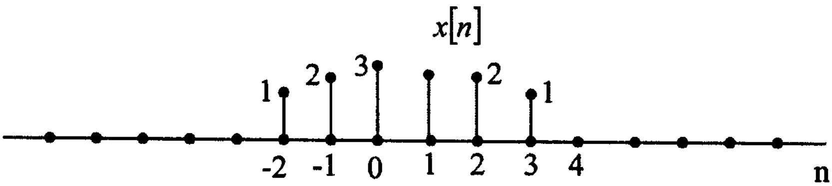
مسئله ۳۲-۲

➢ معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n] \qquad \text{(م ۲-۳۲-۱)}$$

فرض کنید که

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \qquad \text{(م ۲-۳۲-۲)}$$



شکل م ۲-۳۱

جواب $y[n]$ را مجموع جواب خصوصی $y_p[n]$ معادله (م۲-۳۲-۱) و جواب همگن $y_h[n]$ به معادله زیر فرض کنید.

$$y_h[n]-\frac{1}{2}y_h[n-1]=0$$

الف) نشان دهید که جواب همگن عبارت است از

$$y_h[n]=A(1)2^n$$

ب) جواب خصوصی $y_p[n]$ را به نحوی می‌یابیم که معادله زیر ارضا شود

$$y_p[n]-\frac{1}{2}y_p[n-1]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

فرض کنید $y_p[n]$ در $n \geq 0$ به شکل $B\left(\frac{1}{3}\right)^n$ است و با جایگزینی آن در معادله تفاضلی بالا مقدار B را بیابید.

ج) فرض کنید ورودی یک سیستم LTI توصیف شده با معادله (م ۲-۳۲-۱) و ابتدائاً ساکن، سیگنال معادله (م ۲-۳۲-۲) است. چون در $n<0$، $x[n]=0$؛ پس در $n<0$، $y[n]=0$. همچنین با توجه به بندهای (الف) و (ب) $y[n]$ در $n \geq 0$ به شکل زیرست

$$y[n]=A\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

برای یافتن ثابت مجهول B باید یک مقدار $y[n]$ در $n \geq 0$ را بدانیم. با استفاده از شرط سکون ابتدایی و معادلات (م ۲-۳۲-۱) و (م ۲-۳۲-۱) $y[0]$ را تعیین کنید. ثابت A را به کمک این مقدار بیابید. نتیجه این محاسبه جواب معادله تفاضلی (م ۲-۳۲-۱) به ازای ورودی معادله (م ۲-۳۲-۳) و شرط سکون ابتدایی است.

حل: (الف) اگر $y_h[n]=A\left(\frac{1}{2}\right)^n$ دراین صورت لازم است ثابت کنیم $A\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

واضح است که صحیح می‌باشد.

(ب) حال برای $n\geq 0$ می‌خواهیم:

$$B\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

بنابراین $B=-2$

(پ) از معادله (م 2.32.1) می‌دانیم که $y[0]=x[0]+\frac{1}{2}y[-1]y[-1]=x[0]=1$

$$y[0]=A+B \quad\Rightarrow\quad A=1-B=3$$

مسئله ۳۳-۲

◄ سیستمی‌را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را ارضا می‌کند.

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t) \qquad \text{(م ۲-۳۳-۱)}$$

این سیستم شرط سکون ابتدایی را نیز برآورده می‌کند.

الف) (i) خروجی $y_1(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_1(t)=e^{3t}u(t)$ را بیابید.

(ii) خروجی $y_2(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_2(t)=e^{2t}u(t)$ را بیابید.

(iii) خروجی $y_3(t)$ سیستم به ازای ورودی $x_3(t)=ae^{3t}u(t)+\beta e^{2t}u(t)$ را بیابید. a و β دو عدد حقیقی اند. نشان دهید که $y_3(t)=ay_1+\beta y_2(t)$.

(iv) حال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را دو سیگنال دلخواه بگیرید، به نحوی که

$x_1(t)=0\ ,\ t<t_1$ در

$x_2(t)=0\ ,\ t<t_2$ در

$y_1(t)$ را پاسخ سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ را خروجی سیستم بـه ازای ورودی $x_2(t)$، و $y_3(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_3(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_3(t)=ax_1(t)+\beta x_2(t)$ فرض کنید، نشان دهید که $y_3(t)=ay_1(t)+\beta y_2(t)$ بنابراین سیستم تحت بررسی خطی است.

ب) (i) خروجی $y_1(t)$ را به ازای ورودی $x_2(t)=Ke^{2t}u(t)$ بیابید.

(ii) خروجی $y_2(t)$ را به ازای ورودی $x_1(t)=Ke^{2(t-T)}u(t-T)$ بیابید.

نشان دهید که $y_2(t)=y_1(t-T)$.

(iii) حال $x_1(t)$ را سیگنال دلخواهی بگیرید که در $t<t_0$، $x_1(t)$. $y_1(t)$ را خروجی سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ را خروجی سیستم به ازای $x_2(t)=x_1(t-T)$ فرض کنید. نشان دهید که

$$y_2(t)=y_1(t-T)$$

پس نتیجه می‌گیریم سیستم تحت بررسی تغییرناپذیر با زمان است. با توجه به نتیجه بند (الف) سیستم داده شده LTI است. چون این سیستم شرط سکون ابتدایی را نیز دارد، علّی هم هست.

حل: (الف) i) از مثال 2.14 می‌دانیم که: $y_1(t)=\left[\frac{1}{5}e^{3t}-\frac{1}{5}e^{-2t}\right]u(t)$

ii) این را بر اساس مثال 2.14 حل می‌کنیم. ابتدا فرض کنید که $y_p(t)$ شامل ke^{2t} است.

دراین صورت با استفاده از معادله (م 2.33.1)، برای $t>0$ داریم:

$$2ke^{2t}+2ke^{2t}=e^{2t}\Rightarrow\left(k=1/4\right)$$

حال می‌دانیم که $y_p(t)=1/4\,e^{2t}$ برای $t>0$. حال جواب عمومی معادله را بدست می‌آوریم

$$y_h(t)=Ae^{-2t}$$

بنابراین،

$$y_2(t)=Ae^{-2t}+1/4\,e^{2t}\qquad for\ t>0$$

با فرض جواب نهایی، می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای $t\le 0$ $y_2(t)=0$، بنابراین.

$$y_2(0)=0=A+1/4\ \Rightarrow\ A=-1/4$$

دراینصورت

$$y_2(t)=\left[-\frac{1}{4}e^{2t}\right]+1/4\,e^{-2}u(t)$$

iii) فرض کنیم ورودی به صورت $x_3(t)=\alpha e^{3t}u(t)+\beta e^{2t}u(t)$ باشد. فرض کنیم که $y_p(t)$ جواب خصوصی بصورت زیر باشد:

$$y_p(t)=x_1\alpha_1e^{3t}+k_2\beta e^{2t}$$

برای $t>0$، با استفاده از معادله (م2.33) داریم:

$$3k_1\alpha e^{3t}+2k_2\beta e^{2t}+2k_1\alpha e^{3t}+2k_2\beta e^{2t}=\alpha e^{3t}+\beta e^{2t}$$

با متحد قرار دادن ضرایب e^{3t} و e^{2t} در دو طرف معادله داریم:

$$k_1=1/5\ ,\ k_2=1/4$$

حال، با قرار دادن $y_h(t)=A_e^{-2t}$ داریم:

$$y_3(t)=1/5\,\alpha e^{3t}+1/4\,\beta e^{2t}+Ae^{-2t}$$

برای $t > ۰$ = شرایط اولیه را به صورت زیر فیض می‌کنیم:

$$y_3 = (۰) = ۰ = A + \alpha/_5 + \beta/_4$$
$$\Rightarrow A = -\left(\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{4}\right)$$

بنابراین: $x(t)$

iv) برای ورودی ـ خروجی جفت $x_1(t)$ و $y_1(t)$، می‌توانیم از معادله (م2.33.1) استفاده کنیم و شرایط اولیه برای نوشتن: (ح2.33.1)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \\ y_1(t) = ۰ \quad \rightarrow t < t_1 \end{cases}$$

برای ورودی ـ خروجی جفت $x_2(t)$ و $y_2(t)$، می‌توانیم از معادله‌ی (م2.33.1) استفاده کنیم و شرایط اولیه برای نوشتن: (ح2.33.2)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \\ y_2(t) = ۰ \end{cases}$$

بااسکیل کردن معادله (ح2.33.1) به اندازه α ومعادله (ح2.33.2) به اندازه β و خلاصه سازی داریم:

$$\frac{d}{dt}\{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\} + 2\{\alpha y_1 t + \beta y_2(t)\} = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$
$$y_1(t) + y_2(t) = ۰ \qquad for \quad t < mm(t_1, t_2)$$

با جایگذاری، واضح است که خروجی $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ زمانیکه $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$. بعلاوه $e^{jk(2\pi/T)}$ برای $t < t_3$. که t_3 نشان دهنده زمان است تا زمانیکه $x_3(t) = ۰$.

ب) (i) بااستفاده از نتیجه (a-ii) می‌توان نوشت:

$$y_1(t) = \frac{k}{4}\left[e^{2t} - e^{-2t}\right]u(t)$$

(ii) این مسئله را در راستای مثال 2.14 حل می‌کنیم. ابتدا فرض کنید که $y_p(t)$ به صورت $KYe^{2(t-T)}$ برای $t > 2$ است. سپس با استفاده از معادله (م2.33.1) برای $t > T$ است. سپس بااستفاده از معادله (م2.33.1) برای $n \geq ۰$ داریم:

$$2ke^{2(t-T)} + 22ke^{2(t-T)} = e^{2t}$$
$$\Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

می‌دانیم که $y_p(t) = \dfrac{k}{4}e^{2(t-T)}$ برای $n \geq ۰$. حال جواب عمومی‌را بدست می‌آوریم:

$$y_h(t) = Ae^{-2t}$$

بنابراین $y_2(t)=Ae^{-2t}+\frac{k}{4}e^{2(t-T)} \quad for \quad t>T$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه، می‌توان نتیجه گرفت که برای $t\le T$ $y_2(t)=0$. بنابراین:

$$y_2(T)=0=Ae^{-2T}+k/4 \Rightarrow A=-\frac{k}{4}e^{2T};$$

در این صورت:

$$y_2(t)=\left[-\frac{k}{4}e^{-2(t-T)}+\frac{k}{4}e^{2(t-T)}\right]u(t-T)$$

آشکار است که $y_1(t-T)=x_1(t)$ که برای $t<t_0$، $x_1(t)=0$ توجه کنید که:

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t) \qquad y_1(t)=0 \quad for \quad t<t_0$$

از آنجایی که مشتق، یک عملگر تغییرپذیر با زمان است، می‌توان نوشت:

$$\frac{dy_1(t-T)}{dt}+2y_1(t-T)=x_1(t-T) \qquad y_1(t)=0 \quad for \quad t<t_0$$

این مطلب حاکی است که اگر ورودی به صورت سیگنالی از $x_2(t)=x_1(t-T)$ باشد، در اینصورت خروجی نیز سیگنالی به صورت $y_2(t)=y_1(t-T)$ خواهد بود. همچنین، توجه کنید که ورودی جدید $y_2(t)$ برای $t<t_0+T$ صفر خواهد بود. این، تغییرپذیری با زمان را بیان میدارد؛ $x_2(t)$ برای $t<t_0+T$ صفر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که سیستم تغییرپذیر با زمان است.

مسئله ۳۴-۲

➢ فرض کنید سکون ابتدایی معادل یک شرط کمکی صفرست که در زمانی قابل تنظیم با سیگنال ورودی تعیین می‌شود. در این مسئله نشان می‌دهیم که اگر شرط کمکی غیر صفر باشد یا در زمان مشخصی (مستقل از سیگنال ورودی) اعمال شود، سیستم متناظر نمی‌تواند LTI باشد. سیستمی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ فرض کنید که معادله دیفرانسیل مرتبه اول (م ۲-۳۳-۱) را ارضا کند.

(الف) با فرض شرط کمکی $y(1)=1$، با مثالی نقض نشان دهید که سیستم خطی نیست.

(ب) با فرض شرط کمکی $y(1)=1$، با مثالی نقض نشان دهید که سیستم تغییرناپذیر با زمان نیست.

ج) نشان دهید که سیستم با شرط کمکی $y(1)=1$ نمواً خطی است.

د) نشان دهید که به ازای شرط کمکی $y(1)=1$ سیستم خطی است ولی تغییرناپذیر با زمان نیست.

هـ) نشان دهید که به ازای شرط کمکی $y(0)+y(4)=0$ سیستم خطی است ولی تغییرناپذیر با زمان نیست.

حل: (الف) فرض کنید $x_1(t)\xrightarrow{S}y_1(t)$، $x_2(t)\xrightarrow{S}y_2(t)$. می‌دانیم که $y_1(1)=y_2(1)=1$ حال ورودی سومی‌را به صورت $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ در نظر بگیرید. فرض کنید خروجی متناظر نیز $y_3(t)$، باشد.

حال توجه کنید که $y_3(1)=1\neq y_1(1)+y_2(1)$. بنابراین سیستم خطی نیست. یک مثال خالص در زیر آورده شده است: خروجی متناظر برای $t<0$ برابر است با:

$$y_1(t)=\frac{1}{4}e^{2t}+Ae^{-2t}$$

با استفاده از این حقیقت که $y_1(1)=1$ برای $t>0$ داریم:

$$y_1(t)=\frac{1}{4}e^{2t}+\left(1-\frac{e}{4}\right)e^{-2(t-1)}$$

حال سیگنال $x_2(t)=0$ را فرض کنید دراین صورت خروجی متناظر برابر است با:

$$y_2(t)=Be^{-2t}$$

برای $t>0$ با استفاده از این حقیقت که $y_2(1)=1$ برای $t>0$ داریم:

$$\phi_{x_i y_i}[n]\qquad i\neq j\qquad i,j=1,2,3,4$$

حال سیگنال سوم $x_3=x_1(t)+x_2(t)=x_1(t)$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که خروجی هنوز برابراست با $y_3(t)=y_1(t)$ برای $t>0$. بدیهی است که $y_3(t)\neq y_1(t)+y_2(t)$ برای $t>0$. بنابراین سیستم خطی نیست.

(ب) دوباره سیگنال ورودی $z_2(t)=y_1(t)$ را فرض کنید. از قسمت (الف) می‌دانیم که سیگنال خروجی متناظر برای $t>0$ با $y(1)=1$ برابر است با:

$$y_1(t)=\frac{1}{4}e^{2t}+\left(1-\frac{e}{4}\right)e^{-2(t-1)}$$

حال فرض کنید سیگنال ورودی $x_2(t)=x_1(t-T)=e^{2(t-T)}u(t-T)$، در اینصورت برای $t>T$

$$y_2(t)=\frac{1}{4}e^{2(t-T)}+Ae^{-2t}$$

با استفاده ازاین حقیقت که $y_2(1)=1$ و همچنین فرض کنید $T<1$ برای $t>T$ داریم:

$$y_2(t)=\frac{1}{4}e^{2(t-T)}+\left(1-\frac{1}{4}e^{2(1-T)}\right)e^{-2(t-1)}$$

حال توجه کنید که برای $t>T$، $y_2(t)\neq y_1(t-T)$. بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان نیست.

(ج) به منظور اینکه نشان دهیم سیستم خطی صعودی با شرایط معین مثلاً $y(1)=1$ می‌باشد ابتدا بایستی نشان دهیم که سیستم با شرایط معین خطی است بطو خاص $y(1)=0$.

برای ورودی ـ خروجی جفت $x_1(t)$ و $y_1(t)$، می‌توان از (م 2.33.1) استفاده کنیم. و بااستفاده از شرایط اولیه:
(ح 2.34-1)

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t)\ ;\quad y_2(1)=0$$

برای ورودی ـ خروجی جفت $x_2(t)$ و $y_2(2)$ نیز:

$$\frac{dy_2(t)}{dt}+2y_2(t)=x_2(t)\qquad ;\ y_2(1)=0 \qquad (ح 2.34.2)$$

با اسکیل کردن (ح 2.34.1) به اندازه α و (ح 2.34.2) به اندازه β و خلاصه سازی داریم:

$$\frac{d}{dt}\{ay_1(t)+\beta y_2(t)\}+2\{ay_1(t)+\beta y_2(t)\}$$
$$=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$$

,

$$y_3(1)=y(1)+y_2(1)=0$$

ملاحظه می‌شود که خروجی به صورت $y_3(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ زمانیکه ورودی به صورت $x_3(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ بود، درآمد. بعلاوه $y(1)=0=y_1(1)+y_2(1)$ بنابراین سیستم خطی است.

بنابراین اگر سیستم کلی، به صورت کاسکید(آبشاری) با یک المان جمع کننده به سیستم خطی وصل شود پاسخ تنها شرایط معین اولیه را جمع می‌زند.

(د) در قسمت قبلی نشان دادیم که سیستم زمانی خطی است که $y(1)=0$ برای اینکه نشان دهیم سیستم تغییرناپذیر نیست، فرض کنیم یک ورودی از $x_1(t)=e^{2t}u(t)$ از قسمت (الف). می‌دانیم که خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$y_1(t)=\frac{1}{4}e^{2t}+Ae^{-2t}$$

با استفاده از این حقیقت که $y_1(1)=0$ برای $t>0$ داریم:

$$y_1(t)=\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2(t-2)}$$

فرض کنیم یک ورودی $x_2(t)=x_1\left(t-\frac{1}{2}\right)$ باشد. توجه کنید که $y_2(1)=0$ واضح است $y_2(1)\neq y_1\left(1-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(e-e^3\right)\right)$. بنابراین $y(t)\neq y_1\left(t-\frac{1}{2}\right)$ برای تمامیnها. این به این معنا است که سیستم تغییر پذیر با زمان است.

(هـ) برهانی که بسیار شبیه به اثبات خطی استفاده شده در قسمت (پ) اینجا نیز می‌تواند استفاده گردد. با روش نشان داده شده در قسمت (ت) می‌توانیم نشان دهیم که سیستم تغییرپذیر با زمان است.

مسئله ۳۵-۲

در مسئله قبل دیدیم که استفاده از شرط کمکی ثابت در زمان (مستقل از سیگنال ورودی) به سیستمی‌تغییرپذیر با زمان می‌انجامد. در این مسئله اثر شرط کمکی ثابت در زمان بر علّی بودن را بررسی می‌کنیم. سیستمی‌در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن معادله دیفرانسیل (م ۲-۳۳-۱) را ارضا کند. فرض کنید شرط کمکی این معادله دیفرانسیل $y(0)=0$ است. خروجی سیستم به ازای دو ورودی زیر را بیابید:

الف) $x_1(t)=0$

ب) $x_2(t)=\begin{cases}1\ , & \tau<-1\\ 0\ , & \tau>-1\end{cases}$

توجه کنید که $y_1(t)$ خروجی به ازای $x_1(t)$ و $y_2(t)$ خروجی به ازای $x_2(t)$ است، و گرچه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در $t<-1$ یکسان اند، ولی $y_2(t)$ در $t<-1$ یکسان نیستند. بر اساس این نتیجه می‌توان استدلالی برای علّی نبودن سیستم ارائه کرد.

حل: (الف) از آنجایی که سیستم خطی است، $y_1(t)=0$ می‌باشد.

(ب) حال فرض کنید خروجی زمانیکه ورودی $x_2(t)$ است، $y_2(t)$ باشد.

جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p(t)=Y \qquad t>-1$$

با جایگذاری در (م 2.33-1) داریم: $2Y=1$

حال، جواب عمومی‌را به صورت $y_h(t)=Ae^{-2t}$ در نظر بگیریم. جواب کلی را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$y_2(t)=Ae^{-2t}+\frac{1}{2} \qquad t>-1$$

از آنجایی که $y(0)=0$ داریم:

$$y_2(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \qquad \text{(ح 2.35-1)}$$

برای $t<-1$، نشان می‌دهیم که $x(t)=Rc\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)$. بنابراین جواب خصوصی در این بازه صفر خواهد شد و (ح 2.35-2)

$$y_2(t)=Be^{-2t} \qquad t<-1$$

از آنجاکه دو قسمت جواب $y_2(t)$ معادلات (ح 2.35-1) و (ح 2-35-2) باید در $t=-1$ بدست آیند، می‌توانیم B را از معادله بدست آوریم. در نتیجه،

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2}=Be^{2}$$

$$y_2(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2}\right)e^{-2t+1} \qquad t<-1$$

حال نشان می‌دهیم که چون $x_1(t)=x_2(t)$ برای $t<-1$ بایستی درست که برای سیستم کازال در $t<-1$، $y_1(t)=y_2(t)$ بهرحال نتیجه قسمت (الف) و (ب) نشان می‌دهد که این صحیح نیست بنابراین سیستم کازال نیست.

مسئله ۳۶-۲

➢ سیستم گسسته در زمانی را که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن به صورت زیر مرتبط اند، در نظر بگیرید.

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$$

الف) نشان دهید که در صورت ابتدائاً ساکن بودن (یعنی اگر در $n<n_0$، $x[n]=0$؛ آنگاه در $n<n_0$، $y[n]=0$) سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

ب) نشان دهید که اگر سیستم ابتدائاً ساکن نباشد، و به جای آن شرط کمکی $y[0]=0$ را ارضا کند، سیستم علّی نیست.
[راهنمایی: رهیافتی مشابه مسئله ۲-۳۵ به کار برید.]

حل: یک ورودی $x_1[n]$ را مانند $x_1[n]=0$ برای $\phi_{xy}[n] \leftarrow \boxed{h[-n]} \leftarrow \phi_{xx}[n]$ فرض کنید، خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$\begin{cases} y_1[n]=\frac{1}{2}y_1[n-1]+x_1(n) \\ y_1[n]=0 \end{cases} \qquad \text{(ح 2.36.1)}$$

و نیز ورودی دیگری بنام $x_2[n]$ را مانند $x_2[n]=0$ برای $n<n_2$ در این صورت خروجی متناظر برابر خواهد بود با:

$$y_2[n]=\frac{1}{2}y_2[n-1]+x_2[n] \qquad y_2[n]=0 \quad for \quad n<n_2$$

(ح 2.36.2)

- با اسکیل کردن معادله (S.2.36.1) به اندازه α و معادله (S.2.36.2) به اندازه β و ساده سازی داریم:

$$\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]=\frac{\beta}{2}y_1[n-1]+\frac{\beta}{2}y_2[n-1]+\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$$

با جایگذاری، بدیهی است که خروجی $y_3(t)=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$ زمانیکه $x_3[n]=\alpha x_1[n]+\beta x_{20[n]}$ بعلاوه $y_1(1)+y_2(1)=y_3(1)=0$. بنابراین، سیستم خطی است.

(ب) فرض کنیم دو ورودی $x_1[n]=0$ برای تمام nها و $x_2[n]=\begin{cases} 0 & n<-1 \\ 1 & n\geq -1 \end{cases}$ موجود هستند. از آنجایی که سیستم خطی است، پاسخ $x_1[n]$ که همان $y_1[n]$ است برای تمام nها برابر صفر است، یعنی $y_1[n]=0$

حال خروجی $y_2[n]$ را زمانی که ورودی $x_2[n]$ می‌باشد را بدست می‌آوریم: چون $y_2[0]=0$

$$\begin{cases} y_2[1]=\left(\frac{1}{2}\right)0+0=0 \\ y_2[2]=\left(\frac{1}{2}\right)0+0=0 \end{cases}$$

بنابراین $\begin{cases} y_2[n]=0 \\ for \quad n\geq 0 \end{cases}$ حال برای $n>0$ توجه کنید که: $y_2[0]=\frac{1}{2}y_2[-1]+x[0]$

بنابراین، $y_2[-1]=-2$. با فرآیندی مشابه داریم $y_2[-2]=-4$ و $y_2[-2]=-4$ و $y_2[-3]=-8$ و به همین ترتیب $y_2=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$.

حال توجه کنید که چون برای $n<0$ $x_1[n]=y_2[n]$. به هر طریق، نتایج بدست آمده از بالا نشان می‌دهد که این درست نیست. بنابراین، سیستم کازال نیست.

مسئله ۳۷-۲

سیستمی با رابطه ورودی ـ خروجی مطابق معادله تفاضلی (م ۲-۳۳-۱) در نظر بگیرید، فرض کنید سیستم نهایتاً ساکن است [یعنی اگر در $t > t_0$، $x(t) = 0$؛ آنگاه در $t > t_0$، $y(t) = 0$]. نشان دهید که این سیستم علّی نیست. [راهنمایی: دو سیگنال ورودی در نظر بگیرید، $x_1(t) = 0$ با خروجی $y_1(t)$ و $x_2(t) = e^t\left[u(t) - u(t-1)\right]$ با خروجی $y_2(t)$. نشان دهید که در $t < 0$، $y_1(t) \neq y_2(t)$.]

حل: فرض کنیم دو ورودی $x_1(t) = 0$ و $x_2(t) = e^t\left(u(t) - u(t-1)\right)$ موجود باشند.

چون سیستم خطی است، پاسخ $y_1(t) = 0$ $-\infty < n < \infty$ خواهد بود.

حال $y_2(t)$ را زمانی که $x_1(t)$ ورودی سیستم باشد را، بدست می‌آوریم. جواب خصوصی به صورت زیر می‌باشد:

$$y_p(t) = Ye^t \qquad 0 < t < 1$$

با جایگذاری در معادله (م 2.83.1) داریم: $3Y = 1$

حال جواب عمومی معادله را نیز داریم $y_h(t) = Ae^{-2t}$، جواب کلی معادله به صورت زیر می‌باشد.

$$y_2(t) = e^{-2t} + \tfrac{1}{3}e^t \qquad 0 < t < 1$$

با فرض شرایط نهایی داریم: $x(t) = m\dfrac{d^2y(t)}{dt} + b\dfrac{dy(t)}{dt} + ky(t)$، بااستفاده از این بدست می‌آوریم:

$A = -e^3/3$. بنابراین:

$$y_2(t) = -\tfrac{1}{30}e^{-2t+3} + \tfrac{1}{3}e^t \qquad 0 < t < 1 \qquad \text{(ح 2.37.1)}$$

برای $t < 0$ بایستی توجه کنید که $x_2(t) = 0$. بنابراین، جواب خصوصی در این بازه برابر صفر خواهد بود.

$$y_2(t) = Be^{-2t} \qquad t > 0 \qquad \text{(ح 2.37.2)}$$

چون دو قسمت از جواب برای $y_2(t)$ در معادلات (ح 1-2.37) و (ح 2-37-2) در $t = 0$ برقرارند. می‌توانیم B برقرارند. می‌توانیم B را از معادله بدست آوریم.

$$\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}e^3 = B$$

که در نتیجه $y_2(t) = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}e^3\right)e^{-2t} \qquad t < 0$

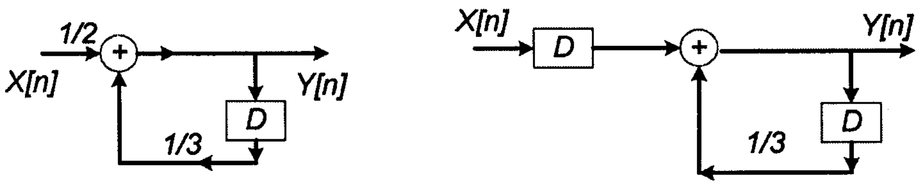
حال توجه کنید که چون برای $t < 0$ $x_1(t) = x_2(t)$، باید این درست باشد که برای یک سیتم کازال $y_1(t) = y_2(t)$ $(for\ \ t < 0)$، اما نتایج بدست آمده از معادلات فوق صحت این موضوع راتعیین نمی‌کند یعنی سیستم کازال نیست.

مسئله ۳۸-۲

◄ نمایش جعبه ای سیستمهای LTI علّی توصیف شده با معادلات تفاضلی زیر را رسم کنید:

الف) $y[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+\frac{1}{2}x[n]$ ب) $y[n]=\frac{1}{3}y[n-1]+x[n-1]$

حل: بلوک دیاگرام در شکل ح2.38 نشان داده شده است.



شکل ح2.38

مسئله ۳۹ ۲

◄ نمایش جعبه ای سیستمهای LTI علّی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را رسم کنید:

الف) $y(t)=-\frac{1}{2}dy(t)/dt+4x(t)$ ب) $dy(dt)+3y(t)=x(t)$

حل: بلوک دیاگرام در شکل ح2.39 نشان داده شده است.

شکل ح2.39

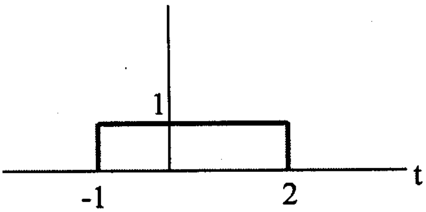
مسئله ۴۰-۲

ورودی و خروجی یک سیستم LTI با رابطه زیر هم مرتبط شده اند

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)\,d\tau$$

پاسخ ضربه $h(t)$ این سیستم چیست؟

(ب) پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ نشان داده شده در شکل م ۲-۴۰ را بیابید.



شکل م 2.40

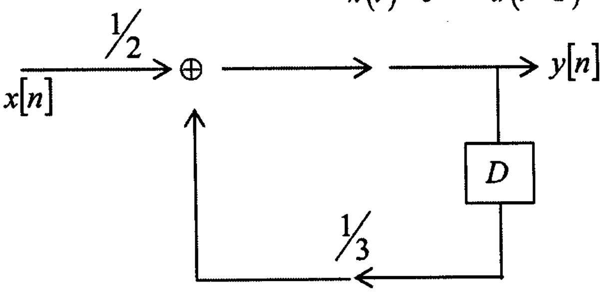
حل: (الف) توجه کنید که:

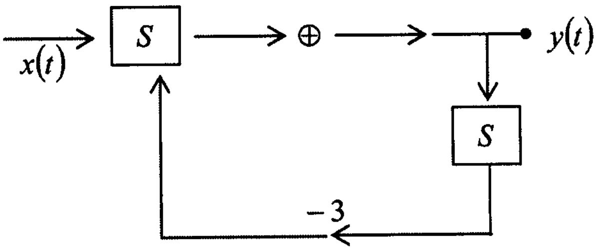
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t-\tau} e^{-(t-z-\tau')}x(\tau')\,d\tau'$$

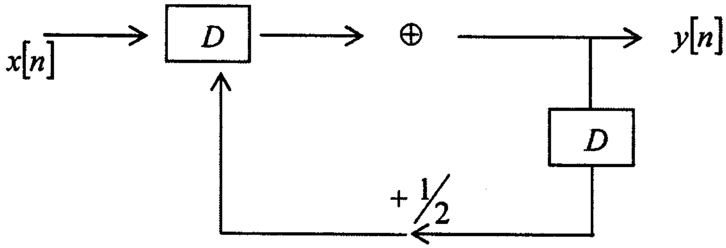
بنابراین:

$$h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$$

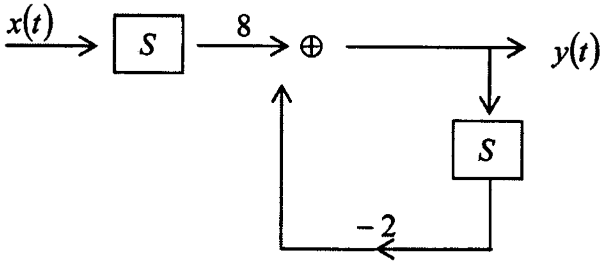
شکل ح2.38







شکل ح30. 2



شکل ح2.30

ب) داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\tau-2)}\left[u(t-\tau+1)-u(t-\tau-2)\right]d\tau$$

$h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ در شکل زیر نشان داده شده است.

با استفاده از شکل می‌تون نوشت:

$$y(t)=\begin{cases}0 & \\ \int_{2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=1-e^{-(t-1)} & t>1 \\ & 1<t<4 \\ \int_{t-2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=e^{-(t-4)}\left[1-e^{-3}\right] & t>4\end{cases}$$

مسئله ۴۱-۲

سیگنال زیر را در نظر بگیرید $x[n]=a^n u[n]$

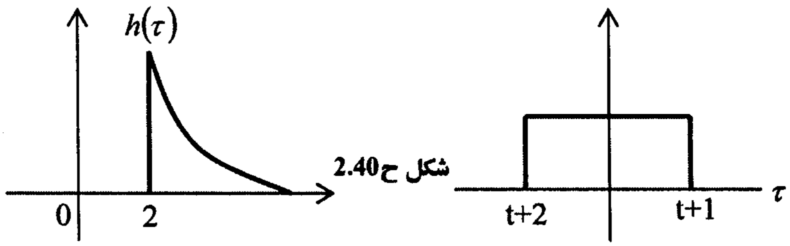
الف) سیگنال $g[n]=x[n]-ax[n-1]$ را رسم کنید.

ب) با توجه به نتیجه بند (الف) و خواص کانولوشن $h[n]$ را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$x[n]*h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\{u[n+2]\}-u[n-2]$$

حل: (الف) می‌توان نوشت:

$$g[n]=x[mn]-\alpha x[n-1]$$
$$=a^n u[n]-a^n u[n=1]=\delta[n]$$



شکل ح2.40

ب) توجه کنید که $g[n]=x[n]*\{x[n]-\alpha\delta[n-1]\}$. بنابرای از قسمت (α) می‌دانیم که $x[n]*\{\delta[n]-\alpha\delta[n-1]\}=\delta[n]$ با استفاده از ان می‌توان نوشت:

$$x[n]*\{\delta[n-1]-\alpha\delta[n-2]\}=\delta[n-1]$$
$$x[n]*\{\delta[n+1]-\alpha\delta[n]\}=\delta[n+1]$$
$$x[n]*\{\delta[n+2]-\alpha\delta[n+1]\}=\delta[n+2]$$

حال توجه کنید که: $\alpha^k<1$

بنابراین،

$$x[n]*h[n]=4x[n]*\{\delta[n+2]-\alpha\delta[n+1]\}$$
$$+2x[n]*\{\delta[n+1]-\alpha\delta[n]\}$$
$$+x[n]*\{\delta[n]-\alpha\delta[n-1]\}$$
$$+\left(1/2\right)x[n]*\delta\{n-1\}-\alpha\delta[n-2]$$

در نتیجه،

$$h[n]=4\delta[n+2]+(2+4\alpha)\delta[n+1]+(1+2\alpha)\delta[n]$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)\delta[n-1]-\tfrac{1}{2}\quad\delta[n-2]$$

مسئله ۴۲-۲

◄ دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t)=u(t+0/5)-u(t-0/5)$$
$$h(t)=e^{j\omega_0 t}$$

الف) ω_0 را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$y(t)=0$$
$$y(t)=x(t)*h(t)$$

ب) آیا جواب یکتاست؟

حل:

داریم:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-0.5}^{+0.5}e^{j\omega_0}(t-\tau)d\tau$$
$$y(0)=\int_{-0.5}^{0.5}e^{-j\omega_0\tau}dz=\frac{2}{\omega_0}\sin(\omega_0/2)$$

(الف) اگر $\omega_0=2\pi$ در اینصورت $y(0)=0$.

(ب) واضح است، جواب ما به قسمت (الف) منحصر به فرد نیست. هر $\omega_0=2k\pi \quad K\in T$ و $K\neq 0$ کافی خواهد بود.

مسئله ۴۳-۲

◄ یکی از خواص مهم کانولوشن در هر دو حالت پیوسته و گسسته در زمان، خاصیت شرکت پذیری است. در این مسئله این خاصیت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف) تساوی زیر را ثابت کنید.

$$[x(t)]*h(t)*g(t)=x(t)*[h(t)*g(t)] \qquad (\text{م } ۲-۴۳-۱)$$

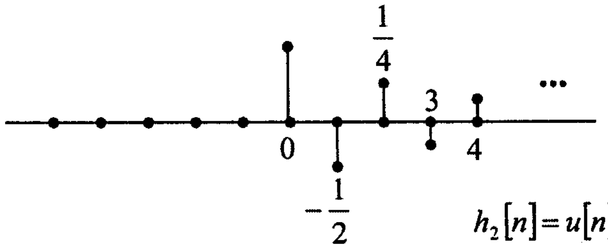
به‌ین منظور نشان دهید ه هر دو طرف معادله (م ۲-۴۳-۱) به صورت زیر در می‌آیند.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma$$

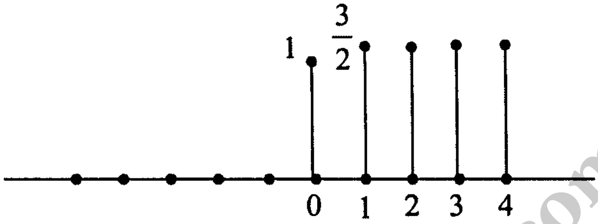
ب) در شکل م ۲-۴۳ (الف) دو سیستم LTI با پاسخ ضربه‌های h_1 و h_2 نشان داده شده اند. این دو سیستم را مطابق شکل م ۲-۴۳ (ب) سری می کنیم. فرض کنید $x[n]=u[n]$.

(i) ابتدا با محاسبه $w[n]=x[n]*h_1[n]$ و سپس محاسبه $y[n]=w[n]*h_2[n]$، $y[n]$ را یعنی حاصل $y[n]=\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]$ را محاسبه کنید.

(ii) ابتدا کانولوشن $g[n]=h_2[n]*h_1[n]$ را حساب کنید.



$$h_2[n]=u[n]+\frac{1}{2}u[n-1]$$



(الف)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \xrightarrow{w[n]} \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

شکل م ۲-۳۴

جوابهای دو بند (i) و (ii) باید برابر باشند، که خاصیت شرکت پذیری کانولوشن را در حالت گسسته در زمان نشان می‌دهد

ج) ترکیب متوالی دو سیستم LTI شکل م ۲-۴۳ (ب) را در نظر بگیرید، که در این حالت

$h_1[n]=\sin 8n$

,

$h_2[n]=a^n u[n] \quad , \quad |a|<1$

ورودی عبارت است $\quad x[n]=\delta[n]-a\delta[n-1]$

خروجی $y[n]$ را پیدا کنید. (راهنمایی: جابجایی و شرکت پذیری کانولوشن حل این مسئله را بسیار ساده می‌کند).

حل: الف) ابتدا داریم:

$$[x(t)*h(t)]*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(\sigma^2-\tau)g(t-\sigma')d\tau\, d\sigma'$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(\sigma)g(t-\sigma-\tau)d\tau d\sigma$$

و نیز:

$$x(t)*\left[h(t)*g(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(t-\sigma^2\right)h(\tau)g(\sigma'-\tau)d\sigma' d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\sigma)h(\tau)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(\tau\right)h(\sigma)g(t-\sigma-\tau)d\tau d\sigma$$

این تساوی اثبات شد.

(ب) (i) ابتدا داریم:

$$\omega[n]=u[n]*h_1[n]=\sum_{n=0}^{n}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{2}{3}\left[1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u[n]$$

حال

$$y[n]=\omega[n]*h_2[n]=(n+1)u[n]$$

ii) ابتدا داریم:

$$g[n]=h_1[n]*h_2[n]$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k+\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k=u[n]$$

حال،

$$y[n]=u[n]*g[n]=u[n]*u[n]=(n+1)u[n]$$

نتیجه‌یکسانی برای هر دو قسمت (i) و (ii) بدست آمده.

(ج) توجه کنید که:

$$x[n]*\{h_2[n]*h_1[n]\}=\{x[n]*h_2[n]\}*h_1[n]$$

همچنین توجه کنید که:

$$x[n]*h_2[n]=a^n u[n]-a^n u[n-1]=\delta[n]$$

بنابراین:

$$x[n]*h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]*\sin 8n=\sin 8n$$

مسئله ۴۲-۲

(الف) اگر

$$x(t)=0\ ,\quad |t|>T_1$$

,

$$h(t)=0\ ,\quad |t|>T_2$$

آنگاه می‌توان عدد مثبت T_3 را به نحوی یافت که به ازای آن

$x(t)*h(t)=0,\quad |t|>T_3$ ، T_3 را برحسب T_1 و T_2 به دست آورید.

ب) ورودی یک سیستم گسسته در زمان LTI ، $x[n]$، پاسخ ضربه آن $h[n]$، و خروجی آن $y[n]$ است.

اگر بدانیم $h[n]$ در خارج فاصله $N_0 \le n \le N_1$ ، $x[n]$ در خارج فاصله $N_2 \le n \le N_3$ صفرند، خروجی $y[n]$ در خارج فاصله $N_4 \le n \le N_5$ صفرند.

(ii) اگر طول فواصل ، $N_2 \le n \le N_3$، و $N_4 \le n \le N_5$ را به ترتیب M_h ، M_x، و M_y بنامیم، M_y و M_x بیابید.

ج) یک سیستم LTI گسسته در زمان با این مشخصه در نظر بگیرید: اگر به ازای $n \ge 10$ ، $x[n]=0$، آنگاه خروجی به ازای $n \ge 15$ صفرست. برای درستی این گزاره پاسخ ضربه سیستم باید چه شرطی داشته باشد؟

د) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه شکل م ۲-۴۴ در نظر بگیرید. برای تعیین $y(0)$ دانستن $y[n]$ در فاصله ای لازم است؟

حل داریم:

$$x(t)T_2 * h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{T_1}^{T_2} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

توجه کنید که برای $h(-\tau)=0$، بنابراین برای $\tau>t+T_2$ و $\tau<-T_2+t$ $h(t-\tau)=0$
بنابراین انتگرال فوق برابر صفر خواهد بود؛ همچنین اگر $T_1<-T_2+\tau$ یا $T_2+t<-T_1$ که بیان می‌دارد اگر $t>|T_1+T_2|$ انتگرال کانولوشن صفر است.

(ب) (i) داریم:

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{K=N_0}^{N_1} h[k]x[n-k]$$

توجه کنید که برای $N_3 \le x \le -N_2$ $x[-k]\ne 0$. بنابراین برای $-N_3+n \le k \le -N_2+n$ $x[-k+n]\ne 0$. واضح است. سری کانولوشن اگر $-N_3+n \le N_1$ و $-N_2+n \ge N_0$ صفر نیست. بنابراین $y[n]$ برای $n \le N_1+N_3$ صفر نیست. بنابراین $y[n]$ برای $n \le N_1+N_3$ و $n \ge N_0+N_2$ صفر نیست.

ii) به راحتی می‌توان نشان داد که $My = M_h + M_x -1$

(ج) برای $n>5$ ، $h[n]=0$

(د) از شکل مشخص است که:

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-2}^{1} x(t-\tau)d\tau + x(t-6)$$

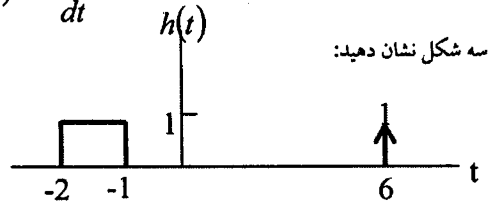
بنابراین: $y(0)=\int_{-2}^{-1} x(\tau)d\tau+x(-6)$ که بیان می‌کند که $x(t)$ باید در بازه $1 \le t \le 2$ و برای $t=-6$ معین باشد.

مسئله ۴۵-۲

نشان دهید که اگر $y(t)$ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ باشد، آنگاه پاسخ سیستم به ورودی

$$x'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

برابر $y'(t)$ است. درستی این مطلب را به سه شکل نشان دهید:



شکل 2.44

(i) با استفاده مستقیم از خواص خطی بودن، تغییرناپذیری با زمان و این که

$$x'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t)-x(t-h)}{h}$$

$$x(t)\longrightarrow\boxed{u_1(t)}\longrightarrow y(t)$$

(ii) با مشتق گیری از انتگرال کانولوشن.

(iii) با بررسی سیستم شکل م ۲-۴۵.

ب) صحت روابط زیر را نشان دهید.

i) $\left(y'(t)=x(t)*h'(t)\right)$

ii) $\left(y'(t)=\left(\int_{-\infty} x(\tau)\right)*h'(t)=\int_{-\infty}\left[x'(\tau)*h(\tau)d\tau\right]=x'(t)*\left(\int_{-\infty} h(\tau)d\tau\right)\right.$

[راهنمایی: به کمک نمودار جعبه ای بند (iii) بخش (الف) و توجه به این که $u_1(t)*u_{-1}(t)=\delta(t)$، می‌توان به آسانی مسئله را حل کرد.]

د) $s(t)$ پاسخ پله واحد یک سیستم LTI پیوسته در زمان است. با استفاده از بند (ب) نشاندهید که پاسخ $y(t)$ به ورودی $x(t)$ عبارت است از

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x'(\tau)u(t-\tau)d\tau \qquad \text{(م ۲-۴۵-۱)}$$

هـ) با استفاده از معادله (م ۲-۴۵-۲) پاسخ سیستم LTI دارای پاسخ ضربه زیر

$$s(t)=\left(e^{-3t}-2e^{-2t}+1\right)u(t)$$

به ورودی $x(t)=e^t u(t)$ را بیابید.

و) $s[n]$ پاسخ پله‌یک سیستم گسسته در زمان LTI است. همتای گسسته در زمان معادله‌های (م ۲-۴۵-۲) را بیابید.

حل: داریم:

$$\frac{x(t)-x(t-h)}{h} \xrightarrow{\ell TI} \frac{y(t)-y(t-h)}{h}$$

با سوق دادن $h \to 0$ در هر طرف معادله فوق داریم: $x'(t) \xrightarrow{\ell TI} y'(t)$

ii) با گرفتن دیفرانسیل از انتگرال کانولوشن داریم:

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left[x(t-\tau)\right]h(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x'(t-\tau)h(\tau)d\tau=x^{I}(t)*h(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{u_1(t)} \xrightarrow{p(t)=y'(t)}$$

شکل ح2.45

iii) فرض کنیم نام خروجی سیستم با پاسخ ضربه $u_1(t)$، $\omega(t)$ باشد. در این صورت

$$z(t)=x'(t)*h(t),\ \omega(t)=x(t)*u_1(t)=x'(t)$$

چون هر دو سیستم در اتصال کاسکید LTI هستند می‌توانیم جای آنها را مانند آنچه در شکل ح2.45 نشان داده شده است عوض کرد.

در این صورت $y(t)=x(t)*h(t)$, $p(t)=y'(t)$ چون $z(t)$ و $p(t)$ با ید برابر باشند می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$x'(t)*h(t)=y'(t)$$

ii) فرض کنید:

$$y(t)=\left[x(t)*u(t)\right]*h'(t)$$
$$=x(t)\left[u(t)*u_1(t)\right]*h(t)$$
$$=x(t)*h(t)$$

این نشان می‌دهد که $x_I(t)$ که معادل است با $x(t)*h(t)$. حال مطلب مشابهی را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y(t)=\left[x(t)*u(t)\right]*h'(t)$$
$$=\left[\left[x(t)*u_1(t)\right]*h(t)\right]*u(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{t}x^{I}(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=x^{I}(t)*\left[h(t)*u(t)\right]$$
$$=x^{I}(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

(ج) توجه کنید $x^{I}(t)=\delta(t)-5e^{-5t}u(t)$. بنابراین، خروجی سیستم LTI $x^{I}(t)$ برابر خواهد بود با $h(t)-5\sin(\omega_0 t)$ چون این بایستی با $y'(t)=\omega_0 t$ معادل باشد مجبوریم:

$$h(t)=\omega_\circ \cos(\omega_\circ t)+5\sin\omega_\circ t$$

(د) داریم:

$$\begin{aligned}y(t)&=x(t)*[u_1(t)*u(t)]*h(t)\\&=[x(t)*u_1(t)]*[u(t)*h(t)]\\&=x^1(t)*S(t)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x'(\tau)\dot{s}(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

(ii

$$\begin{aligned}x(t)&=x(t)*S(t)\\&=[x[t]*u_1(t)]*u(t)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^1(\tau)u(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

هـ) در این مورد:

$$x^1(t)=e^tu(t)+\delta(t)$$

بنابراین:

$$y(t)=S(t)+e^tu(t)*S(t)$$

که می‌تواند به صورت

$$\begin{aligned}&y(t)=\left[e^{-3t}-2e^{-2t}+1\right]u(t)\\&+1/4\left[e^t-e^{-3t}\right]\\&-\left(\frac{2}{3}\left(e^t-e^{-2t}\right)-e^t-1\right)u(t)\end{aligned}$$

(و) با استفاده از این حقیقت که $\delta[n]=u[n]*[\delta[n]-\delta[n-1]]$ داریم:

$$y[n]=[x[n]-x[n-1]]*s[n]=\sum[x[k]-x[k-1]]s[n-k]$$

و

$$\dot{x}[n]=[x[n]-x[n-1]]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[x[k]-x[k-1]u[k-k]]$$

مسئله ۴۶-۲

S یک سیتم LTI است، سیگنال $x(t)=e^{-3t}u(t-1)$ را در نظر بگیرید. اگر

$$x(t)\to y(t)$$

،

$$\frac{dx(t)}{dt}\to -3y(t)+e^{-2t}u(t)$$

پاسخ ضربه $h(t)$ سیستم S را بیابید.

حل:

توجه کنید که $\frac{dx(t)}{dt}=-6e^{-3t}u(t-1)+2\delta(t-1)=-3x(t)+2\delta(t-1)$

که می‌دهد: $x(t)=2e^{-3t}u(t-1)\to y(t)$

می‌دانیم که: $\frac{dx(t)}{dt}=-3x(t)+2\delta(t-1)$ باید در خروجی $-3y(t)+2h(t-1)$ را بدهد. ازاطلاعات داده شده می‌توانیم نتیجه بگیریم که $2h(t-1)=e^{-2t}u(t)$.

بنابراین:

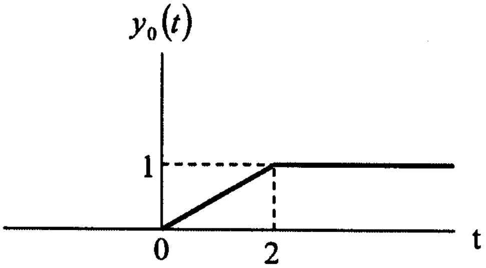
$$h(t)={}^{1}\!/_{2}\,e^{-2(t+1)}u(t+1)$$

مسئله ۴۷-۲

یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، با پاسخ ضربه $h_\circ(t)$ داده شده است. می‌دانیم که اگر ورودی $x_\circ(t)$ باشد، خروجی به صورت $y_\circ(t)$ شکل م ۲-۴۷ است. سیگنالهای زیر ورودی سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربه داده شده هستند:

الف) ورودی $x(t)$	پاسخ ضربه $h(t)$
ب) $x(t)=x_\circ(t)-x_\circ(t-2)$	$h(t)=h_\circ(t)$
ج) $x(t)=x_\circ(t-2)$	$h(t)=h_\circ(t+1)$
د) $x(t)=x_\circ(-t)$	$h(t)=h_\circ(t)$
هـ) $x(t)=x'_\circ(t)$	$h(t)=h_\circ(-t)$
و) $x(t)=x'_\circ(t)$	$h(t)=h'_\circ(t)$

[در اینجا $x'_\circ(t)$ و $h'_\circ(t)$ به ترتیب مشتقهای $x_\circ$ و $h_\circ(t)$ هستند.]



شکل م 2.47

در هر مورد تعیین کنید آیا برای یافتن خروجی سیستم دارای پاسخ ضربه $h(t)$ به ورودی $x(t)$ اطلاعات کافی است یا نه. در صورت وجود اطلاعات کافی، $y(t)$ را رسم و آن را دقیقاً عددگذاری کنید.

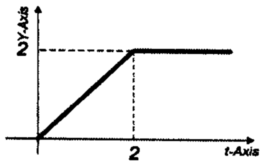
حل:

(الف) $y(t)=2y_0(t)$ (ب) $y(t)=y_0(t)-y_0(t-2)$

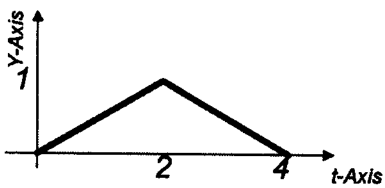
(ج) $y(t)=y_0(t-1)$ (د) اطلاعات کافی نیست.

(هـ) $y(t)=y_0(-t)$ (و) $y(t)=y_0''(t)$

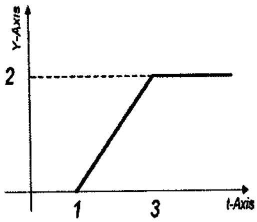
سیگنالها برای قسمت‌های مختلف مسئله در شکل ح 2.17 ترسیم شده اند.



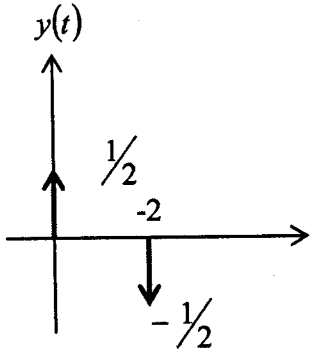
(الف)



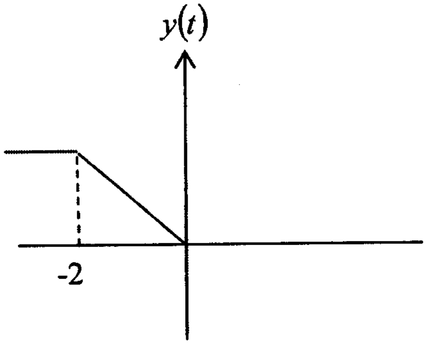
(ب)



(ج)



(هـ)



(و)

مسئله ۴۸-۲

گزاره‌های زیر در مورد سیستمهای LTI درست است یا نادرست؟ دلیل بیاورید.

الف) سیستم وارون یک سیستم LTI، متناوب و غیر صفر باشد، سیستم ناپایدار است.

ب) سیستم وارون یک سیستم LTI علّی، همیشه علّی است.

ج) اگر به ازای هر مقدار n داشته باشیم $|h[n]| \leq k$، که K یک عدد معین است، سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h[n]$ پایدار است.

د) اگر طول پاسخ ضربه سیستم LTI گسسته در زمان محدود باشد، سیستم پایدارست.

هـ) اگر یک سیستم LTI علّی باشد، آنگاه پایدارست.

و) ترکیب متوالی یک سیستم LTI غیر علّی و یک سیستم علّی لزوماً غیر علّی است.

ز) یک سیستم LTI پیوسته در زمان پایدارست، اگر و تنها اگر پاسخ پله آن $s(t)$ مطلقاً انتگرالپذیر باشد، یعنی داشته باشیم $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$

ح) یک سیستم LTI گسسته در زمان علّی است، اگر و تنها اگر پاسخ پله آن $s[n]$ به ازای $n < 0$ صفر باشد.

حل: (الف) درست؛اگر $h(t)$ پریودیک وغیرصفر باشد، در این صورت: $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=\infty$
بنابراین $h(t)$ ناپایدار است.

(ب) نادرست؛ برای مثال معکوس $h[n]=\delta[n-k]$ برابر است با $g[n]=\delta[n+k]$ که غیر کازال است.

(ج) نادرست؛ برای مثال $h[n]=u[n]$ که بیان می‌دارد:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|=\infty$$

که سیستم ناپایدار است.

(د) درست؛ با فرض اینکه $h[n]$ در بازه $n_1\le n\le n_2$ محدود و غیر صفر باشد. در این صورت

$$\sum_{k-n_1} n_2[h[k]]<\infty$$

که بیان می کند، سیستم پایدار است.

(هـ) نادرست؛ برای مثال $h(t)=e^t u(t)$ پایدار نیست اما کازال است.

(و) نادرست؛ برای مثال اتصال زنجیری سیستم‌های کازال با پاسخ ضربه $h_1[n]=\delta[n-1]$ و سیستم غیر کازال با پاسخ ضربه $h_2[n]=\delta[n+1]$ منجر به‌یک سیستم کلی با پاسخ ضربه

$h[n]=h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]$.

(ز) نادرست؛ برای مثال اگر $h(t)=e^{-t}u(t)$ باشد در این صورت $S(t)=(1-e^{-t})u(t)$.
$\int_0^{\infty}|1-e^{-t}|dt=t_te^{-t}|_0^{\infty}=\infty$. اگر چه سیستم پایدار است اما پاسخ پله انتگرال پذیر نیست

(ح) درست؛می‌توان نوشت: $u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$. بنابراین $S[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[n-k]$.
اگر در بازه $n<0$، $s[n]=0$ در اینصورت در $n<0$، $h[n]=0$ و سیستم کازال است.

مسئله ۴۹-۲

در درس نشان دادیم که اگر $h[n]$ مطلقاً جمع پذیر باشد، یعنی $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$ آنگاه سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h[n]$ پایدارست. پس مطلقاً جمع پذیر بودن شرط کافی پایداری است. در این مسئله نشان می‌دهیم که این شرط لازم نیز هست. یک سیستم LTI در نظر بگیرید که پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع پذیر نباشد، یعنی $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\infty$

الف) فرض کنید سیگنال ورودی این سیستم به صورت زیرست

$$x[n]=\begin{cases}0, & h[-n]=0 \quad \text{به ازای} \\ \dfrac{h[-n]}{|h[-n]|}, & h[-n]\neq 0 \quad \text{به ازای}\end{cases}$$

آیا این سیگنال ورودی کراندارست؟ اگر آری، کوچکترین مقدار B را که شرایط زیر را ارضا می‌کند، بیابید به ازای تمام مقادیر n، $|x[n]|\leq B$

ب) به ازای این ورودی، خروجی را در $n=0$ حساب کنید. آیا این نتیجه، لازم بودن شرط مطلقاً جمع پذیری برای پایداری سیستم را اثبات می‌کند؟

ج) به روشی مشابه نشان دهید که شرط لازم و کافی برای پایداری سیستمهای LTI پیوسته در زمان این است که پاسخ ضربه آنها مطلقاًانتگرالپذیر باشد.

حل: (الف) ورودی محدود است $|x[n]|\leq 1=B_x$ در $-\infty<n<\infty$.

(ب) فرض کنید:

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[-k]h[k]$$
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{h^2[k]}{|h[k]|}=\sum_{-\infty}^{+\infty}|h[k]|\to\infty$$

بنابراین خروجی محدود نیست و سیستم ناپایدار است.

(پ) فرض کنید

$$x(t)=\begin{cases}0 & h(-t)=0 \quad \text{اگر} \\ \dfrac{h(-t)}{|h(-t)|} & h(-t)\neq 0 \quad \text{اگر}\end{cases}$$

حال برای عبارت t، $|x(t)\leq 1|$. بنابراین $x(t)$ ورودی محدود است به جای

$$y(\circ)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(x(-\tau)h(\tau)d\tau\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h^2(\tau)}{|h(\tau)|}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\infty$$

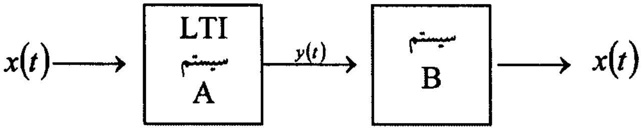
بنابراین اگر پاسخ ضربه به طور معین انتگرال پذیر نباشد سیستم ناپایدار خواهد بود.

مسئله ۵۰-۲

ترکیب سری شکل م ۲-۵۰ را در نظر بگیرید. سیستم A یک سیستم LTI، و سیستم B وارون سیستم A است. $y_1(t)$ پاسخ به سیستم A به $x_1(t)$ و $y_2(t)$ پاسخ سیستم A به $x_2(t)$ است:

الف) پاسخ سیستم B به ورودی $ay_1(t)+by_2(t)$ چیست؟ a و b اعداد ثابت اند.

ب) پاسخ سیستم B به ورودی $y_1(t-\tau)$ چیست؟



شکل م ۲-۵۰

حل: (الف) خروجی برابر خواهد بود؛ $ax_1(t)+bx_2(t)$.

(ب) خروجی برابر است با: $x_1(t-\tau)$.

مسئله ۵۱-۲

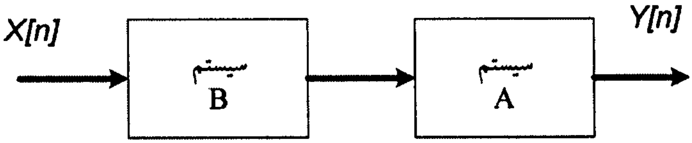
در درس دیدیم که رابطه ورودی ـ خروجی دو سیستم LTI سری به ترتیب اتصال آنها بستگی ندارد. این مطلب، که خاصیت جابجایی نام دارد، به خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان هر دو سیستم وابسته است. در این مسئله این نکته را نشان می‌دهیم.

الف) دو سیستم گسسته در زمان A و B در نظر بگیرید. سیستم LTI (B) خطی است، ولی تغییرناپذیر با زمان نیست، ولی سیستم A سیستمی LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ است. در واقع پاسخ سیستم B به ورودی $w[n]$ به صورت $z[n]=nw[n]$ است.

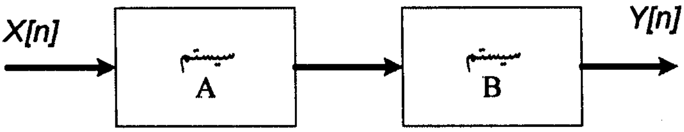
با محاسبه پاسخ هر یک از اتصالهای سری شکلهای م ۲-۵۱ (الف) و (ب) به ورودی $x[n]=\delta[n]$ نشان دهید که این دو سیستم خاصیت جابجایی ندارند.

ب) فرض کنید به جای سیستم B دو اتصال شکل م ۲-۵۱، سیستمی قرار گرفته که رابطه بین ورودی $w[n]$ و خروجی $z[n]$ آن به صورت $z[n]=w[n]+2$ است.

محاسبات قسمت (الف) را برای این حالت تکرار کنید



(الف)



(ب)

حل: (الف) برای سیستم شکل (الف) ح 2.51، پاسخ به ضربه واحد برابر است با:

$$y_1[n] = n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

برای سیستم شکل (ب) ح 2.51 پاسخ ضربه واحد عبارتست از:

$$y = [n] = ০$$

واضح است که $y_1[n] \neq y_2[n]$

(ب) برای سیستم شکل (الف) ح 2.51 پاسخ ضربه واحد عبارتست از:

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + 2$$

برای سیستم شکل (ب) ح 2.51 پاسخ ضربه واحد عبارتست از:

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + 4$$

واضح است که

$$y_1[n] \neq y_2[n]$$

مسئله ۲-۵۲

➢ یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید،

$$h[n]=(n+1)a^n u[n]$$

که در آن $|a|<1$. نشان دهید پاسخ پله سیستم به صورت زیرست.

$$s[n]=\left[\frac{1}{(a-1)^2}-\frac{a}{(a-1)^2}a^n+\frac{a}{(a-1)}(n+1)a^n\right]u[n]$$

راهنمایی: توجه کنید که

$$\sum_{K=0}^{N}(K+1)a^k=\frac{d}{da}\sum_{K=0}^{N+1}a^k$$

حل: داریم:

$$s[n]=h[n]*u[n]$$
$$=\begin{cases}\sum_{k=0}^{n}(1+k)a^k & n\geq 0\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

توجه داشته باشید که:

$$\sum(k+1)a^k=\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{n+1}a^k=\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1-\alpha^{n+2}}{1-\alpha}\right]$$

داریم:

$$s[n]=\left[\frac{1-(n+2)\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\alpha+\frac{1-\alpha^{n+2}}{(1-\alpha^2)}\right]u[n]$$
$$=\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\alpha^n+\frac{\alpha}{1-\alpha}(n+1)\alpha^n\right]u[n]$$

مسئله ۲-۵۳

(الف) معادله دیفرانسیل همگن رادر نظر بگیرید (م ۲-۵۳-۱)
$$\sum_{K=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = 0$$

نشان دهید اگر s_0 ریشه معادله باشد (م ۲-۵۳-۱) $p(s) = \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0$ آنگاه $A e^{s_0 t}$ یک جواب معادله (۲-۵۳-۱) است، که در آن A یک ثابت دلخواه مختلط است.

ب) چند جمله ای $p(s)$ معادله (۲-۵۳-۲) را می‌توان برحسب ریشه است. توجه کنید که

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_r = N$$

در حالت کلی به ازای $\sigma_i > 1$، علاوه بر $A e^{s_i t}$، $A_{ij} t^j e^{s_i t}$ هم جواب معادله (م ۲-۵۳-۱) است، که j تمام اعداد صحیح بزرگتر از صفر و کوچکتر یا مساوی $\sigma_i - 1$ را می‌توانند داشته باشد. برای اثبات این مطلب نشان دهید اگر $\sigma_i = 2$، $A t e^{s_i t}$ هم یک جواب معادله (م ۲-۵۳-۱) است. [راهنمایی: نشان دهید اگر s یک عدد مختلط دلخواه باشد آنگاه

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k \left(A t e^{st}\right)}{d t^k} = A\, p(s) t e^{st} + A \frac{d\, p(s)}{ds} e^{st}$$

پس کلی ترین جواب معادله (م ۲-۵۳-۱) به صورت زیرست

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\sigma_i - 1} A_{ij} t^j e^{s_i t}$$

که در آن A_{ij} یک ثابت دلخواه مختلط است.

ج) معادلات دیفرانسیل همگن زیر را با شرایط کمکی داده شده حل کنید:

(i) $\dfrac{d^2 y(t)}{d t^2} + 3\dfrac{d y(t)}{d t} + 2 y(t) = 0 \quad ; \; y(0) = 0 \,,\; y'(0) = 2$

(ii) $\dfrac{d^2 y(t)}{d t^2} + 3\dfrac{d y(t)}{dt} + 2 y(t) = 0 \quad ; \; y(0) = 1 \,,\; y'(0) = -1$

iii) $\dfrac{d^2 y(t)}{d t^2} + 3\dfrac{d y(t)}{dt} + 2 y(t) = 0 \quad ; \; y(0) = 0 \,,\; y'(0) = 0$

iv) $\dfrac{d^2 y(t)}{d t^2} + 2\dfrac{d y(t)}{dt} + y(t) = 0 \quad ; \; y(0) = 1 \,,\; y'(0) = 1$

(v) $\dfrac{d^3 y(t)}{d t^3} + \dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} - \dfrac{dy(t)}{dy} - y(t) = 0 \quad ; \; y(0) = 1 \,,\; y'(0) = 1 \,,\; y''(0) = -2$

(vi) $\dfrac{d^2 y(t)}{d t^2} + 2\dfrac{d y(t)}{dt} + 5 y(t) = 0 \quad ; \; y(0) = 1 \,,\; y'(0) = 1$

حل: فرض کنیم $\sum_{K=0}^{N} a_k s_0^k = 0$

در اینصورت :

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{d^k}{dt^k}\left(Ae^{s_0 t}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{N} A\alpha_k e^{s_0 t} s_0^k = 0$$

بنابراین $Ae^{s_0 t}$ جواب معادله (ح 2.53.1)

(ب) فرض کنید:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k}\left(Ate^{st}\right) = \sum_{k=0}^{N} Aa_k t s^k e^{st} + \sum_{k=0}^{N} A\alpha_k e^{st} s^{k-1}$$
$$= Ate^{st}\sum_{k=0}^{N} a_k s^k + Ae^{st}\sum_{k=0}^{N} \frac{d}{ds}\left(s^k\right)$$
$$= Ate^{st}\sum_{k=0}^{N} a_k s^k + Ae^{st}\frac{d}{ds}\sum_{k=0}^{N} a_k s^k$$

اگر s_i یک جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s_k^1 = 0$$

این بیان می‌دارد که $te^{s_i t}$ یک جواب است.

(ج) (i) در اینجا

$$0 \le k \le 6$$

چون $y_y(0) = 0$ و $y'_y(0) = 2$، $A + B = 0$ و $2A + B = 2$ بنابراین از حل دستگاه

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 2 \end{cases}$$

بنابراین $A = -2$ و $B = 2$

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

(ii) در اینجا

$$s^2 33 + 2 = 0 \Rightarrow y(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

چون $y(0) = 1$ و $y'(0) = -1$ داریم $y(t) = e^{-t}$

(iii) به خاطر شرایط اولیه $y(t) = 0$

(iv) در اینجا نیز

$$s^L + 2s + 1 = 0 = (s+1)^L$$
$$\Rightarrow \sigma = 2 \quad , \quad s = -1$$
$$y(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t}$$

از آنجا که $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ و $A = 1$ و $B = 2$

داریم:

$$y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$$

(v) اینجا نیز

$$s^3 + s^2 - s - 1 = 0 = (s-1)(s+1)^2$$
$$\Rightarrow y(t) = Ae^t + B_e^{-t} + cte^{-t}$$

چون $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ و $y'' = -2$ داریم $c = 3/2$ و $B = 3/4$ و $A = 1/2$، بنابراین

$$y(t) = Ae^{-t}e^{2jt} + Be^{-t}e^{-2jt}$$

چون $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ آنگاه

$$A = 1/2(1-j) = B^*$$

بنابراین:

$$y(t) = e^{-t}[\cos 2t \sin 2t]$$

مسئله ۲-۵۴

(الف) معادله معادله تفاضلی همگن زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=0 \qquad \text{(م ۲-۵۴-۱)}$$

نشان دهید اگر z_0 ریشه معادله زیر باشد.
$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}=0$$

$A z_0^z$ یک جواب معادله (م ۲-۵۴-۱) است، که در آن A یک ثابت دلخواه است.

ب) کار با چند جمله ایهایی که تنها توانهای غیرمنفی z دارند ساده ترست، پس معادله حاصل از ضرب دو طرف معادله (م ۲-۵۴-۲) در z^N را در نظر می گیریم.

$$p(z)=\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}=0 \qquad \text{(م ۲-۵۴-۳)}$$

چند جمله ای $p(z)$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$p(z)=a_0(z-z_1)^{\sigma_1}(z-z_2)^{\sigma_2}$$

که در آن $z_1,\dots,s_i$ ریشه‌های متمایز $p(z)$ هستند.

نشان دهید به ازای $y[n]=nz^{n-1}$ داریم

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=\frac{dp(z)}{dz}z^{n-N}+(n-N)p(z)z^{n-N-1}$$

با استفاده از این مطلب نشان دهید که به ازای $\sigma_i=2$، هم $A\ z_i^n$ و هم $B\,n z_i^{n-1}$ جواب معادله (م ۲-۵۴-۱) هستند، که در آنها، A و B ثابتهای مختلط دلخواهی اند. در حالت کلی می‌توان به همین ترتیب نشان داد که به ازای $\sigma_i>1$

$$A\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$r=0,1,\dots,\sigma_{j-1}$ جواب معادله (م ۲-۵۴-۱) هستند.

ج) معادلات تفاضلی زیر را با شرایط کمکی داده شده حل کنید:

(i) $y[n]+\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=0$; $y[0]=1,\ y[-1]=-6$

(ii) $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=0$; $y[0]=1,\ y[-1]=0$

(iii) $y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=0$; $y[0]=1,\ y[10]=21$

(iv) $y[n]-\frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=0$; $y[0]=0,\ y[-1]=1$

حل:

(الف) فرض کنیم که: $\sum_{K=0}^{N} a_k z_0^{k} = 0$

در اینصورت اگر

$$y[n] = Az_0^n$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k k[n-k] = \sum_{K=0}^{N} a_k \left(Az_0^{n-1}\right) = Ax_0^k \sum_{K=0}^{N} a_k z_0^{-k} = 0$$

بنابراین Az_0^n، جواب معادله (م 2.54-1) می‌باشد.

(ب) اگر $y[n] = n\, z^{n-1}$ در اینصورت:

(ح 2.54.1)

$$\sum_{K=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{K=0}^{N} a_k (n-k) z^{n-k-1}$$

با گرفتن طرف راست معادله می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$R.H.S = z^{n-N} \sum_{k=0}^{N} a_k (N-K) z^{n-k-1} + (n-N)\sum_{K=0}^{N} a_k$$

(ح 2.54-2)

$$= \sum_{K=0}^{N} a_k (n-k) z^{n-k-1}$$

با مقایسه (ح 2.54-1) و (ح 2.54-2) نتیجه می گیریم که معادله‌های فوق معادلند و اثبات کامل می‌شود.

(پ) (i) اینجا نیز داریم:

$$1 + \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}, \; z = -\frac{1}{4}$$

بنابراین

$$y[n] = A\left(-\frac{1}{2}\right)^n + B\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

چون $y(0) = 1$ و $y[-1] = -6$ داریم

$$A = -1 \text{ و } z[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{6} n\right) \text{ و } y[n] = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii) اینجا $z^2 - 2z + 1 = 0$

بنابراین:

$$y[n] = A(1)^n + Bn(1)^n = A + Bn$$

چون $y(0) = 1$ و $y[1] = 0$ داریم $A = 1$ و $B = -1$ و $y[n] = 1 - n$

(iii) تنها تفاوت با قسمت قبلی شرایط اصلی است؛ $y(0)=1$ و $y[10]=21$، داریم:

$$A=1 \quad و \quad B=2$$

$$y[n]=1+2n$$

(iv) اینجا

(v) $$z=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1\pm j)$$

بنابراین

$$y[n]=A\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+j)\right]^n+B\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-j)\right]^n$$

چون $y(0)=0$ و $y[-1]=1$ داریم

$$B=\frac{-j}{2\sqrt{2}} \quad و \quad A\,\frac{j}{2\sqrt{2}}$$

و

$$y[n]=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(n\,\pi/4\right)$$

مسئله ۵۵-۲

در درس روشی برای حل معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت ارائه کردیم و در مسئله ۲-۳۰ روش دیگری برای این کار بیان شد. با فرض سکون ابتدائی، سیستم بیان شده با معادلات تفاضلی LTI و علّی است و می‌توان با یکی از این دو روش پاسخ ضربه $h[n]$ را یافت. در فصل ۵ روش جالبتری برای تعیین $h[n]$ ارائه خواهیم کرد. دراین مسئله نیز رهیافت دیگری معرفی می‌کنیم که نشان می‌دهد، می‌توان $h[n]$ را با حل معادله همگن، تحت شرایط اولیه مناسب، به دست آورد.

الف) سیستم ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n] \qquad (م ۲-۵۵-۱)$$

با فرض $x[n]=\delta[n]$، $y[0]$ را بیابید؟ $h[n]$ در $n\ge 1$ چه معادله ای و چه شرایط اولیه ای را ارضا می‌کند؟ با حل این معادله جواب بسته ای برای $h[n]$ به دست آورید.

ب) حال سیستم LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+2x[n-1] \qquad (م ۲-۵۵-۲)$$

این سیستم در شکل م ۲-۵۵ (الف) به صورت ترکیب سری و سیستم ابتدائاً ساکن نشان داده شده است. با توجه به خواص سیستمهای LTI می‌توان دو سیستم را جابجا کرد و نمایش متفاوت شکل م ۲-۵۵ (ب) را یافت. حال با توجه به نتیجه بند (الف) را، با پاسخ ضربه $h[n]$، در نظر بگیرید. با نشان دادن این که معادله (م ۲-۵۳-۳) معادله تفاضلی (م ۲-۵۵-۱) را ارضا می‌کند، ثابت کنید که پاسخ $y[n]$ به ورودی دلخواه $x[n]$ در واقع از جمع کانولوشن زیر به دست می‌آید.

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m] \qquad \text{(م ۲-۵۵-۳)}$$

با فرض $a_0 \neq 0$ و $x[n]=\delta[n]$، $y[0]$ را بیابید. با استفاده از این نتیجه، معادله تفاضلی همگن و شرایط اولیه ای را که باید توسط پاسخ ضربه این سیستم ارضا شود بیابید.

حال سیستم LTI علّی توصیف شده با معادله تفاضلی زیرا را در نظر بگیرید.

$$\sum_{K=0}^{n} a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad \text{(م ۲-۵۵-۵)}$$

پاسخ ضربه این سیستم را بر حسب پاسخ ضربه سیستم LTI توصیف شده با معادله (م ۲-۵-۴) بیابید.

$$x[n]\longrightarrow \boxed{z[n]=x[n]+2x[n-1]} \xrightarrow{z[n]} \boxed{y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=z[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n]\longrightarrow \boxed{w[n]-\frac{1}{2}w[n-1]=x[n]} \xrightarrow{w[n]} \boxed{y[n]=w[n]+2w[n-1]} \longrightarrow y[n]$$

هـ)روش دیگری نیز برای تعیین پاسخ سیستم LTI توصیف شده با معادله (م۲-۵۵-۵)وجود دارد. معادله (م ۲-۵۵-۵) را با فرض سکون ابتدائی، یعنی $y[-N]=y[-N+1]=...=y[-1]=0$، و به ازای ورودی $x[n]=\delta[n]$ به صورت بازگشتی حل کنید و $y[0], \dots, y[M]$ را بیابید. در $n \geq M$، $h[n]$ چه معادله ای را ارضا می‌کند؟ شرایط کمکی مناسب برای این معادله چیست؟

و) با استفاده از یکی از روشهای بندهای (د) یا (هـ) پاسخ ضربه سیستمهای LTI علّی توصیف شده معادلات تفاضلی زیر را بیابید.

(i) $y[n]-y[n-2]=x[n]$

(ii) $y[n]-y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$

(iii) $y[n]-y[n-2]=2x[n]-3x[n-4]$

(iv) $y[n]-\frac{\sqrt{3}}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$

$$y[n]=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sin\left(n\,\pi/4\right)$$

حل: (الف) $y[0]=x[0]=1$، $h[n]$ معادله را برآورده می‌سازد.

$$h[n]=\tfrac{1}{2}h[n-1] \qquad n\geq 1$$

شرایط معین عبارتست از $h[0]=1$ با استفاده روش معرفی شده در مسئله قبلی، داریم $z=\tfrac{1}{2}$، بنابراین $h[n]=A\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$ با استفاده از شرایط معین

$$h[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(ب) از شکل (ب) م2.55، می‌دانیم که اگر $x[n]=\delta[n]$ آنگاه

$$\omega[n]=h_0[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

که بیان می‌کند:

$$y[n]=h[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]+2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

(ج) جایگذاری معادله (م2.55.3) در معادله (م2.55.1) داریم.

$$\sum_m h[n-m]x[m]-\tfrac{1}{2}\sum_m h[n-m-1]x[m]$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-m}x[m]-\sum_{m=-\infty}^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-m}x[m]$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-m}x[n]=x[n]=x[n]$$

که نشانگر اینست که معادله (م2.55.3)، معادله (م2.55.1) را برآورده می‌سازد.

(د) (i) داده شده که $a_0\neq 0$ و سیستم از شرایط تبعیت می‌کند. داریم:

$$a_0 y[0]=1\Rightarrow y[0]=\frac{1}{a_0}$$

معادله‌ی همگن بصورت $\sum_{K=0}^{N}a_k h[n-k]=0$ است.

با شرایط اولیه:

$$h[0]=\frac{1}{a_0}\ ,\ h[-1]=\ldots=h[-N+1]=0$$

ii) داریم:

$$h[N]=\sum_{K=0}^{N}b_k h_1[n-k]=0$$

که $h_1[n]$ به صورت فوق است.

(هـ) برای $n>M$ $\quad \sum_{K=0}^{N}a_k h[n-k]=0$ با $h[0]=y[0],\ldots,h[M]=y[M]$

(و) (i) داریم:

$$h[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0 \text{, زوج} \\ 0 & n<0 \text{ فرد}\end{cases}$$

(ii) داریم:

$$h[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0 \text{, زوج } n \\ 2 & n>0 \text{, فرد } n \\ 0 & n<0\end{cases}$$

(iii)

$$h[n]=\begin{cases}2 & n=0,2 \\ -1 & n\geq 4 \text{, زوج } n \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

(iv) داریم

$$h[n]=\tfrac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{6}+\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{6}\right]$$

مسئله ۲-۵۶

◄ دراین مسئله همتای پیوسته در زمان تکنیک پی ریزی شده در مسئله ۲-۵۵ در نظر می‌گیریم. باز هم می‌بینیم که مسئله یافتن پاسخ ضربه $h(t)$ یک سیستم LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t) \qquad \text{(م ۲-۵۶-۱)}$$

فرض کنید $x(t)=\delta(t)$. برای تعیین مقدار $y(t)$ درست بعد از اعمال ضربه واحد، از معادله (م ۲-۵۶-۱) از $t=0^-$ تا $t=0^+$ (یعنی «درست قبل از اعمال ضربه» تا «درست بعد از» آن) انتگرال می‌گیریم. با این کار به دست می‌آوریم.

$$y(0^+)-y(0^-)+2\int_{0^-}^{0^+}y(\tau)d\tau=\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)d\tau=1 \qquad \text{(م ۲-۵۶-۲)}$$

چون سیستم ابتدائاً ساکن، و در $t<0$، $x(t)=0$ پس $y(0^-)=0$. برای ارضای معادله (م ۲-۵۶-۲) باید داشته باشیم $y(0^+)=1$. چون در $t>0$ داریم $x(t)=0$ پاسخ ضربه سیستم برابر پاسخ معادله دیفرانسیل همگن زیر

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$$

و شرط اولیه $y\left(0^+\right)=1$ است

با حل این معادله دیفرانسیل $h(t)$، پاسخ ضربه سیستم را به دست آورید. برای امتحان جواب خود نشان دهید که

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

به ازای هر ورودی $x(t)$ دلخواهی معادله (م ۲-۵۶-۱) را ارضا می‌کند.

ب) برای تعمیم این بحث، سیستم LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=x(t) \qquad \text{(م ۲-۵۶-۳)}$$

و فرض کنید $x(t)=\delta(t)$. چون در $t<0$، $x(t)=0$، شرط سکون ابتدایی اقتضا می‌کند که داشته باشیم

$$y\left(0^-\right)=\frac{dy}{dt}\left(0^-\right)=\dots=\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}\left(0^-\right)=0 \qquad \text{(م ۲-۵۶-۴)}$$

از دو طرف معادله (م ۲۵۶-۳) یک بار، از $t=0^-$ تا $t=0^+$ انتگرال بگیرید، سپس به کمک معادله (م ۲-۵۶-۵) و استدلالی شبیه استدلال بند (الف۹ نشان دهید معادله حاصل با شرایط زیر ارضا می‌وشد

$$y\left(0^+\right)=\frac{dy}{dt}\left(0^+\right)=\dots=\frac{d^{N-2}y}{dt^{N-2}}\left(0^+\right)=0 \quad \text{و} \qquad \text{(م ۲-۵۶-۵ الف)}$$

$$\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}\left(0^+\right)=\frac{1}{a_N} \qquad \text{(م ۲-۵۶-۵ ب)}$$

در نتیجه پاسخ ضربه سیستم در $t>0$ را می‌توان با حل معادله دیفرانسیل همگن زیر، و شرایط اولیه بیان شده در معادله‌های (م ۲-۵۶-۵) به دست آورد.

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=0$$

شکل م ۲-۵۶

$$x(t)\longrightarrow\boxed{\sum_{dt^k}^{d^k w(t)} a_k\frac{d^k w(t)}{dt^k}=x(t)}\xrightarrow{w(t)}\boxed{y(t)=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k w(t)}{dt^k}=y(t)}$$

ج) حال سیستم LTI علّی توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad \text{(م ۲-۵۶-۶)}$$

پاسخ ضربه این سیستم را بر حسب پاسخ ضربه سیستم بند (ب) بیان کنید (راهنمایی: شکل م ۲-۵۶ را ببینید).

د) با روش بیان شده در بندهای (ب) و (ج)، پاسخ سیستمهای LTI ابتدائاً ساکن توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

(i) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$

(ii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+2y=x(t)$

هـ) به کمک نتایج بندهای (ب) و (ج) نشان دهید که اگر در معادله (م ۲-۵۶-۶) داشته باشیم $M \geq N$، پاسخ ضربه $h(t)$ در $t=0$ جملات تکین دارد؛ یعنی $h(t)$ جملاتی به شکل زیر دارد

$$\sum_{r=0}^{M-N} a_r u_r(t)$$

که در آنها a_rها ثابت و $u_r(t)$ها توابع تکین تعریف شده در بخش ۲-۵ هستند.

و) پاسخ ضربه سیستمهای علّی LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

(i) $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$

(ii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{d^3x(t)}{dt^3}+2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$

حل: (الف) در این مورد $2+2=0$ که بیان می‌دارد که:

$$y(t)=h(t)=Ae^{-2t}$$

چون $y(0^+)=1$ و $y[n]$ و $h(t)=e^{-2t}u(t)$.

حال معادله (م 2.56-1) را در نظر بگیرید:

$$\ell.H.S=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau+2\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2(t-\tau)}\delta(t-\tau)x(\tau)d\tau$$
$$=x(t)=R.H.S$$

که بیان می‌دارد که $y(t)$ معادله را حل می‌کند.

(ب) داریم $y(t)=\sum_i a_iu_i(t)$

در اینصورت: $\sum_{K=0}^{N} a_k \sum_i a_i u_{k+l}(t)=\delta(t)$

انتگرال گیری بین $t=0$ و $t=0^t$ و ضرایب مربوطه، داریم $a_t=0$ بجز $a_{-N}=\frac{1}{a_N}$. این بیان می‌دارد که برای

$0^t \leq t \leq 0^t$

$$y(t)=\frac{1}{aN}u_{-N}(t)$$

,

$$y(o^t)=y'(o^t)=\ldots=y^{(N-2)}(o^t)=\circ$$

$$\left.\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}\right|_{o^t}=\frac{1}{a^N}$$

(ج) (i) با گرفتن

$$y(t)=\sum_r au_r(t)$$

داریم:

$$\sum_r\left(a_ru_{r+2}(t)+3a_ru_{r+1}(t)+2a_ru_r(t)\right)=\delta(t)$$

که بیان می‌کند $r_{Max}=2$ و $a_{-2}=1$. بنابراین $h(o^t)$ و $h'(o^t)=1$ شرایط اولیه را تشکیل می‌دهند.

حال:

$$\delta^3+35+2=\circ\Rightarrow s=-z\,,s=-1$$

بنابراین: $$h(t)=Ae^{-2t}+Be^{-t}\qquad t\geq\circ$$

با اعمال شرایط اول $A=b-1$ و $B=1$ را بدست می‌آوریم، بنابراین:

$$h(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u_{-1}(t)$$

(ii) شرایط اولیه $h(\circ^+)=\circ$ و $h'(\circ^+)=1$ می‌باشد. بنابراین:

$$h(t)=e^t\sin t\;u_{-1}(t)$$

(د) از (ج)، اگر $M\geq N$ در اینصورت $\sum_{K=\circ}^{M}b_k\frac{d^kh^{(t)}}{dt^k}$ که شامل یک جمله تکینی در $t=\circ$ خواهد بود، در اینصورت

$$h(t)=\sum_r a_ru_r(t+\ldots)$$

(هـ) (i) حال

$$\sum_r a_ru_{r+1}(t)+2+L\sum a_ru_r=3u_1(t)+u_\circ(t)$$

بنابراین $r_{Max}=\circ$ همچنین

$$\alpha_\circ u_1(t)+a_{-1}u_\circ(t)+2a_\circ u_\circ(t)=3u_1(t)+u_\circ(t)$$

که منجر می‌شود تا $a_\circ=3$ و $\propto-1=-5$ باشد.

شرایط اولیه $h(\circ^+)$

$$h(t)=3u_\circ(t)-5e^{-2t}u-1(t)=3\delta(t)-5e^{-3t}u_\circ(t)$$

که منجر می‌شود تا $a_\circ=3$ و $\propto-1=-5$ باشد.

شرایط اولیه $H\left(0^+\right)=-5$

$$h\left(t\right)=3u_0\left(t\right)-5e^{-2t}u-1\left(t\right)=3\delta\left(t\right)-5e^{-2t}u\left(t\right)$$

(ii) اینجا $\alpha_1=1$ و $\alpha_0=-3$ و $\alpha_{-1}=13$ و $\alpha_{-2}=-44$ بنابراین

$$h^1\left(0^+\right)=-44 \quad , \quad h\left(0^+\right)=13$$

و

$$h\left(t\right)=u_1\left(t\right)-3u_0\left(t\right)-3u_0\left(t\right)18e^{-3t}u_{-1}\left(t\right)-5e^{-2t}u-1\left(t\right)$$

مسئله ۵۷-۲

یک سیستم LTI علّی S، با رابطه ورودی $x\left[n\right]$ و خروجی $y\left[n\right]$ زیر در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که S را می‌توان اتصال سری و سیستم LTI علّی S_1 و S_2 با روابط ورودی خروجی زیر دانست.

$$S_1: \quad y_1\left[n\right]=b_0x\left[n\right]+b_1x_1\left[n-1\right]$$

$$S_2: \quad y_2\left[n\right]=-ay_2\left[n-1\right]+x_2\left[n\right]$$

(ب) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(ج) نمایش جعبه ای S را رسم کنید.

(د) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_1 رسم کنید.

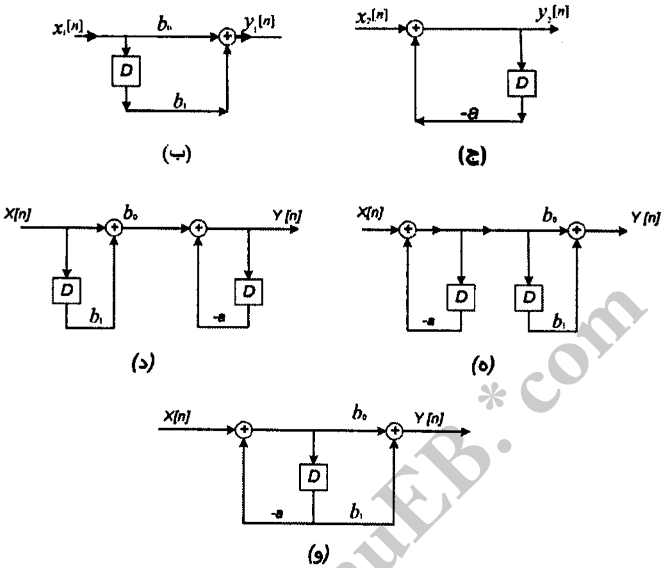
(هـ) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم ۱ به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

(و) نشان دهید که دو عنصر تأخیر دهنده نمایش جعبه ای بند (هـ) را می‌توان در هم ادغام کرد. نمایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می‌نامند، حال آن که نمایش جعبه ای بندهای (د) و (هـ) را تحقق مستقیم نوع I می‌نامند.

حل: (الف) متوجه می‌شویم که $x_2\left[n\right]=y_1\left[n\right]$ که می‌توانیم آن را از دو معادله تفاضلی بدست آوریم. در نتیجه داریم:

$$y_2\left[n\right]=-ay_2\left[n-1\right]+b_0x_1\left[n\right]+b_1x_1\left[n-1\right]$$

که مشابه معادله دیفرانسیل کلی است.



شکل (ح2.57)

(ب) شکلهای متناظر با قسمتهای باقی مانده این مساله در شکل ح2.57 نشان داده شده اند.

مسئله ۵۸-۲

➢ یک سیستم LTI علّی S، با روابط ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ زیر در نظر بگیرید:

$$2y[n]-y[n-1]+y[n-3]=x[n]-5x[n-4]$$

(الف) نشان دهید که S، را می‌توان اتصال سری دو سیستم LTI علّی S_1 و S_2 با روابط ورودی ـ خروجی زیر دانست.

$$S: 2y_1[n]=x_1[n]-5x_1[n-4]$$

$$S: y_2=\frac{1}{2}y_2[n-1]-\frac{1}{2}y_2[n-3]+x_2[n]$$

(ب) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.) نمایش جعبه ای S_2 را رسم کنید.

(د) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبال نمایش جعبه ای S_1 رسم کنید.

(هـ) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمای جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

(و) نشان دهید که چهار عنصر تأخیردهنده نمایش جعبه ای بند (هـ) را می‌توان در سه عنصر ادغام کرد نمایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می‌نامند، حال آن که نمایش جعبه ای بندهای (د) و (هـ) تحقق مستقیم نوع I نامیده می‌شود.

حل: (الف) با توجه به اینکه $y_1[n]=x_2[n]$. می‌توانیم آنرا از دو معادله‌ی تفاضلی بدست آوریم. در نتیجه:

$$2y_2[n]-y_2[n-1]+y_2[n-3]=x_1[n]-5x_1[n-4]$$

این مشابه معادله دیفرانسل کلی است.

(ب) شکل متناظر با قسمتهای باقی مانده‌ی این مساله در شکل (ح58-2) آمده است.

مسئله ۵۹-۲

یک سیستم LTI علّی S با رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ زیر در نظر بگیرید.

$$a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_\circ y(t)=b_\circ x(t)+b_1\frac{dx(t)}{dt}$$

(الف) نشان دهید که $y(t)=A\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau+Bx(t)+C\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ و ثابتهای A، B، و C را بر حسب ثابتهای $a_\circ$، a_1، $b_\circ$ و b_1 بیان کنید.

(ب) نشاندهید که S را می‌توان اتصال سری دو سیستم LTI زیر دانست

$$S_1: y_1(t)=Bx_1(t)+C\int_{-\infty}^{t}x(\tau)$$

$$S_2: y_2(t)=A\int_{-\infty}^{t}y_2(\tau)d\tau+x_2(t)$$

(ج) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(د) نمایش جعبه ای S_2 را رسم کنید.(هـ) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبال نمایش جعبه آی سیستم S_1 رسم کنید.

(و) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_1 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

(ز) نشان دهید که دو انتگرالگیری بند (و) را میتوان در هم ادغام کرد. نمایش جعبه ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می‌نامند، حال آن که نمایش جعبه ای بندهای (هـ) و (و) تحقق مستقیم نوع I نامیده می‌شود.

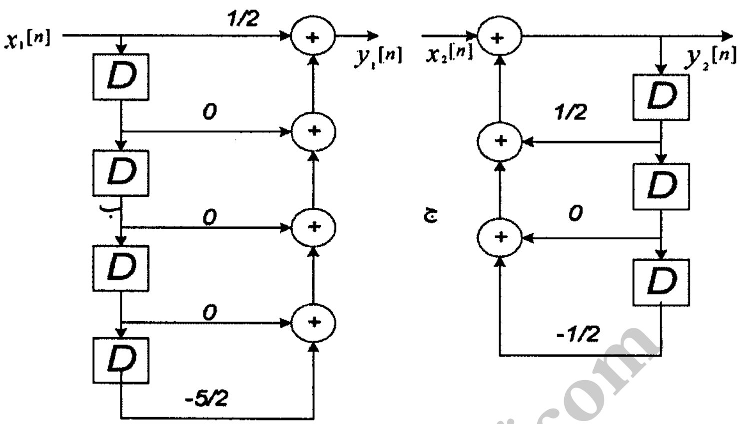
حل: (الف) با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل داده شده اول و خلاصه سازی خواهیم داشت:

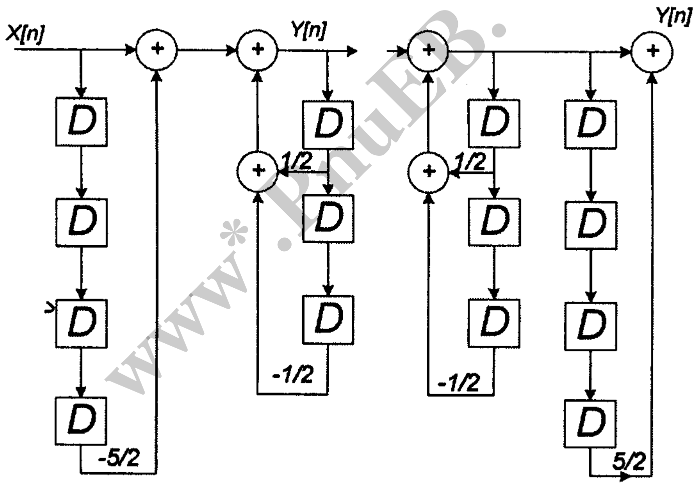
$$y(t)=-\frac{a_\circ}{a_1}\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau+\frac{b_\circ}{a_1}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau+\frac{b_1}{a_1}x(t)$$

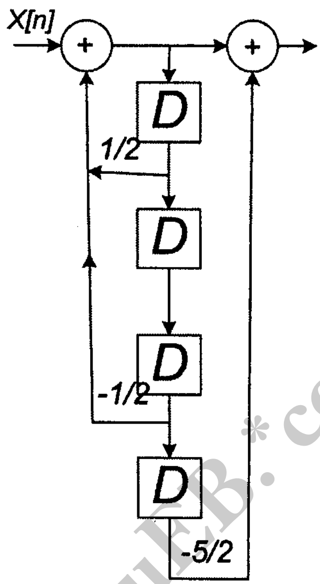
بنابراین: $A=-\dfrac{a_\circ}{a_1}$ و $c=\dfrac{b_\circ}{a_1}$ و

(ب) می‌دانیم که $z_2(t)=y_1(t)$ می‌توانیم این دو معادله‌ی انتگرال را حذف کنیم. داریم:

$$y_2(t)=A\int_{-\infty}^{t}y_2(\tau)d\tau+B\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)d\tau+cx_1(t)$$

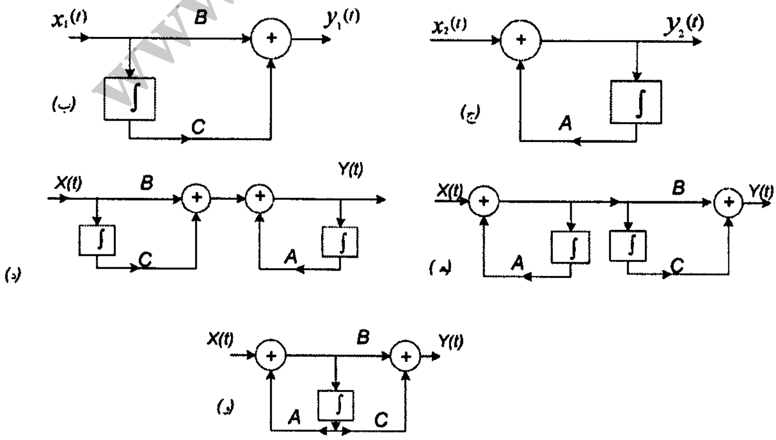

$x_1[n]$
1/2
$y_1[n]$
0
0
0
-5/2
ب
$x_2[n]$
$y_2[n]$
1/2
0
-1/2
ج


X[n]
Y[n]
Y[n]
1/2
1/2
-1/2
-1/2
-5/2
5/2
د



شکل (ح2.58)

(ج) شکل‌های متناظر متناظر برای قسمت‌های باقی مانده این مساله در شکل ح2.59. نشان داده شده اند.



شکل ح2.59.

مسئله ۶۰-۲

➢ یک سیستم LTI علّی S با رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ زیر در نظر بگیرید.

$$a_2\frac{dy^2(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+a_\circ y(t)=b_\circ x(t)+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_2\frac{dx^2(t)}{dt^2}$$

(الف) نشان دهید که

$$y(t)=A\int_{\infty}^{t}y(\tau)d\tau+B\int_{\infty}^{t}\int_{\infty}^{\tau}\int_{\infty}^{\tau}\big(y(\sigma)d\sigma\big)d\tau+Cx(t)$$
$$+D\int_{\infty}^{t}x(\tau)d\tau+E\int_{\infty}^{t}\left(\int_{\infty}^{\tau}x(\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

و ثابتهای A، B، C، D، و E را برحسب ثابتهای $a_\circ$، a_1، a_2، $b_\circ$، b_1، و b_2 بیان کنید.

$$S_1:y(t)=Cx_1(t)=Cx_1(t)+D\int_{\infty}^{t}x_1(\tau)d\tau+E\int_{\infty}^{t}\left(\int_{\infty}^{\tau}x(\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

$$S_2:y_2(t)=A\int_{\infty}^{t}y_2(\tau)d\tau+B\int_{\infty}^{t}\left(\int_{\infty}^{\tau}y_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau+x_2(t)$$

(ب) نمایش جعبه ای S_1 را رسم کنید.

(ج) نمایش جعبه ای S_2 را رسم کنید.

(د) نماش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه ای سیستم S_2 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_1 رسم کنید.

(ه) نمایش جعبه ای S را به صورت اتصال سری نمایش جعبه‌ای سیستم S_1 به دنبال نمایش جعبه ای سیستم S_2 رسم کنید.

(و) نشان دهید که چهارانتگرالگیر جواب بند (و) را می‌توان در دو انتگرالگیر ادغام کرد. نمایش جعبه‌ای حاصل را تحقق مستقیم نوع II سیستم S می‌نامند، حال آن که نمایش جعبه‌ای بندهای (هـ) و (و) تحقق مستقیم نوع I نامیده می‌شود.

حل:

(الف) با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل داده شده و خلاصه سازی داریم:

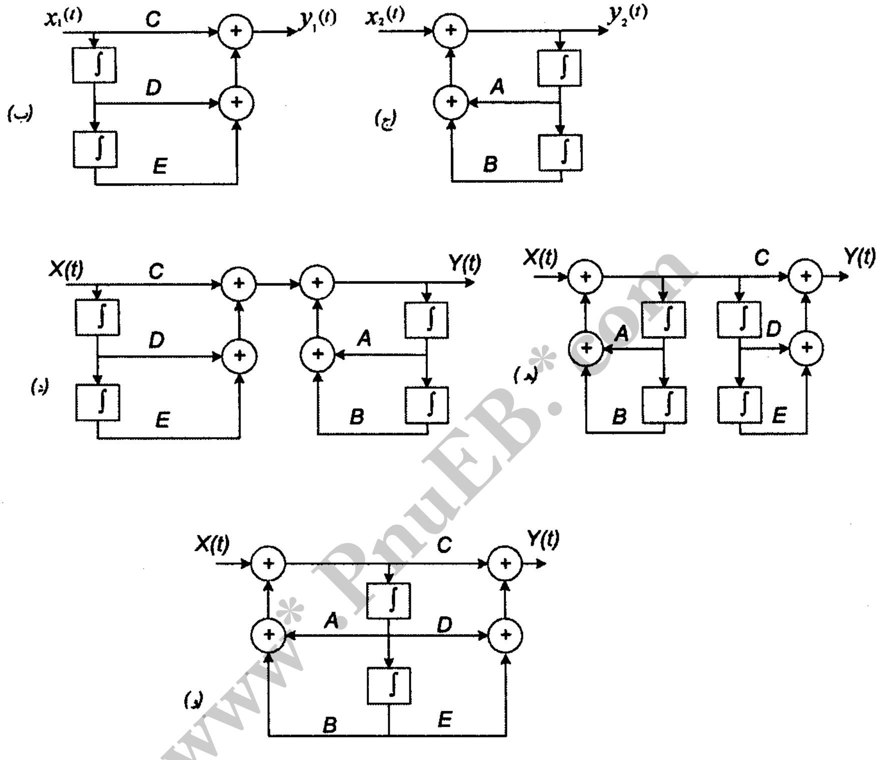
$$y(H)=-\frac{-a_1}{a_2}\int_{\infty}y(\tau)d\tau-\frac{a_\circ}{a_2}\int_{\infty}\int_{\infty}^{\tau}y(\sigma)d\sigma d\tau$$
$$+\frac{b_\circ}{a_2}\int_{\infty}\int_{\infty}x(\sigma)d\sigma d\tau+\frac{b_1}{a_2}\int_{\infty}x(\tau)d\tau+\frac{b_2}{a_1}x(t)$$

بنابراین

$$A=\frac{-a_1}{a_2},\ B=\frac{-\infty}{a_2},\ C=\frac{b_2}{a_1},\ D=\frac{b_1}{a_2},\ E=\frac{b_\circ}{a_2}$$

(ب) می‌دانیم که $x_2(t)=y_1(t)$ و می‌توانیم این را از دو معادله انتگرالی حذف کنیم.

(پ) شکلهای متناظر برای قسمتهای باقی مانده این مسأله در شکل ح2.60، نشان داده شده است.



شکل ح2.60

مسئله ۶۱-۲

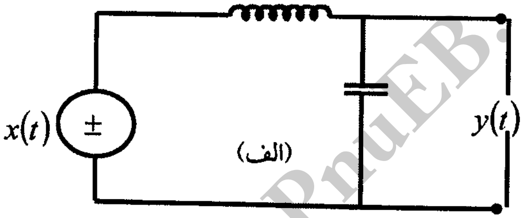
(الف) در مدار شکل م ۲-۶۱ (الف) $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم در نظر بگیرید.

(i) معادله دیفرانسیلی را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کنند بیابید.

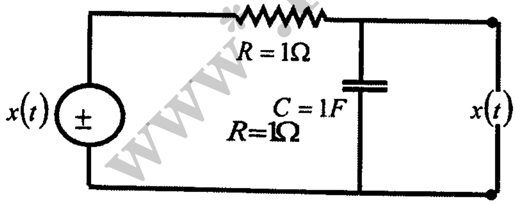
(ii) نشان دهید که جواب همگن معادله دیفرانسیل بند (i) به صورت $K_1e^{j\omega_1 t}+K_2e^{j\omega_2 t}$ است. مقادیر ω_1 و ω_2 را بیابید.

(iii) نشان دهید که چون ولتاژ و جریان حقیقی باشند، پاسخ طبیعی سیستم سینوسی است.

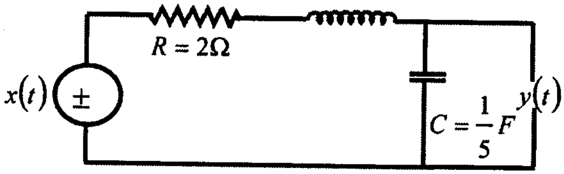
(ب) در مدار شکل م ۲-۶۱ (ب) $x(t)$ ولتاژ ورود است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم در نظر بگیرید.



شکل م ۲-۶۱ الف



(ب)



(ج)

شکل م ۲-۶۱ب و ج

(i) معادله دیفرانسیلی را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کند بیابید.

(ii) نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم به صورت Ke^{at} است و مقدار a را مشخص کنید.

(ج) در مدار شکل م ۲-۶۱ (ج) $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم فرض کنید.

(i) معادله دیفرانسیلی را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کند بیابید.

(ii) نشان دهید که چون ولتاژ و جریان باید حقیقی باشند، پاسخ طبیعی سیستم یک سینوسی میراست.

حل:

(الف) (i) از قانون ولتاژ کریشهف، می دانیم که ولتاژ ورودی، باید با مجموع ولتاژهای شاخه های خازنی و سلفی برابر باشد، فلذا

$$x(t) = \ell c \frac{d^2 y(t)}{dt} + y(t)$$

بااستفاده از مقادیر ℓ , c داریم:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t)$$

ii) با استفاده از نتایج مسئله 2.53، می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = bx(t)$$

برحسب $k_1 e^{s_0 t} + k_2 e^{s_1 t}$ خواهد بود که s_0 و s_1 ریشه های معادله مشخصه $s^2 + a_1 s + a_2 = 0$ می باشد.

(در اینجا فرض شده است که $s_0 \neq s_1$) در این مسئله $a_1 = 0$ و $a_2 = 1$ بنابراین ریشه های معادله مشخصه برابر است با $s_0 = j$ و $s_1 = -j$. جواب عمومی عبارتست از: $h_h(t) = k_1 e^{jt} + k_2 e^{-jt}$

و $\omega_2 = w_1 = 1$

(iii) اگر ولتاژ و جریان به اعداد حقیقی منحصر شوند. $k_1 = k_2 = k$ بنابراین

$$y_h(t) = 2k \cos t = 2k \sin\left(t + \pi/2\right)$$

(ب) (i) از قانون ولتاژ کیرشهف، می دانیم که ولتاژ ورودی باید با مجموع ولتاژ شاخه مقاومتها و خازنها برابر باشد. بنابراین:

$$x(t) = Rc \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

با استفاده از مقادیر R و L و C داریم.

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

(ii) پاسخ طبیعی سیستم، جواب همگن معادله دیفرانسیل فوق می باشد. با استفاده از نتیجه مساله (2.53)، می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = bx(t)$$

برحسب $Ae^{s_0 t}$ ریشه معادله مشخصه است $s + a_1 = 0$

در این مساله $a_1 = 1$، بنابراین ریشه معادله $s_0 = -1$ می باشد. جواب همگن برابر است با $y_h(t) = ke^{-t}$

و $a = 1$

(ج) از قانون ولتاژ کیرشهف، می دانیم که ولتاژ ورودی باید با مجموع ولتاژهای شاخه های مقاومتی و سلفی و خازنی برابر باشد بنابراین:

$$x(t) = fc\frac{d^2y(t)}{dt} + Rc\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

با استفاده از مقادیر R و C و L، داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + sy(t) = 5x(t)$$

(ii) با استفاده از نتیجه مسئله 2.53، می دانیم که جواب همگن معادله ی دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = bx(t)$$

جملاتی برحسب $k_1e^{s_1t} + k_2e^{s_Lt}$ خواهد بود که در آن $s_\circ$, s_1 ریشه هی معادله ی مشخصه می باشد.

$$s^2 + a_1s + a_2 = \circ$$

(فرض شده است که $s_\circ \neq s_1$) در این مسئله $a_1 = 2$ و $a_2 = 5$ بنابراین ریشه های معادله $s_\circ = -1 + 2j$ و $s_1 = -1 - 2j$. جواب همگن معادله برابر با:

$$y_h(t) = k_1e^{-t}e^{2jt} + k_2e^{-t}e^{-2jt}$$

و $a = -1$

(iii) اگر ولتاژ و جریان حقیقی در نظر گرفته شوند، در اینصورت $k_1 = k_2 = k$.

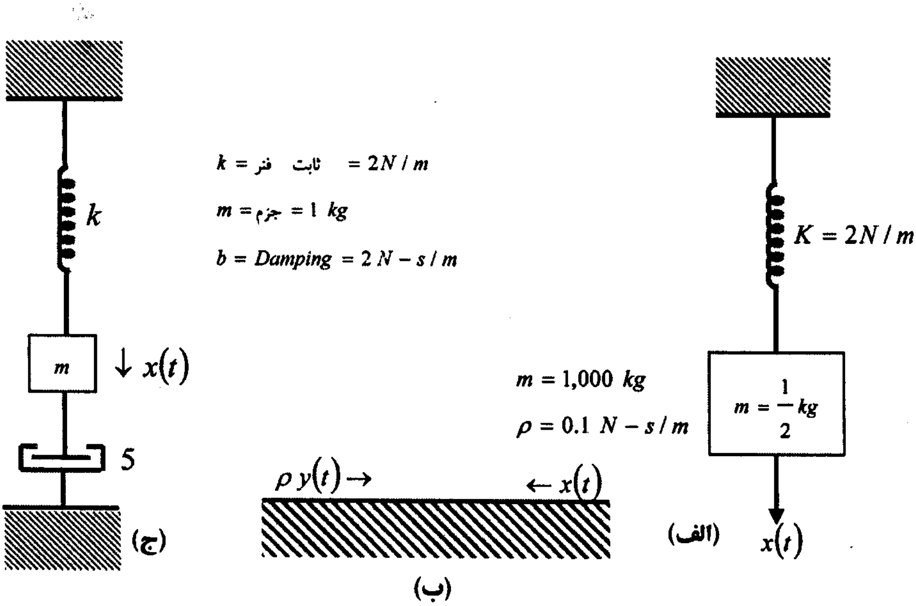
بنابراین

$$-y_h(t) = 2ke^{-t}\cos(2t) = 2ke^{-t}\sin\left(t + \pi/2\right)$$

مسئله ۶۲-۲

(الف) در سیستم مکانیکی شکل م ۲-۶۲ (الف) نیروی $x(t)$ اعمال شده به جرم ورودی، و جابجایی $y(t)$ جرم خروجی است. معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید. نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم متناوب است.

(ب) شکل م ۲-۶۲ (ب) را در نظر بگیرید که در آن نیروی $x(t)$ ورودی و سرعت $v(t)$ خروجی است. جرم خودرو m وضریب اصطکاک جنبشی ρ و ضریب اصطکاک جنبشی ρ است. نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم میراست.



شکل م ۲-۶۲ الف و ب و ج

K= ثابت فنر ۲ N/M m = جرم = ۱ kg b = ثابت میرایی = ۲ N-s/m

(ج) در سیستم مکانیکی شکل م ۲-۶۲ (ج) نیروی $x(t)$ اعمال شده به جرم ورودی و جابجایی $y(t)$ جرم خروجی است.

(i) معادله دیفرانسیل را که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می کند بیابید.

(ii) نشان دهید که جواب همگن معادله دیفرانسیل بند (i) به صورت $e^{at}\left\{K_1 e^{j-t} + K_2 e^{i-t}\right\}$ است و a را تعیین کنید.

حل:

(الف) نیروی $x(t)$ باید با مجموع نیروهای لازم برای خنثی وزن و نیروی لازم برای کش متر برابر باشد. بنابراین:

$$x(t) = m\frac{d^2 y(t)}{dt} + ky(t) = x(t)$$

با جایگذاری مقادیر m و k، داریم:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4y(t) = 2x(t)$$

بااستفاده از نتایج مسئله 2.53، می دانیم که جواب همگن معادله ی دیفرانسیل

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_2 y_2(t) = bx(t)$$

برحسب جملاتی از $k_1e^{s_\circ t}+k_2e^{s_1 t}$ که $s_\circ$ و s_1 ریشه های معادله مشخصه $s^2+a_1s+a_2=\circ$ خواهد بود.
(فرض شده است که $s_\circ \neq s_1$) در این مسئله $a_2=\circ$ و $a_2=4$. بنابراین، ریشه های معادله برابر $s_\circ=\pm 2j$ و $s_1=2j$ می باشد. جواب همگن عبارتست از:

$$y_h(t)=k_1e^{2jt}+k_2e^{2jt}$$

با فرض اینکه $y(t)$ حقیقی است، داریم $k_1=k_2=k$، بنابراین:

$$y_h(t)=2k\cos t$$

واضح است که $y_h(t)$ پریودیک است.

(ب) نیروی $x(t)$ بایستی با مجموع نیروی موردنیاز برای خنثی کردن وزن و نیروی لازم برای کشش متر برابر باشد. بنابراین $x(t)=m\dfrac{dy(t)}{dt}+by(t)$ با جایگذاری مقادیر m، b داریم:

$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{y(t)}{10000}=\frac{x(t)}{1000}$$

و استفاده از نتایج مسئله 2.53 می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy(t)}{dt}+a_1y(t)=bx(t)$$

برحسب جملاتی از $Ae^{s_\circ t}$ خواهد بود. که $s_\circ$ ریشه ی معادله مشخصه $s+a_1=\circ$

در این مسئله $a_1=\dfrac{1}{10000}$ بنابراین، ریشه ی معادله $s_\circ=-10^{-4}$ می باشد.

جواب همگن عبارتست از $y_h(t)=ke^{-10^{-4}t}$

واضح است $y_h(t)$ با تغییر کاهش می یابد.

(ج) می دانیم که نیروی لازم برای خنثی کردن نیروی متر ناشی از $y(t)$.

نیروی جابجایی برای خنثی کردن وزن + نیروی لازم برای خنی کردن بر خود توسط $x(t)=y(t)$ بنابراین:

$$x(t)=m\frac{d^2y(t)}{dt}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)$$

با استفاده از مقادیر m و b و k داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

(ii) با توجه به نتایج مسئله 2.53 می دانیم که جواب همگن معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(t)}{dt}+\alpha_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y(t)=b_1x(t)$$

جملاتی برحسب $k_1e^{s_\circ t}+k_2e^{s_1 t}$ خواهد بود که $s_\circ$, s_1 ریشه های معادله مشخصه $s^2+a_1s+a_2=\circ$ خواهد بود.
(فرض شده که $s_\circ \neq s_1$) در این ریشه $a_1=2$ و $a_2=2$ بنابراین ریشه های معادله برابرند با $s_\circ=-1+j$ و $s_1=-1-j$. جواب همگن برابر است با

$$y_h(t) = k_1 e^{-t} e^{jt} + k_2 e^{-t} e^{-jt}$$

و $a = 1$

(iii) اگر نیرو تعیین شده، حقیقی باشد.در این صورت $k_1 = k_2 = k$ بنابراین:

$$y_h(t) = 2ke^{-t}\cos(t) = 2ke^{-t}\sin\left(t + \pi/2\right)$$

و $y[0] = 100000$

مسئله ۶۳-۲

✍) می‌خواهیم یک وام ۱۰۰۰۰۰ دلاری را با اقساط مساوی ماهیانه D دلار باز پرداخت کنیم. ربع به صورت مرکب و ماهیانه، با نرخ سالیانه ۱۲٪ روی باقیمانده بدهی محاسبه می شود.

$$\$100000 + \frac{0/12}{12}\$100000 = \$101000$$

باید D را به نحوی تعیین کنیم که پس از یک مدت معین کل وام پرداخت و بدهی صفر شود.

(الف) برای توصیف ریاضی مسئله فرض کنید $y[n]$ بدهی باقیمانده پس از n ماه اول است. وام در ماه ۰ گرفته شده است و پرداخت از ماه ۱ آغاز می شود. نشان دهید که $y[n]$ معادله تفاضلی زیر

$$y[n] = \gamma y[n-1] = -D \qquad \text{(م ۲-۶۳-۱)}$$

را با شرط اولیه

$$y[0] = \$100000$$

ارضا می کند که در آن γ ثابت است. γ را بیابید.

(ب) معادله تفاضلی بند (الف) را حل کرده $y[n]$ را در $n \geq 0$ تعیین کنید.

راهنمائی: جواب مخصوص معادله (م ۲-۶۳-۱) عدد ثابت Y است. مقدار Y را یافته، $y[n]$ را در $n \geq 0$ به صورت مجموع جواب خصوصی و جواب همگن بنویسید. ثابت نامعلوم جواب همگن را با محاسبه مستقیم $y[1]$ از معادله (م ۲-۶۳-۱) و مقایسه آن با جواب به دست آمد، تعیین کنید.)

(ج) اگر وام ۳۰ ساله باشد، یعنی پرداخت در ۳۶۰ قسط ماهیانه صورت گیرد، مقدار D باید چقدر باشد؟

(د) کل بازپرداخت ۳۰ ساله چقدرست؟

(هـ) چرا بانکها وام می دهند؟

حل: ترکیب Amt از برج قبلی + پرداخت شده $-Amt$ قرضی $y(t) = Amt$

$$= 100000\delta[n] + 1.01\ y[n-1] - Du[n-1]$$

بنابراین

$$y[n] = 1.01 y[n-1] - D_1 \qquad n > 0$$

$$\wp = 1.01 \text{ و } y[0] = 100000 \text{ و}$$

ب) داریم: $y_b[n]=1.01y_p[n-1]D$

که بیان می کند $y_p[n]=1000$. همچنین جواب همگن برابر است با:

$$y_h[n]=A(1.01)^n$$

بنابراین:

$$y[n]=y_y[n]+y_p[n]=A(1.01)^n+100D$$

با استفاده از شرایط اولیه $y[\circ]=100000$، داریم:

$$A=100000-100D$$

بنابراین:

$$y[n]=(100000-100D)(1.01)^n+100D$$

ج) داریم:

$$y[360]=\circ(p-100D)(1.01)^{360}+100D$$

بنابراین $D=\$1028.60$

د) مجموع پرداختی = $\$370.269$

هـ) دشوارترین سوال این کتاب !!!

مسئله ۲-۶۴

یکی از فواید مهم سیستمهای وارون در وضعیتهایی است که می خواهیم نوعی اعوجاج را حذف کنیم. مسئله حذف ژواک محسوسی داشته باشد، به دنبال یک ضربه صوتی اولیه، در فواصل زمانی مساوی نمونه های تضعیف شده این صدا به گوش می رسد. به این دلیل، مدلی که غالباً برای این پدیده به کار می رود، یک سیستم LTI با پاسخ ضربه ای مشتمل بر یک قطار ضربه است. $h(t)=\sum_{k=\circ}^{\infty}h_k\delta(t-kT)$

پژواک ها با فاصله T ثانیه تکرار می شوند، و h_k ضریب بهره k ضریب بهره پژواک حاصل از ضربه صوتی اولیه است.

(الف) $x(t)$ را سیگنال صوتی اولیه (مثلاً موسیقی ارکستر)، و $y(t)=x(t)*h(t)$ را سیگنالی که بدون هیچ پردازشی به گوش می رسد فرض کنید. برای حذف اعوجاج حاصل از پژواکها میکروفونی نصب شده که $y(t)$ را می گیرد و آن را به یکسیگنال الکتریکی تبدیل می کند. این سیگال را هم $x(t)$ می نامیم زیرا معادل الکتریکی سیگنال صوتی است، و می توان این دو را با سیستمهای مبدل صوتی الکتریکی به هم تبدیل کرد.

نکته قابل توجه این است که سیستم دارای پاسخ ضربه معادله (م ۲-۶۴-۱) وارونپذیرست. پس می توان یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $g(t)$ یافت، به نحوی که

$$y(t)*g(t)=x(t)$$

معالات جبری را که مقادیر متوالی $g(t)$ در آن صدق می کنند بیابید و با حل آنها $g_\circ$، g_1، g_2 را برحسب gk بیابید.

(ب) $g(t)$ را با فرض $h_\circ$، $g_\circ = \frac{1}{2}$ و برای تمام مقادیر $h_i \geq 2$، $h_i = \circ$ بیابید.

(ج) شکل م ۲-۶۴ مدل خوبی برای تولید پژواک است. پژواکهای متوال، صورتهای فیدبک شده $y(t)$ هستند، که به اندازه T ثانیه تأخیر یافته و در a ضرب شده اند. معمولاً $\circ < a < 1$، زیرا پژواکهای متوالی تضعیف می شوند.

(i) پاسخ ضربه این سیستم را بیابید. (فرض کنید سیستم ابتداناً ساکن است، یعنی اگر در $\circ > 1$، $x(t) = \circ$؛ آنگاه در $t < \circ$، $y(t) = \circ$.

(ii) ثابت کنید که سیستم به ازای $\circ < a < 1$ پایداری و به ازای $a > 1$ ناپایدار است.

(iii) $g(t)$ را برای این حالت بیابید. این سیستم وارون را با جمع کننده، ضرب کننده و عدد و تأخیر دهنده T ثانیه بسازید.

(د) هر چند بحث بالا به علت کاربرد خاص در نظر گرفته شده، در مورد سیستمهای پیوسته در زمان بیان شد ولی در حالت گسسته در زمان نیز می توان این مفاهیم را به کار برد. یعنی سیستم LTI با پاسخ ضربه

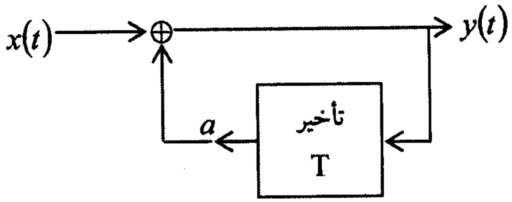
$$h[n] = \sum_{k=\circ}^{\infty} \delta[n-k]$$

وارونپذیرست و سیستم وارون آن سیستمی LTI با پاسخ ضربه زیرست

$$g[n] = \sum_{k=\circ}^{\infty} gk\,\delta[n-kN]$$

به راحتی می توان نشان داد gi ها همان معادلات جبری بند (الف) را ارضا می کنند. یک سیستم گسسته در زمان LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرد.

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$$



شکل م ۲-۶۴

این سیستم وارونپذیر نیست. دو ورودی بیابید که خروجی یکسانی ایجاد کنند.

حل:

(الف) داریم: $y(t) * h(t)$ و $x(t) = y(t) * g(t)$. بنابراین $g(t) * h(t) = \delta(t)$
حال

$$h(t) * g(t)\big|_{t=nT} = \sum_{k=\circ}^{n} h_k q_{n-k} \delta(t-nk)$$

بنابراین، می خواهیم:

$$\sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k} = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n=1,2,3,\dots \end{cases}$$

در نتیجه،

$$g_0 = \frac{1}{h_0} \quad , \quad g_1 = \frac{-h_1}{h_0^2}$$

$$g_2 = \frac{-1}{h_0}\left[\frac{-h_1^2}{h_0^2} + \frac{h_2}{h_0}\right], \dots$$

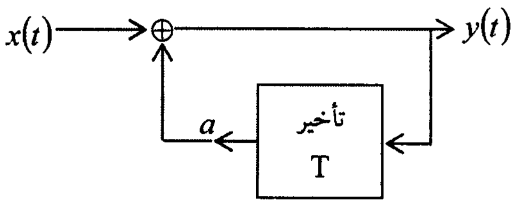
ب) در این مورد $g_0 = 1$ و $g_2 = -1/2$ و $g_3 = \left(-1/2\right)^3$ و ... به این ترتیب که نشان می دهد که:

$$g(t) = \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-1/2\right)^k \delta(t - KT)$$

ج) (i) در اینجا: $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - T)$

(ii) اگر $0 < \propto < 1$ در این صورت $\propto^k < 1$، بنابراین $h(t)$ محدود شده و بطور معین انتگرال پذیر متناظر با یک سیستم پایدار است. اگر $\propto > 1$، در این صورت $h(t)$ به طور معین انتگرال پذیر نیست و سیستم را ناپایدار می باشد.

(iii) در اینجا نیز؛ $g(t) = 1 - \delta(t - T)$. سیستم معکوس در شکل زیر نشان داده شده است:



د) اگر $x_1[n] = \delta[n]$ و $y[n] = h[n]$؛ اگر $x_2[n] = 1/2\,\delta[n] + 1/2\,\delta[n - N]$ و $y[n] = h[n]$.

مسئله ۶۵-۲

در مسئله ۱-۴۵ تابع همبستگی را برای سیگنالهای پیوسته در زمان معرفی و بعضی خصوصیات اساسی آن را بررسی کردیم. همتای گسسته در زمان تابع همبستگی نیز همان خواص را دارد و هر دو کاربردهای بسیار مهم و متعددی دارند (و در مسائل ۲-۶۶ و ۲-۶۷ معرفی شان خواهیم کرد). در این مسئله تابع همبستگی گسسته در زمان رامعرفی و چند خاصیت دیگر آن را بررسی می کنیم.

$x[n]$ و $y[n]$ را دو سیگنال گسسته در زمان حقیقی بگرید. توابع خود همبستگی $x[n]$ و $y[n]$، به ترتیب $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ هستند و به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\phi_{xx}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m+n]x[m]$$

،

$$\phi_{yy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m+n]y[m]$$

توابع همبستگی متقال $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yx}[n]$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$\phi_{xy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m+n]y[m]$$

،

$$\phi_{yy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m+n]x[m]$$

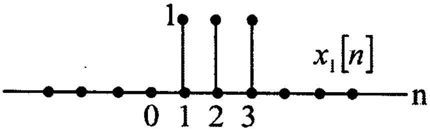
این توابع مانند حالت پیوسته در زمان تفاوتهای خاصی دارند. $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ توابعی زوج هستند، و حال آن که $\phi_{xy}[n]=\phi_{yx}[-n]$.

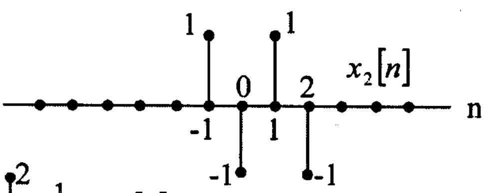
(الف) دنباله هی خود همبستگی سیگنالهای $x_1[n]$، $x_2[n]$، $x_3[n]$، و $x_4[n]$ شکل م ۲-۶۵ را بیابید.

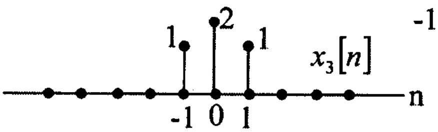
(ب) دنباله های همبستگی متقابل زیر را بیابید.

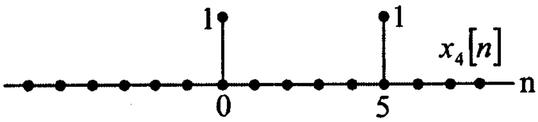
$$\phi_{x_i y_j}[n] \quad i \neq j \quad i,j=1,2,3,4$$

$x_i[n]$ ها همان سیگنالهای شکل م ۲-۶۵ هستند.









شکل م ۲-۶۵

(ج) $x[n]$ را ورودی یک سیستم LTI، با پاسخ نمونه واحد $h[n]$، و $y[n]$ را خروجی متناظر باآن بگیرید. $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را برحسب $\phi_{xx}[n]$ و $h[n]$ بیابید. نشان دهید که می توان $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را خروجی دو سیستم LTI به ورودی $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ دانست؟ (پاسخ ضربه این دو سیستم را بیابید).

(د) $h[n]$ را $x_1[n]$ شکل م ۲-۶۵ بگیرید و فرض کنید $y[n]$ خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ به ورودی $x_1[n]$ است. به کمک نتایج بند (ج) $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را بیابید.

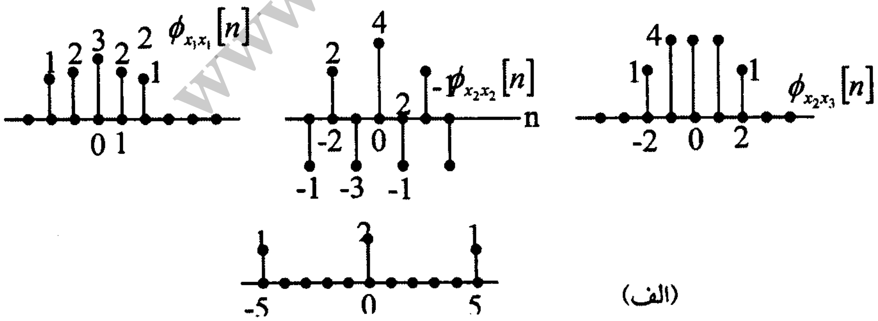
حل: الف) دنباله خود همبستگی در شکل ح2.65 نشان داده شده است.

(ب) دنباله ها خود همبستگی در شکل ح2.65 نشان داده شده است.

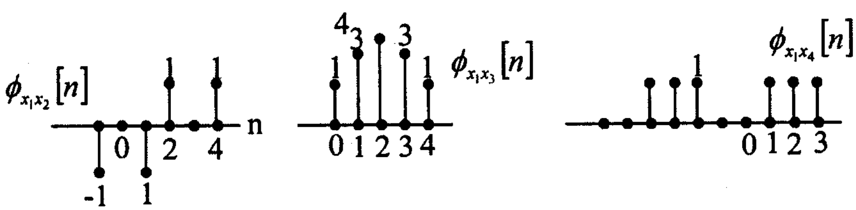
(ج) داریم: $\phi_{xy}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[-k]\phi_{xx}[n-k]$

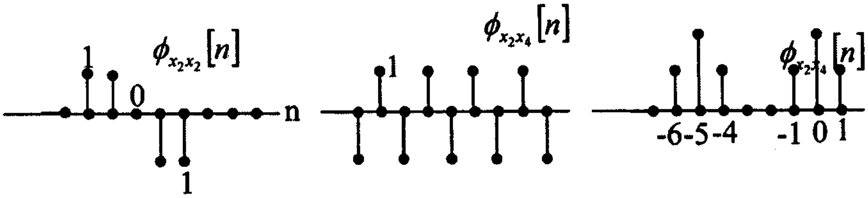
بنابراین $\phi_{xy}[n]$ به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\phi_{xx}[n]\rightarrow\boxed{h[-n]}\rightarrow\phi_{xy}[n]$$

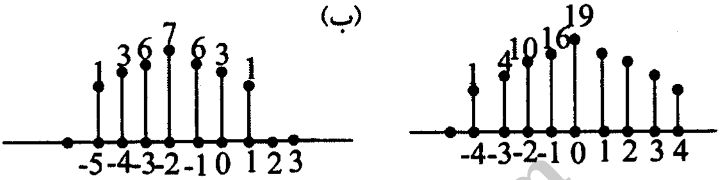


(الف)





(ب)



(د)

شکل ح2.65

نیز: $\phi_{yy}[n]=\sum_k \phi_{xx}[n-k]\,\phi_{hh}[k]$

بنابراین $\phi_{yy}[n]$ به صورت طیر نمایش داده می شود.

$$\xrightarrow{\phi_{xx}[n]} \boxed{h[n]*h[-n]} \rightarrow \phi_{yy}[n]$$

(د) $\phi_{xy}[n]$ و ϕ_{yy} در شکل ح2.65 نشان داه شده است.

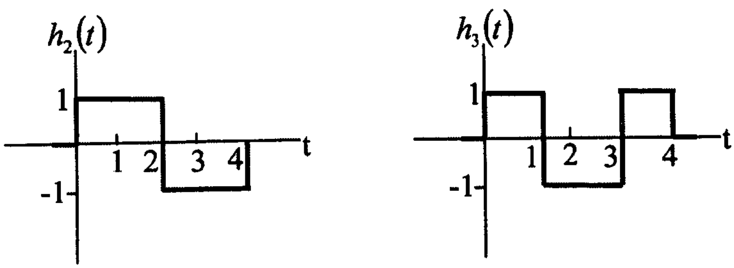
مسئله ۶۶-۲

➢ $h_1(t)$، $h_2(t)$ و $h_3(t)$ شکل م ۲-۶۶ را پاسخ ضربه سه سیستم LTI فرض کنید. اینها راتوابع والش می نامند و به علت سادگی ساختشان با مدارهای منطقی و نیز چون عمل ضرب در هر یک از آنها تنها با یک تغییر علامت متناظرست و میتوان با کلیدهای تغییر وضعیت آن را انجام داد، اهمیت زیادی دارند.

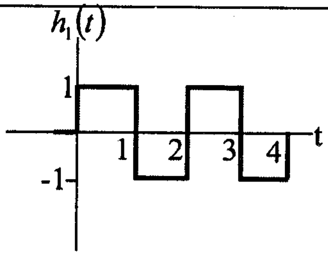
(الف) یک سیگنال پیوسته در زمان $x_1(t)$ با مشخصات زیر انتخاب و رسم کنید

(i) $x_1(t)$ حقیقی باشد. (ii) به ازای تمام مقادیر ≥ 0 $x_1(t)=0$.

(iii) به ازای تمام مقادیر $t \geq 0$، $|x_1(t)| \leq 1$



شکل م ۲-۶۶



(iv) $y_1(t)=x_1(t)*h_1(t)$ در $t=4$ حداکثر مقدار ممکن راداشته باشد.

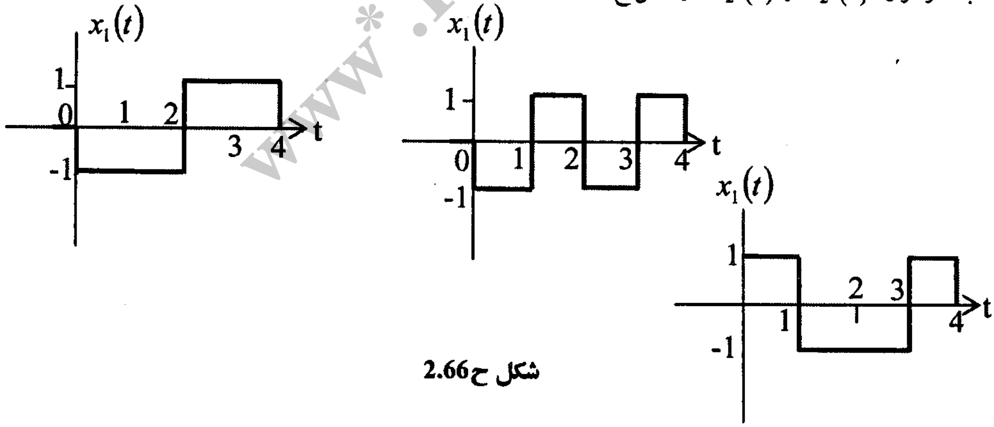
(ب) قسمت (الف) را برای $x_2(t)$ و $x_3(t)$ تکرار کنید، به نحوی که $y_2(t)=x_2(t)*h_2(t)$ در $t=4$ و $h_{L1}(t)$ در $t=4$ ماکزیمم شوند.

(ج) مقدار $i\neq j$ $y_{ij(t)}=x_i(t)*h_j(t)$ در $t=4$ را به ازای $i,j=1,2,3$ بیابید.

سیستم دارای پاسخ ضربه $x_1(t)*h_{L\circ}(t)\big|_{t=4}=4$ را فیلتر منطبق سیگنال $x_i(t)$ می نامند، زیرا پاسخ ضربه آن برای ماکزیمم شدن خروجی سیگنال به ازای

حل: (الف) طرحواره $x_1(t)$ در شکل ح2.66 نشان داده شده است.

(ب) طرحواره $x_2(t)$ و $x_2(t)$ در شکل ح2.66 نشان داده شده است.



شکل ح2.66

(ج)

$$x_1(t)*h_2(t)=x_2(t)*h_3(t)$$

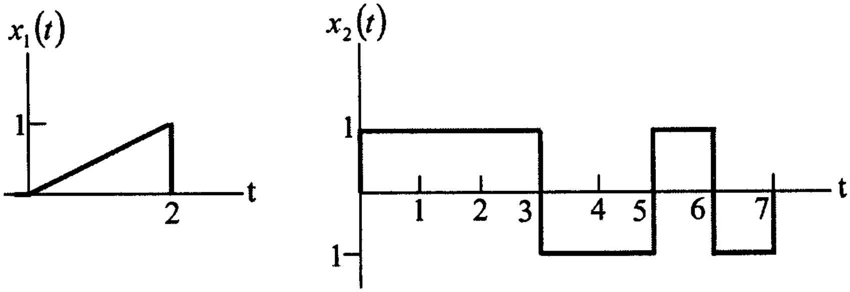
برای $t=4$ $\quad =x_1(t)*h_3(t)=\circ$

مسئله ۶۷-۲

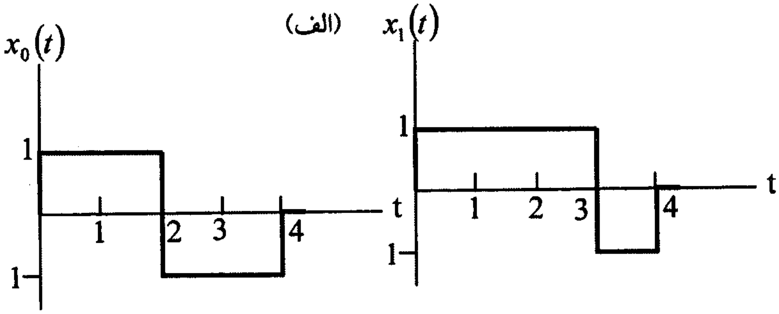
➤ تابع همبستگی متقابل دو سیگنال حقیقی پیوسته در زمان $x(t)$ و $y(t)$ عبارت است از:

$$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau \qquad (\text{م } ۲\text{-}۶۷)$$

با گذاشتن $x(t)$ به جای $y(t)$ معادله (م ۲-۶۷-۱)، تابع همبستگی سیگنال $x(t)$ به دست می آید.



(الف)



(ب)

شکل ۲-۶۷

$$\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau \qquad (\text{م } ۲\text{-}۶۷)$$

(الف) برای هر یک از دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ شکل م ۲-۶۷-۱ تابع خود همبستگی را بیابید.

(ب) $x_1(t)$ را یک سیگنال معین دارای عمر محدود فرض کنید، یعنی برای $t<0$ و $t>T$، $x(t)=0$.

می خواهیم $\phi_{xx}(t-T)$ پاسخ یک یسستم LTI به ورودی $x(t)$ است. به صورت زیر می توانیم نشان دهیم که این تعریف فیلتر منطبق با تعریف بیان شده در مسئله ۲-۶۶ یکسان است.

$y(t)$ را پاسخ یک سیستم LTI، با پاسخ ضربه حقیقی $h(t)$، به سیگنال $x(t)$ بند (ب) فرض کنید.

فرض کنید در $t<0$ و $t>T$، $x(t)=0$. نشان دهید $h(t)$ ماکزیمم کننده $y(t)$، با قید زیر

$$\int_0^T h^2(t)dt = M \quad \text{یک عدد مثبت ثابت} \qquad (م ۲-۶۷-۲)$$

مضرب اسکالری از پاسخ ضربه مشخص شده در بند (ب) است.

[راهنمایی: نامساوی شوارتز برای دو سیگنال $\upsilon(t)$ و $u(t)$ عبارت است از

$$\int_b^a u(t)\upsilon(t)dt \le \left[\int_b^a u^2(t)dt\right]^{1/2}\left[\int_b^a \upsilon^2(t)dt\right]^{1/2}$$

با استفاده از این نامساوی کران $y(T)$ را بیابید.]

(د) قید معادله (م ۲-۶۷-۲) تنها برای پاسخ ضربه یک ضریب تعیین می کند، زیرا افزایش M تنها ضریب اسکالر بند (ج) را تغییر می دهد. پس انتخاب $h(t)$ به صورت بندهای (ب) و (ج) با $x(t)$ منطبق است، به نحوی که پاسخ سیستم به آن ماکزیمم شود. چنان که خواهیم گفت در بعضی کاربردها این مسئله بسیار مهم است.

در کاربردهای مخابراتی گاهی می خواهیم یکی از چند پیام ممکن را ارسال کنیم. مثلاً وقتی یک پیام پیچیده را به صورت یک دنباله دودویی کد می کنیم، سیستمی داریم که اطلاعات را بیت به بیت ارسال می کند. هر بیت را می توان به صورت یک سیگنال مخابره کرد، مثلاً به ازای بیت صفر سیگنال $x_0(t)$ و به ازای بیت یک سیگنال $x_1(t)$ را. در این حالت سیستم گیرنده این سیگنالها باید تشخیص دهد که $x_0(t)$ رسیده است یا $x_1(t)$. عاقلانه است که در گیرنده دو سیستم داشته باشیم که یکی برای $x_0(t)$ و دیگری برای $x_1(t)$ «تنظیم» شده باشد. منظور از «تنظیم» این است که سیستم با رسیدن سیگنالی که برای آن تنظیم شده، خروجی بزرگ تولید کند. خاصیت تولید خروجی بزرگ به هنگام رسیدن یک سیگنال خاص دقیقاً همان خصوصیتی است که فیلتر منطبق دارد.

در عمل ارسال و دریافت همیشه با اعوجاج و تداخل همراه است. در نتیجه می خواهیم اختلاف بین پاسخ فیلتر منطبق به ورودیی که با آن تطبیق یافته و پاسخ فیلتر به یکی از سیگنالهای دیگری که می تواند ارسال شود، ماکزیمم باشد. برای روشن کردن این مطلب دو سیگنال $x_0(t)$ و $x_1(t)$ شکل م ۲-۶۷ (ب) را در نظر بگیرید.

(i) پاسخ L_0 به $x_0(t)$ و $x_1(t)$ را رسم کنید. برای L_1 نیز این کار انجام دهید.

(ii) مقدار این پاسخها را در $t=4$ مقایسه کنید. چه تغییری در $x_0(t)$ صورت دهیم تا کار گیرنده در تشخیص بین $x_0(t)$ و $x_1(t)$ ساده تر باشد؟ برای این کار باید $t=4$، پاسخ L_0 به $x_1(t)$ و پاسخ L_1 به $x_0(t)$ صفر باشد.

حل:

(الف) توابع خود همبستگی عبارتند از:

$$\phi_{x_1x_1} = \begin{cases} \frac{1}{24} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3} & 0 \le t \le 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases} \quad , \quad \phi_{x_1x_1}(t)\phi_{x_1x_1}(-t)$$

$$\phi_{x_2x_2}(t)=\begin{cases}6(1-t) & a\le t\le 1\\ 1-t & 1\le t\le 2\\ t-3 & 2\le t\le 3\\ 3-t & 3\le t\le 4\\ t-5 & 4\le t\le 5\\ 5-t & 5\le t\le 6\\ t-7 & 6\le t\le 7\\ \circ & t>7\end{cases} \quad , \quad \phi_{x_2x_2(t)}=\phi_{x_2x_2}(-t)$$

ب) اگر پاسخ ضربه $h(t)=x(T-t)$ باشد، در اینصورت $y(t)=\phi_{xx}(t-T)$

ج) دا ریم:

$$y(T)=\int_0^T x(\tau)h(T-\tau)d\tau$$
$$\le m^{1/2}\left[\int_0^T x^2(t)dt\right]^{1/2}$$

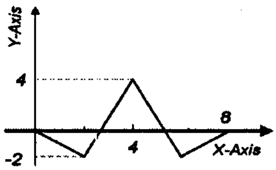
بنابراین $y(t)$ با $M^{1/2}\left[\int_0^T x^2(t)dt\right]^{1/2}$

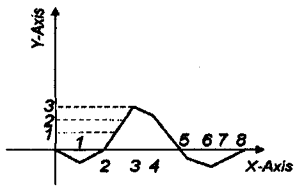
حال اگر داشته باشیم:

$$h(t)=\sqrt{\frac{m}{\int_0^T x^2(t)dt}}x(T-t)$$

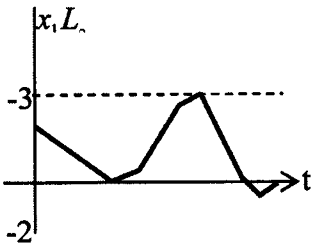
در این صورت، $y(T)=M^{1/2}\left(\int_0^T x^2(t)dt\right)^{1/2}$

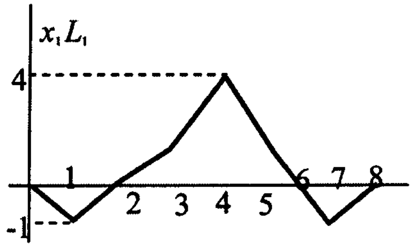
واضح است که $y(T)$ در انتخاب بالا برای $h(T)$ ماکزیمم است.



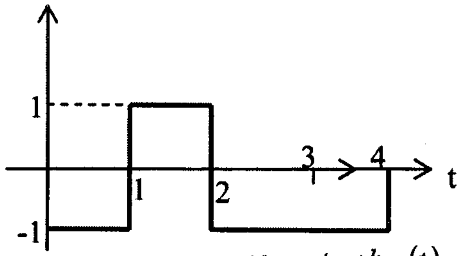


د





(د)



شکل ح2.67

(ii) فرض کنید پاسخ ضربه $L_\circ$ و L_1، $L_{t_\circ}$ و $h_{L1}(t)$؛ در اینصورت:

$$x_\circ(t)*h_{L\circ}(t)\big|_{t=4}=4$$
$$x_\circ(t)*h_{L1}(t)\big|_{t=4}=2$$
$$x_1(t)*h_{L\circ}(t)\big|_{t=4}=4$$
$$x_1(t)*h_{L1}(t)\big|_{t=4}=4$$

برای انیکه کار گیرنده ساده تر گردد، $x_\circ(t)$ همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است تغییر دهید.

مسئله ۶۸-۲

سیستمهای رادار کاربرد دیگری است که در آنها فیلترهای منطبق و توابع همبستگی نقش مهمی دارند. اساس رادار ارسال یک پالس الکترومغناطیسی به سوی هدف، بازتاب آن از هدف و در نتیجه بازگشت آن به فرستنده با تأخیری متناسب با فاصله هدف تا رادار است. در حالت ایده آل سیگنال دریافتی نمونه تأخیر یافته و تضعیف شده سیگنال ارسالی است. پالس اصلی ارسالی را $p(t)$ فرض کنید. نشان دهید که

$$\phi_{pp}=(\circ)=\max_t\ \phi_{pp}(t)$$

یعنی $\phi_{pp}(\circ)$ ماکزیمم مقدار $\phi_{pp}(t)$ است. با استفاده از این معادله نتیجه بگیرید که اگر شکل موج دریافت شده در گیرنده به صورت زیر باشد $x(t)=a\ p(t-t_\circ)$

که در آن a مقداری ثابت است، آنگاه $\phi_{xp}(t_\circ)=\max_t\ \phi_{xp}(t)$

(راهنمایی: نامساوی شوارتز را به کار برید.)

پس سیستم ساده فاصله یابی راداری بر اساس استفاده از فیلتر منطبق با شکل موجی ارسالی $p(t)$، و یافتن زمان ماکزیمم شدن خروجی این سیستم استوارست.

حل:

$$\phi_{pp}(\tau)=\int p(\tau)p(t+\tau)dt$$
$$\leq\left[\int p^2(\tau)d\tau\right]^{1/2}\left[\int p^2(t+\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq\int p^2(\tau)d\tau$$

بنابراین،

$$\phi_{pp}(\tau)\leq\phi_{pp}(\circ)\Rightarrow\phi_{pp}(\circ)=max\ \ \phi_{pp}(t)$$

نیز

$$\phi_{xp}=\phi_{pp}(t-t_\circ)\Rightarrow\phi_{xp}(t_\circ)=\phi_{pp}(\circ)=max\ \phi_{xp}(t)$$

مسئله ۶۹-۲

(الف) فرض کنید $g(t)=x(t-\tau)$

در اینصورت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}r(t)u_1(t)dt=-r'(\circ)=-g'(\circ)-f(\circ)-g(\circ)f'(\circ)$$

نیز

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)f(\circ)u_1(t)dt-\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)f'(\circ)u_\circ(t)dt$$
$$=-g'(\circ)f(\circ)-g(\circ)f'(\circ)$$

که مشابه بالایی است.

(ج)

$$g^n(\circ)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)u_2(\tau)d\tau$$

(د) می توان نوشت:

$$\int g(\tau)f(\tau)u_2(\tau)d\tau=\frac{d^2}{dt^2}\left[g(-t)f(-t)\right]\Big|_{t=\circ}$$
$$=\frac{-d}{dt}\left[g'(-t)f(-t)+g(-t)f'(t)\right]_{t=\circ}$$
$$=g''(\circ)f(\circ)-2g'(\circ)f'(\circ)+g(\circ)f''(\circ)$$

بنابراین

$$f(t)u_2(t)=f(\circ)u_2(t)-2f'(\circ)u_1(t)+f''(\circ)u_\circ(t)$$

مسئله ۷۰-۲

می‌توانیم به قیاس توابع ویژه پیوسته در زمان، یک مجموعه سیگنال ویژه گسسته در زمان تعریف کنیم.

فرض کنید

$$u_{-1}[n]=u[n]$$
$$u_0=\delta[n]$$

و

$$u_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

توابع زیر را تعریف کنید

$$u_k[n]=\underbrace{u_1[n][n]*\dots*u_1[n]}_{\text{بار } k}\ \blacklozenge, k>0$$

و

$$u_k[n]=\underbrace{u_{-1}[n]*\dots*u_{-1}[n]}_{\text{بار } k}\ \blacklozenge, k<0$$

توجه کنید که

$$x[n]*\delta[n]=x[n]$$
$$x[n]*u[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]$$

و

$$x[n]*u_{-1}[n]=x[n]-x[n-1]$$

(الف) مقدار زیر را بیابید

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]u_1[m]$$

(ب) نشان دهید که

$$x[n]u_1[n]=x[0]u_1[n]-(x[1]-x[0])\delta[n-1]$$
$$=x[1]u_1[n]-(x[1]-x[0])\delta[n]$$

(ج) سیگنالهای $u_2[n]$ و $u_3[n]$ را رسم کنید.

(د) $u_{-2}[n]$ و $u_{-3}[n]$ را رسم کنید.

(هـ) نشان دهید که در حالت کلی برای $k>0$ داریم:

$$u_k[n]=\frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!}(u[n])-u[n-k-1] \qquad (۲-۷۰-۱)$$

(راهنمایی: از استقراء استفاده کنید. از بند (ج) می دانیم که $u_k[n]$، بهازای $k=2,3$ معادله (م ۲-۷۰-۱) را ارضا می کند. سپس با فرض این که $u_k[n]$ نیز چنین است، با نوشتن $u_{k+1}[n]$ برحسب $u_k[n]$ نشان دهید که $u_{k+1}[n]$ نیز این معادله را ارضا می کند.)

(و) نشان دهید که در حالت کلی برای $k>0$ داریم.

$$u-k[n]=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n] \qquad (م ۲-۷۰-۲)$$

(راهنمایی: از استقراء استفاده کنید. توجه کنید که

$$u_{-(k+1)}[n]-u_{-(k+1)}[n-1]=u_{-k}[u] \qquad (\text{۲-۷۰-۳})$$

سپس با فرض صحت معادله (م ۲-۷۰-۲) برای $u_{-k}[n]$، نشان دهید که این معادله برای $u_{-(k+1)}[n]$ هم معتبرست.)

حل: داریم:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]u_1[m]=\sum_m x\left[m\{\delta[m]-\delta[m-1]\}\right]$$
$$=x[0]-x[1]$$

(ب) داریم:

$$x[n]u_1[n]=x[0]\delta[n]-x[1]\delta[n-1]+\left[x[0\delta[n-1]]-x[0]\delta[n-1]\right]$$
$$=x[0]u_1[n]-\{x[1]-x[0]\}\delta[n-1]$$
$$=x[0]\delta[n]-x[1]\delta[n-1]+x[1]\delta[n]-x[1]\delta[n]$$
$$=x[1]u_1[n]-\{x[1]-x[0]\}\delta[n]$$

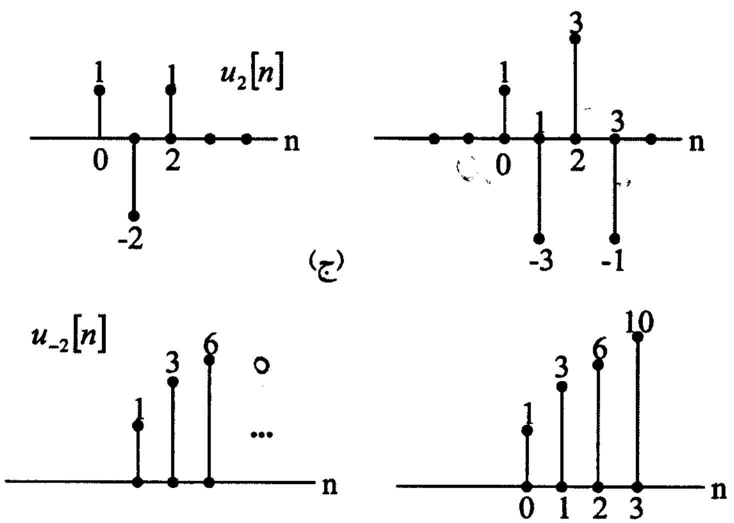
(ج) داریم:

$$u_2[n]=u_1[n]*u_1[n]=\delta[n]-2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

,

$$u_3[n]=\delta[n]=-3\delta[n-1]+3\delta[n-2]-\delta[n-3]$$

طرحهای سیگنالها در شکل ح2.70 نشان داده شده اند.



شکل (ح2.70.1)

(د) داریم:

$$u_{-2}[n] = n+1 \qquad n \geq 0$$

،

$$u_{-3}[n] = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad n \geq 0$$

شکل‌ها در شکل ح2.70 نمایش داده شده است.

(هـ) وضعیت برای $K = 1, 2, 3$ صحیح هستند. فرض کنیم برای k درست باشد، در این صورت برای $k > 0$،

$$u_{k+1}[n] = u_1[n] * u_k[n] = -u_k[n] - u_k[n-1]$$

با استدلال، می توانیم دلیل بیاوریم که حالت موردنظر برای تمام $k > 0$ صحیح است.

(و) برای $k = 1$، $u_{-1}[n] = u[n]$ که نشان می دهد که وضعیت صحیح است. برای $k = 2$

$$u_{-2}[n] = \frac{(n+1)}{n!} = u[n] = (n+1)u[n]$$

که دوباره نشان می دهد ك وضعیت درست است. فرض کنید که برای $k-1 > 0$ صحیح باشد،

در این صورت، $u_{-(k-1)}[n] = u_{-1}[n] - u_{-k}[n-1]$ نیز:

$$u_{-(k-1)}[n] = \frac{(n+k-2)!}{n!(k-2)!}$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n] - \frac{(n+k-2)!}{(n-1)!(k-2)!}u[n-2]$$

با استفاده از مقایسه معادله بالا با معادله (ح 2.70.1) داریم:

$$u_{-k}[n] = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n]$$

با استدلال، می توان دلیل آورد که وضعیت برای تمامی $k > 0$ صحیح است.

مسئله ۷۱-۲

➢ دراین فصل از چند ویژگی و مفهوم ساده کننده تحلیل سیستمهای LTI استفاده کردیم. در این مسئله می خواهیم دو نمونه از این ویژگیها را دقیقتر بررسی کنیم. خواهیم دید که در بعضی حالات بسیار خاص باید این ویژگیها را با دقت و احتیاط به کاربرد، حال آنکه در حالتهای دیگر بدون وسواس از آنها استفاده می کنیم.

(الف) یکی از ویژگیهای اساسی و مهم کانولوشن (در هر دو حالت پیوسته و گسسته در زمان) ویژگی شرکت پذیری است. یعنی اگر $h(t)$، $x(t)$، و $g(t)$ سه سیگنال باشند داریم

$$x(t)*[g(t)*h(t)] = [x(t)*g(t)]*h(t) = [x(t)*h(t)]*g(t) \qquad \text{(م ۲-۷۱-۱)}$$

رابطه فوق به شرطی درست است که هر سه عبارت خوش تعریف و غیر بی نهایت باشند. چون معمولاً این شرط برقرارست، در عمل معمولاً بدون هیچ فرض و تفسیری رابطه فوق را به کار می بریم. ولی در بعضی حالات چنین نیست.
برای مثال سیستم شکل م ۲-۷۱ را با $h(t)=u_1(t)$ و $g(t)=u(t)$ در نظر بگیرید.
پاسخ این سیستم را به ورودی زیر پیدا کنید.
برای تمام مقادیر $x(t)=1$ این کار را به سه طریق بیان شده در معادله (م ۲-۷۱-۱) انجام دهید:

$$x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow\boxed{g(t)}\longrightarrow y(t)$$
$$x(t)\longrightarrow\boxed{g(t)}\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t)$$

شکل م ۲-۷۱

(i) ابتدا کانولوشن دو پاسخ را بیابید و نتیجه حاصل را با $x(t)$ کانولوشن کنید.
(ii) اول $x(t)$ را با $u_1(t)$، و سپس نتیجه را با $u(t)$ کانولوشن کنید.
(iii) اول $x(t)$ را با $u(t)$ و سپس نتیجه را با $u_1(t)$ کانولوشن کنید.
(ب) بند (الف) را به ازای سیگنالهای زیر تکرار کنید.

$$x(t)=e^{-t}$$
$$h(t)=e^{-t}u(t)$$
$$g(t)=u_1(t)+\delta(t)$$

(ج) همین کار را با سیگنالهای زیر انجام دهید.

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$
$$g[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

پس در حالت کلی خاصیت شرکت پذیری کانولوشن تنها و تنها به شرطی برقرارست که سه عبارت معادله (م ۲-۷۱-۱) معنی داشته باشند (یعنی تعبیر آنها بر حسب سیستمهای LTI معنی دار باشد). مثلاً در بند (الف) مشتق گیری از یک ثابت و سپس انتگرال گیری از آن معنی دارد ولی فرآیند انتگرال گیری یک ثابت از $t=-\infty$ و سپس مشتقگیری از آن معنی ندارد، و تنها در چنین مواردی است که نمی توان خاصیت شرکت پذیری را به کار برد.
سیستمهای وارون هم به مبحث فوق بسیار مرتبط است. سیستمی LTI با پاسخ ضربه $h(t)=u(t)$ در نظر بگیرید.
چنان که در بند (الف) دیدیم ورودیهایی وجود دارد، مثلاً $x(t)=$ ثابت غیر صفر، که پاسخ سیستم به آنها بی نهایت می شود، بنابراین بررسی مسئله وارون کردن این سیستم برای بازیابی ورودی بی معنی است. البته اگر تنها ورودیهایی را در نظر بگیریم که خروجی محدودی دارند؛ یعنی ورودیهایی که در رابطه زیر صدق کنند.

$$\left|\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right|<\infty \qquad (۲-۷۱-۲)$$

سیستم فوق وارون پذیرست و وارون آن سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $u_1(t)$ وارون آن است.

(د) نشان دهید سیستم LTI با پاسخ ضربه $u_1(t)$ وارونپذیر نیست. (راهنمایی: دو ورودی مختلف پیدا کنید که خروجی سیستم به آنها، در تمام زمانها صفر باشد.) نشان دهید اگر ورودیها در معادله (م ۲-۷۲-۲) صدق کنند، این سیستم وارونپذیرست. [راهنمایی: در مسئله ۱-۴۴ نشان دادیم اگر سیستم LTI تنها به ازای ورودی $x(t)=0$ در تمام زمانها صفر شود، سیستم وارونپذیرست؛ آیا می‌توان دو ورودی $x(t)$ پیدا کرد که در معادله (م ۲-۷۱-۲) صدق کنند و در کانولوشن با $u_1(t)$ متحد با صفر باشند؟]

در این مسئله مطالب زیر را نشان دادیم:

۱. اگر $h(t)$، $x(t)$، و $g(t)$ سه سیگنال باشند که برای آنها $x(t)*g(t)$، $x(t)*g(t)$، $h(t)*g(t)$، و $x(t)*h(t)$ همگی خوش تعریف و محدود باشند، خاصیت شرکت پذیری (م ۲-۷۱-۱) برقرار است.

۲. فرض کنید $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI است و پاسخ ضربه یک سیستم دیگر $g(t)$ خاصیت زیر را دارد.

$$h(t)*g(t)=\delta(t) \qquad (م ۲-۷۱-۳)$$

با توجه به (۱) می‌توانیم برای تمام ورودیهای $x(t)$ که به ازای آنها $x(t)*h(t)$، و $x(t)*g(t)$ خوش تعریف و محدودند، دو ترکیب سری نشان داده شده در شکل م ۲-۷۱ هر دو سیستم همانی اند، پس در سیستم LTI را می‌توان وارون یکدیگر دانست. مثلاً اگر $g(t)=u_1(t)$ و $h(t)=u(t)$، تا وقتی خود را به ورودیهای صدق کننده در معادله (م ۲-۷۱-۲) محدود کنیم، این دو سیستم وارون یکدیگرند.

پس می‌بینیم که خاصیت شرکت پذیری معادله (م ۲-۷۱-۱) و تعریف سیستم وارون معادله (م ۲-۷۱-۳) به شرطی معتبرند که تمام کانولوشنهای موجود در آنها محدود باشند. چون در تمام مسائل واقعی این شرط برقرارست، این خواص و تعرایف را بدون هیچ فرض و تفسیری به کار می بریم. توجه سیستمهای گسسته در زمان هم صادق اند [بند (ج) مسئله این را نشان می دهد].

حل: (الف) داریم:

$$x(t)*[u_1(t)*u(t)]=x=1;\ \ for\ \ all\ \ t.$$

$$[x(t)*u_1(t)]*u(t)=0u(t)=0;\quad for\ \ all\ \ t$$

و

$$[x(t)*u(t)]*u_1(t)=\infty*u_1(t)=\text{تعریف نشده}$$

(ب) داریم: $h(t)=e^{-t}u(t)$ و $x(t)=e^{-t}$ و $g(t)=u_1(t)+\delta(t)$ بنابراین،

$$x(t)*[h(t)*g(t)]=x(t)=e^{-t}$$

$$[x(t)*g(t)]*h(t)=0$$

$$g(t)*[x(t)*h(t)]=g(t)*e^{-t}\int_0^\infty 1d\tau=\text{تعریف نشده}$$

(ج) داریم:

$$x[n]*[[n]*g[n]]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n*\delta[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$
$$(x[n]*g[n])*h[n]=0*h[n]=0$$

و

$$(x[n]*h[n])*g[n]=\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}1\right\}*g[n]=\infty$$

(د) فرض کنید $h(t)=u_1(t)$، دراینصورت اگر ورودی برابر $x_1(t)=0$ باشد، خروجی برابر است با $y_1(t)=0$. حال، اگر ثابت $x_2(t)$ در اینصورت $y_2(t)=0$. بنابراین سیستم تغییرناپذیر نیست.

حال توجه کنید که: $\left|\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau\right|=\begin{cases}0 & \text{اگر } \forall t\ \ x_2(t)=0\\ \infty & \text{اگر } x_2(t)\neq 0\end{cases}$

بنابراین اگر $\left|\int_{-\infty}^{t}cdt\right|\neq\infty$ دراین صورت فقط $x_2(t)=0$ نتیجه خواهد داد، $y_2(t)=0$. بنابراین سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

مسئله ۷۲ - ۲

◄ $\delta_\Delta(t)$ را یک پالس به ارتفاع $\frac{1}{\Delta}$ در $0<t\le\Delta$ فرض کنید. نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}\delta(t)=\frac{1}{\Delta}\left[\delta(t)-\delta_\Delta(t-\Delta)\right]$$

حل:

داریم، $\delta_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-T)\right]$

با مشتقگیری از طرفین داریم:

$$\frac{d}{dt}\delta_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}u'(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-T)\right]$$
$$=\frac{1}{\Delta}\delta(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-T)\right]$$
$$\frac{1}{\Delta}\left[\delta(t)-\delta(t-T)\right]$$

مسئله ۷۳-۲

➢ بااستقراء نشان دهید که

$$u_{-k} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)$$

حل: برای $1 = k$، $u_{-1}(t) = u(t)$. بنابراین وضعیت داده شده برای $k = 1$ صحیح است.

حال فرض کنید که مطلب فوق برای $k > 1$ صحیح باشد.

در اینصورت،

$$\begin{aligned} u_{-1}(k+1)(t) &= u(t) * u_{-k}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{t} u_{-k}(t) = \int_{0}^{t} u_{-k}(\tau) \\ &= \int_{0}^{t} \frac{\tau_{k-1}}{(k-1)!} \qquad t \geq 0 \\ &= \frac{\tau^{k}}{k(k-1)!}\bigg|_{\tau = t > 0} = \frac{t^{k}}{k!}u(t) \end{aligned}$$

فصل ۳

نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب

مسئله ۱-۳

سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$، حقیقی و دارای تناوب پایه $y[n]$ است. ضرائب غیرصفر سری فوریه $x(t)$ عبارت‌اند از:

$$a_1 = a_{-1} 2, a_3 = a^*_{-3} = 4j$$

$x(t)$ را به صورت زیر بیان کنید

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

حل: با استفاده از ترکیب سری فوریه معادله (3.38):

$$x(t) = a_1 e^{j(2\pi/T)} + a_{-1} e^{-j(2\pi/T)t} + a_3 e^{j3(2\pi/T)t} + a_{-3} e^{-3j(2\pi/T)t}$$

$$= 2e^{j(2\pi/8)t} + 2e^{-j(2\pi/8)} + 4je^{3j(2\pi/8)t} - 4j^{-3j(2\pi/8)t}$$

$$= 4\cos(\pi/4\, t) - 8\sin(6\, n/8\, t) = 4\cos(3\pi/4\, t + \pi/2)$$

مسئله ۲-۳

سیگنال متناوب گسسته در زمان $x[n]$ حقیقی و دارای تناوب پایه $N = 5$ است. ضرائب غیر صفر سری فوریه $x[n]$ عبارت اند از

$$a_0 = 1, a_2 = a^*_{-2} = e^{j\pi/4}, a_4 = a^*_{-4} = 2e^{j\pi/}$$

$x[n]$ را به صورت زیر بیان کنید.

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k)$$

حل: با استفاده ا ز ترکیب سری فوریه معادله (3.95):

$$x[n]=a_0+a_2e^{j2(2\pi/N)n}+a_{-2}e^{-j2(2\pi/N)n}+a_4e^{j4(2\pi/N)n}+a_{-4}e^{-j4(2\pi/N)n}$$
$$=1+a^{j(\pi/4)}e^{j2(2\pi/5)n}+e^{-j(\pi/4)}e^{-2j(2\pi/5)n}$$
$$+2e^{j(\pi/3)}e^{j4(2\pi/5)n}+2e^{-j(\pi/3)}\propto -4\, e^{-j4(2\pi/N)n}$$
$$=1+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}n+\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(\frac{8\pi}{5}n+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=1+2\sin\left(\frac{4\pi}{5}n+\frac{3\pi}{4}\right)+4\sin\left(\frac{8\pi}{5}n+\frac{5n}{6}\right)$$

مسئله ۳-۳

برای سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)=2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+4\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$

فرکانس ω_0 و ضرائب سری فوریه a_k را به نحوی بیابید که داشته باشیم

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{jk\omega_0 t}$$

حل: سیگنال داده شده عبارتست از:

$$x(t)=2+\frac{1}{2}e^{j(2\pi/3)t}+1/2\,e^{-j(2\pi/3)}-2je^{j(5\pi/3)t}+2je^{-j(5\pi/3)t}$$
$$=2+1/2\,e^{j2(2\pi/6)t}+1/2\,e^{-j2(2\pi/6)t}-2je^{5j(2\pi/6)t}+2je^{-5j(2\pi/6)t}$$

با استفاده از مطالب فوق؛ می‌توانیم نتیجه بگیریم که فرکانس پایه $x(t)$ برابر است با $2\pi/6=\pi/3$ ضرایب غیر صفر سری فوریه عبارتست از:

$$\propto_0=2\ ,\ a_2=-a_2=\frac{1}{2}\ ,\ a_5=a_{-5}^{*}=-2j$$

مسئله ۴-۳

باستفاده از فرمول تجزیه سری فوریه (۳-۳۹) ضرایب a_k سیگنال متناوب زیر را بیابید.

$$x(t)=\begin{cases}1/5, & 0\le t<1\\ -1/5, & 1\le t<2\end{cases}$$

فرکانس پایه عبارت است از $\omega_0=\pi$.

حل: چون $\omega_0=\pi$ ، $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2$، بنابراین:

$$a_k=1/2\int_0^1 1.5\,\theta^{-k\pi t}dt-1/2\int_1^2 1.5\,e^{-jk\pi t}dt$$
$$=\frac{3}{2k\pi j}(1-e-jk\pi)=\frac{3}{k\pi}e^{-jk(\pi/2)}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

مسئله ۵-۳

$x_1(t)$ سیگنال در زمانی با فرکانس پایه ω_1 و ضرائب سری فوریه a_k فرض کنید. داریم

$$x_2(t)=x_1(1-t)+x_1(t-1)$$

فرکانس پایه ω_2 سیگنال $x_2(t)$ را برحسب ω_1 بیان کنید. ضرائب سری فوریه $x_2(t)$، b_k، را برحسب ضرائب a_k بیان کنید. می‌توانید از خواص جدول ۳-۱ استفاده کنید.

حل: هر دو سیگنال $x_1(1-t)$ و $x_1(t-1)$ تناوب پایه $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ متناوب هستند. و به دلیل $y(t)$ ترکیب خطی $x_1(1-t)$ و $x_1(1-t)$ می‌باشد، $y(t)$ نیز با تنواب اصلی $T_2=\frac{2\pi}{\omega_1}$ تناوب خواهد داد.

بنابراین: $\omega_2=\omega_1$ $\quad x_1(t)\xleftrightarrow{FS}a_k$ چون (سری فوریه $\rightarrow F_s$)

بااستفاده از نتیجه جدول 3.1 خواهیم داشت:

$$x_1(t+1)\xleftrightarrow{FS}a_k e^{jk\left(2\pi/T_1\right)}$$

$$x_1(t-1)\xrightarrow{FS}a_k e^{jk\left(2\pi/T_1\right)}\Rightarrow x_1(-t+1)\xrightarrow{FS}a-k^{e^{-j(2\pi/\pi)}}$$

بنابراین:

$$x_1(t+1)+x_1(1-t)\xleftrightarrow{FS}a_k e^{jk\left(2\pi/T_1\right)}+a-k\ e^{-jk\left(2\pi/T_1\right)}=e^{-j\omega_1 k}(a_k+a-k)$$

مسئله ۶-۳

سه سیگنال متناوب پیوسته در زمان با نمایش سری فوریه زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1(t)=\sum_{k=0}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

$$x_2(t)=\sum_{k=-100}^{100}\cos(k\pi)e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

$$x_3(t)=\sum_{k=-1002}^{100}j\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

با استفاده از خواص سری فوریه به سئوالهای زیر پاسخ دهید:

(الف) کدام سیگنالها حقیقی اند؟ (ب) کدام سیگنالها زوج اند؟

حل: (الف) با مقایسه $x_1(t)$ با ترکیب سری فوریه معادله (3.38)، ضرایب سری فوریه $x_1(t)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$a_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 \le k \le 100 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

از جدول 3.1، می‌دانیم که اگر $x_1(t)$ حقیقی باشد، در اینصورت a_k باید برابر با مردوج مختلط باشد معادله:

از جدول 3.1، می‌دانیم که اگر $x_1(t)$ حقیقی باشد، در اینصورت a_k باید برابر با مزدوج مختلط باشد

ضریب سری فوریه $x_2(t)$ برابر است با:

$$a_k = \begin{cases} \cos(k\pi) & 0 \le k \le 100 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

با استفاده از جدول 3.1، می‌دانیم که اگر $x_2(t)$ حقیقی باشد، بایستی $a_k = a^*_{-k}$ بدلیل اینکه این مطلب در مورد $x_2(t)$ صدق می‌کند $x_2(t)$ سیگنالی حقیقی است.

به طور مشابه، ضرایب سری فوریه $x_3(t)$ عبارتست از:

$$a_i = \begin{cases} j \ \sin\left(k\pi/2\right) & 0 \le k \le 100 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

دوباره، با استفاده از جدول 3.1 می‌دانیم که $x_3(t)$ حقیقی می‌باشد. زیرا اگر $x_3(t)$ حقیقی باشد، بایستی $a_k = a^*_{-k}$ که این مطلب در مورد سیگنال $x_3(t)$ صدق می‌کند.

(ب) برای یک سیگنال، ضرایب سری فوریه بایستی روج باشد که این تنها در مورد $x_2(t)$ صدق می‌کند.

مسئله ۷-۳

➢ فرض شده است که: $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$ داریم:

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} b_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$$

بنابراین، $a_k = \dfrac{b_k}{j\left(2\pi/T\right)k} \ , \ k \ne 0$

هر گاه $k = 0$ باشد، با استفاده از اطلاعات داده شده:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)dt = \frac{2}{T}$$

بنابراین،
$$a_k = \begin{cases} 2/T & k = 0 \\ \dfrac{b_k}{j\left(2\pi/T\right)k} & k \neq 0 \end{cases}$$

مسئله ۸-۳

اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x(t)$ داده شده است:

۱. $x(t)$ حقیقی و فردست.

۲. $x(t)$ دارای تناوب پایه $T = 2$ و ضرائب سری فوریه a_k است.

۳. به ازای $|k| > 1$، $a_k = 0$

۴. $\frac{1}{2}\int_{T}^{2} x(t)dt = 2$

دو سیگنال متفاوت برای ارضای این شرایط بیابید.

حل: بدلیل اینکه $x(t)$ سیگنالی فرد و حقیقی است (راهنمایی)، ضرایب سری فوریه اش، a_k، موهومی خالص و فرد خواهند بود.

مسئله ۱۰-۳

بدلیل اینکه ضرایب سری فوریه برای هر Nهای تکرار می‌شوند، داریم:

$$a_1 = a_{15} \quad , a_2 = a_{16} \quad , a_3 = a_{17}$$

بعلاوه، چون سیگنال حقیقی و فرد است، ضرایب سری فوریه، a_k، فرد و موهومی خالص خواهند بود. بنابراین $a = 0$ و

$$a_1 = -a_{-1} \text{ و } a_2 = -a_{-2} \text{ و } a_3 = -a_{-3}$$

در نهایت: $a_{-1} = -j$ و $a_{-2} = -2j$ و $a_{-3} = -3j$

مسئله ۱۱-۳

اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x[n]$ داده شده است.

۱. $x[n]$ حقیقی و زوج است.

۲. دوره تناوب $x[n]$، $N = 10$ و ضرائب سری فوریه آن a_k است.

۳. $a_{11} = 5$

۴. $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2 = 50$

نشان دهید که $x[n] = A\cos(Bn + C)$ و مقادیر عددی ثابتهای A، B، C را بیابید.

حل: بدلیل اینکه برای هر $N=10$ ضرایب سری فوریه تکرار می‌شود، داریم $a_1=a_{11}=5$، بعلاوه از آنجائیکه، $x[n]$ حقیقی و زوج است، a_k نیز حقیقی و زوج خواهد بود. بنابراین $a_1=a_{-1}=5$. همچنین فرض شده است که:

$$\frac{1}{40}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50$$

بااستفاده از رابطه پارسئوال،

$$\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2=50$$

$$\sum_{k=-1}^{8}|a_k|^2=50$$

$$|a-1|^2+|a_1|^2+a_0^2+\sum_{k=2}^{8}|a_k|^2=50$$

$$a_0^2+\sum_{k=2}^{8}.|a_k|^2=0$$

بنابراین برای $k=2,\dots,8$ ، $a_k=0$، حال با استفاده از ترکیب معدله (3.94)، داریم:

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_ke^{j\frac{2\pi}{N}Kn}=\sum_{k=-1}^{8}a_ke^{j\frac{2\pi}{10}Kn}$$

$$=5e^{j\frac{2\pi}{10}n}+5e^{-j\frac{2\pi}{10}n}$$

$$=10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

مسئله ۱۲ - ۳

برای هر دو سیگنال متناوب $x_1[n]$ و $x_2[n]$، $N=4$ و ضرایب سری فوریه به صورت زیر مشخص شده اند.

$$x_1[n]\leftrightarrow a_k\ .\ x_2[n]\leftrightarrow b_k$$

که

$$a_0=a_3=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_2=1 \qquad \text{و} \qquad b_0=b_1=b_2=b_3=1$$

با استفاده از خاصیت ضرب جدول ۳-۱، ضرائب سری فوریه c_k سیگنال $g[n]=x_1[n]x_2[n]$ را بیابید.

حل: با استفاده از خاصیت ضرب، داریم:

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{FS} \sum_{\ell=\langle N\rangle} a_\ell b_{k-l} = \sum_{k=3}^{3} a_\ell b_{k-l}$$

$$\xleftrightarrow{FS} a_\circ b_k + a_1 b_{k-1} + a_z b_{k-z} + a_3 b_{k-3}$$

$$\xleftrightarrow{FS} b_n, 2b_k + 2b_{k-1} + b_{k-2}$$

چون b_k به ازای تمام مقادیر k، برابر با (1) است، بدیهی است که $b_k + 2b_{k-1} + 2b_{k-3} + 2b_{k-3}$ که به ازاء جمیع مقادیر k برابر 6 خواهد بود. بنابراین؛

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{FS} 6$$

مسئله ۱۳-۳

یک سیستم LTI پیوسته در زمان با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

ورودی این سیستم سیگنال متناوب زیر با دوره تناوب $T = A$ است.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \circ \le t < 4 \\ -1 & 4 \le t < 8 \end{cases}$$

ضرائب سری فوریه خروجی سیستم $y(t)$ را بیابید.

حل: ابتدا ضرایب سری فوریه $x(t)$ را محاسبه می‌کنیم. بدیهی است، چون $x(t)$، فرد و حقیقی است، a_k فرد و موهومی‌خالص خواهد بود. بنابراین $a_\circ = \circ$؛ حال،

$$a_k = \frac{1}{8}\int_0^8 x(t)e^{-j(2\pi/8)}dt$$

$$= 1/8 \int_0^4 e^{-j(2\pi/8)tk}dt - \frac{1}{8}\int_4^8 e^{-j(2\pi/8)tk}dt$$

$$= \frac{1}{j\pi k}\left[1 - e^{-j\pi k}\right]$$

واضح است، جمله بالا برای تمام kهای زوج برابر صفر خواهد بود. بنابراین

$$a_k \begin{cases} \circ & k \text{ زوج} \\ \dfrac{2}{j\pi k} & k \text{ فرد} \end{cases}$$

هنگامیکه $x(t)$ از طریق یک کانال با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ عبور می‌کند، خروجی $y(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید: (بخش 3.8 را مطالعه کنید):

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_\circ)e^{jk\omega_\circ t}$$

که $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{T} = \omega_\circ$، چون a_k تنها به ازاء مقادیر فرد k صفر نیست، بایستی سری فوق را برای kهای فرد محاسبه کنیم: بعلاوه، توجه کنید که:

$$H(j\omega) = \left(jk\left(\pi/4\right)\right) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\pi/4\right)}$$

برای مقادیر فرد k، برابر صفر است، بنابراین $y(t) = \circ$

مسئله ۱۴-۳

➢ قطار ضربه زیر

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

ورودی یک سیستم LTI، با پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ است، و خروجی سیستم عبارت است از

$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

مقادیر $H\left(e^{jk\pi/2}\right)$ را به ازای $k = \circ, 1, 2, 3$ بیابید.

حل: سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب $y[n]$، متناوب می‌باشد. ضرایب سری فوریه اش عبارتند از:

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=\circ}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \qquad \text{for all } k$$

از نتایج بیان شده در بخش 3.8، می‌دانیم که خروجی $y[n]$ برابر است؛

$$y[n] = \sum_{k=\circ}^{3} a_k H\left(e^{j(2\pi/4)k}\right) e^{jk(2\pi/4)n}$$

$$= \frac{1}{4} H\left(e^{j\circ}\right) e^{j\circ} + 1/4\, H\left(e^{j(\pi/2)}\right) e^{j(\pi/2)}$$

$$+ \frac{1}{4} H\left(e^{j(3\pi/2)}\right) e^{j(3\pi/2)} + \frac{1}{4} H\left(e^{j(\pi)}\right) e^{j(\pi)}$$

بااستفاده از اطلاعات داده شده، می‌دانیم که $y[n]$ برابر است با:

$$y[n]=\cos\left(\frac{5\pi}{2}n+\pi/4\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\pi/4\right)$$
$$=1/2\,e^{j(\pi/2\,n+\pi/4)}+1/2\,e^{-j(\pi/2\,n+\pi/4)}$$
$$=1/2\,e^{j(\pi/2\,n+\pi/4)}+1/2\,e^{j\left(3\pi/2\,n-\frac{\pi}{4}\right)}$$

با مقایسه با معادله (ح 3.14.1) داریم:

$$H\left(e^{j0}\right)=H\left(e^{j\pi}\right)=0$$
$$H\left(e^{j\pi/2}\right)=e^{2j\pi/4}$$
$$H\left(e^{3j\pi/2}\right)=2e^{-j\pi/4}$$

مسئله ۱۵-۳

➢ یک فیلتر سیگنال متناوب $x(y)$ با $T=\pi/6$ و ضرائب سری فوریه a_k است. می‌دانیم که

$$x(t)\xrightarrow{S}y(t)=x(t)$$

به ازای کدام مقادیر k داریم $a_k=0$؟

حل: از نتایج قسمت 3.8، $\quad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kH(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$

که $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=12$. چون $H(j\omega)$ برای $|\omega|>100$، برابر صفر است، بزرگترین مقدار $|k|$ آنان صفر نیست، بایستی به صورت مقابل باشد: $|k|\omega_0\le 100$

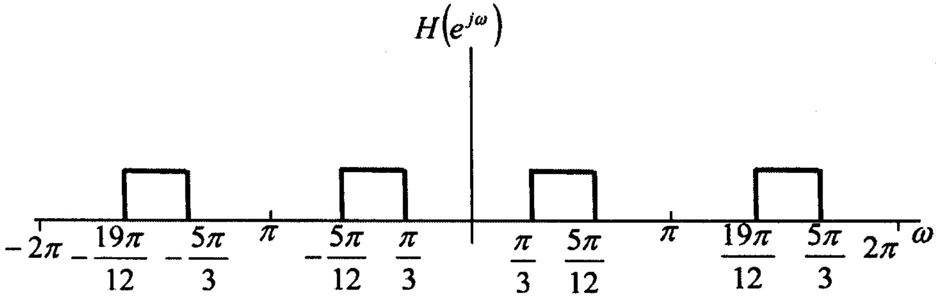
که بیان می‌دارد $|k|\le 8$، بنابراین برای $|k|>8$ برابر صفر می‌باشد.

مسئله ۱۶-۳

➢ خروجی فیلتر شکل م ۳-۱۶ به ورودیهای متناوب زیر را بیابید.

(الف) $x_1[n]=(-1)^n$ (ب) $x_2[n]=1+\sin\left(\frac{3\pi}{5}n+\frac{\pi}{4}\right)$

(ج) $x_3[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k}u[n-4k]$



شکل م ۳-۱۶

حل: (الف) سیگنال داده شده $x_1[n]$ برابر است با:

$$x_1[n]=e^{j/2(\pi/2)n}$$

بنابراین $x_1[n]$ با پریود $N=2$ متناوب است و ضرایب سری فوریه اش در بازه $0\le k\le 1$ برابراست با:

$$\alpha_0=0 \quad و \quad \alpha_1=1$$

بااستفاده از نتایج بدست آمده در قسمت 3.8، خروجی $y_1[n]$ برابر است؛

$$y_1[n]=\sum_{k=0}^{1}a_k H\left(e^{j2k\pi/2}\right)e^{k(2\pi/2)}$$

$$=0+a_1H\left(e^{j\pi}\right)e^{j\pi}=0$$

(ب) سیگنال $x_2[n]$ با پریود $N=16$، متناوب می‌باشد، و می‌توانیم این سیگنال را به صورت زیر بنویسیم:

$$x_2[n]=e^{j(2\pi/16)(0)n}-\left(j/2\right)e^{j(\pi/4)}e^{j(2\pi/16)(3)n}+\left(j/2\right)e^{-j(\pi/4)}e^{-j(2\pi/16)(3)n}$$

$$=e^{j(2\pi/16)n}-\left(j/2\right)e^{j(2\pi/16)(3)n}+\left(j/2\right)e^{-j(\pi/4)}e^{j(2\pi/16)(13)n}$$

بنابراین، ضرایب غیرصفر سری فوریه $x_2[n]$ در بازه و $0\le k\le 15$ برابر است با:

$$a_0=1 \quad و \quad a_3=-\left(j/2\right)e^{j\pi/4} \quad و \quad a_{13}=\left(j/2\right)e^{-j\pi/4}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمت 3.8، خروجی $y_2[n]$ برابر است با:

$$y_2[n]=\sum_{k=0}^{15}a_k H\left(e^{j\pi k/16}\right)e^{k(2\pi/16)}$$

$$=0-\left(j/2\right)\left(e^{j\pi/4}\right)e^{j(2\pi/16)(3)n}+\left(j/2\right)e^{-j(\pi/4)}e^{j(2\pi/16)(13)n}$$

$$=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)n+\pi/4$$

(ج) سیگنال $x_3[n]$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x_3=\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\right]*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]=g[m]*r[n]$$

که $g[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$ و $r[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$. بنابراین $y_3[n]$ را میتوانیم با گذراندن سیگنال از فیلتری با پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ بدست آوریم. سپس نتیجه را با $g[n]$ کانوال کنیم.

سیگنال $r[n]$ با پریود 4، متناوب است و ضریب سری فوریه اش عبارتند از:

$$a_k=\tfrac{1}{14} \qquad for \quad all \quad k$$

خروجی $q[n]$ که با عبور دادن سیگنال $r[n]$ از فیلتری با پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ بدست می‌آید عبارتست از:

$$q[n]=\sum^{3} k=\circ a_k H\left(e^{j2k\pi/4}\right)e^{k(2\pi/4)}$$

$$=\left(\tfrac{1}{4}\right)\left\{H\left(e^{j\circ}\right)e^{j\circ}+H\left(e^{j\pi/2}\right)e^{j(\pi/2)}+H\left(e^{j\pi}\right)e^{j\pi}\right.$$

$$\left.+H\left(e^{j3(\pi/2)}\right)e^{j3\pi/2}\right)=\circ$$

بنابراین خروجی نهایی $\circ=y_3[n]=q[n]\times q[n]$

مسئله ۱۷-۳

➢ سه‌سیستم گسسته در زمان S_1، S_2، S_3 در نظر بگیرید که پاسخشان به ورودی نمایی مختلط e^{j5t} به صورت زیرست:

$$S_1: e^{j5t}\rightarrow te^{j5t}$$

$$S_2: e^{j5t}\rightarrow te^{j5(t-1)}$$

$$S_3: e^{j5t}\rightarrow cos(5t)$$

در مورد هر سیستم بگویید آیا با اطلاعات داده شده می‌توان نتیجه گرفت که سیستم مطمئناً LTI نیست.

حل:

(الف) بدلیل اینکه نمایی‌هایی مختلط توابع اصلی سیستم‌های LTI هستند. خروجی $x_1(t)=e^{j5t}$ بایستی یک خروجی شامل Ae^{j5t} بوجود آود که A ثابتی مختلط است. امّا، واضح است که در این مورد خروجی شامل جمله ی مذکور نمی‌باشد. بنابراین سیستم S_1، مشخصاً LTI نیست.

(ب) سیستم می‌تواند LTI باشد، زیرا خاصیت تابع اصلی سیستمهای LTI را برآورده می‌سازد.

(پ) (الف) در این مورد، خروجی شامل $y_3(t)=\frac{1}{2}e^{j5t}+\frac{1}{2}e^{j5t}$ می‌باشد. واضح است که خروجی شامل یک نمایی مختلط با فرکانس 5- است که در ورودی $x_3(t)$ حضور ندارد. می‌دانیم که سیستمهای LTI هرگز نمی‌توانند نمایی مختلطی با فرکانس 5- بدون وجود داشتن نمایی مختلطی با همان فرکانس ورودی، تولید کنند. بدلیل اینکه این مورد در مسئله صحیح نیست، سیستم مشخصاً LTI نمی‌باشد.

مسئله ۱۸-۳

➢ سه‌سیستم گسسته در زمان S_1، S_2، و S_3 در نظر بگیرید که پاسخشان به ورودی نمایی مختلط $e^{jn\pi/2}$ به صورت زیرست

$S_1: e^{\pi nt/2} \rightarrow e^{j\pi n/2}u[n]$

$S_2: e^{j\pi n/2} \rightarrow e^{j3\pi n/2}$

$S_3: e^{j\pi n/2} \rightarrow 2e^{j5\pi n/2}$

در مورد هر سیستم بگویید آیا با اطلاعات داده شده میتوان نتیجه گرفت که سیستم مطمئناً LTI نیست.

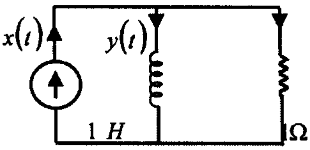
حل: (الف) با استفاده از بحثی مشابه آن در قسمت (الف) مسأله قبلی مطرح شد نتیجه می‌گیریم که s_1 با توجه به تعریف LTI نیست.

(ب) خروجی در این مورد برابر است با $y_2[n]=e^{j(3\pi/2)n}=e^{-j(\pi/2)n}$. واضح است که تابع اصلی را نقض می‌کند. بنابراین s_2 طبق تعریف LTI نیست.

(ج) در این مورد خروجی برابر است با $y_3[n]=2e^{j(5\pi/2)n}=2e^{j(\pi/2)n}$. که این خاصیت LTI بودن تابع اصلی را نقض نمی‌کند. بنابراین S_3 می‌توان یک سیستم LTI تلقی شود.

مسئله ۱۹-۳

➢ سیستم LTI علّی ساخته شده با مدار RL شکل م ۳-۱۹ را در نظر بگیرید. یک منبع جریان سیگنال ورودی $x(t)$ در اعمال می‌کند و خروجی سیستم جریان $y(t)$ القاگرست.



شکل م ۳-۱۹

(الف) معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

(ب) پاسخ فرکانسی این سیستم را با در نظر گرفتن خروجی به ازای ورودی $x(t)=e^{j\omega t}$ به دست آورید.

(ج) یک سیستم LTI علّی به صورت مدار RLC شکل م ۳-۲۰ ساخته شده است. ورودی مدار منبع ولتاژ $x(t)$ به دست آورید.

(ج) خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t)=sin(t)$ بیابید.

حل: (الف) ولتاژ در طول‌هادی = $\ell \dfrac{dy(t)}{dt}$.

جریان ولتاژ در طول‌هادی = $\dfrac{\ell}{R}\dfrac{dy(t)}{dt}$.

جریان ورودی $x(t)$ = جریان در مقاومت + جریان درهادی. بنابراین:

$$x(t)=\frac{\ell}{R}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

با جایگذاری مقادیر L و R داریم: $\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$

(ب) با استفاده از روش ذکر شده در 3.10.1، می‌دانیم که زمانیکه ورودی سیستم $e^{j\omega t}$ باشد. خروجی این سیستم برابر با $H(j\omega)e^{j\omega t}$ خواهد بود با جایگذاری در معادله دیفرانسیل قسمت (الف) خواهیم داشت:

$$j\omega H(j\omega)e^{j\omega t}+H(j\omega t)e^{j\omega t}=e^{j\omega t}$$

بنابراین $j(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$

(ج) سیگنال $x(t)$، سیگنالی متناوب با پریود می‌باشد. به دلیل اینکه به صورت زیر قابل نوشتن می‌باشد:

$$x(t)=\tfrac{1}{2}e^{j(2\pi/2\pi)t}+\tfrac{1}{2}e^{-j(2\pi/2\pi)t}$$

ضرایب غیر صفر سری فوریه برابر است با:

$$a=a_{-1}=\tfrac{1}{2}$$

بااستفاده از نتایج بدست آمده در قسمت 3.8 (معادله (3.124) را ببینید)، داریم:

$$\begin{aligned}y(t)&=a_1H(j)e^{jt}+a_{-1}H(-j)e^{-jt}\\&=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j}e^{jt}+\frac{1}{1-j}e^{-jt}\right)\\&=\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(e^{-j\pi/4}+e^{j\pi/4}e^{-jt}\right)\\&=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(t-\pi/4\right)\end{aligned}$$

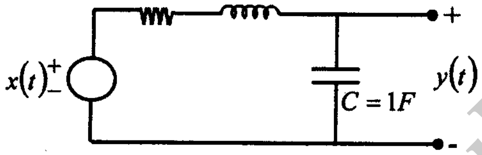
مسئله ۲۰-۳

➢ یک سیستم LTI علّی به صورت مدار RLC شکل م ۳-۲۰ ساخته شده است. ورودی مدار منبع ولتاژ $x(t)$ است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیتم در نظر بگیرید.

(الف) معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

(ب) پاسخ فرکانسی این سیستم را با در نظر گرفتن خروجی به ازای ورودی $x(t)=e^{j\omega t}$ به دست آورید.

(ج) خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t)=sin(t)$ بیابید.



شکل م ۳-۲۰

حل: (الف) جریان جاری شده در خازن = $e\dfrac{dy(t)}{dt}$

ولتاژ در خازن = $RC\dfrac{dy(t)}{dt}$.

ولتاژ درهادی = $LC\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$.

$x(t)$ ولتاژ ورودی = ولتاژ در طول مقاومت + ولتاژهادی + ولتاژ در خازن.

پس:

$$x(t)=LC\frac{d^2y(t)}{dt^2}+RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

با جایگذاری مقادیر L و R و C داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

(ب) حال از روش مشابهی که برای بار اول در قسمت (ب) مسأله قبلی استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم که ورودی به صورت $e^{j\omega t}$ باشد، در اینصورت خروجی به صورت $H(j\omega)e^{j\omega t}$ خواهد بود. با جایگذاری در معادله در معادله دیفرانسیل فوق و ساده سازی عبارت روبرو را بدست خواهیم آورد:

$$H(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2+j\omega+1}$$

(ج) سیگنال $x(t)$، سیگنالی متناوب با پریود 2π می‌باشد. چون $x(t)$ می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$x(t)=\frac{1}{2j}e^{j(2\pi/2\pi)t}-\frac{1}{2j}e^{-j(2\pi/2\pi)t}$$

ضرایب غیرصفر $x(t)$، عبارتند از:

$$a_1=a_{-1}^*=\frac{1}{2j}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده در 3.8 (معادله (3.124) را ببینید) داریم:

$$\begin{aligned}y(t)&=a_1H(j)e^{jt}-a_{-1}H(-j)e^{-jt}\\&=\left(\frac{1}{j}e^{jt}-\frac{1}{-j}e^{-jt}\right)\\&=\left(-1/2\right)\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)\\&=-\cos(t)\end{aligned}$$

مسئله ۲۱-۳

سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$ حقیقی و دارای دوره تناوب پایه $T=8$ است. ضرایب غیرصفر سری فوریه $x(t)$ عبارت اند از:

$$a_1=a_{-1}^*=j,\ a_5=a_{-5}=2$$

$x(t)$ را به صورت زیر بیان کنید.

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cos\left(w_k^t+\phi_k\right)$$

حل: با استفاده از ترکیب سری فوریه معادله (3.38):

$$\begin{aligned}x(t)&=a_1e^{j(2\pi/T)t}+a_{-1}e^{-j(2\pi/T)t}+a_5e^{j5(2\pi/T)t}+a^{-5}\left(2\pi/T\right)t\\&=je^{j(2\pi/8)t}-je^{-j(2\pi/8)t}+2e^{j5(2\pi/8)t}+2e^{-j5(2\pi/8)t}\\&=-2\sin\left(\pi/4\,t\right)+4\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right)\\&=-2\cos\left(\pi/4\,t=\pi/2\right)+4\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right)\end{aligned}$$

مسئله ۲۲-۳

➢ ضرائب سری فوریه سیگنالهای زیر را بیابید.

(الف) $x(t)$ شکلهای م ۳-۲۲ (الف) تا (و)

(ب) $x(t)$ دوره تناوب ۲ متناوب است و در $-1<t<1$ ، $x(t)=e^{-t}$

(ج) $x(t)$ متناوب با دوره تناوب ۴ است و $x(t)=\begin{cases}\sin \pi t & 0\le t\le -2\\ 0, & 2<t\le 4\end{cases}$

حل: (الف) (i) $T=1$ و $a_0=0$ و $a_k=\dfrac{j(-1)^k}{k\pi}$ و $k\neq 0$

(ii) در اینجا،
$$x(t)=\begin{cases}t+2 & -2<t<-1\\ 1 & -1t<1\\ 2-t & 1<t<2\end{cases}$$

$T=6$ و $a_0=1/2$ و

$$a_k=\begin{cases}0 & k \text{ زوج}\\ \dfrac{8}{\pi^2k^2}\sin\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi k}{6}\right) & k \text{ فرد}\end{cases}$$

(iii) $T=3$ و $a_0=1$ و

$$a_k=\frac{3j}{2\pi^2k^2}\left[e^{j2k\pi/3}\operatorname{Sin}\left(k\pi 2/3\right)+2e^{jk\pi/3}\sin\left(k\pi/3\right)\right)\quad k\neq 0$$

(iv) $a_0=-1/2$, $T=2$, $k\neq 0$, $a_k=1/2-(-1)^k$

(v) $t=6$ و $\omega_0=\pi/3$ و

$$a_k=\frac{\cos\left(2k\pi/3\right)-\cos\left(k\pi/3\right)}{jk\pi/3}$$

توجه کنید که $a_0=0$ و $a_k=0$ زوج

(vi) $a_0=3/4$ و $\omega_0=\pi/2$ و $T=4$

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{16j}\left[\frac{1-e^{j\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi k}{4}\right)4}}{1-e^{-j\left(\frac{3\pi}{6}-\pi k/4\right)}} - \frac{1-e^{j\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi k}{4}\right)4}}{1-e^{-j\left(3\pi/7\right)+\pi k/4}}\right]$$

$$y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k = \frac{1}{8}\left[\frac{1-\left(1/2\right)^8}{1-\left(1/2\right)e^{-jk\pi/4}}\right]$$

ب) $T = 2$ و برای تمامی kها، $a_k = \dfrac{(-1)^k}{2(1+jk\pi)}\left[e-e^{-1}\right]$

ج) $T = 3$ و $\omega_\circ = 2\pi/3$ و $a_\circ = 1$ و

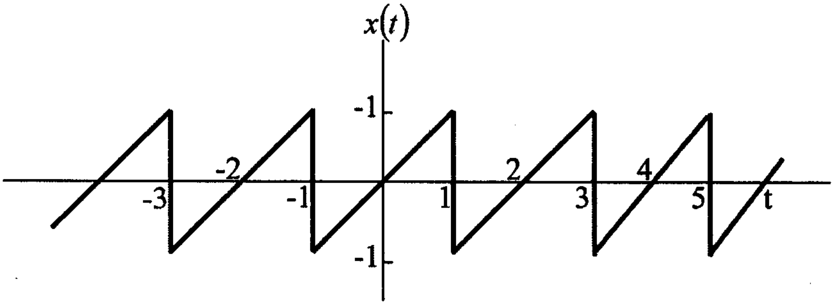
$$a_k = \frac{2e^{-j\pi k/3}}{\pi k}\sin\left(2k\pi/3\right) + \frac{e^{-j\pi k}}{\pi k}\sin(\pi k)$$

مسئله ۲۳-۳

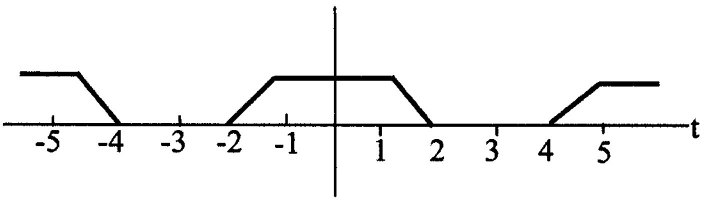
➢ در هر یک از موارد زیر ضرائب سری فوریه یک سیگنال پیوسته در زمان متناوب دارای دوره تناوب ۴ بیان شده است. سیگنال $x(t)$ را در هر مورد بیابید.

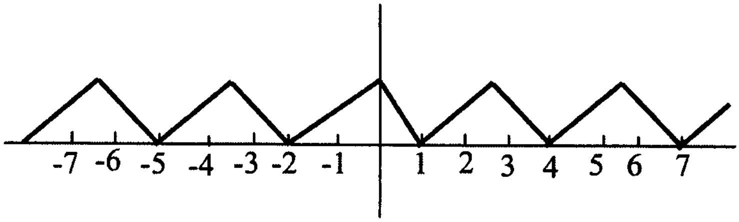
الف) $a_k = \begin{cases} \circ, & k = \circ \\ (j)^k \dfrac{\sin k\pi/4}{k\pi} & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$

(الف)



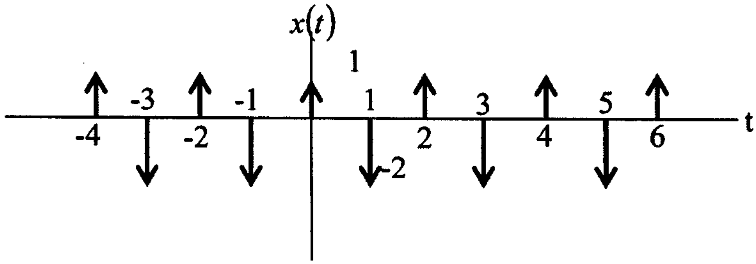
ب

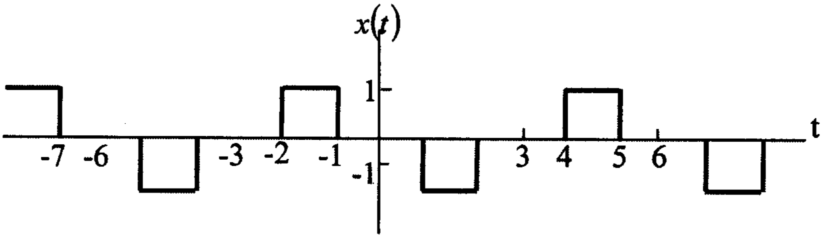




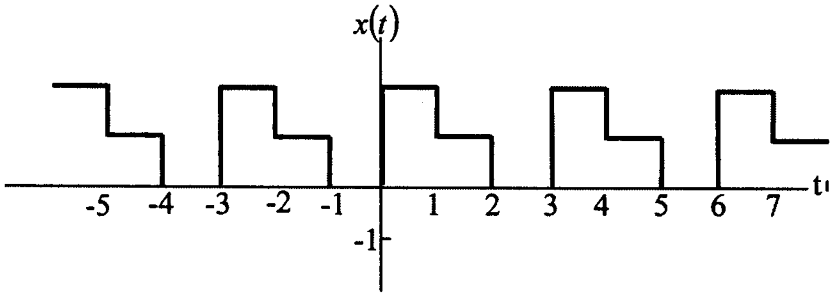
(ج)

شکل م ۳-۲۲ الف، ب و ج





(شکل م ۳-۲۲ د، هـ و)



ب) $a_k = (-1)^k \dfrac{\sin k\pi/8}{2k\pi}$

ج) $a_k = \begin{cases} jk, & |k| < 3 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

د) $a_k = \begin{cases} 1, & k \text{ زوج} \\ 2, & k \text{ فـــــرد} \end{cases}$

حل: (الف) ابتدا فرض کنیم $x(t)$ سیگنالی با ضرایب FS (سری فوریه) به صورت زیر باشد:

$$b_k = \frac{\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi}$$

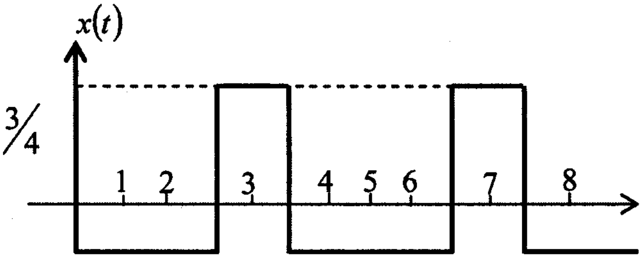
با توجه به مثال 35، نتیجه می‌گیریم که $y(t)$ باید سیگنالی موج مربعی متناوب باشد که در یک دوره تناوب برابر است با:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & 1/2 < |t| < 2 \end{cases}$$

حال، توجه کنید که $b_0 = 1/4$. فرض کنید سیگنال دیگری به صورت $x(t) = -1/4$ تعریف کنیم که ضرایب سری فوریه غیر صفر آن برابر $c_0 = -1/4$ باشد. سیگنال $p(t)$ برابر است با $p(t) = y(t) + x(t)$ که ضرایب سری فوریه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$d_k = a_k + c_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \dfrac{\sin\left(k\pi/4\right)}{k\pi} & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

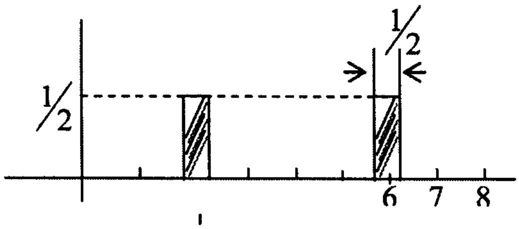
حال توجه کنید که $a_k = d_k e^{j(\pi/2)k}$. بنابراین سیگنال $x(t) = p(t+1)$ در شکل (الف) S.23 نمایش داده شده است.



(ب) ابتدا فرض نمائید که ضرایب سری فوریه سیگنال $y(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$b_k = \begin{cases} 1/2 & |t| < 1/4 \\ 0 & 1/4 < |t| < 2 \end{cases}$$

با توجه فرمائید که $a_k = b_k e^{j\pi k}$. بنابراین سیگنال $x(t) = y(t+2)$ که در شکل (ب) 53.23 نشان داه شده است.



(ج) تنها ضرایب غیرصفر سری فوریه عبارتند از: $a = a_{-1}^* = j$ و $a_2 = a_{-2}^* = 2j$ با استفاده از معادله ترکیب

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{j(2\pi/T)t} + a_{-1} e^{-j(2\pi/T)t} + a_{-2} e^{-2j(2\pi/T)t} \\ &= je^{j(2\pi/4)t} - je^{-j(-2\pi/4)t} - 2je^{-j2(2\pi/4)t} \\ &= -2\sin\left(\pi/2\, t\right) - 4\sin(\pi t) \end{aligned}$$

(د) ضرایب FS (سری فوریه) a_k را می‌توانیم به صورت مجموع دو ضریب سری فوری b_k و c_k، نشان دهیم، در اینصورت:

$$b_k = 1; \quad for \quad all \quad k$$

$$e_k = \begin{cases} 1 & k \text{ فـــــرد} \\ 0 & k \text{ زوج} \end{cases}$$

ضرایب سری فوریه b_k متناظر با سیگنال:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 4k)$$

ضرایب FS، C_k متناظر با سیگنال:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j(\pi/2)t} \delta(t - 2k)$$

بنابراین:

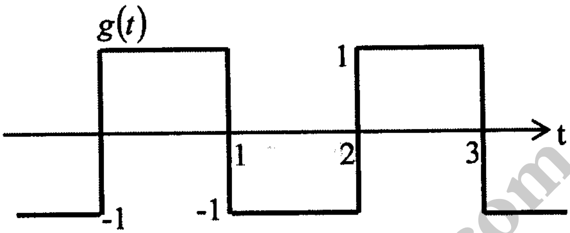
$$x(t) = y(t) + p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{(\pi/2 j)t} \delta(t - 2k)$$

مسئله ۲۴-۳

(الف) داریم:

$$a_0 = \tfrac{1}{2}\int_0^1 t\,dt + \tfrac{1}{2}\int_1^2 (2-t)\,dt = \tfrac{1}{2}$$

(ب) سیگنال $g(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ در شکل S.3.24 نمایش داده شده اند:



شکل S3.24

حل: ضریب FS و b_k ی $g(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$b_0 = \tfrac{1}{2}\int_0^1 dt - \tfrac{1}{2}\int_1^2 dt = 0$$

$$b_k = \tfrac{1}{2}\int_0^1 e^{-j\pi kt}dt - \tfrac{1}{2}\int_1^2 e^{-j\pi kt}dt$$

$$= \frac{1}{j\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right)$$

(ج) توجه بفرمائید که:

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} b_k = jk\pi a_k$$

بنابراین:

$$a_k = \frac{1}{jk\pi}b_k = \frac{-1}{\pi^2 k^2}\left(1 - e^{-j\pi k}\right)$$

مسئله ۲۵-۳

سه سیگنال پیوسته در زمان دارای دوره تناوب پایه $T = \dfrac{1}{2}$ هستند.

$$x(t) = \cos(4\pi t)$$
$$y(t) = \sin(4\pi t)$$
$$z(t) = x(t)y(t)$$

(الف) ضرائب سری فوریه $x(t)$ را بیابید. (ب) ضرائب سری فوریه $y(t)$ را بیابید.

(ج) با استفاده از نتایج بندهای (الف) و (ب) و خاصیت ضرب سری فوریه پیوسته در زمان، ضرائب سری فوریه پیوسته در زمان، ضرائب سری فوریه $z(t) = x(t)y(t)$ را بیابید.

(د) ضرائب سری فوریه $z(t)$ را مستقیماً با بسط $z(t)$ به صورت مثلثاتی به دست آورید و نتایج را با بند (ج) مقایسه کنید.

حل: (الف) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتست از $a_1 = a_{-1} = 1/2$.

(ب) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتست از $b_1 = b_{-1}^* = 1/2\, j$.

(ج) از خاصیت ضرب؛ می‌دانیم که:

$$z(t) = x(t)y(t) \xleftrightarrow{FS} c_k = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_\ell b_{k-\ell}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} x_k &= a_k * b_k \circ \\ &= \frac{1}{4j}\delta[k-z] - \frac{1}{4}\delta[k+2] \end{aligned}$$

این موضوع بیان می‌کند که ضرب غیر صفر سری فوریه $z(t)$ برابر است با $c_2 = c_{-2}^* = \left(\frac{1}{4j}\right)$

(د) داریم: $x(t) = sin(4t)cos(4t) = 1/2\, sin(8t)$

بنابراین، ضرای غیر صفر فوریه $z(t)$ عبارتست از: $c_2 = c - z = \left(1/4j\right)$.

مسئله ۲۶-۳

➢ $x(t)$ یک سیگنال متناوب با ضرائب سری فوریه زیر است:

$$a_k = \begin{cases} 2, & k = \circ \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با استفاده از خواص سری فوریه سئوالهای زیر را پاسخ دهید.

(الف) آیا $x(t)$ حقیقی است؟ (ب) آیا $x(t)$ زوج است؟ (ج) آیا $dx(t)/dt$ زوج است؟

حل: (الف) اگر $x(t)$ حقیقی باشد، آنگاه $x(t) = x^*(t)$ که نشان می‌دهد برای $x(t)$ حقیقی $a_k = a_{-k}^*$ بدلیل اینکه این مورد در این مسأله درست نیست، $x(t)$ سیگنالی حقیقی نیست.

(ب) اگر $x(t)$ زوج باشد، در اینصورت $x(t) = x(-y)$ و $a_k = a_{-k}$ چون این بیان این مورد صحیح می‌باشد، فلذا $x(t)$، زوج است.

(ج) داریم:

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} b_k = jk\frac{2\pi}{k_\circ}a_k$$

بنابراین

$$b_k = \begin{cases} \circ & k = \circ \\ -k\left(1/2\right)^{|k|}\left(2\pi/T_\circ\right) & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

بدلیل اینکه $x(t)$ زوج نیست در نتیجه $g(t)$ نیز زوج نخواهد بود.

مسئله ۲۷–۳

سیگنال متناوب گسسته در زمان $x[n]$ حقیقی و دارای تناوب پایه $N=5$ است. ضرائب غیر صفر سری فوریه $x[n]$ عبارت اند از:

$$a_0=2,\ a_{-2}^{*}=2e^{j\pi/6},\ a_4=a_{-4}^{*}=e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$x[n]$ را به صورت زیر بیان کنید.

$$x[n]=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(\omega_k n+\phi_k)$$

حل: با استفاده از ترکیب تبدل فوریه معادله (3.38) داریم:

$$x[n]=a_0+a_2\ e^{j2(2\pi/N)n}+a_{-2}e^{-j2(2\pi/N)n}+a_4e^{j4(2\pi/N)n}+a_{-4}e^{-j4(2\pi/N)n}$$

$$=2+2e^{j\pi/6}e^{j\left(\frac{4\pi}{5}\right)n}+2e^{-j\pi/6}e^{-j(4\pi/5)n}+e^{j\pi/3}e^{j(8\pi/5)n}+e^{-j\pi/3}e^{-j\left(\frac{8\pi}{5}\right)n}$$

$$=2+4\cos\left[\left(4\pi n/5+\pi/6\right)\right]+2\cos\left[\left(8\pi n/5\right)+\pi/3\right]$$

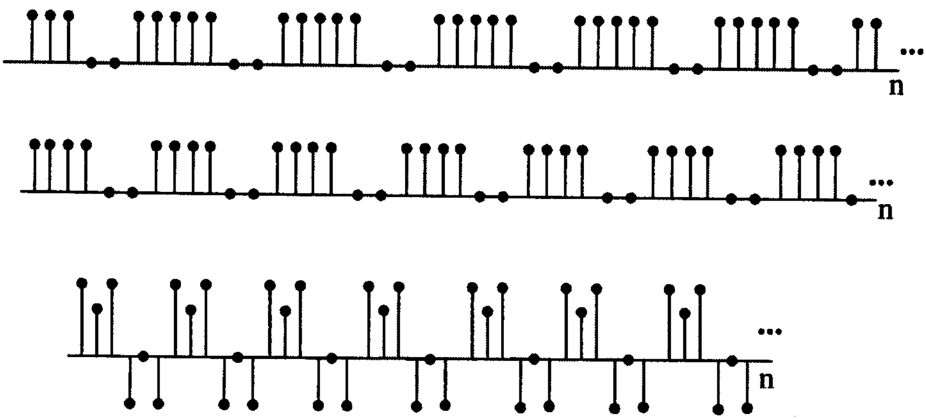
$$=2+4\sin\left[\left(\frac{4\pi n}{5}\right)+2\pi/3\right]+2\sin\left[\left(8\pi n/5\right)+5\pi/6\right]$$

(پانوشت مترجم: توجه شود که تساوی در آخر کلیه عبارتهای شامل cos، با توجه به فرمول $\sin\omega t=\cos-90^\circ$ و یا $\cos(\omega t)=\sin(\omega t+90^\circ)$، به عبارتهای شامل sin تبدیل شده اند.)

مسئله ۲۸-۳

➢ ضرائب سری فوریه هر یک از سیگنالهای متناوب گسسته در زمان زیر را حساب کنید. اندازه و فاز ضرائب a_k هر سری را رسم کنید.

(الف) هر یک $x[n]$های شکل م ۳-۲۸ الف تا ج



شکل م ۲۸-۳

(ب) $x[n]=\sin(2\pi n/3)\cos(\pi n/2)$ (ج) $x[n]$ با دوره تناوب ۴ و در $0\le n\le 3$

(د) $x[n]$ متناوب با دوره تناوب ۱۲ و در $0\le n\le 3$ ، $x[n]=1-\sin\frac{\pi n}{4}$

(هـ) $x[n]$ متناوب با دوره تناوب ۱۲ و در $0\le n\le 11$ ، $x[n]=1-\sin\frac{\pi n}{4}$

حل: (الف) $N=7$

$$a_k=\frac{1}{7}\frac{e^{-4\pi kj/7}\sin\left(5\pi k/7\right)}{\sin\left(\pi k/7\right)}$$

(ب) $x_2(t)\to y_2(t)$ a_k در یک دوره تناوب $(0\le k\le 5)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$a_k=1/6\, e^{-j\pi k/2}\frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)}{\sin\left(\pi k/6\right)}1\le k\le 5 \quad \text{و} \quad a_0=4/6$$

ج) $x_2(t) \to y_2(t)$; $a_k = 1 + 4\cos\left(\pi k/3\right) - 2\cos 2\pi k/3$

د) $N = 12$، a_k د ریک دوره تناوب $(0 \le k \le 11)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$a_1 = \frac{1}{4j} = a_{11}^*$; $a_5 = -\frac{1}{4j} = a_7^*$; $a_k = 0$ برای سایر نقاط

یعنی:

$$\begin{cases} a_1 = a_{11}^* = \frac{1}{4j} \\ a_5 = a_7^* = -\frac{1}{4j} \\ a_k = 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

هـ) $N = 4$ $\quad a_k = 1 + 2(-1)^k\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(k\pi/2\right)$

و) $N = 12$:

$$a_k = 1 + \left(1 - 1/\sqrt{2}\right)2\cos\left(\pi k/6\right) + 2\left(1 - 1/\sqrt{2}\right)\cos\left(\pi k/2\right)$$
$$+2\left(1 + 1/\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{5\pi k}{6}\right) + 2(-1)^k + 2\cos\left(2\pi k/3\right)$$

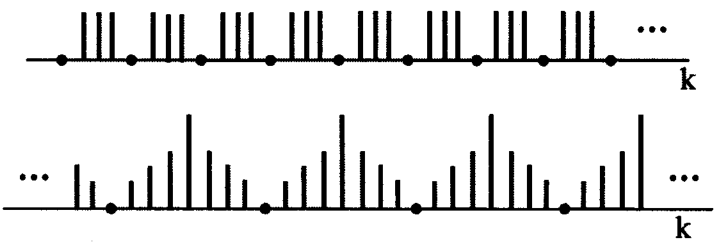
مسئله ۲۹-۳

➤ در هر مورد ضرائب سری فوریه یک سیگنال دارای دوره تناوب پایه ۸ را مشخص کرده ایم. سیگنال $x[n]$ را بیابید.

(الف) $a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$

(ب) $a_k = \begin{cases} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) & 0 \le k \le 6 \\ 0, & k = 7 \end{cases}$

a_k شکل م ۳-۲۹ (الف) (ج) $\qquad$ a_k شکل م ۳-۲۹ (ب) (د)



حل: (الف) $N=8$ در یک دوره تناوب $(0\le n\le 7)$ داریم:

$$x[n]=4\delta[n-1]+4\delta[n-7]+4j\delta[n-3]-4j\delta[n-5]$$

(ب) $N=8$ در یک دوره تناوب $(0\le n\le 7)$:

$$x[n]=\frac{1}{2j}\left[\frac{-e^{\frac{5\pi n}{4}}\sin\left\{\frac{n\pi}{4}+\pi/3\right\}}{\sin\left[1/2\left(\frac{n\pi}{4}+\pi/3\right)\right]}+\frac{e^{j\frac{\pi n}{4}}\sin\left\{\frac{n\pi}{4}-\pi/3\right\}}{\sin\left\{1/2\left(\frac{n\pi}{4}-\pi/3\right)\right\}}\right]$$

(ج) $N=8$ در یک دوره تناوب $(0\le n\le 7)$:

$$x[n]=1+(-1)^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+2\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

(هـ) $N=8$، در یک دوره تناوب $(0\le n\le 7)$:

$$x[n]=2+2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+1/2\cos(3n\pi)$$

مسئله ۳۰-۳

➢ سه سیگنال گسسته در زمان زیر دارای دوره تناوب پایه ۶ هستند.

$$z[n]=x[n]y[n] \qquad x[n]=\sin\left(\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right) \qquad x[n]=1+\cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right)$$

(الف) ضرائب سریه فوریه $x[n]$ را بیابید. (ب) ضرائب سری فوریه $y[n]$ را بیابید.

(ج) با استفاده‌از نتایج بندهای (الف) و (ب) و خاصیت ضرب سری فوریه گسسته در زمان، ضرائب سری فوریه $z[n]=x[n]y[n]$ را بیابید.

(د) مستقیماً ضرائب سری فوریه $z[n]$ را حساب کرده، نتیجه را با بند (ج) مقایسه کنید.

حل:

(الف) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتند از: $a_0=1\ ,\ \alpha_1=\alpha_{-1}=1/2$

(ب) ضرایب غیر صفر FS برای $x(t)$ عبارتند از: $b_1=b_{-1}^*=\dfrac{e^{-j\pi/4}}{2}$

(پ) با استفاده از خاصیت ضرب، داریم:

$$z[n]=x[y]y[n]\xleftrightarrow{FS}c_k=\sum_{\ell=-2}^{2}a_\ell b_{k-\ell}$$

که نشان می‌دهد که ضرایب غیر صفر سری فوریه $z[n]$ برابر است با:

$$\begin{cases} c_0=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ c_1=c_{-1}^*=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4} \\ c_2=c_{-2}^*=\frac{1}{4}e^{-j\pi/4} \end{cases}$$

(ج) داریم:

$$z[n]=\sin\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right)$$

$$=in\left(\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{4\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

که بیان می‌کند، ضرایب غیر صفر سری فوریه $z[n]$ برابراست با:

$$c_0=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{و} \quad c_1=c_{-1}^*=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4} \quad \text{و} \quad c_2=\underline{c}_2^*=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$$

مسئله ۳-۳۱

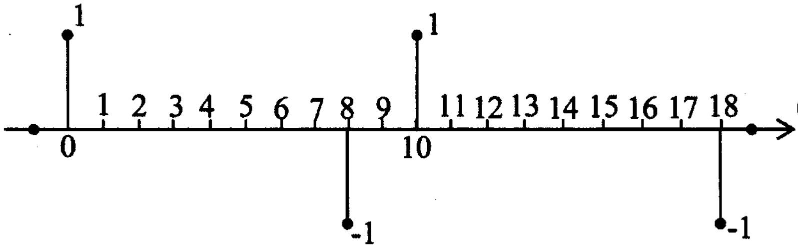
➢ فرض کنید $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 7\\ 0, & 8\le n\le 9\end{cases}$ یک سیگنال متناوب با $N=10$ و ضرائب سری فوریه a_k است. همچنین فرض کنید که $g[n]=x[n]-x[n-1]$

(الف) نشان دهید که زمان تناوب پایه λ_k برابر ۱۰ است.

(ب) ضرائب سری فوریه $g[n]$ را بیابید.

(ج) با استفاده از ضرائب سری فوریه $g[n]$ خاصیت تفاضل اول جدول ۳-۲، a_k را برای $k\neq 0$ تعیین کنید.

حل: (الف) $g[n]$ در شکل S3.31 نشان داده شده است. بدیهی است که دوره تناوب پایه $g[n]$ برابر 10 است.



شکل (53.31)

(ب) ضرایب سری فوریه $g[n]$ برابر است با $b_k = \left(\frac{1}{10}\left[1-e^{-j\left(2\pi/10\right)8k}\right]\right)$

(ج) بـــــدلیل اینکـــــه $g[n]=x[n]-x[n-1]$. ضـــــایب ســـــری فوریـــــه a_k و

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = \circ = -\int_a^b \phi_i^*(t)x(t)dt + 2b_i - \int_a^b \phi_i(t)x^*(t)dt$$

بایستی توسط فرمولی بهم مرتبط شوند که در زیر

$$\frac{\partial E}{\partial -c_i} = \circ = j\int_a^b \phi_i(t)x^*(t)dt + 2c_i - j\int_a^b \phi_i^*(t)x(t)dt$$

آمده است:

$$b_k = a_k - e^{-j\left(2\pi/10\right)k}a_k$$

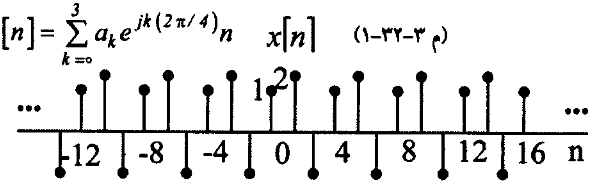
بنابراین:

$$a_k = \frac{b_k}{1-e^{-j\left(2\pi/10\right)k}} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)\left(1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}\right)8k}\right)}{1-e^{-j\left(2\pi/10\right)k}}$$

مسئله ۳۲-۳

➢ سیگنال $x[n]$ شکل م ۳-۳۲ را در نظر بگیرید. برای این سیگنال متناوب $N=4$ و می‌توان آن را به صورت سری فوریه گسسته در زمان زیر بیان کنید.

$$x[n] = \sum_{k=\circ}^{3} a_k e^{jk(2\pi/4)n} \qquad \text{(م ۳-۳۲-۱)}$$



شکل م ۳-۳۲

همانطور که در درس گفته شد یک روش تعیین ضرائب سری فوریه این است که معادله (م ۳-۳۲-۱) را چهار معادله چهار مجهولی (به ازای $n=1, 2, 3$ با مجهولهای $a_3, a_2, a_\circ$) فرض کنیم.

(الف) این چهار معادله را به صورت صریح بنویسید و آنها را به روش حل دستگاههای معادلات حل کنید. (ابتدا نماییهای مختلط را ساده کنید.)

(ب) جواب خود را با محاسبه مستقیم a_k، با استفاده از معادله تجزیه سری فوریه امتحان کنید.

$$a_{kl} = \frac{1}{4}\sum_{n=\circ}^{3} x[n]e^{-jk(2\pi/4)n}$$

حل: (الف) چهارمعادله عبارتند از:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \quad , \quad a_0 + ja_1 - a_2 - ja_3 = 0$$
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 2 \quad , \quad a_0 - ja_1 - a_2 + ja_3 = -1$$

پس از حل معادلات توسط روش‌های ماتریسی مثل کرامر بدست می‌آوریم:

$$a_0 = 1/2 \ , \ a_1 = -\frac{1+j}{4} \ , \ a_2 = -1 \ , \ a_3 = -\frac{1-j}{4}$$

(ب) با محاسبه مستقیم

$$a_k = 1/4\left[1 + 2e^{-jk\pi} - e^{-jk\pi 3/2}\right]$$

این مشابه پاسخ ما در قسمت (الف) برای $0 \le k \le 3$ می‌باشد.

مسئله ۳۳-۳

یک سیستم LTI پیوسته در زمان با ورودی $x(t)$ با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است.

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

نمایش سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

(الف) $x(t) = \cos 2\pi t$ (ب) $x(t) = \sin 4\pi + \cos(6\pi t + \pi/4)$

حل: ابتدا پاسخ فرکانسی سیستم را بدست خواهیم آورد. فرض کنید ورودی $x(t)$ به صورت $e^{j\omega t}$ باشد. با توجه به بحث بخش 3.9.2 می‌توان گفت پاسخ به این ورودی بایستی به صورت $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ باشد. بنابراین، با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده؛ داریم:

$$H(j\omega)j\omega e^{j\omega t} + 4e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

بنابراین:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4}$$

از معادله (3.124) می‌دانیم که زمانیکه ورودی $x(t)$ باشد:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$x(t)$ ضرایب سری فوریه ای a_k و فرکانس پایه ω_0 و ضرایب غیر صفر فوریه عبارتند از: $a_1 = a_{-1} = 1/2$ بنابراین؛ ضرایب غیر صفر سری فوریه $y(t)$ برابر است با $a_k H(jk\omega_0)$.

(الف) در این مسأله، $\omega_\circ = 2\pi$ و ضرایب غیر صفر سری فوریه عبارتند از: $a_1 = a_{-1} = 1/2$ بنابراین؛ ضرایب غیر صفر سری فوریه $y(t)$ برابر است با:

$$b_1 = a_1 H(j2\pi) = \frac{1}{2(4+2\pi j)}$$

,

$$b_{-1} = a_{-1} H(-j2\pi) = \frac{1}{???}$$

(ب) در اینجا نیز $\omega_\circ = 2\pi$ و ضرایب سری فوریه غیر صفر عبارتند از:

$$a_2 = a_{-2}^* = 1/2\, j$$

$$a_3 = a_{-3}^* = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}$$

بدین ترتیب، ضریب غیر صفر FS برای $y(t)$ برابر است با:

$$\begin{cases} b_3 = a_3 H(j6\pi) = \dfrac{e^{-j\pi/4}}{2(4+6\pi j)} \\ b-3 = a_{-3} H(-j6\pi) = \dfrac{-e^{-j\pi/4}}{2(4-6\pi j)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = a_2 H(4j\pi) = \dfrac{1}{2j(4+4\pi j)} \\ b_{-2} = a_{-2} H(-4j\pi) = \dfrac{-1}{2j(4-4\pi j)} \end{cases}$$

مسئله ۳-۳۴

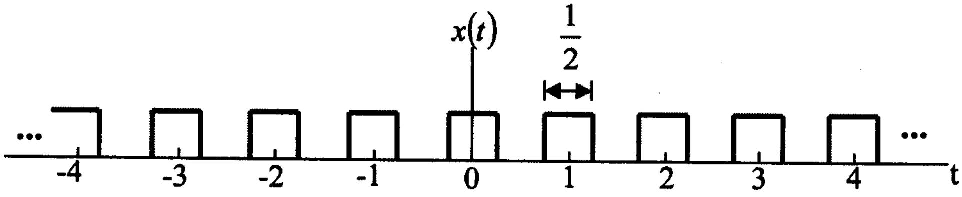
➢ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید:

$$h(t) = e^{-4|t|}$$

نمایش سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودیهای زیر در نظر بگیرید.

(الف) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$ (ب) $x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-n)$

(ج) $x(t)$ شکل م ۳-۳۴



حل: پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4(t)}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{4+j^{\omega}}+\frac{1}{4-j^{\omega}}$$

(الف) در اینجا $T=1$ و $\omega_\circ=2\pi$ و a_k به ازای تمامی kها $a_k=1$. ضرایب سری فوریه خروجی برابراست با:

$$b_k=a_kH(jk\omega_\circ)=\frac{1}{4+j2k\pi}+\frac{1}{4-2jk_n}$$

(ب) در اینجا $\omega_\circ=\pi$ و $T=1$ و
$$a_k=\begin{cases}\circ & k \text{ زوج}\\ 1 & k \text{ فـــــرد}\end{cases}$$

بنابراین، ضرایب سری فوریه خروجی برابراست با:

$$b_k=a_kH(jk\omega_\circ)=\begin{cases}\circ & k \text{ زوج}\\ \dfrac{1}{4+j\pi k}+\dfrac{1}{4-j\pi k} & k \text{ فـــــرد}\end{cases}$$

(ج) $T=1$ و $\omega_\circ=2\pi$ و
$$a_k=\begin{cases}1/2 & k=\circ\\ \circ & k,k\neq\circ \text{ زوج}\\ \dfrac{\sin(k\pi)}{k\pi} & k \text{ فـــــرد}\end{cases}$$

بنابراین، ضرایب سری فوریه خروجی عبارتند از:

$$b_k=a_kH(jk\omega_\circ)-=\begin{cases}1/4 & k=\circ\\ \circ & k \neq\circ\ ,\ k \text{ زوج}\\ \dfrac{\sin\left(k\pi/2\right)}{\pi k}\left[\dfrac{1}{4+j2\pi k}-\dfrac{1}{4-2k\pi j}\right] & k \text{ فـــــرد}\end{cases}$$

مسئله ۳۵-۳

➢ یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید:

$$H[j\omega]=\begin{cases}1, & |\omega|\geq 250\\ 0, & \text{درغیر این صورت}\end{cases}$$

ورودی این سیستم سیگنال $x(t)$ دارای تناوب پایه $T=\pi/7$ و ضرائب سری فوریه a_k است، و به ازای این ورودی $y(t)=x(t)$ ، به ازای چه مقادیری از k مطمئناً $a_k=0$ می‌شود؟

حل: می‌دانیم، ضرایب سری فوریه $y(t)$ برابراست با $b_k=H(jk\omega_0)a_k$ که ω_0 فرکانس پایه ی $x(t)$ و a_k ضرایب سری فوریه $x(t)$ می‌باشد.

حال اگر $y(t)$ با $x(t)$ برابر باشد، برای تمامیkها، $a_k=b_k$. توجه کنید به ازاء $|\omega|\geq 250$ $H(j\omega)=0$ و می‌دانیم که برای $|k|\geq 18$ $H(jk\omega_0)=0$ (زیرا $\omega_0=14$). بنابراین به ازاء $|k|\geq 18$، a_k بایستی صفر گردد.

مسئله ۳۶-۳

➢ یک سیستم LTI علّی گسسته در زمان، با ورودی $x_e(t)$ و خروجی $(T, -T)$ با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است.

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$$

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

ضرائب نمایش سری فوریه خروجی $y[n]$ به ازای ورودیهای زیر را بیابید.

نمایش سری فوریه خروجی $y[n]$ را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

(الف) $x[n]=\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$ (ب) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

حل:

ابتدا بایستی پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آوریم. یک ورودی $x[n]$ به صورت $e^{j\omega n}$ فرض کنید. از بحث انجام شده در قسمت 3.9، می‌دانیم که پاسخ به ورودی مذکور برابر است با $y[n]=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$. بدین ترتیب با جایگاری در معادله ی دیفرانسیل داده شده، خواهیم داشت:

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n}-1/4\,e^{-j\omega}e^{j\omega n}H(e^{j\omega})=e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

از معادله (3.131) می‌توان نوشت:

$$y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k H\left(e^{j2k\pi/N}\right)e^{jk(2\pi/N)n}$$

که ورودی برابر $x[n]$ می‌باشد. فرکانس پایه ی $x[n]$ برابر $\omega_\circ=\dfrac{2\pi}{N}$ و ضرایب سری فوریه $x[n]$، a_k می‌باشد. بنابراین ضرایب سری فوریه $y[n]$ برابر است با: $a_k H\left(e^{(2k\pi j/N)}\right)$.

(الف) ازاینجا $N=4$ ضرایب غیر صفر سری فوریه $x[n]$، $a_3=a_{-3}^*=\dfrac{1}{2j}$ می‌باشد. بنابراین ضرایب غیر صفر سری فوریه $y[n]$ برابر است با:

$$b_3=a_1H\left(e^{3j\pi/4}\right)=\frac{1}{2j\left(1-\frac{1}{4}e^{-3\pi j/4}\right)^*}\quad,\quad b_{-3}=a_{-1}H\left(e^{-3j\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{1}{2j\left(1-\frac{1}{4}e^{j3\pi/4}\right)^*}$$

(ب) اینجا $N=8$ و ضرای غیر صفر سری فوریه $x[n]$ برابر است با $a_1=a_{-1}=1/2$ و $a_2=a_{-2}=1$، بدین ترتیب، ضرایب غیرصفر سری فوریه $y(t)$ عبارتست از:

$$b_1=a_1H\left(e^{j\pi/4}\right)=\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/4}\right)^*}$$

$$b_{-1}=a_{-1}H\left(e^{-j\pi/4}\right)=\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{4}e^{j\pi/4}\right)^*}$$

$$b_2=a_2H\left(e^{j\pi/2}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}\right)^*}$$

$$b_{-2}=a_{-2}H\left(e^{-j\pi/2}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{j\pi/2}\right)^*}$$

مسئله ۳-۳۷

➢ یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید.

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

نمایش سری فوریه خروجی $x[n]$ را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

(الف) $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-4k)$ (ب) $x[n]$ متناوب با $N=6$ و $\phi_j(t)$

حل: پاسخ فرکانسی سیستم به راحتی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$h\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-{}^{1}\!/\!_{2}\,e^{-j\omega}}-\frac{1}{1-2e^{-j\omega}}$$

(الف) ضرایب سری فوریه $x[n]$ برابراست با: $a_k={}^{1}\!/\!_{4}$, for all k

همچنین $N=4$ و ضرایب سری فوریه $y[n]$:

$$b_k=a_kH\left(e^{j2k\pi/N}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\pi/2}}-\frac{1}{1-2e^{-jk\pi/2}}\right]$$

(ب) در این مورد، ضراب سری فوریه $x[n]$:

$$a_k={}^{1}\!/\!_{6}\left(1+2\cos\left(k\pi/3\right)\right)\quad for\quad all\quad k$$

و نیز $N=6$ بنابراین ضراب سری فوریه $y[n]$ برابر است با:

$$b_k=a_kH\left(e^{j2k\pi}/N\right)={}^{1}\!/\!_{6}\left(1+2\cos\left(k\,x\,\pi/3\right)\right)\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\pi/3}}-\frac{1}{1-2e^{-k\pi j/3}}\right]$$

مسئله ۳۸-۳

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه
$$h[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 2\\ -1 & -2\le n\le -1\\ 0, & \text{درغیر این صورت}\end{cases}$$
دارای ورودی زیرست
$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$$
ضرائب سری فوریه خروجی $y[n]$ را بیابید.

حل: پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H(e^{j\omega})=-e^{2j\omega}-e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}$$

برای $x[n]$، $N=4$ و $\omega_0=\pi/2$. ضرایب FS برای ورودی $x[n]$ برابر است با: $a_k=1/4 \quad for \quad all \quad n$

و ضرایب FS برای خروجی عبارتست از:

$$b_k a_k H(e^{jk\omega_0})=1/4\left(1-e^{jk\pi/2}+e^{-jk\pi/2}\right)$$

مسئله ۳۹-۳

پاسخ فرکانسی سیستم LTI گسسته در زمان s عبارت است از

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|\le\pi\\ 0, & \frac{\pi}{8}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

نشان دهید که اگر ورودی $x[n]$ این سیستم دارای تناوب $N=3$ باشد، خروجی $y[n]$ تنها یک ضریب سری فوریه غیرصفر دارد.

حل: فرض کنیم ضرایب FS ورودی a_k باشد، ضرایب سری فوریه خروجی b_k برابر است با:

$$b_k=a_kH(e^{jk\omega_0})$$

که $\omega_0=2\pi/3$ توجه داشته باشید که در بازه $0\le k\le 2$، برای $k=1,2$، $H(e^{jk\omega_0})=$ بنابراین تنها b_0 ضریب غیر صفر سری فوریه $y[n]$ در بازه‌ی $0\le k\le 2$ می‌باشد.

مسئله ۴۰-۳

$x(t)$ را یک سیگنال متناوب با تناوب پایه T و ضرائب سری فوریه a_k فرض کنید. ضرائب سری فوریه سیگنالهای زیر را بر حسب a_k بیان کنید.

(الف) $x(t-t_\circ)+x(t+t_\circ)$ (ب) $\varepsilon\{x(t)\}$ (ج) $\Re e[x(t)]$

(د) $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ (هـ) $(3t-1)$ [برای این حالت ابتدا دوره تناوب $(3t-1)$ را بیابید.]

حل: فرض کنیم a_k ضرایب سری فوریه $a(t)$ باشد،

(الف) $x(t-t_\circ)$ نیز با پریود T، متناوب است. ضرایب سری فوریه ی b_k برای $x(t-t_\circ)$ برابر است با:

$$b_k=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}x(t-t_\circ)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$
$$=\frac{e^{-jk(2\pi/T)t_\circ}}{T}\int_{\langle T\rangle}x(\tau)e^{-jk(2\pi/T)\tau}d\tau$$
$$=e^{-jk(2\pi/T)t_\circ}a_k$$

به طور مشابه، ضرایب سری فوریه $x(t+t_\circ)$ عبارتست از:

$$c_k=e^{jk(2\pi/T)t}a_k$$

و در نهایت ضرایب سری فوریه $x(t-t_\circ)+x(t+t_\circ)$ برابر است با:

$$d_k=b_k+c_k=e^{-jk(2\pi/T)}ak+e^{jk(2\pi/T)t_\circ}ak$$
$$=2\cos\left(k\pi 2^{t_\circ}/T\right)a_k$$

(ب) توجه کنید $\varepsilon r\{x(t)\}=1/2\{x(t)+x(-t)\}$. ضرایب FS برای $x(-t)$ عبارتست از:

$$b_k=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}x(-t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}x(\tau)e^{jk(2\pi/T)\tau}d\tau$$
$$=a_{-k}$$

بنابراین ضرایب برای $\varepsilon r\{x(t)\}$ برابر است با: $c_k=\frac{a_k+b_k}{2}=\frac{a_k+a-k}{2}$

(ج) توجه داشته باشید که $Re\{x(t)\}=x(t)+x^*(t)/2$، ضرایب FS برای $x^*(t)$ برابراست با:

$$b_k=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}x^*(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

اگر از دو طرف معادله مزدوج بگیریم، داریم:

$$b_k^* = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t) e^{jk(2\pi/T)}dt = \alpha_{-k}$$

بنابراین، ضرایب سری فوریه $Re\{x(t)\}$ برابر است با:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{a_k + a_{-k}^*}{2}$$

(د) از ترکیب سری فوریه معادله داریم:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j(2\pi/T)kt}$$

اگر از دو طرف معادله برحسب t دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -k^2 \frac{4\pi^2}{T^2} a_k e^{j(2\pi/T)kt}$$

با دقت در معادله فوق خواهیم دید که ضرایب سری فوریه $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ عبارتند از $k\frac{4\pi^2}{T^2}$.

(هـ) پریود $x(3t)$، یک سوم برابر $x(t)$ می‌باشد. بنابراین سیگنال $x(3t-1)$ با پریود $T/3$ متناوب است. ضرایب سری فوریه $x(3t)$ نیز همچنان a_k می‌باشد. با استفاده از تحلیل قسمت (الف)، می‌دانیم که ضرایب سری فوریه $x(3t-1)$، $a_k e^{-jk(6\pi/T)}$ می‌باشد.

مسئله ۴۱-۳

اطلاعات زیر در مورد یک سیگنال پیوسته در زمان، با دوره تناوب ۳ و ضرائب سری فوریه a_k است.

۱. $a_k = a_{k+2}$ ۲. $a_k = a_{-k}$ ۳. $\int_{-0/5}^{0/5} x(t)dt = 1$ ۴. $\int_{0/5}^{1/5} x(t)dt = 2$

$x(t)$ را بیابید.

حل: چون $a_k = a_{-k}$، باید $x(t) = x(-t)$ همچنین توجه کنید که $a_k = a_{k+2}$، پس باید:

$$x(t) = x(t)e^{-j(4\pi/3)t}.$$

همچنین توجه کنید که $a_k = a_{k+2}$، پس باید:

$$x(t) = x(t)e^{-j(4\pi/3)t}$$

که بیان می‌کند، $x(t)$ برای $t = 0, \pm 1.5, 3, \pm 4.5, \ldots$ مقدار غیر صفر دارد.

چون $\int_{-0.5}^{0.5} x(t)dt = 1$، می‌توان نتیجه گرفت که برای $0.5 \le t \le 0.5$، $x(t) = \delta(t)$

همچنین چون؛ $\int_{0.5}^{1.5} x(t)dt = 2$ ، می‌توان نتیجه گرفت که در بازه $0.5 \le t \le 3/2$، $x(t) = 2\delta(t - 3/2)$

بنابراین $x(t)$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - k3) + 2\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - 3k - 3/2)$$

مسئله ۴۲-۳

$x(t)$ یک سیگنال حقیقی با ددوره تناوب پایه T و ضرائب سری فوریه a_k است.

(الف) نشان دهید که $a_k = a_{-k}^*$ و a_0 حقیقی است.

(ب) نشان دهید که در صورت زوج بودن $x(t)$، ضرائب سری فوریه آن نیز باید حقیقی و زوج باشند.

(ج) نشان دهید که در صورت فرد بودن $x(t)$، ضرائب سری فوریه آن باید موهومی‌خالص و فرد باشند، و $a_0 = 0$.

(د) نشان دهید که ضرائب سری فوریه بخش زوج $x(t)$ عبارت اند از $\Re e[a_k]$

(هـ) نشان دهید که ضرائب سری فوریه بخش فرد $x(t)$ عبارت اند از $jg[a_k]$

حل: (الف) از مسأله 3.40 (و جدول 3.1) می‌دانیم FS برای $x^*(t)$ برابر a_k^* می‌باشد. حال می‌دانیم که $x(t)$ حقیقی است. در این صورت $x(t) = x^*(t)$. بنابراین $a_k = a_k^*$ توجه کنید که این بیان می‌کند که $a_0 = a_0^*$، بنابراین a_0 حقیقی باشد.

(ب) از مسأله 3.40 (جدول 3.1) می‌دانیم که ضرایب FS $x(-t)$ برابر a_{-k} می‌باشد. اگر $x(t)$ زوج باشد در این صورت، $x(t) = x(-t)$ که بیان می‌دارد؛

$$a_k = a_{-k} \quad (S.3.42.1)$$

رابطه فوق بیان می‌کند که ضرایب FS زوج هستند. از قسمت قبلی، می‌دانیم که اگر $x(t)$ حقیقی باشد:

$$a_k = a_{-k}^* \quad (S3\text{-}42\text{-}2)$$

با استفاده معادله (S3-42-1) و (S3-42-2) می‌دانیم که $a_k = a_k^*$، بنابراین a_k برای تمام k حقیقی است بهرحال، می‌توان نتیجه گرفت که a_k زوج و حقیقی است.

(ج) از مسأله 3.40 (و جدول 3.1) می‌دانیم که ضریب FS برای $x(-t)$ برابر a_{-k} می‌باشد. اگر $x(t)$ فرد باشد، در این صورت $x(t) = -x(-t)$ که این بیان می‌دارد که $a_k = -a_{-k}$. (S3-42-3)

که بیان می‌کند، ضرایب FS فرد هستند. از قسمت قبلی، می‌دانیم که اگر $x(t)$ حقیقی باشد در اینصورت:

$$a_k = a_{-k}^* \quad (S3\text{-}42\text{-}4)$$

با استفاده از معادله (S3.42-3) و (S3.42-4)، می‌دانیم که $a_k = a_k^*$. بنابراین a_k در تمام $-\infty < k < \infty$ موهومی‌می‌باشد. به هر حال، می‌توانیم نتیجه بگیریم که a_k زوج و حقیقی است. با توجه معادله (S3.42-3) بایستی $a_0 = -a$ و این یعنی $a_0 = 0$.

(د) توجه کنید که $\varepsilon r\left\{x(t)+x(-t)\right\}/2$ با استفاده از معادله (S3.43-2) می‌توان نوشت ضریب FS برای $\left\{a_k+a_k^*\right\}/2=Re\left\{a_k\right\}$ می‌باشد.

(هـ) توجه کنید که $Odd\{x(t)\}=\dfrac{\{x(t)-x(-t)\}}{2}$. از قسمت قبلی می‌دانیم که ضریب FS برای $od\left\{x(t)\right\}$ برابر با $\frac{1}{2}\left\{a_k-a_{-k}\right\}$ خواهد بود. با استفاده از معادله (S3.43-2) می‌توان نوشت ضریب FS برای $od\left\{x(t)\right\}$ برابر با $j\ I_m\left\{a_k\right\}=\frac{1}{2}\left(a_k-a_k^*\right)$ خواهد بود.

$$x(t)=\sum_{Oddk}a_k e^{jk\,2/t}$$

مسئله ۴۳-۳

(الف) سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$، با دوره تناوب T را فرد ـ هماهنگ می‌نامیم، اگر در نمایش سری فوریه آن

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t} \qquad \text{(م ۳-۴۳-۱)}$$

به ازای مقادیر صحیح زوج k داشته باشیم $a_k=0$.

(i) نشان دهید که اگر $x(t)$ معادله (م ۳-۴۳-۲) را برآورده کند، فرد ـ هماهنگ است.

(ب) $x(t)$ را یک سیگنال متناوب فرد ـ هماهنگ، با دوره تناوب ۲ در نظر بگیرید به نحوی که در $0<t<1$،

$x(t)=t$

$x(t)$ را رسم کنید و ضرایب سری فوریه آن را بیابید.

(ج) به همین قیاس تابع زوج ـ هماهنگ را می‌توان تابعی تعریف کرد که در نمایش معادله (م ۳-۴۳-۱) آن، به ازای مقادیر فرد k داشته باشیم $a_k=0$. آیا دوره تناوب پایه چنین تابعی می‌تواند T باشد؟ در مورد جواب خود توضیح دهید.

(د) نشان دهید، به شرطی T می‌تواند دوره تناوب پایه $x(t)$ معادله (م ۳-۴۳-۱) باشد که داشته باشیم.

۱. a_1 یا a_{-1} غیر صفر باشد.

یا

۲. دو عدد صحیح k و l بدون عامل مشترک داشته باشیم که به ازای آنها a_k و a_l هر دو غیر صفر باشند.

حل: (الف) (i) داریم:

$$x\left(t+\frac{T}{2}\right)=\sum_{Oddk}a_k e^{jk\,2/t}e^{jk\pi}$$

چون $e^{jk\pi}=-1$ برای k های فرد.

$$x\left(t+\frac{T}{2}\right)=-x(t)$$

(ii) ضرایب سری فوریه $x(t)$ برابر است با:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T/2}\left[x(t)+x\left(t+t/2\right)e^{-jk\pi}\right]e^{-jk\omega_0 t}dt$$

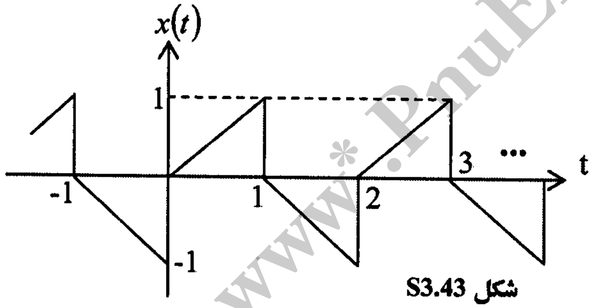
توجه کنید که طرف راست معادله بالا برای مقادیری از K صفر است اگر $x(t)=-x\left(+T/2\right)$

(ب) تابع در شکل S3.43 نشان داده شده اند.

توجه کنید که $T=2$ و $\omega_0=\pi$، بنابراین:

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ زوج} \\ \frac{1}{jk\pi}+\frac{2}{k^2\pi^2} & k \text{ فرد} \end{cases}$$

(ج) خیر. برای سیگنالهاهارمونیک، می‌توانیم دلیل قسمت $(a-j)$ برای نشان دادن اینکه $x(t)=x\left(t+T/2\right)$ را دنبال کنیم. در این مورد، پریود اصلی $T/2$ می‌باشد.



شکل S3.43

(د) اگر a_1 یا a_{-1} صفر نباشد.

$$x(t)=a_{\pm 1}e^{\pm 2j\pi t/T}+\ldots$$

$$\pm j\frac{2\pi}{T}(t+t_0)+\ldots$$

$$x(t+t_0)=a_{\pm 1}e^{\pm j\frac{2\pi}{T}(t+t_0)+\ldots}$$

کمترین مقدار $|t_0|$ (بجز $|t|=0$) برای $e^{\pm j\frac{2\pi}{T}t_0}$ برابر است که پریودیک اساسی می‌باشد.

تنها دراین صورت است که $x(t+t_0)=a_{\pm 1}e^{\pm 2\pi jt/T}+\ldots=x(t)$

بنابراین بایستی t_0 تناوب اصلی باشد.

(2) دوره تناوب $x(t)$ ک.م.م تناوب $e^{jk(2\pi/T)t}$ و $e^{jl\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$ می‌باشد. پریود $e^{jk(2\pi/T)}$ برابر است با T/k و پریود $e^{jl\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$ برابر است با T/ℓ بدلیل اینکه k , ℓ ضرایب مشترکی ندارند، ک.م.م. T/k و T/ℓ عبارتست از از T.

(3) تنها ضرایب FS مجهول عبارتند از a_{-2}, a_2, a_{-1}, a_1 به دلیل اینکه $x(t)$ حقیقی است. $a_1 = a_{-1}^*$ و $a_2 = a_{-2}^*$. چون a_1 حقیقی است، $a_1 = a_{-1}$. حال $x(t)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_\circ t) + A_2 \cos(2\omega_\circ t + \theta)$$

که، که از آن خواهیم داشت:

$$x(t-3) = A_1 \cos(\omega_\circ t - 3\omega_\circ) + A_2 \cos(2\omega_\circ t) + \theta - 6\omega_\circ$$

حال اگر، $x(t) = -x(t-3)$، در اینصورت، $3\omega_\circ$ و $6\omega_\circ$ هر دو باید ضرایب فردی از π باشند.

بدیهی است که این غیرممکن است، بنابراین $a_2 = a_{-2} = \circ$ و

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_\circ t)$$

حال با استفاده از رابطه بارسئوال در راهنمای5، داریم:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = |a_1|^2 + |a-1|^2 = 1/2$$

بنابراین $|a_1| = 1/2$. چون a_1 مثبت است، داریم: $a_1 = a_{-1} = 1/2$، بنابراین $x(t) = \cos\left(\pi t/3\right)$

مسئله ۴۵-۳

$x(t)$ را یک سیگنال حقیقی و متناوب با نمایش سری فوریه سینوسی ـ کسینوسی معادله (۳-۳۲) فرض کنید، یعنی

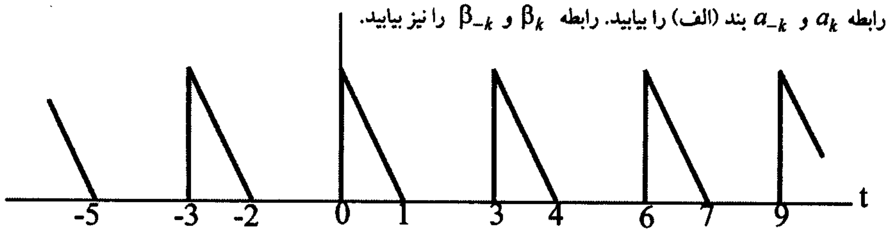
$$x(t) = a_\circ + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k \cos k\omega_\circ t - C_k \sin k\omega_\circ t\right] \qquad \text{(م ۳-۴۵-۱)}$$

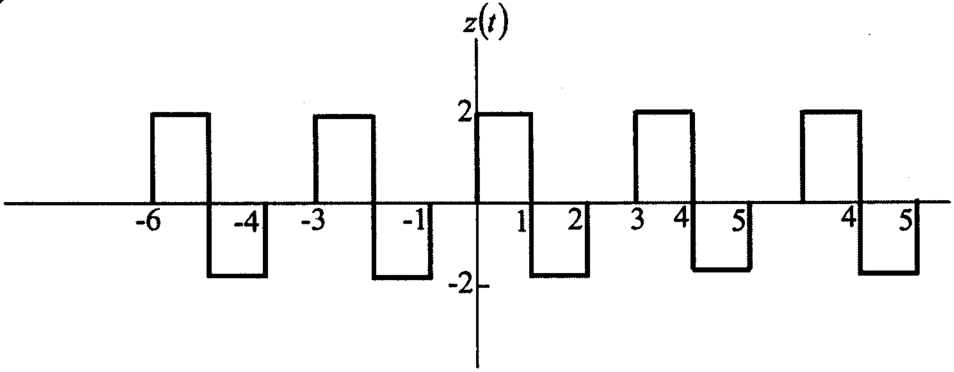
(الف) نمایش سری فوریه نمایی بخشهای زوج و فرد $x(t)$ را تعیین کنید. یعنی ضرایب a_k، β_k را بر حسب ضرائب معادله (م ۳-۴۵-۱) بیابید به نحوی که داشته باشیم

$$Ev\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_\circ t}$$

$$Od\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{jk\omega_\circ t}$$

(ب) رابطه a_k و a_{-k} بند (الف) را بیابید. رابطه β_k و β_{-k} را نیز بیابید.





شکل ۳-۴۵

(ج) فرض کنید سیگنالهای $x(t)$ و $z(t)$ شکل م ۳-۴۵ دارای نمایش سری سینوسی ـ کسینوسی زیرند.

$$x(t)=a_\circ+2\sum_{k=1}^{+\infty}\left[B_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{2}\right)-C_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right]$$

$$z(t)=d_\circ+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[E_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)-F_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right]$$

سیگنال زیر را رسم کنید.

$$y(t)=4(a_\circ+d_\circ)+2\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[B_k+\frac{1}{2}E_k\right]\cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)+F_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right\}$$

حل: با دقت بیشتر، نتیجه می‌گیریم که ضرایب FS برای $x(t)$ برابر است با:

$$\wp_k=\begin{cases}a_\circ & ,k=\circ\\ B_{k+jck} & ,k>\circ\\ B_{k-jck} & ,k<\circ\end{cases}$$

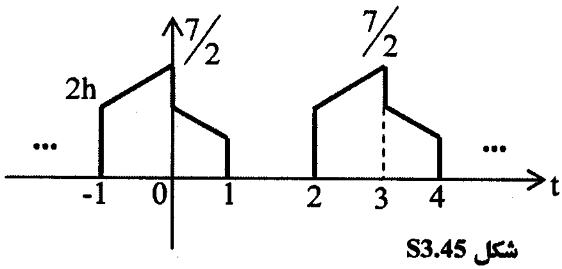
(الف) از مسأله 3.42 می‌دانیم که اگر $x(t)$ حقیقی باشد. ضرای FS برای $\varepsilon v\{x(t)\}$ برابر است با: $Re\{\wp_k\}$، بنابراین: $a_\circ=a_\circ$ و $a_k=B_{|k|}$

از مسأله 3.42 می‌دانیم که اگر $x(t)$ حقیقی باشد، ضرایب FS برای $od\{x(t)\}$ برابر است با: $j\,Im\{\wp_k\}$ بنابراین: $\beta_k=\begin{cases}jck & k>\circ\\ -jck & k<\circ\end{cases}$, $\beta_\circ=\circ$

(ب) $\beta_k=-\beta_{-k}$, $\alpha_k=\alpha_{-k}$

(ج) سیگنال، برابر است با: $y(t)=1+\varepsilon v\{x(t)\}+{}^1\!/_2\,\varepsilon v\{x(t)\}-od\{x(t)\}$.

این در شکل S3-45 نمایش داده شده است.



شکل S3.45

مسئله ۴۶-۳

در این مسئله دو خاصیت مهم سری فوریه پیوسته در زمان، یعنی خاصیت مدولاسیون و قضیه پارسوال، را به دست می‌آوریم. فرض کنید سیگنالهای $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال متناوب پیوسته در زمان، با دوره تناوب مشترک $T_\circ$ هستند، نمایش سری فوریه این دو سیگنال عبارت است از

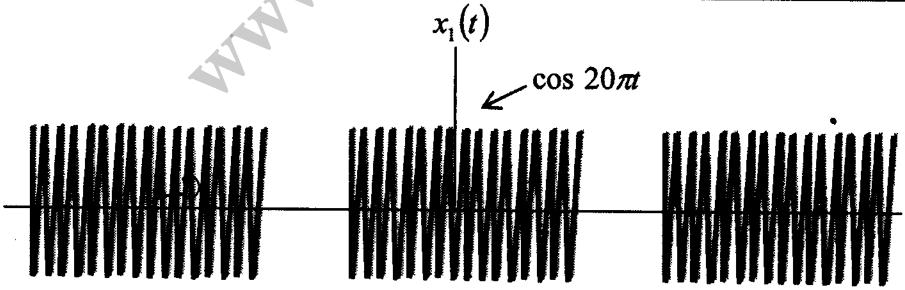
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_o t}\,,\qquad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \qquad \text{(م ۳-۴۶-۱)}$$

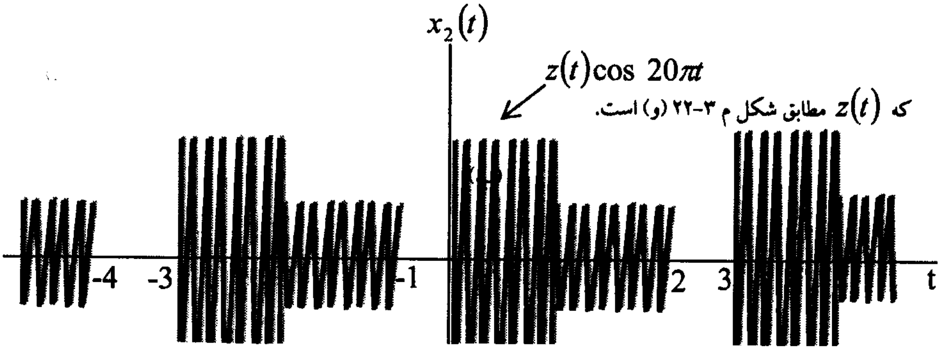
از کانولوشن گسسته زیر به دست می‌آید.

$$c_k=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}$$

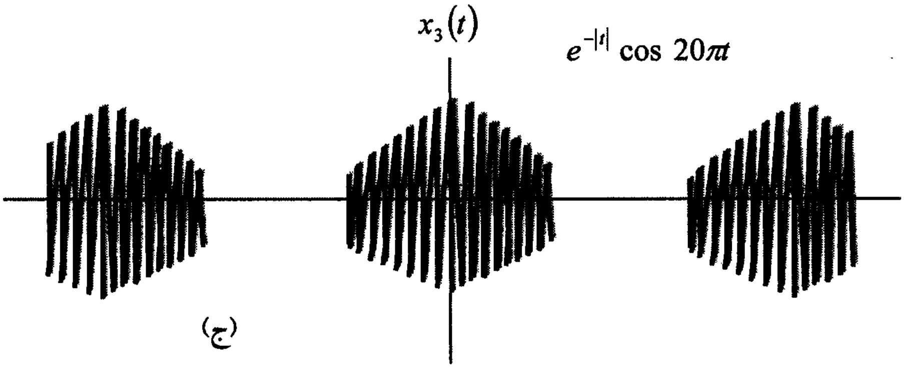
(ب) به کمک نتیجه بند (الف) ضرایب سری فوریه سیگنالهای $x_1(t)$، $x_3(t)$ شکل م ۳-۴۶ را بیابید.

(ج) فرض کنید $y(t)$ معادله (م ۳-۴۶) برابر $x^*(t)$ است. b_k معادله (م ۳-۴۶-۱) را بر حسب a_k بیان کنید.





که $z(t)$ مطابق شکل م ۳-۲۲ (و) است.



شکل م ۴۶-۳

و با استفاده از نتیجه بند (الف) قضیه پارسئوال برای سیگنالهای متناوب، یعنی رابطه زیر، را ثابت کنید.

$$\frac{1}{T_\circ}\int_0^{T_\circ}|x(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

حل: ضرایب سری فوریه $z(t)$ برابر است با:

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\sum_n\sum_\ell \alpha_n b_\ell e^{j(n+l)\omega_\circ t}e^{-jk\omega_\circ t}dt$$
$$=\frac{1}{T}\sum\sum a_n b_\ell\,\delta(k-(n+\ell))$$
$$=\sum_n a_n b_{k-n}$$

(ب) (i) در اینجا $T_\circ=3$, $\omega_\circ=\frac{2\pi}{3}$. بنابراین:

$$c_k=\left[\tfrac{1}{2}\delta(k-30)+\frac{1}{2}\delta(k+30)\right]*\frac{2\sin\left(kj\pi/30\right)}{2k\pi 3/3}$$

با ساده سازی خواهیم داشت:

$$c_k=\frac{\sin\left[(k-30)\frac{2\pi}{3}\right]}{3(k-20)2\pi/3}\qquad \text{و}\qquad c_{\pm 30}=1/3$$

(ii) $x_2(t)$ را به صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم:

$x_2(t)=$ مجموع دو موج مربعی شیفت یافته $\times\ \cos(20\pi t)$

در اینجا $T_\circ = 3$ و $\omega_\circ = \dfrac{2\pi}{3}$ بنابراین

$$c_k = \tfrac{1}{3} e^{-j(k-30)(2\pi/3)} \frac{\sin\left\{(k-30)\frac{2\pi}{3}\right\}}{(k-30)2\pi/3} + \tfrac{1}{3} e^{-j(k+30)\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin\left\{(k+30)2\pi/3\right\}}{(k+30)2\pi/3}$$

$$+\tfrac{1}{3} e^{-j(k-30)\pi/3} \frac{\sin\left\{(k-30)\pi/3\right\}}{(k-80)\frac{2\pi}{3}} + \tfrac{1}{3} e^{-j(k+30)(\pi/3)} \frac{\sin\left\{(k+30)\pi/3\right\}}{(k+30)2\pi/3}$$

(iii) اینجا $T_\circ = 4$ و $\omega_\circ = \pi/2$ است، بنابراین:

$$c_k = \left[\tfrac{1}{2}\delta(k-40) + \tfrac{1}{2}\delta(k+40)\right] + \frac{j\left[k\omega_\circ + e^{-1}\left\{\sin k\omega_\circ - \cos k\omega_\circ\right\}\right.}{2\left[1+(k\omega_\circ)^2\right]}$$

پس از پیاده سازی

$$c_k = \frac{j\left[k-40\right]\omega_\circ + e^{-1}\left\{\sin(k-40)\omega_\circ - \cos(k-40)\omega_\circ\right\}}{-4\left[1+\left\{(k-40)\omega_\circ\right\}^2\right]}$$

$$+\frac{j\left[k+40\right]\omega_\circ + e^{-1}\left\{\sin(k+40)\omega_\circ - \cos(k+40)\omega_\circ\right\}}{4\left[1+\left\{(k+40)\omega_\circ\right\}^2\right]}$$

(پ) از مسأله 3.42 بخاطر داریم که $b_k = a^*_{-k}$ از قسمت (الف) می‌دانیم که ضرایب سری فوریه $z(t) = x(t)y(t) = x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$ به صورت زیر خواهد بود:

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{n-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a_{n+k}$$

از معادله آنالیز سری فوریه، داریم:

$$c_k = \frac{1}{T_\circ}\int_\circ^{T_\circ} |x(t)|^2 e^{-j\left(-2\pi/T_\circ\right)kt} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a^*_{n+k}$$

با قرار دادن $k = \circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{T_\circ}\int_\circ^{T_\circ} |x(t)|^2 dt_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

مسئله ۴۷-۳

سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t)=\cos\ 2\pi t$$

چون $x(t)$ متناوب، و دوره تناوب پایه آن ۱ است، با دوره تناوب N نیز متناوب است که N می‌تواند هر عدد صحیح دلخواهی باشد. ضرایب سری فوریه $x(t)$ را با فرض این که $x(t)$ با دوره تناوب ۳ متناوب است، بیابید.

حل: فرض کنید $x(t)$ سیگنالی متناوب با پریود (1) باشد. ضرایب غیرصفر FS برای $x(t)$ شامل $a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$ خواهند بود. حال اگر فرض کنیم $x(t)$، با پریود (3) متناوب باشد. در اینصورت ضرایب غیر صفر $x(t)$ عبارتند از:

$$b_3 - b_{-3} = \frac{1}{2}$$

مسئله ۴۸-۳

فرض کنید $x[n]$ یک رشته متناوب، با دوره تناوب N و نمایش سری فوریه زیرست

$$x[b]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ۳-۴۸-۱)}$$

ضرایب سری فوریه هر یک از سیگنالهای زیر را می‌توان بر حسب a_k معادله م (۳-۴۸-۱) بیان کرد. این ضرایب را بیابید.

(الف) $x[n-n_\circ]$ (ب) $x[n]-x[n-1]$

(ج) $x[n]-x\left[n-\frac{N}{2}\right]$ (N را زوج بگیرید)

(د) $x[n]+x\left[n+\frac{N}{2}\right]$ (N را زوج بگیرید، توجه کنید که دوره تناوب سیگنال N/۲ است.)

(هـ) $x_*[-n]$ (و) $(-1)^n x[n]$ (N را فرد بگیرید، دقت کنید که دوره تناوب این سیگنال ۲۸ است.)

(ح) $y[n]=\begin{cases} x[n], & n \text{ زوج} \\ \circ, & n \text{ فرد} \end{cases}$

حل: (الف) ضرایب سری فوریه $x[n-n_\circ]$ برابر است با:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[\eta-\eta_\circ]e^{-j2nk/N} \\ &= \frac{1}{N}e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]e^{-2nk/N} \\ &= a_k e^{-2\pi jkn_\circ/N} \end{aligned}$$

(ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف)، ضرایب سری فوریه $x[n]-x[n-1]$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta_k = a_k - e^{-j2\pi k/n} a_k = \left[1-e^{-2\pi jk/n}\right] a_k$$

(ج) با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمت (الف)، ضرایب سری فوریه $x[n]-x\left[n-N/2\right]$ عبارت است از:

$$\delta_k = a_k\left[1-e^{-jk\pi}\right] = \begin{cases} 0 & k \text{ زوج} \\ 2a_k & k \text{ فـــرد} \end{cases}$$

(د) توجه کنید که پریود $x[n]+x\left[n+N/2\right]$ برابر است با $\frac{N}{2}$. ضرایب سری فوریه $x[n]+x\left[n-N/2\right]$ عبارتست از:

$$\delta_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x[n]+x\left[n+N/2\right]\right]e^{-j4\pi nk/N} = 2a_{2k} \qquad 0 \le k \le N/2-1$$

(هـ) ضرایب سری فوریه $x^*[-n]$ عبارتست از:

$$\delta = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^*[-n]e^{-j2\pi nk/N} = a_k^*$$

(و) ضرایب سری فوریه $(-1)^n x[n]$ برای Nهای زوج عبارتست از:

$$\delta_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi n/N)(k-N/2)} = a_{(k-N/2)}$$

(ز) ضرایب سری فوریه $(-1)^n x[n]$ عبارتست از:

$$\delta_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi n/N)(k-N/2)}$$

ح) به ازای N فرد، پریود عبارت $(-1)^n x[n]$ برابر 2N خواهد بود. بنابراین ضرایب سری فوریه برابر است با:

$$\delta_k = \frac{1}{2N}\left[\sum_{n=0}^{N=1} x[n]e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(\frac{K-N}{2}\right)} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(\frac{K-N}{2}\right)}e^{-j\pi(K-N)}\right.$$

توجه کنید که برای k های فرد، عبارت $\frac{K-N}{2}$ عددی صحیح و K-N نیز عدد صحیح فرد خواهد بود.

همچنین برای k زوج:

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{a_{K-N}}{2} & k \text{ فـــرد} \\ 0 & k \text{ فـــرد} \end{cases}$$

(ط) در اینجا: $y[n] = 1/2\left\{x[n]+(-1)^n x[n]\right\}$

برای N زوج:

$$\delta_k = 1/2 - \left[a_k + a_k - N/3\right]$$

برای N فرد:

$$\delta_k = \begin{cases} 1/2\left[a_k + a\dfrac{K-N}{2}\right] & k \text{ زوج} \\ 1/2\, a_k & k \text{ فــــرد} \end{cases}$$

مسئله ۴۹-۳

➢ فرض کنید $x[n]$ یک رشته متناوب با دوره تناوب N و نمایش سری فوریه زیرست

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ۳-۴۹-۱)}$$

(الف) فرض کنید N زوج و $x[n]$ معادله زیر را ارضا می‌کند.

$$x[n] = -x\left[n+\frac{N}{2}\right] \quad \text{برای تمام مقادیر } n$$

ب) نشان دهید که برای تمام مقادیر صحیح زوج k های مضرب ۴ داریم $a_k = 0$.

(ج) به طور کلی فرض کنید N مضربی از M باشد و داشته باشیم.

$$\sum_{r=0}^{(N/M)-1} x\left[n + r\frac{N}{M}\right] = 0 \quad \text{برای تمام مقادیر } n$$

نشان دهید که برای تمام مضارب M داریم $a_k = 0$.

حل: (الف) ضرایب FS به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2-1)} x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)} + \frac{e^{-j\pi k}}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n+N/2\right]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = 0 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} - \frac{e^{-j\pi k}}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)} x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \\
&= 0 \quad for \quad k \quad even
\end{aligned}$$

(ب) با بکارگیری روشی مشابه قسمت (الف) می‌توانیم نشان دهیم که:

$$a_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\left\{1-e^{-jk\pi/2}+e^{-j\pi k}-e^{-j\frac{3\pi k}{2}}\right\}x[n]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}\right]$$

$$=0 \quad for \quad k=4r \;,\; r\in z.$$

(ج) اگر N/M یک عدد صحیح باشد. می‌توانیم از روش کلی قسمت (الف) برای اینکه نشان دهیم:

$$a_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{B-1}\left\{1-e^{-j2\pi r}+e^{-j4\pi r}-\ldots+e^{-j2\pi(M-1)r}\right\}x[n]e^{-j\frac{2\pi nr}{N}}\right]$$

استفاده کنیم که $B=N/M$ و $r=K/M$. از معادله بالا بدیهی است که:

$$a_k = 0 \quad if \quad k=rM \;,\; r\in z$$

مسئله ۵۰-۳

اطلاعات زیر در مورد سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره تناوب ۸ و ضرائب سری فوریه a_k داده شده است:

۱. $a_k = -a_{k-4}$ ۲. $x[2n+1]=(-1)^n$

یک تناوب $x[n]$ را رسم کنید.

حل: از جدول 3.2 می‌دانیم که اگر $x[n]\xleftrightarrow{FS}a_{k1}$ آنگاه

$$(-1)^n x[n]=e^{j(2\pi/N)(N/2)n}x[n]\xleftrightarrow{FS}a(k-k/2)$$

در این مورد N=8 بنابراین:

$$(-1)^n x[n]\xleftrightarrow{FS}a_{k-4}$$

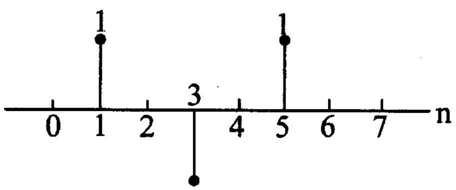
چون فرض بر این است که $a_k=-\alpha_{k-4}$، داریم:

$$x[n]=-(-1)^n x[n]=(-1)^{n+1}x[n]$$

که نشان می‌دهد $x[0]=x[\pm 2]=x[\pm 4]=\ldots=0$

همچنین داده شده که $x[1]=x[5]=\ldots=1$ و $x[3]=x[7]=-1$

بنابراین یک دوره تناوب $x[n]$ در شکل S3.50 نشان داده شده است.



شکل S.3.50

مسئله ۵۱–۳

$x[n]$ یک سیگنال متناوب با تناوب $N=8$ و ضرائب سری فوریه $a_k=-a_{k-4}$ است. سیگنال

$$x[n]=\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)x[n-1]$$

با دوره تناوب $N=8$ ایجاد شده است. ضرائب سری فوریه $y[n]$ را b_k بنامید. تابع $f[k]$ را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم.

$$b_k=f[k]a_k$$

حل: داریم:

$$e^{j4(2\pi/8)n}x[n]=e^{j\pi n}x[n]=(-1)^n x[n]\overset{FS}{\longleftrightarrow}a_{k-4}$$

و بنابراین

$$(-1)^{n+1}x[n]\overset{FS}{\longleftrightarrow}-a_{k-4}$$

اگر $a_k=-a_{k-4}$ در این صورت $x[0]=x[\pm2]=x[\pm4]=\ldots=0$ حال. توجه بفرمائید که سیگنال $p[n]=x[n-1]$ و $p[\pm1]=p[\pm3]=\ldots=0$ حال طرح سیگنال $x[n]=\left(1+-(-1)^n\right)\times 1/2$ در شکل S3.51 نشان داده شده است.

بدیهی است که سیگنال $y[n]=x[n]p[n]=p[n]$ زیرا $p[n]$ هنگامیکه $x[n]$ صفر باشد، برابر صفر می‌باشد. بنابراین $y[n]=x[n-1]$. ضرایب FS برای $y[n]$ برابر است.

مسئله ۵۲–۳

$x[n]$ یک سیگنال متناوب حقیقی با دوره تناوب N و ضرایب سری فوریه مختلط a_k است. شکل قائم a_k عبارت است از $a_k=b_k+jc_k$

که در آن b_k و c_k حقیقی اند.

(الف) نشان دهید $a_{-k}=a_k^*$. رابطه b_k و b_{-k} را بیابید. رابطه بین c_k و c_{-k} را بیابید.

(ب) N را زوج بگیرید. نشان دهید که $a_{N/2}$ حقیقی است.

(ج) نشان دهید $x[n]$ را می‌توان به صورت سری فوریه مثلثاتی زیر نوشت: اگر N فرد باشد.

$$x[n]=a_0+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

و اگر N زوج باشد

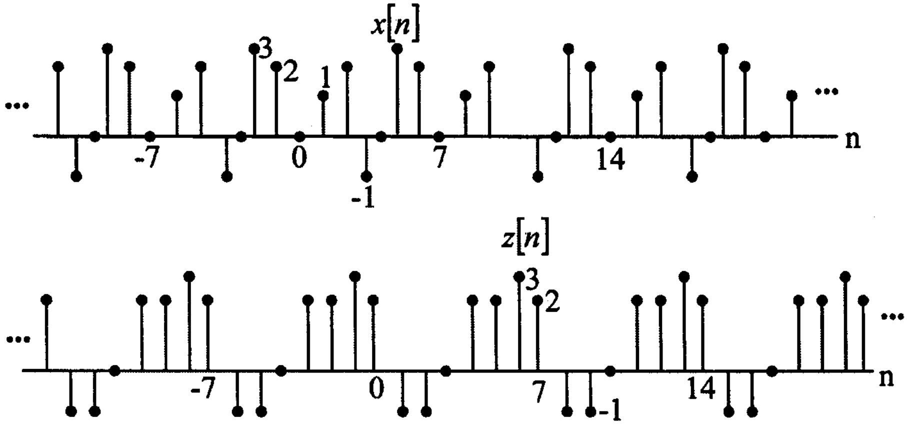
$$x[n]=\left(a_0+a_{N/2}(-1)^n\right)+2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

(د) اگر شکل قطبی a_k به صورت $A_k e^{j\theta k}$ باشد، نشان دهید که می‌توان نمایش سری فوریه $x[n]$ را به شکل زیر نوشت.

$$x[n]=a_0+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k\right) \qquad \text{به ازای N فرد}$$

$$x[n]=\left(a_0+a_{N/2}(-1)^n\right)+2\sum_{k=1}^{(N/2)} A_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}+\theta_k\right) \qquad \text{به ازای N زوج}$$

(هـ) فرض کنید سیگنالهای $x[n]$ و $z[n]$ شکل م ۳-۵۲ دارای نمایش مثلثاتی زیرند.



شکل م ۳-۵۲

$$x[n]=a_0+2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}$$

$$z[n]=d_0+2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-f_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}$$

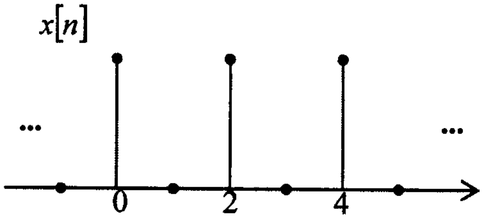
سیگنال زیر را رسم کنید.

$$y[n]=a_0-d_0+2\sum_{k=1}^{3}\left\{b_k\cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)-(f_k-c_k)\sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right)\right\}$$

حل: (الف) اگر سیگنال $x[n]$ حقیقی باشد، داریم $x[n]=x^*[n]$ در این صورت:

$$a_{-k}=\sum_n x[n]e^{+j\frac{2\pi nk}{N}}=a_k^*$$

از این نتیجه، داریم: $\underline{b}_k=b_k$ ، $\underline{c}_k=-c_k$



شکل S.3.51

(ب) اگر N زوج باشد. در این صورت

$$a_{N/2}=\frac{1}{N}\sum_n x[n]e^{-j\pi n}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_n(-1)^n x[n]=\text{حقیقی}$$

(ج) اگر N فرد باشد در اینصورت:

$$k[n]=\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} a_k e^{j(2\pi/N)kn}$$
$$=\sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k e^{j(2\pi/N)kn}+\sum_{k=1}^{(N-1)/2} a_k^* e^{-j(2\pi/N)kn}$$
$$=a_0+\sum_{k=1}^{(N-1)/2}(b_k+j_{ck})r^{j(2\pi/N)kn}\sum_{k=1}^{(N-1)/2}(b_k-jc_k)e^{-j(2\pi/N)kn}$$
$$=a_0+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k\cos\left(2\pi kn/N\right)-c_k\sin\left(2\pi kn/N\right)$$

اگر N زوج باشد در اینصورت:

$$x[n]=\sum_{K=0}^{N-1} a_k e^{j(2\pi/N)kn}$$
$$=a_0+(-1)^n a_{N/2}+2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} a_k\ e^{j(2\pi/N)kn}-a_k^* e^{-j(2\pi/N)kn}$$
$$=a_0+(-1)^n a_{N/2}+2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} b_k\cos\left(2\pi kn/N\right)-c_k\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

(د) اگر $a_k=A_k e^{j\in k}$ در اینصورت $b_k=A\cos(\theta_k)$ و $c_k=A\sin\theta_k$ خواهد بود.

با جایگذاری در نتایج قسمت قبلی برای Nهای فرد خواهیم داشت:

$$x[n]=a_\circ+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A\cos(\theta_k)\cos\left(2k\pi n/N\right)$$
$$-c_k\sin(\theta_k)\sin\left(2\pi kn/N\right)$$
$$=a_\circ+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}+\theta_k\right)$$

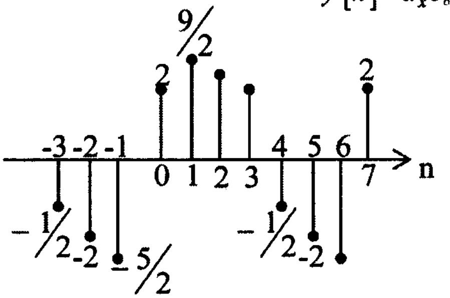
به طور مشابه برای N های زوج:

$$x[n]=a_\circ+(-1)^n a\left(N/2\right)+2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A\cos(\theta_k)\cos\left(2k\pi n/N\right)$$
$$-c_k\sin(\theta_k)\sin\left(\frac{2k\pi n}{N}\right)$$
$$=a_\circ=(-1)^n a\left(N/2\right)+2\sum_{k=1}^{(N-2)} A_k\cos\theta_k\left(\frac{2\pi kn}{N}+\right)$$

(هـ) سیگنال برابر است با:

$$y[n]=d_x c_\circ\{x[n]\}-d.c\{z[n]\}+\varepsilon v\{z\}+od\{x\}-2od\{z\}$$

که در شکل زیر نمایش داده شده است:



مسئله ۵۳ - ۳

➢ $x[n]$ را یک سیگنال متناوب حقیقی با دوره تناوب N و ضرائب فوریه a_k فرض کنید.

(الف) نشان دهید که در صورت زوج بودن N حداقل دو ضریب فوریه a_k (در هر تناوب) حقیقی اند.

(ب) نشان دهید که در صورت فرد بودن N حداقل یک ضریب فوریه a_k (در هر تناوب) حقیقی است.

حل: داریم:
$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} x[n]e^{-j\left(2\pi/N\right)kn}$$

توجه کنید که $a_0 = 1/N \sum_{\langle N \rangle} x[n]$

که اگر $x[n]$ حقیقی باشد، حقیقی خواهد بود.

(الف) اگر N زوج باشد؛ در این صورت:

$$a_{N/2} = 1/N \sum_{\langle N \rangle} x[n] e^{-j\pi n} = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n](-1)^n$$

بدیهی است که $a_{N/2}$ نیز در صورتی که $x[n]$ حقیقی باشد، حقیقی خواهد بود.

(ب) اگر N فرد باشد، تنها a_0 ضمانت فرد بودن را دارد.

مسئله ۵۴-۳

تابع زیر در نظر بگیرید:

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}$$

(الف) نشان دهید که به ازای $k = 0, \pm N, \pm 3N$ داریم $a[k] = N$

(ب) نشان دهید که اگر k مضرب صحیحی از N نباشد، آنگاه $a[k] = 0$. (راهنمایی: فرمول جمع متناهی را به کار برید).

(ج) بندهای (الف) و (ب) را برای تابع زیر تکرار کنید.

$$a[k] = \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(2\pi/N)kn}$$

حل:

فرض کنید $K = PN$ و $p \in z$ در اینصورت:

$$a[PN] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)PNn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi np} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

(ب) با استفاده از فرمول مجموع محدود؛ خواهیم داشت:

$$a[k] = \frac{1 - e^{j2\pi k}}{1 - e^{j(2\pi/N)k}} = 0$$

اگر $k \neq pn$ و $p \in z$

(ج) فرض کنید:

$$a[k] = \sum_{n=q}^{q+N-1} e^{j(2\pi/N)n}$$

که q عدد صحیح دلخواهی می‌باشد. با جایگذاری $K = PN$، دوباره به سادگی می‌توانیم نشان دهیم که:

$$a[PN] = \sum_{n=q}^{q+N-1} e^{j(2\pi/N)PNn} = \sum_{n=q}^{q+N-1} e^{j2\pi pn} = \sum_{n=q}^{q+N-1} 1 - N$$

حال
$$a[k]=e^{j(2\pi/N)kq}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(2\pi/N)kn}$$

با استفاده از قسمت (ب)، می‌توان این بحث را انجام داد که

$$\begin{cases}a[k]=0\\ for\ \ k\neq PN\ ,P\in z\end{cases}$$

مسئله ۵۵-۳

$x[n]$ را یک سیگنال متناوب حقیقی با دوره تناوب N و ضرائب فوریه a_k فرض کنید. در این مسئله خاصیت تغییر مقیاس زمانی جدول ۳-۲ را به دست می‌آوریم.

$$x_{(m)}[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{m}\right] & n=0\ ,\pm m\ ,\pm 2m\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

(الف) نشان دهید که دوره تناوب $x_{(m)}[n]$ برابر mN است.

(ب) نشان دهید که اگر $x[n]=v[n]+w[n]$ آنگاه $x_{(m)}[n]=v_{(m)}[n]+w_{(m)}[n]$

(ج) فرض کنید به ازای یک عدد صحیح k_0، $x[n]=e^{j2\pi k_0 n/N}$ و نشان دهید که

$$x_{(m)}[n]=\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}e^{j2\pi(k_0+lN)n(mN)}$$

(ج) یعنی هر نمایی مختلط $x[n]$ در $x_{(m)}[n]$ به ترکیب خطی m نمایی مختلط تبدیل می‌شود.

(د) به کمک نتایج بندهای (الف)، (ب)، و (ج) نشان دهید که اگر ضرائب فوریه $x[n]$ برابر a_k باشد، $x_{(m)}[n]$ دارای ضرائب فوریه $\frac{1}{m}a_k$ باشد.

حل: (الف) توجه داشته باشید که:

$$x_m[n+mN]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{m}+N\right] & n=0\ ,\pm m\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}=\begin{cases}x\left[\frac{n}{m}\right] & n=0\ ,\pm m\ ,...\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$x=\lambda_m[n]$$

در نتیجه $x[n]$ با دوره تناوب mN، پریودیک است.

(ب) عملگر اسکیل در حوزه زمان که در این مسئله بحث شده است، عملگری خطی می‌باشد. بنابراین اگر $x[n]=v[n]+\omega[n]$ در این صورت $x_m[n]=v_m[n]+\omega_m[n]$

(ج) فرض کنید:

$$y[n]=\frac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1} e^{j\left(2\pi/mN\right)(k_0+\ell N)n}$$
$$=\frac{1}{m}e^{j\left(2\pi/mN\right)k_0 n}\sum_{\ell=0}^{m-1} e^{j\left(2\pi/m\right)\ell n}$$

که به صورت زیر قابل بازنویسی می‌باشد:

(S3.55-1)

$$y[n]=\begin{cases} e^{j\left(2\pi/mN\right)^{k_0 n}} & n=0, \pm N\ , 2N\ , \dots \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

حال، توجه کنید که با بکارگیری اسکیل زمانی روی $x[n]$ خواهیم داشت:

$$x_m[n]=\begin{cases} e^{j\left(2\pi/mN\right)k_0 n} & n=0, \pm N\ , \pm 2N\ , \dots \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(S3.55-2)

با مقایسه (S3-55-1) و (S3-55-2) ملاحظه می‌شود که $y[n]=x_{(m)}[n]$

(د) داریم:

$$b_k=\frac{1}{mN}\sum_{n=0}^{mN-1} x_{(m)}[n]\, e^{-j\left(2\pi/mN\right)kn}$$

می‌دانیم که تنها m -امین مقدار ۰ در سری بالاغیر صفر است؛ پس

$$b_k=\frac{1}{mN}\sum_{n=0}^{N-1} x_{(m)}[nm]\, e^{-j\left(2\beta\pi/mN\right)K_{mn}}$$
$$=\frac{1}{mN}\sum_{n=0}^{N-1} x_m[nm]\, e^{-j\left(2\pi/N\right)k_n}$$

توجه کنید که $x_m[nM]=x[n]$. بنابراین:

$$b_k=\left(\frac{1}{MN}\right)\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\left(2\pi/N\right)k_n}=\frac{a_k}{m}$$

مسئله ۵۶-۳

➤ $x[n]$ را یک سیگنال متناوب بادوره تناوب N و ضرائب فوریه a_k فرض کنید.

(الف) ضرائب سری فوریه $|x[n]|^2$، یعنی b_k، را برحسب a_k نیز حتماً حقیقی اند؟

حل: (الف) داریم:

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k \quad , \quad x^*[n] \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$$

با استفاده از خاصیت ضرب

$$x[n]x^*[n] = |x[n]|^2 \xleftrightarrow{FS} \sum_{\ell=\langle N\rangle} a_{\ell+k}$$

(ب) با توجه به آنچه در قسمت (الف) ذکر شد. بدیهی است که پاسخ مثبت خواهد بود.

مسئله ۵۷-۳

➤ فرض کنید

(م ۳-۵۷-۱) $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ و $y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{jk(2\pi/N)n}$ سیگنالهای متناوب اند. نشان دهید که $x[n]y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk(2\pi/N)n}$ که در آن $c_k \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-l} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k-l} b_l$

(ب) نتیجه بند (الف) را تعمیم دهید، یعنی نشان دهید که

$$c_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{l=\langle N\rangle} a_{k-l} b_l$$

(ج) با استفاده از نتیجه بند (ب) نمایش سری فوریه سیگنالهای زیر را پیدا کنید، $x[n]$ مطابق و معادله (م ۳-۵۷-۱) است.

i) $(x[n]\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$ ii) $(x[n]\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta[n-rN]$ iii) $x[n]\left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta\left[n-\frac{rN}{3}\right]\right)$

(N را مضرب ۳ بگیرید)

(د) نمایش سری فوریه سیگنال $x[n]y[n]$ را پیدا کنید، که در آن

$$x[n] = \cos(\pi n/3)$$

,

$$y[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le 3 \\ 0, & 4 \le |n| \le 6 \end{cases}$$

$y[n]$ دارای دوره تناوب ۱۲ است.

(و) با استفاده از نتیجه بند (ب) نشان دهید که $\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]y[n] = N \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{-l}$

و با استفاده از آن رابطه پارسئوال را برای سیگنالهای متناوب گسسته در زمان به دست آورید.

حل: (الف) داریم:

$$x[n]y[n]=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1}a_k b_\ell e^{j(2\pi/N)(k+L)n}$$

با جایگذاری $\ell' = k + \ell$ خواهیم داشت:

$$x[n]y[n]=\sum_{K=0}^{N-1}\sum_{\ell'=k}^{(K+N-1)}a_k b_{(\ell'-k)}$$

اما از آنجایی که $b_{\ell'-k}$ و $e^{j(2\pi/N)\ell'}$ با پریود N، پریودیک هستند،این را دوباره به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$x[n]y[n]=\sum_{K=0}^{N-1}\sum_{\ell'=0}^{N-1}a_k b_{(\ell'-k)}e^{j(2\pi/N)\ell' n}$$
$$=\sum_{\ell=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1}a_k b_{\ell-k}\right]$$

بنابراین، $c_k=\sum_{K=0}^{N-1}a_k b_{\ell-k}$

با تعویض a_k و b_k خواهیم داشت: $c_k=\sum_{k=0}^{N-1}b_k a_{\ell-k}$

(ب) توجه کنید، بدلیل اینکه a_k و b_k با پریود N، پریودیک هستند. می‌توانیم سری فوق را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$c_k=\sum_{\langle N\rangle}a_k b_{\ell-k}=\sum_{\langle N\rangle}b_k a_{\ell-k}$$

(ج) (i) اینجا

$$c_k=\sum_{\ell=0}^{N-1}\left[\delta[n-3]+\delta[L-N-3]\right]a_{k-\ell}$$

بنابراین ،

$$c_k=\tfrac{1}{2}a_{k-3}+\tfrac{1}{2}a_{k+3-N}$$

(ii) N= دوره تناوب و نیز $b_k=1/N$, for all k

بنابراین

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}a_\ell$$

(iii) در اینجا $b_k=\frac{1}{N}\left(1+e^{-j2\pi k/3}+e^{-j4\pi k/3}\right)$

در نتیجه،

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\left[1+e^{-2\pi j\ell/3}+e^{-j\pi\ell}\right]a_{k-\ell}$$

(ت) 12= دوره تناوب و نیز

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_2 = a_{10} = {}^1\!/_2$$

سایر نقاط در بازه $a_k = \circ \quad ,\circ \le k \le 11$

و $$y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k = \left(\frac{1}{12}\right)\frac{\sin 7\pi k/12}{\sin \pi k/12}\circ \le k \le 11$$

بنابراین در یک دوره تناوب c_k عبارتست از:

$$c_k = \frac{1}{24}\left[\frac{\sin\left(7\pi(k-2)/12\right)}{\sin\left(\pi(k-2)/12\right)} + \frac{\sin\left(7\pi(k-10)/12\right)}{\sin\left(\pi(k-10)/12\right)}, \circ \le k \le 11\right.$$

(د) با استفاده از معادله آنالیز خواهیم داشت:

$$N\sum_{\langle N\rangle} a_\ell b_{k-\ell} = \sum_{\langle N\rangle} x[n]y[n]e^{-j\left(2\pi/N\right)k_n}$$

با جایگذاری $k = \circ$ در معادله فوق داریم:

$$N\sum_{\langle N\rangle} a_k b_{-\ell} = \sum_{\langle N\rangle} x[n]y[n]$$

حال با فرض اینکه $y[n] = x^*[n]$ خواهیم داشت $b_\ell = a^*_{-\ell}$، بنابراین:

$$N\sum_{\langle N\rangle} a_\ell a^*_\ell = \sum_{\langle N\rangle} x[n]x^*[n]$$

بنابراین $$N\sum_{\ell=\langle N\rangle} |a_\ell|^2 = \sum_N |x[n]|^2$$

مسئله ۵۸-۳

$x[n]$ و $y[n]$ را سیگنالهای متناوبی با دوره تناوب N بگیرید و فرض کنید.

$$z[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$$

کانولوشن متناوب آنها باشد.

(الف) نشان دهید که $z[n]$ با دوره تناوب N متناوب است.

(ب) نشان دهید که اگر a_k، b_k، و c_k به ترتیب ضرائب سری فوریه $x[n]$، $y[n]$، و $z[n]$ باشند، آنگاه

$$c_k = Na_k b_k$$

(ج) فرض کنید $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$ و $y[n] = \begin{cases} 1, & \circ \le n \le 3 \\ \circ, & 4 \le n \le 7 \end{cases}$ دو سیگنال با دوره تناوب ۸ هستند. نمایش سری فوریه کانولوشن متناوب این دو سیگنال را بیابید.

(د) بند (ج) را برای دو سیگنال متناوب زیر، که دوره تناوب آنها نیز ۸ است، تکرار کنید.

$$y[n]=\begin{cases}\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right), & 0\le n\le 3\\ 0, & 4\le n\le 6\end{cases}$$

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad 0\le n\le 7$$

حل: (الف) داریم:

$$x[n-N]=\sum_{\langle L\rangle}x[r]y[n+N-r]$$

چون $y[n]$ با دوره تناوب N، متناوب می‌باشد،

بنابراین $y[n+N-r]=y[n-r]$

$$z[n+N]=\sum_{\langle \ell\rangle}x[r]y[n-r]=z[n]$$

بنابراین $z[n]$ هم با پریود N، متناوب است.

(ب) ضرایب FS برای $z[n]$ عبارتست از:

$$c_l=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{n=\langle N\rangle}a_k b_{n-k}e^{-j2\pi nl/N}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{-2\pi jk\ell/N}\sum_{n=\langle N\rangle}b_{n-k}e^{-j2\pi(n-k)\ell/N}$$

$$=1/N\ Na_l Nb_l$$

$$=Na_lb_l$$

(ج) در اینجا n=8 و ضرایب غیر صفر FS در بازه $0\le k\le 6$ برای $x[n]$ برابرند با:

$$a_3=a_5^*=1/2j$$

توجه کنید که برای $y[n]$، مقادیر b_3 و b_5 را نیاز داریم:

$$b_3=b_5^*=\frac{1}{4\left(1-e^{-j3\pi/4}\right)}$$

بنابراین تنها ضرایب غیرصفر FS در بازه $0\le k\le 7$ برای کانولشن متناوب این سیگنالها عبارتند از

$$c_3=8a_5b_5\ ,\ c_3=8a_3b_3$$

(د) در اینجا

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{16j}\left[\frac{1-e^{j\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi k}{4}\right)4}}{1-e^{-j\left(\frac{3\pi}{6}-\pi k/4\right)}} - \frac{1-e^{j\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi k}{4}\right)4}}{1-e^{-j(3\pi/7)+\pi k/4}}\right]$$

,

$$y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k = \frac{1}{8}\left[\frac{1-\left(1/2\right)^8}{1-\left(1/2\right)e^{-jk\pi/4}}\right]$$

در نتیجه:

$$z[n] = x[n]y[n] \xleftrightarrow{FS} 8a_k b_k$$

مسئله ۵۹ ۳

(الف) $x[n]$ با دوره تناوب N متناوب است. نشان دهید که ضرائب سری فوریه سیگنال متناوب زیر

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT)$$

با دوره تناوب N متناوب است.

(ب) فرض کنید $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب است و ضرائب سری فوریه آن با دوره تناوب N متناوب است. نشان دهید که باید یک رشت متناوب $g[n]$ وجود داشته باشد، به نحوی که

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]\delta(t-kT/N)$$

(ج) آیا یک سیگنال پیوسته می‌تواند ضرائب سری فوریه متناوب داشته باشد؟

حل: (الف) توجه کنید که سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب NT متناوب است. ضرایب FS

$$a_k = \frac{1}{NT}\int_0^{NT}\left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]\delta(t-PT)\right]e^{-j\left(2\pi/NT\right)kt}dt$$

توجه کنید که حد سری فوق می‌تواند بر حسب حدود انتگرال عوض شود؛ بنابراین داریم:

$$a_k = \frac{1}{NT}\int_0^{NT}\left[\sum_{p=0}^{n-1} x[p]\delta(t-pT)e^{-j\left(2\pi/NT\right)kt}dt\right]$$

با تعویض جای انتگرال و سیگما و ساده سازی a_k به صورت زیر خواهد بود:

$$a_k = \left(\frac{1}{NT}\right)\sum_{p=0}^{N-1} x[p]\int_0^{NT} \delta(t-pT)e^{-j\left(\frac{2\pi}{NT}\right)kt}dt$$

$$= \left(\frac{1}{NT}\right)\sum_{p=0}^{n-1} x[p]e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)pk}$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)\left[\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{p=0}^{N-1} x[p]e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)pk}\right]$$

توجه شود که جمله داخل براکت در طرف راست معادله فوق ضرایب FS پیوسته سیگنال $x[n]$ است.

چون، این با تناوب N متناوب است، a_k نیز بایستی با دوره تناوب N متناوب باشد.

(ب) اگر ضرایب سری فوریه $x(t)$ با پریود N متناوب باشد، در اینصورت $a_k = a_{(K-N)}$ که بیان می‌کند

$$x(t) = x(t)e^{j\left(\frac{2\pi}{T}\right)Nt}$$

که این اگر $x(t)$ برای همه t ها صفر شود و نیز وقتی $\left(\frac{2\pi}{T}\right)$ $2\pi k = NT$ ممکن است. که $k \in z$.

بنابراین $x(t)$ به صورت زیر است:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]\delta\left(t - \frac{kT}{N}\right)$$

(ج) یک مثال ساده به صورت زیر است:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

مسئله ۶۰-۳

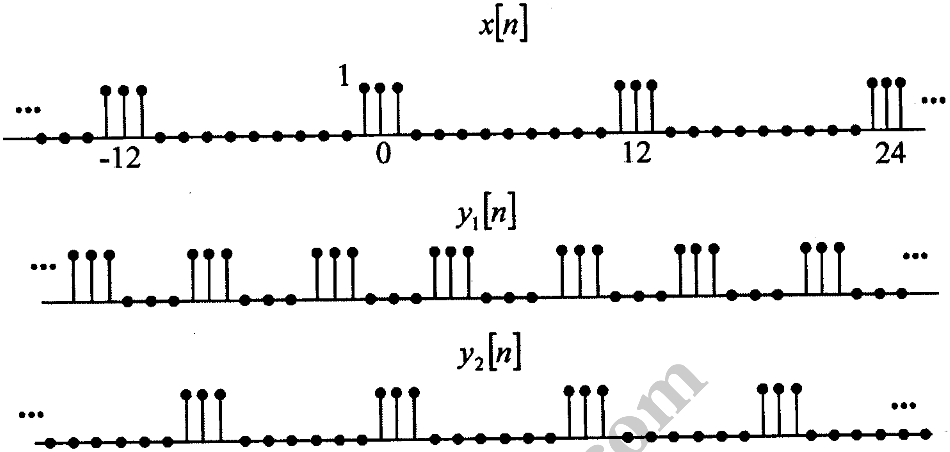
زوج سیگنالهای $x[n]$ و $y[n]$ زیر را در نظر بگیرید. به ازای هر زوج تعیین کنید که آیا سیستم LTI گسسته در زمانی وجود دارد که $y[n]$ خروجی متناظر با ورودی $x[n]$ آن باشد. در صورت وجود چنین سیستمی، آیا این سیستم یکتاست (یعنی آیا سیستم دیگری با مشخصه فوق وجود ندارد)؟ برای هر مورد پاسخ فرکانسی سیستم LTI دارای رفتار مطلوب را پیدا کنید. اگر برای یک زوج $x[n]$ و $y[n]$ سیستم LTI وجود ندارد، علت آن را توضیح دهید.

(الف) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \quad y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

(ب) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \,,\; y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

(ج) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \,,\; y[n] = 4^n u[-n]$

(د) $x[n] = e^{jn/8} \,,\; y[n] = 2e^{jn/8}$



شکل م ۳-۶۰

(هـ) $x[n]=e^{jn/8}u[n], y[n]=2e^{jn/8}u[n]$

(و) $x[n]=j^n , y[n]=2j^n(1-j)$

(ز) $x[n]=\cos(\pi n/3) , y[n]=\cos(\pi n/3)+\sqrt{3}\sin(\pi n/3)$

(ح) $y_1[n] , x[n]$ و شکل م ۳-۶۰

(ط) $y_2[n] , x[n]$ و شکل م ۳-۶۰

حل: (الف) سیستم LTI نمی‌باشد. $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ تابع ویژه سیستم های LTI است بنابراین خروجی نیز بایستی به صورت $k\left(\frac{1}{2}\right)^n$ باشد که k ثابتی مختلط است.

(ب) می‌توانیم یک سیستم LTI را با رابطه ورودی، خروجی بدست آوریم. پاسخ فرکانس این سیستم به صورت $H(e^{j\omega})=\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)/\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)e^{j\omega}\right)$، سیستم منحصر به فرد نمی‌باشد.

(ج) می‌توانیم یک سیستم LTI را با رابطه ورودی و خروجی بدست آوریم. پاسخ فرکانسی سیستم به صورت $H(i\omega)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)e^{-j\omega}\right)/\left(1-\frac{1}{4}e^{j\omega}\right)$، سیستم منحصر به فرد نیست.

(د) می‌توان یک سیستم LTI را با رابطه ورودی و خروجی بدست آوریم. سیستم منحصر به فرد نیست زیرا بایستی $H\left(e^{j/8}\right)=2$.

(هـ) همانند قسمتهای قبلی می‌توان یک سیستم LTI را با رابطه ورودی و خروجی بدست آورد پاسخ فرکانسی سیستم برابر است با $H(e^{j\omega})=2$ سیستم منحصر به فرد نیست.

(و) می‌توان یک سیستم LTI را با رابطه ورودی و خروجی بدست آورد، پاسخ فرکانسی این سیستم برابر است با:

$$H\left(e^{j\pi/2}\right)=2\left(1-e^{j\pi/2}\right).$$

(ز) می‌توان یک سیستم LTI را با رابطه ورودی و خروجی بدست آورد. سیستم منحصر به فرد نیست زیرا ما تنها به $H\left(e^{j\lambda/3}\right)=1-j\sqrt{3}$ نیاز داریم.

(ح) توجه کنید که $x[n]$ و $y_1[n]$ با فرکانس پایه مشابه پریودیک است. بنابراین می‌توان سیستم LTI ای با رابطه ورودی خروجی بدون نقض خاصیت تابع اصلی بدست آورد. سیستم منحصر به فرد نیست زیرا $H\left(e^{j\omega}\right)$ بایستی مقادیر خاصی تنها برای k $H\left(e^{j(2\pi/12)}\right)$ داشته باشیم. مقدار $H\left(e^{j\omega}\right)$ به دلخواه قابل انتخاب می‌باشد.

(i) توجه کنید که $x[n]$ و $y_1[n]$ با فرکانس پایه مشابهی پریودیک است. علاوه بر آن توجه کنید که $\frac{2}{3}y_2[n]$ پریود $x[n]$ را دارد. بنابراین $y[n]$ بایستی از نمایی های مختلطی تشکیل شده باشد که در $x[n]$ حضور ندارند. این مطلب خاصیت تابع اصلی سیستم LTI را نقض می‌کند. بنابراین سیستم نمی‌تواند LTI باشد.

مسئله ۶۱-۳

➢ دیدیم که روشهای تحلیل فوریه به این خاطر در بررسی سیستمهای LTI پیوسته در زمان مهم اند که نماییهای مختلط متناوب توابع ویژه سیستمهای LTI هستند. در این مسئله می‌خواهیم این گزاره را اثبات کنیم: هر چند بعضی از سیستمهای LTI توابع ویژه دیگری هم دارند، ولی توابع نمایی مختلط تنها توابعی اند که تابع ویژه تمام سیستمهای LTI هستند.

(الف) توابع ویژه سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t)$ را بیابید. مقادیر ویژه متناظر با هر تابع ویژه را بیابید.

(ب) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=\delta(t-T)$ در نظر بگیرید سیگنالی پیدا کنید که به شکل e^{st} نباشد، ولی تابع ویژه این سیستم با مقدار ویژه ۱ باشد. همچنین دو تابع ویژه دیگر با مقدار ویژه $\frac{1}{2}$ و ۲ پیدا کنید که نمایی مختلط نباشد. (راهنمایی: می‌توانید قطارهای ضربه ای پیدا کنید که شرایط لازم را ارضا کنند.)

(ج) یک سیستم LTI پایدار با پاسخ ضربه $h(t)$ حقیقی و زوج در نظر بگیرید. نشان دهید که $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ توابع ویژه این سیستم اند.

(د) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=u(t)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $\phi(t)$ تابع ویژه این سیستم با مقدار ویژه متناظر λ باشد. معادله دیفرانسیلی را که $\phi(t)$ باید ارضا کند، تعیین و حل کند. این نتیجه و نتیجه بندهای (الف) تا (ج) مسئله باید بتواند اعتبار گزاره بیان شده در ابتدای مسئله را ثابت کند.

حل: (الف) برای این سیستم $x(t) \to \boxed{s(t)} \to x(t)$ بنابراین تمام توابع مقدار قبلی خود را حفظ می‌کند.

(ب) در زیر تابع اصلی با مقدار 1 آمده است:

$$x(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$

و تابع اصلی با مقدار ضریب $1/2$

$$x(t) = \sum \left(1/2\right)^k \delta(t - kT)$$

و تابع اصلی با ضریب 2 عبارتست از:

$$x(t) = \sum_k (2)^k \delta(t - kT)$$

(ج) اگر $h(t)$ حقیقی و زوج باشد در این صورت $H(\omega)$ حقیقی و زوج خواهد بود:

$$e^{j\omega t} \to \boxed{H(j\omega)} \to H(j\omega)e^{j\omega t}$$

و

$$e^{-j\omega t} \to \boxed{H(j\omega)} \to H(-j\omega)e^{-j\omega t} = H(j\omega)e^{-j\omega t}$$

از این دو حالت می‌توانیم چنین بحث کنیم که:

$$\cos \omega t = 1/2\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] \to \boxed{H(j\omega)} \to H(j\omega)\cos \omega t$$

بنابراین $\cos \omega t$ یک تابع ویژه می‌باشد. بنابراین به طریق مشابه نشان می‌دهیم که $\sin(\omega t)$ نیز یک تابع ویژه است.

(د) داریم:

$$\phi(t) \to \boxed{u(t)} \to \lambda\phi(t)$$

بنابراین:

$$\lambda\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(\tau)d\tau$$

با مشتقگیری از طرفین تساوی داریم:

$$\lambda\phi'(t) = \phi(t)$$

با مشتقگیری از طرفین تساوی داریم:

$$\lambda\phi'(t) = \phi(t)$$

فرض کنیم $\phi(0) = \phi_0$ در اینصورت

$$\phi(t) = \phi_0 e^{t/\lambda}$$

مسئله ۶۲-۳

➢ یک روش ساختن منبع تغذیه dc این است که یک سیگنال ac را یکسوی تمام موج کنیم، یعنی سیگنال ac $x(t)$ را از سیستمی‌عبور دهیم که خروجی آن $y(t)=|x(t)|$ باشد.

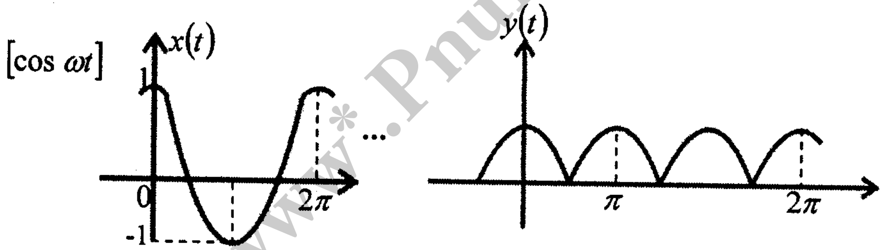
(الف) شکل موجهای ورودی و خروجی را به ازای $x(t)=cos\ t$ رسم کنید. دوره تناوب پایه ورودی و خروجی را بیابید.

(ب) ضرایب سری فوریه خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t)=cos\ t$ بیابید.

(ج) دامنه مؤلفه dc سیگنال ورودی چقدرست؟ دامنه مؤلفه dc سیگنال خروجی چقدرست؟

حل: (الف) پریود اصلی ورود برابر است با $T = 2\pi$. پریود اصلی خروجی نیز عبارت است از $T = \pi$. سیگنالها در شکل S3.62 نمایش داده شده اند.

(ب) ضرایب FS خروجی برابر است با:
$$b_k = \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}$$



شکل S3.62

(ج) مولفه DC ورودی برابر صفراست. و مولفه DC خروجی $\frac{2}{\pi}$ می‌باشد.

مسئله ۶۳-۳

➢ فرض کنید که یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان به ورودی یک سیتم LTI اعمال شده است. نمایش سری فوریه سیگنال به صورت زیرست.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|} e^{jk(\pi/4)t}$$

که در آن a یک عدد حقیقی بین ۰ و ۱ است، و پاسخ فرکانسی سیستم عبارت است از
$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$

W باید حداقل چقدر باشد تا انرژی متوسط در هر دوره تناوب خروجی سیستم حداقل ۹۰٪ انرژی متوسط در هر دوره تناوب $x(t)$ باشد.

حل: توان متوسط هر دوره تناوب برابر است با:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_k |a_k|^2 = \sum_k a^{2|k|} = \frac{1+a^2}{1-a^2}$$

N را طوری می‌خواهیم که:

$$\sum_{-N+1}^{N-1} |a_k|^2 = 0.9\,\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

که بیان می کند

$$\frac{1-2a^{2N}+2a^2}{1-a^2} = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

حال

$$\frac{\pi N}{4} < \omega N \frac{(N-1)\pi}{4} \quad , \quad N = \frac{\log\left[1.45\,a^2+0.95\right]}{2\log a}$$

مسئله ۶۴-۳

در این فصل دیدیم که مفهوم تابع ویژه، ابزار بسیار مهمی در مطالعه سیستمهای LTI است. در مورد سیستمهای خطی، ولی تغییرپذیر با زمان نیز این حرف درست است. چنین سیستمی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید. سیگنال $\phi(t)$ را تابع ویژه سیستم می‌نامیم، اگر $\phi(t) \rightarrow \lambda\phi(t)$

یعنی اگر به ازای $x(t)=\phi(t)$ داشته باشیم $y(t)=\lambda\phi(t)$، که در آن λ یک ثابت مختلط است و مقدار ویژه متناظر با $\phi(t)$ نامیده می‌شود.

(الف) فرض کنید می‌توانیم ورودی $x(t)$ سیستم فوق را به صورت ترکیب خطی توابع ویژه $\phi_k(t)$، با مقدار ویژه متناظر λ_k نمایش دهیم؛ یعنی

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t)$$

خروجی $y(t)$ سیستم را بر حسب $\{c_k\}$، $\{\phi_k(t)\}$، و $\{\lambda_k\}$ بیان کنید.

(ب) فرض کنید سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است

$$y(t)=t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+t\frac{dx(t)}{dt}$$

آیا این سیستم خطی است؟ آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟

(ج) نشان دهید که مجموعه توابع زیر $\phi_k(t)=t^k$

توابع ویژه سیستم بند (ب) هستند. مقدار ویژه λ_k متناظر با هر $\phi_k(t)$ را پیدا کنید.

(د) خروجی سیستم فوق را به ازای ورودی زیر بیابید.

$$x(t)=10t^{-10}+3t+\frac{1}{2}t^4+\pi$$

حل:

(الف) بسته به خاصیت خطی پذیری، داریم:
$$y(t)=\sum_k c_k\lambda_k\phi_k(t)$$

(ب) فرض کنید:
$$x_2(t)\to y_2(t) \text{ و } x_1(t)\to y_1(t)$$

و نیز فرض کنید،
$$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\to y_3(t)$$

در این صورت:
$$\begin{aligned}y_3(t)&=t^2\left[ax_1''(t)+bx_2''(t)\right]+t\left[ax_1'(t)+bx_2'(t)\right]\\&=\propto y_1(t)+by_2(t)\end{aligned}$$

بنابراین سیستم خطی است.

حال فرض کنید: $x_4(t)=x(t-t_\circ)\to y_4(t)$

خواهیم داشت:
$$y_4(t)=t^2\frac{d^2x(t-t_\circ)}{dt^2}+t\frac{dx(t-t_\circ)}{dt}\neq y(t-t_\circ)$$

بنابراین، سیستم تغییرپذیر با زمان است.

(ج) برای ورودی برحسب $\phi_k(t)=t^k$، خروجی برابر است با:
$$y(t)=k^2t^k=k^2\phi_k(t)$$

بنابراین $\phi_k(t)$ تابع ویژه با مقدار ویژه $\lambda_k=k^2$ می‌باشد.

(د) خروجی برابر است با:
$$y(t)=10^3t^{-10}+3t+8t^4$$

مسئله ۶۵-۳

دو تابع $u(t)$ و $\upsilon(t)$ را در فاصله $(a\ ,b)$ متعامد می‌نامند، اگر

$$\int_a^b u(t)\upsilon^*(t)dt=\circ \qquad (\text{م }۳-۶۵-۱)$$

همچنین اگر شرط زیر هم برقرار باشد.

$$\int_a^b |u(t)|^2dt=1=\int_a^b|\upsilon(t)|^2dt$$

$u(t)$ و $\upsilon(t)$ را بهنجار و آنها را متعامد بهنجاری می‌نامند. اگر تمام توابع مجموعه $\{\phi_k(t)\}$، دو به دو متعامد (متعامد بهنجار) باشند، این مجموعه را مجموعه متعامد (متعامد بهنجار) می‌نامند.

(الف) زوج سیگنالهای $u(t)$ و $\upsilon(t)$ شکل م ۳-۶۵ را در نظر بگیرید. کدام یک در فاصله (۰ و ۴) متعامدند.

(ب) آیا توابع $\sin m\omega_\circ t$ و $\sin n\omega_\circ t$ در فاصله $(\circ\ ,T)$ (بـا $T=2\pi/\omega_\circ$) متعامدند؟ آیا متعامد بهنجارند؟

(ج) بند (ب) را برای توابع $\phi_m(t)$ و $\phi_n(t)$ زیر تکرار کنید.

$$\phi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\left[\cos k\omega_\circ t+\sin k\omega_\circ t\right]$$

(د) نشان دهید که مجموعه توابع $\phi_k(t)=e^{jk\omega_\circ t}$ در هر فاصله ای به طول $T=2\pi/\omega_\circ$ متعامدست. آیا این مجموعه متعامد بهنجار هم است؟

(هـ) $x(t)$ را یک سیگنال دلخواه و $x_\circ(t)$ و $x_e(t)$ را به ترتیب قسمتهای فرد و زوج آن فرض کنید. نشان دهید که به ازای هر T دلخواهی، $x_\circ(t)$ و $x_e(t)$ در فاصله $(-T\ ,T)$ متعامدند.

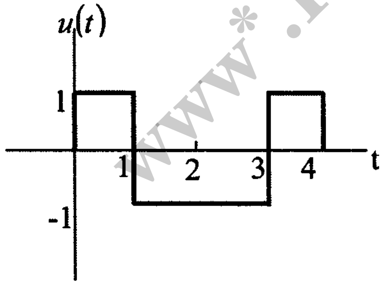
(و) نشان دهید اگر $\{\phi_k(t)\}$ در فاصله (a,b) یک مجموعه متعامد باشد، مجموعه $\{1/\sqrt{A_k}\,\phi_k(t)\}$، که در آن $A_k=\int_a^b|\phi_k(t)|^2dt$ متعامد بهنجارست.

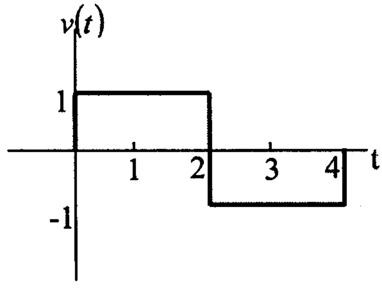
(ز) فرض کنید $\{\phi_i(t)\}$ در فاصله (a,b) یک مجموعه سیگنال متعامد بهنجار باشد. سیگنالی به شکل زیر در نظر بگیرید. $x(t)=\sum_i a_i\phi_i(t)$

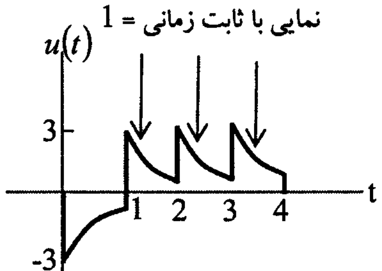
a_i ثابتهای مختلط اند، نشان دهید که $\int_a^b|x(t)|^2dt=\sum_i|a_i|^2$

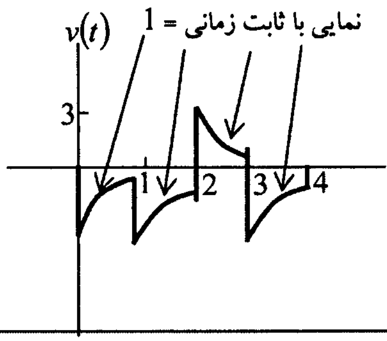
(ح) فرض کنید $\phi_1(t),\dots,\phi_N(t)$ تنها در فاصله $\circ\le t\le T$ مقداری مخالف صر دارند و در این فاصله متعامد بهنجارند. L_i را یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر فرض کنید.

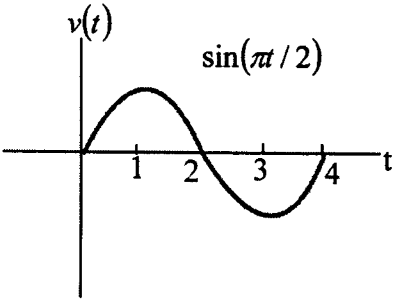
نشاندهید اگر $\phi_j(t)$ به این سیستم اعمال شود، خروجی در زمان T به ازای $i=j$ برابر ۱، و به ازای $i\neq j$ برابر ۰ است. در مسائل ۲-۶۶ و ۲-۶۷، سیستم‌یبا پاسخ ضربه معادله (م ۳-۶۵-۲) را فیلتر منطبق سیگنال $\phi_i(t)$ نامیدیم.

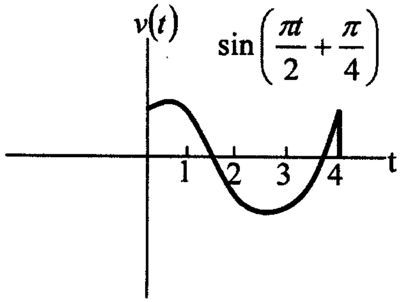


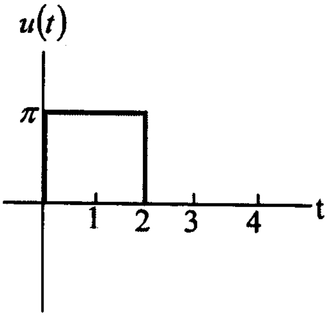


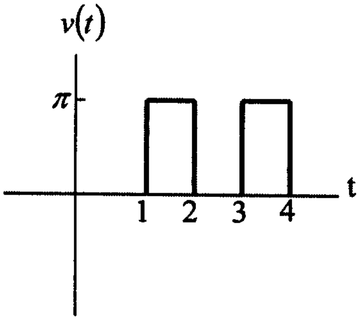












حل: (الف) جفتهای (الف) و (ب) متعامد هستند. جفتهای (ج) و (د) متعامد نیستند.

(ب) متعامد هستند اما متعامد یکه نیستند. $Am = 1/\omega_\circ$

(ج) متعامد یکه.

(د) داریم:

$$\int_{t_\circ}^{t_\circ+T} e^{jm\omega_\circ\tau} e^{-jn\omega_\circ\tau} d\tau$$

$$= e^{j(m-n)\omega_\circ t_\circ} \frac{\left[e^{j(m-n)2\pi} - 1\right]}{[m-n]\omega_\circ}$$

هر گاه $m \neq n$ مقدار عبارت فوق برابر صفر است و وقتی $m = n$ مقدار آن برابر jT می‌باشد. بنابراین توابع متعامد هستند اما متعامد یکه نیستند.

(هـ) داریم:

$$\int_{-T}^{T} x_e(t) e_\circ(t)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-T}^{T} \left[x(t) + x(-t)\right]\left[x(t) - x(-t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-T}^{T} x^2(t) dt - 1/4 \int_{-T}^{T} x^2(-t) dt$$

$$= \circ$$

و) فرض کنید:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{A_k}}\phi_k(t)\frac{1}{\sqrt{A_\ell}}\phi_\ell^*(t)dt$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a_\ell A_k}}\int_a^b\int_a^b \phi_k(t)\phi_\ell^*(t)dt$$

که حاصل عبارت فوق برای $k \neq \ell$ صفر و برای $k=\ell$ برابر است با $A_k/_{A\ell}=1$. بنابراین توابع متعامد یکه اند.

ز) داریم:

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt = \int_a^b x(t)x^*(t)dt$$
$$=\int_a^b \sum_i a_i\phi_i(t)\sum_j aj\,\phi_j^*(t)dt$$
$$=\sum_i\sum_j a_l a_2^* \int_a^b \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt$$
$$=\sum_i |a_i|^2$$

ح) داریم:

$$y(T)=\int_{-\infty}^{+\infty} hi(T-\tau)\phi_j(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_i(\tau)\phi_j(\tau)d\tau$$

مسئله ۶۶-۳

هدف این مسئله این است که نشان دهیم نمایش سیگنالهای متناوب دلخواه به صورت سری فوریه، یا در حالتی کلی تر به صورت ترکیب خطی یک مجموعه تابع متعامد، از لحاظ محاسباتی کار است و تقریب خوبی از سیگنال به دست می‌دهد.

فرض کنید $\{\phi_i(t)\}$، $i=0,\pm1,\pm2,\dots$ در فاصله $a\le t\le b$ یک مجموعه متعامد بهنجاری، و $x(t)$ یک سیگنال دلخواه است. تقریب زیر از سیگنال $x(t)$، در فاصله $a\le t\le b$، را در نظر بگیرید.

$$\hat{x}_n(t)=\sum_{i=-N}^{+N} a_i\phi_i(t) \qquad \text{(م ۳-۶۶-۱)}$$

a_iها ضریب ثابت (و در حالت کلی مختلط) هستند. برای اندازه گیری انحراف بین $x(t)$ و تقریب سری $\hat{x}_N(t)$، سیگنال خطای $e_N(t)$ زیر را تعریف می‌کنیم.

$$e_N(t)=x(t)-\hat{x}_N(t) \qquad \text{(م ۳-۶۶-۲)}$$

یک معیار معقول و پرکاربرد برای سنجش کیفیت تقریب، انرژی سیگنال خطا در فاصله موردنظر، یعنی انتگرال مجذور دامنه خطا در فاصله $a\le t\le b$ است:

$$E=\int_a^b |e_N(t)|^2 dt \qquad \text{(م ۳-۶۶-۳)}$$

(الف) نشان دهید که برای مینیمم کردن E باید برگزینیم.

$$a_i = \int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt \qquad \text{(م ۳-۶۶-۴)}$$

[راهنمایی: به کمک معادلات (م ۳-۶۶-۱) تا (م ۳-۶۶-۳)، E را برحسب a_i، $\phi_i(t)$ و $x(t)$ بیان کنید. سپس a_i را به صورت قائم $a_i = b_i + jc_i$ بیان کرده، ثابت کنید که با انتخاب a_i به صورت معادله (م ۳-۶۶-۴)، روابط زیر ارضا می‌شوند]

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial E}{\partial x_i} = 0\ ,\ i = 0\ ,\ \pm 2, \dots, N$$

(ب) اگر $\{\phi_i(t)\}$ متعامد باشد ولی بهنجار نباشد و $A_i = \int_a^b |\phi_i(t)|^2 dt$

(ج) فرض کنید $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ و یک فاصله دلخواه به طول $T_0 = 2\pi/\omega_0$ برگزینید. نشان دهید که اگر a_i به صورت معادله (۳-۵۰) انتخاب شود، F مینیمم می‌شود.

(د) مجموعه توابع والش مجموعه متعامد بهنجاری است که کاربرد زیادی دارد. (مسئله ۲-۶۶) را ببینید).

شکل م ۳-۶۶ مجموعه ای از پنج تابع والش $\phi_0(t)$، $\phi_1(t)$، ...، $\phi_4(t)$ را نشان می‌دهد، مقیاس زمان را طوری برگزیده ایم که $\phi_i(t)$ در فاصله $0 \le t \le 1$ غیرصفر و متعامد بهنجار باشد. فرض کنید $x(t) = \sin \pi t$. تقریبی به صورت روبرو برای $x(t)$ بیابید. $\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{4} a_i \phi_{(t)}$ به نحوی که مقدار زیر مینیمم شود

(هـ) نشان دهید که اگر a_iها مطابق معادله (م ۳-۶۶-۴) انتخاب شوند. $x[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i \phi_i[n]$ معادله (م ۳-۶۶-۱) و $e_N(t)$ معادله (م ۳-۶۶-۲) متعامدند.

نتایج بندهای (الف) و (ب) بسیار مهم اند، زیرا نشان می‌دهند هر ضریب a_i مستقل از تمام a_jهای دیگرست، $i \neq j$. بنابراین با افزودن جملات بعدی به تقریب [مثلاً محاسبه تقریب $\hat{x}_{N+1}(t)$]، ضرایب $\phi_i(t)$ قبلی، $i = 1$، ...، N، تغییر نمی‌کنند. حال یک نوع بسط دیگر یعنی بسط چند جمله ای تیلور را در نظر می گیریم. بسط نامحدود سری تیلور e^t به شکل ... $e^t = 1 + t^2/2! +$ است، ولی چنانچه نشان متفاوتی به دست می‌آوریم.

فرض کنید $\phi_0(t) = 1$ ، $\phi_2(t) = t^2$ ، $\phi_2(t) = t^2$ به همین ترتیب.

(و) آیا $\phi_i(t)$ ها در فاصله $0 \le t \le 1$ متعامدند.

(ز) برای $x(t) = e^t$ در فاصله $0 \le t \le 1$، تقریب زیر را در نظر بگیرید.

$$\hat{x}_0(t) = a_0\phi_0(t)$$

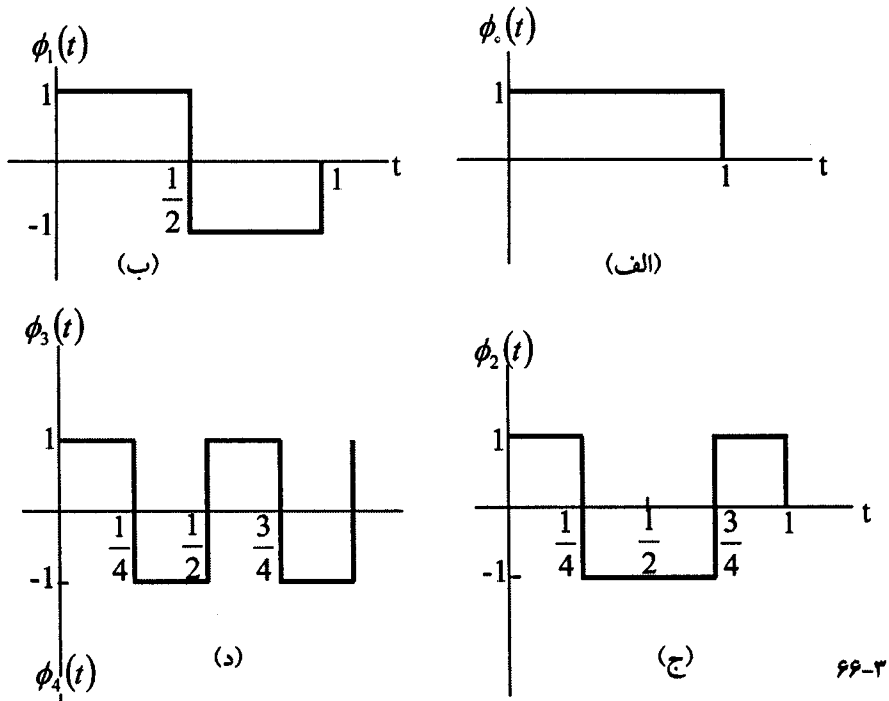
a_0 را به نحوی پیدا کنید که انرژی سیگنال خطا در فاصله $0 \le t \le 1$ مینیمم شود.

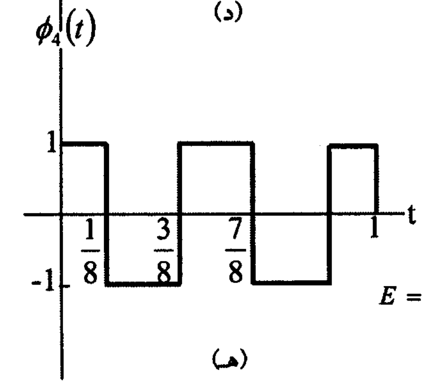
(ح) حال می‌خواهیم e^t را با دو جمله، به صورت $\hat{x}_1 = a_0 + a_1 t$ تقریب بزنیم. مقادیر بهینه a_0 و $x[n]$ را بیابید.

[راهنمایی: E را برحسب a_0 و a_1 یافته، معادلات همزمان زیر را حل کنید.

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{و} \quad b_1 + jc_i$$

توجه کنید که a_0 به دست آمده با a_0 بند (ز) تفاوت دارد. اگر باز هم تعداد جملات تقریب را زیاد کنیم، تمام ضرائب سری تغییر می‌کنند. به این ترتیب مزیت بسط برحسب توابع متعامد روشن می‌شود.]





شکل م ۳-۶۶

حل: (الف) داریم:

$$E = \int_a^b \left[x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k \phi_k(t) \right] \left[x^*(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k^*(t) \right] dt$$

حال، فرض کنیم $a = b_{i+ja}$، داریم:

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = \circ = -\int_a^b \phi_i^*(t) x(t) dt + 2b_i - \int_a^b \phi_i(t) x^*(t) dt$$

$$\frac{\partial E}{\partial - c_i} = \circ = j \int_a^b \phi_i(t) x^*(t) dt + 2c_i - j \int_a^b \phi_i^*(t) x(t) dt$$

با ضرب معادله آخر در j و جمع با جمله قبلی داریم:

$$2b_i + 2j_{ci} = 2\int_a^b x(t) \phi^*(t) dt$$

که بیان می‌کند: $a_i = \int_a^b x(t)\phi^*(t)dt$

ب) در این مورد، a_i برابر است با: $a_i = \frac{1}{A_i}\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt$

ج) با انتخاب $a_k = \frac{1}{T_\circ}\int_b^{b+T_\circ} x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$ داریم: $E = \int_{T_\circ}\left|x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\omega_\circ kt}\right|^2 dt$

با قرار دادن $\frac{\partial E}{\partial a_k} = \circ$ داریم:

$$a_k = \frac{1}{T_\circ}\int_{T_\circ} x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$$

د) $a_\circ = \frac{2}{\pi_1}$ و $a_1 = a_3 = \circ$ و $a_2 = 2\left(1 - 2\sqrt{2}\right)/\pi$ و

$$a_4 = \left(1/\pi\right)\left[2 - 4\cos\frac{\pi}{8} + 4\cos \pi 3/8\right]$$

هـ) داریم:

$$\int_\circ^1 \sum_i a_i \phi_i(t)^* \left[x(t) - \sum_i a_i \phi_i(t)\right]dt$$

$$= \sum_i a_i \int_\circ^1 x(t)\phi_i^*(t)$$

$$-\sum_i\sum_j a_i^* a_j \int_\circ^1 \phi_i^*(t)\phi_j(t)dt$$

$$= \sum_i a_i^* a_i - \sum_i a_i^* a_i = \circ$$

و) متعامد نیست زیرا بعنوان مثال داریم:

$$\int_\circ^1 \phi_\circ(t)\phi_1(t)dt = \int_\circ^1 tdt = 1 \neq \circ$$

ز) در اینجا، $a_\circ = \int_\circ^1 e^t \phi_\circ^*(t)dt = e - 1$

ح) در اینجا $\hat{x}(t) = a_\circ + a_1 t$، بنابراین:

$$E = \int_\circ^1 \left(e^t - a_\circ - a_1 t\right)\left(e^t - a_\circ - a_1 t\right)dt$$

با جایگذاری $\frac{\partial E}{\partial a_1} = \circ = \frac{\partial E}{\partial a_\circ}$ داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} j2\pi n b_n(x)e^{j2\pi nt} = 1/2\, k^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 bn(x)}{\partial x^2} e^{j2\pi nt}$$

با معادل کردن ضرایب $e^{j2\pi nt}$ دو طرف معادله داریم:

$$\frac{\partial^2 h_n(x)}{\partial x^2}=\frac{j4\pi n}{k_2}b_n(x)$$

ط) با انتخاب

$$a_k=\frac{1}{T_\circ}\int_b^{b+T_\circ}x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$$

خواهیم داشت:

$$E=\int_{T_\circ}\left|xt-\sum_{k=-N}^{N}a_ke^{j\omega_\circ kt}\right|^2dt$$

با قرار دادن $\frac{\partial E}{\partial a_k}=\circ$ خواهیم داشت:

$$a_k=\frac{1}{T_\circ}\int_{\langle T_\circ\rangle}x(t)e^{-jk\omega_\circ t}dt$$

مسئله ۶۷-۳

در درس گفتیم که ریشه های تحلیل فوریه را می‌توان در مسائل فیزیک و ریاضیاتی جست. در واقع انگیزه کار فوریه بررسی مسئله نفوذ گرما بود. در این مسئله نشان می‌دهیم که چگونه سری فوریه در تحقیق راجع به این مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرض کنید می‌خواهیم دمای عمق معینی از زمین را برحسب زمان پیدا کنیم، فرض می‌کنیم دما در سطح زمین تابع معلومی‌از زمان، $T(t)$ است. این تابع با دوره تناوب ۱ متناوب است. (واحد زمان یک سال است). $T(x\ ,t)$ دمای عمق x زیر سطح را در زمان t نشان می‌دهد.

این تابع از معادله نفوذ گرما تبعیت می‌کند.

$$\frac{\partial T(x\ ,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 T(x\ ,t)}{\partial x^2}\qquad \text{(م ۳-۶۷-۱)}$$

و شرط کمکی آن عبارت است از

$$T(\circ\ ,t)=T(t)\qquad \text{(م ۳-۶۷-۲)}$$

K ثابت نفوذ گرمای زمین است $k>\circ$ فرض کنید $T(t)$ را به صورت سری فوری زیر بسط داده ایم.

$$T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_ne^{in2\pi t}\qquad \text{(م ۳-۶۷-۲)}$$

همچنین $T(x\ ,t)$ در عمق معین x را نیز برحسب t بسط می‌دهیم.

$$T(x\ ,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n(x)e^{in2\pi t}\qquad \text{(م ۳-۶۷-۴)}$$

ضراب سری فوریه $b_n(x)$ تابعی از عمق x هستند.

(الف) به کمک معادلات (م ۳-۶۷-۱) تا (۳-۶۷-۱۴) نشان دهید که $b_n(x)$ معادله دیفرانسیل زیر را ارضا می‌کند.

$$\frac{d^2d_n(x)}{dx}=\frac{4\pi jn}{k^2}b_n(x)\qquad \text{(م ۳-۶۷-۵ الف)}$$

و شرط کمکی آن عبارت است از

$$b_n(\circ)=a_n\qquad \text{(م ۳-۶۷-۵ ب)}$$

چون معادله (م ۳-۶۷-۵ الف) یک معادله درجه دوم است، شرط مرزی دیگری نیز لازم داریم. بر اساس استدلالهای فیزیکی می‌توان گفت که تغییرات دمای سطح زمین بر دمای اعماق زمین اثری ندارد. یعنی

$$T(x) = \lim_{x \to \infty} \text{ثابت}$$ (م ۳-۶۷-۵ ج)

(ب) نشان دهید که جواب معادله (م ۳-۶۷-۵) به صورت زیرست.

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n \exp\left[-\sqrt{2\pi|\pi|}(1+j)x/k\right], & n \geq 0 \\ a_n \exp\left[-\sqrt{2\pi|n|}(1-j)x/k\right], & n \leq 0 \end{cases}$$

(ج) بنابراین نوسانات دما در عمق x، صورتهای میرا شده و تغییر فاز یافته نوسانات دمای سطح است.

برای این که موضوع روشنتر شود فرض کنید.

$$T(t) = a_0 + a_1 \sin 2\pi$$

(a_0 میانگین دمای سالانه است). $T(t)$ و $T(x, t)$ را در یک دوره تناوب یکساله، به ازای

$$x = k\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

رسم کنید. فرض کنید که $a_0 = 2$ و $a_1 = 1$. دقت کنید که در این عمق تغییرات دما هم به شدت میرا شده و هم تغییر فاز پیدا کرده است، به نحوی که در زمستان گرمترین و در تابستان سردترین مقدار خود را دارد. دلیل ساختن انبارهای غله زیرزمینی، همین است.

حل: (الف) از معادله (p3.67-1) و (p3.61-4) داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n b_n(x)} e^{j2\pi nt} = \frac{1}{2}k^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 b_n(x)}{\partial x^2} e^{j2\pi nt}$$

با معادلسازی ضرایب $e^{j2\pi nt}$ در دو طرف معادله، داریم:

$$\frac{\partial^2 b_n(x)}{\partial x_2} = \frac{j4\pi n}{k^2} b_n(x)$$

(ب) چون $S^2 = {}^{4\pi jn}\!/_{k^2}$، بنابراین $S = \pm \dfrac{2\sqrt{\pi n}\, e^{j\pi/4}}{k}$

برای $n > 0$ $\quad S = \dfrac{\sqrt{2\pi n}(1+j)}{k}$ که یک جواب پایدار است.

و برای $n < 0$ $\quad S = -\dfrac{\sqrt{2\pi(n)}(1-j)}{k}$ که این نیز جوابی پایدار می‌باشد. همچنین $b_n(0) =_n$ و

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n e^{-\sqrt{2\pi n}(1+j)x/k} & n > 0 \\ a_n e^{-\sqrt{2\pi(n)}(1-j)x/k} & n < 0 \end{cases}$$

(ج) $b_0 = 2$ و $b_1 = \left({}^{1}\!/_{2}j\right)e^{-(1+j)\pi}$ و $b_{-1} = -\left({}^{1}\!/_{2j}\right)e^{-(1-j)\pi}$

$$T\left(k\sqrt{\pi/2},t\right)=2+e^{-\pi}\sin\left(2\pi t-\pi\right)$$

فاز معکوس شده است.

مسئله ۶۸-۳

مسیر بسته شکل م ۳-۶۸ را در نظر بگیرید. مطابق شکل، این منحنی را می‌توان اثر نوک یک بردار چرخان دارای طول متغیر در نظر رفت. $r(\theta)$ طول بردار بر حسب زاویه θ نشان می‌دهد. پس $r(\theta)$ با دوره 2π متناوب است و بنابراین سری فوریه دارد. ضرایب سری فوریه تابع $r(\theta)$ را $\{a_k\}$ فرض کنید.

(الف) تصویر بردار $r(\theta)$ بر محور x را مطابق شکل $x(\theta)$ بنامید. ضرایب سری فوریه $x(\theta)$ را بر حسب مقادیر a_k پیدا کنید.

(ب) رشته ضرایب زیر را در نظر بگیرید.

$$b_k=a_k e^{jk\pi/4}$$

مسیر متناظر با این ضرایب را در صفحه رسم کنید.

(ج) بند (ب) را به ازای ضرایب زیر تکرار کنید.

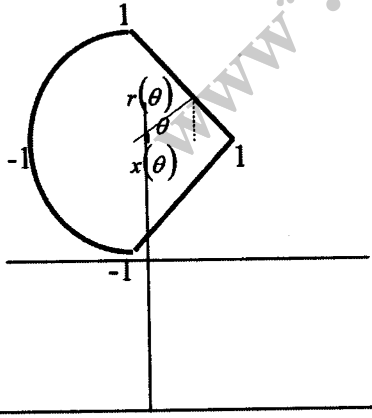
$$b_k=a_k\delta[k]$$

(د) مسیرهایی در صفحه رسم کنید که برای آنها $r(\theta)$ غیر ثابت بوده، خواص زیر را داشته باشد.

(i) $r(\theta)$ زوج باشد.

(ii) دوره تناوب پایه آن π باشد.

(iii) دوره تناوب پایه آن $\frac{\pi}{2}$ باشد.



شکل م ۳-۶۸

حل: (الف)

$$x(\theta)=r(\theta)\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}r(\theta)e^{j\theta}+\frac{1}{2}r(\theta)e^{-j\theta}$$

اگر $x(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_k e^{j\theta}$ باشد در اینصورت $b_k=\left(\frac{1}{2}\right)\propto_{(k+1)}+\frac{1}{2}a_{(k-1)}$

(ب) $x(\theta) \xleftrightarrow{FS} bk$ در این حالت $x(\theta)=r\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$. طرح کلی در شکل S3.68 به نمایش درآمده است.

(ج) $b_\circ = a_\circ$ پایه b_k صفر است. بنابراین شکل آن یک دایره به شعاع $a_\circ$ خواهد بود. چنانکه در شکل S3.68 نشان داده شده است:

(د) (i) $r(\theta)=r(-\theta)$ زوج، شکل در S3.68 آمده است.

(ii) $r(\theta+k\pi)=r(\theta)$ شکل در S3.68 آمده است.

(iii) $r\left(\theta+k\frac{\pi}{2}\right)=r(\theta-)$. شکل در S3.68 آمده است.

مسئله ۶۹-۳

➤ در این مسئله همتای گسسته در زمان مفاهیم بیان شده در مسائل ۳-۶۵ و ۳-۶۶ را در نظر می‌گیریم. مشابه حالت پیوسته در زمان دو سیگنال گسسته در زمان $\phi_k[n]$ و $\phi_m[n]$ را در فاصله $(N_1 \ ، N_2)$ متعامد می‌نامیم.

اگر
$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k[n]\phi_m^*[n]=\begin{cases}A_k, & k=m\\ \circ, & k\neq m\end{cases} \qquad \text{(م ۳-۶۹-۱)}$$

اگر مقدار A_k و A_m هر دو ۱ باشد، سیگنالها را متعامد بهنجار می‌نامیم.

(الف) سیگنالهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi_k[n]=\delta[n-k], \qquad k=\circ \ , \ \pm 1 \ , \pm 2 \ , \ldots , \pm N$$

نشان دهید که این سیگنالهای در فاصله $(-N \ , \ N)$ متعامد بهنجارند.

(ب) نشان دهید که سیگنالهای $k=\circ \ , \ 1,\ldots,N-1 \ ,$ $\phi_k[n]=e^{jk(2\pi/N)n}$ در هر فاصله ای به طول N متعامدند.

(ج) نشان دهید اگر $x[n]=\sum_{i=1}^{M} a_i\phi_i[n]$ و $\phi_i[n]$ روی فاصله (N_1, N_2) متعامد باشد، آنگاه

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 A_i$$

(د) سیگنالهای $\phi_i[n]$، با $i=\circ,1,\ldots,M$ را که در فاصله (N_1, N_2) متعامدند، در نظر بگیرید. $x[n]$ سیگنال دلخواهی است که می‌خواهیم آن را به صورت ترکیب خطی $\phi_i[n]$ تقریب بزنیم؛ یعنی

$$\hat{x}[n]=\sum_{i=\circ}^{M} a_i\phi_i[n]$$

که در آن a_i ضرائب ثابت اند، فرض کنید. $e[n]=x[n]-\hat{x}[n]$

نشان دهید برای مینیمم کردن $E=\sum_{n=N_1}^{N_2}|e[n]|^2$ باید a_i را به صورت زیر برگزینیم

$$a_i=\frac{1}{A_i}\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\phi_i^*[n] \qquad \text{(م ۳-۶۹-۲)}$$

[راهنمایی: مانند مسئله ۳-۶۶ E را برحسب a_i، $\phi_i[n]$، A_i و $x[n]$ بیان کرده، a_i را به صورت $b_i + jc_i$ بنویسید. نشان دهید اگر a_i مطابق معادله (م ۳-۶۹-۲) برگزیده شود. روابط زیر را ارضا می کند.

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0$$

توجه کنید که اگر $\phi_i[n]$ به صورت بند (ب) باشد، به کار بردن این نتیجه a_k معادله (۳-۹۵) را نتیجه می‌دهد.]

(هـ) نتیجه بند (د) را به زاویه $\phi_i[n]$ بند (الف) به کار برید و ضرائب a_i را برحسب $x[n]$ بیابید.

حل: (الف)

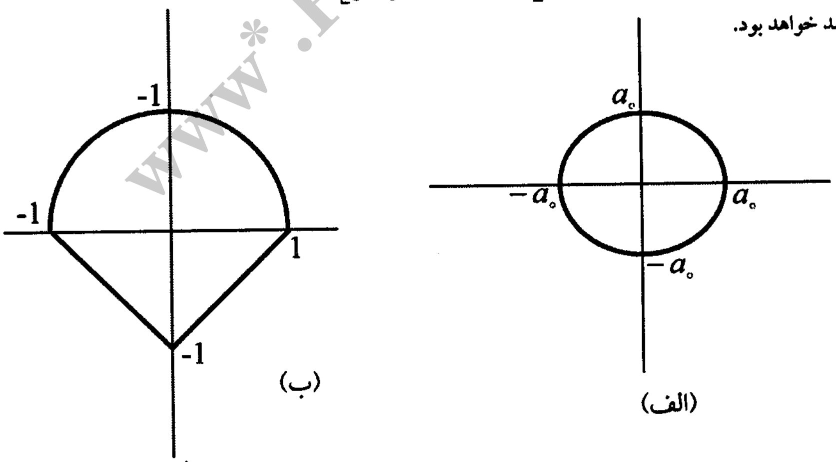
$$\sum_{n=-N}^{N} \phi_k[n]\phi_k^*[n] = \sum_{n=-N}^{N} \delta[n-k]\delta[n-m]$$

که برای $k = m$ برابر یک (۱) و برای $k \neq m$، صفر است. بنابراین متعامداست.

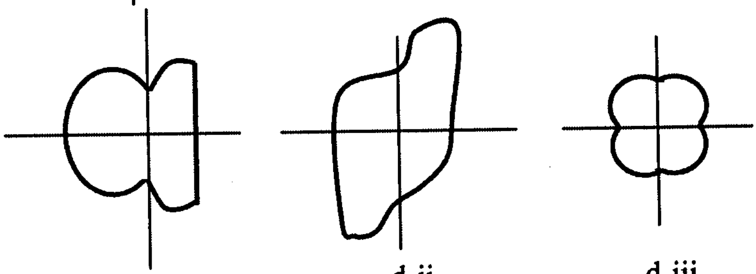
(ب) داریم:

$$\sum_{n=r}^{r+N-1} \phi_k[n]\phi_m^*[n] = e^{j(2\pi/N)r(k-m)}\left[\frac{1-e^{j2\pi(k-m)}}{1-e^{j(2\pi/N)(k-m)}}\right] = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ N & k = m \end{cases}$$

بنابراین متعامد خواهد بود.



(ب) (الف)



d-i d-ii d-iii

شکل S3.68

ج) داریم:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{i=1}^{M} a_i \phi_i[n] \sum_{K=1}^{M} \propto_k^* \phi_k^*[n]$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} a_i a_k^* \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k^* \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k^*[n] \phi_i[n]$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} a_i a_k^* A_i \delta[i-k] = \sum^{M} |a_i|^2 A_i$$

د) فرض نمائید: $a_i = b_i + j_{ci}$؛ در اینصورت:

$$E = \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 + \sum_{i=1}^{M} \left(b_i^2 + c_i^2\right) A_i - \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \sum_{i=1}^{M} (b_i + j_{ci}) \phi_i^*[n]$$

$$- \sum_{n=-N_1}^{N_2} x^*[n] \sum_{i=1}^{M} (b_i + j_{ci}) \phi_i[n]$$

حال با قرار دادن $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$ داریم:

$$b_i = [2A_i]^{-1} \left[\sum_{n=N_1}^{N_2} \left\{ x[n] \phi_i^*[n] + x^*[n] \phi_i[n] \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{A_i} Real \left\{ \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \phi_i^*[n] \right\}$$

به طور مشابه، $c_i = \frac{1}{A_i} Im \left\{ \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \phi_i^*[n] \right\}$ بنابراین: $a_i = b_i + j_{ci} = \frac{1}{A_i} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \phi_i^*[n]$

هـ) $\phi_i[n] = \delta[n-1]$ در اینصورت:

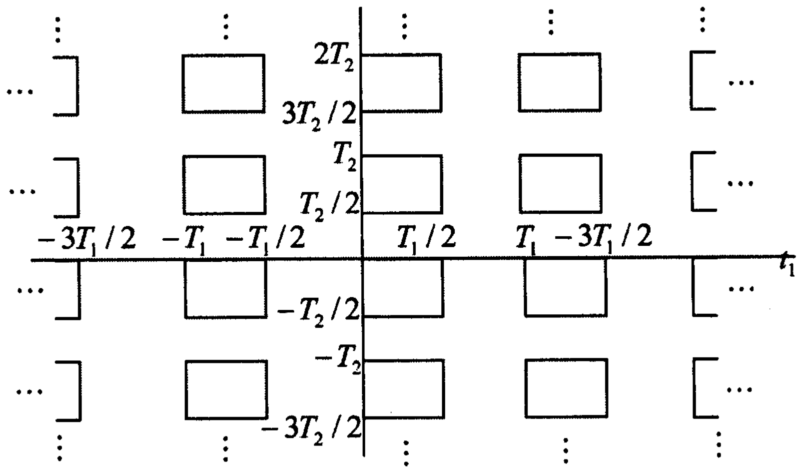
$$a_i = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \delta[n-i] = x[i]$$

مسئله ۷۰ – ۳

(الف) در این مسئله تعریف سری فوریه دو بعدی برای سیگنالهای دارای دو متغیر متسقل را در نظر می‌گیریم. سیگنال $x(t_1, t_2)$ را در نظر بگیرید که معادله زیر را برآورده می‌کند.

برای هر t_1 , t_2 : $\quad x(t_1, t_2) = x(t_1 + T_1, t_2 + T_2)$

این سیگنال در جهت t_1 دارای دوره تناوب T_1 و در جهت t_2 دارای دوره تناوب T_2 است. این سیگنال نمایش سری فوریه ای به صورت زیر دارد.



شکل م ۳–۷۰

$$x(t_1, t_2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{mn} e\left(m\omega_1 t_1 + nm\omega_2 t_2\right)$$

$$\omega_1 = 2\pi/T_1 \qquad , \qquad \omega_2 = 2\pi/T_2$$

a_{mn} را برحسب (t_1, t_2) بیان کنید.

(ب) ضرایب a_{mn} را برای سیگنالهای زیر بیابید.

(i) $\cos(2\pi t_1 + 2t_2)$ $\qquad$ (ii) سیگنال شکل م ۳–۷۰

حل: (الف) داریم:

$$a_{mn} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} x(t_1, t_2) e^{-jm\omega_1 t_1} e^{-jn\omega_2 t_2} dt_1 dt_2$$

(ب) (i) $T = 1$ و $T_2 = \pi$ $\quad a_{11} = 1/2$ و $a_{-1,-12} = 1$ مقدار تمام ضرایب صفر خواهد بود.

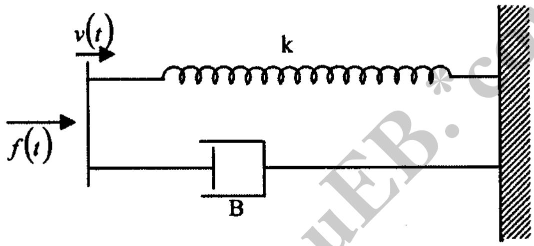
(ii) در اینجا،

$$a_{mn} = \begin{cases} {}^{1}\!/_{n^2}\,(mn) & m,n \text{ فرد} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مسئله ۷۱-۳

(الف) سیستم مکانیکی شکل م ۳-۷۱ را در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیلی که سرعت $\upsilon(t)$ را به نیروی ورودی $f(t)$ ربط می‌دهد عبارت است از:

$$Bv(t)+k\int v(t)dt = f(t)$$



شکل م ۳-۷۱

(الف) خروجی را $f_s(k)$، یعنی نیروی فشرده کننده فنر فرض کنید، معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $f_x(t)$ و $f(t)$ را بنویسید. پاسخ فرکانسی سیستم را بیابید و توضیح دهید که چرا پاسخ فرکانسی مثل فیلتر پایین گذرست.

(ب) خروجی $f_d(t)$، یعنی نیروی وارد بر ضربه گیر فرض کنید. معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $f_d(t)$ و $f(t)$ را بنویسید. پاسه فرکانسی سیستم را بیابید، و نشان دهید که تقریبی از فیلتر بالا گذرست.

حل: (الف) معادله دیفرانسیل $f(t)$ و $f_s(t)$ عبارتست از:

$$\frac{B}{K}\frac{df_s(t)}{dt}+f_s(t)=f(t)$$

توجه کنید که برای $\omega=0$، $H(j\omega)=1$ و برای $\omega\to\infty$، $H(j\omega)=0$، بنابراین سیستم تقریبی از یک فیلتر پائین گذراست.

(ب) معادله دیفرانسیل $f_d(t)$ و $f(t)$ عبارتست از:

$$\frac{df_d(t)}{dt}+\frac{k}{B}f_d(t)=\frac{df(t)}{dt}$$

پاسخ فرکانسی سیستم به سادگی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+(k/B)}$$

توجه کنید که برای $\omega=0$، $H(j\omega)=0$ و برای $\omega\to\infty$، $H(j\omega)=1$. بنابراین سیستم تقریبی از یک فیلتر بالا گذراست.

۴

تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۴-۱ با استفاده از معادله تجزیه تبدیل فوریه، معادله (۴-۹)، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید :

(الف) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$ (ب) $e^{-2|t-1|}$

اندازه تبدیل فوریه را رسم و مقدارگذاری کنید.

حل : (الف)

$$X_1(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2(t-1)}u(t-1)e^{-j\omega t}dt=\int_{1}^{+\infty}e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t}dt$$

با تغییر متغیر $t\text{-}1=\tau$ داریم :

$$X_1(j\omega)=\int_{0}^{+\infty}e^{-2\tau}.e^{-j\omega(\tau+1)}d\tau=e^{-j\omega}\int_{0}^{+\infty}e^{-(2+j\omega)\tau}d\tau=e^{-j\omega}\left.\frac{e^{-(2+j\omega)\tau}}{-(2+j\omega)}\right|_{0}^{+\infty}=\frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$$

$$\Rightarrow\ \left|X_1(j\omega)\right|=\left|\frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}\right|=\frac{\left|e^{-j\omega}\right|}{\left|2+j\omega\right|}=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

(ب)

$$X_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_2(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|t-1|}e^{-j\omega t}dt$$

حال تغییر متغیر $t\text{-}1=\tau$ را اعمال می کنیم ،در اینصورت :

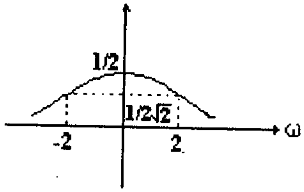
$$X_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|\tau|}e^{-j\omega(\tau+1)}d\tau$$

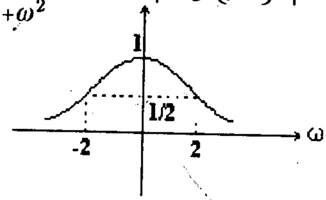
$$=e^{-j\omega}\int_{-\infty}^{0}e^{(2-j\omega)\tau}d\tau+e^{-j\omega}\int_{0}^{+\infty}e^{-(2+j\omega)\tau}d\tau=e^{-j\omega}\left[\left.\frac{e^{(2-j\omega)\tau}}{2-j\omega}\right|_{-\infty}^{0}-\left.\frac{e^{-(2+j\omega)\tau}}{2+j\omega}\right|_{0}^{+\infty}\right]$$

$$=e^{-j\omega}\left[\frac{1}{2-j\omega}+\frac{1}{2+j\omega}\right]=\frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^2} \Rightarrow \left|X_2(j\omega)\right| = \left|\frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^2}\right| = \frac{\left|4e^{j\omega}\right|}{\left|4+\omega^2\right|}=\frac{4}{4+\omega^2}$$

اندازه تبدیل های فوریه بندهای (الف) و (ب) در شکل زیر مشاهده می شود:

$$\left|H_1(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \qquad \left|H_2(j\omega)\right| = \frac{4}{4+\omega^2}$$





۴-۲ با استفاده از معادله تجزیه فوریه، معادله (۴-۹)، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید:

(الف) $\delta(t+1)+\delta(t-1)$ (ب) $\frac{d}{dt}\{u(-2-t)+u(t-2)\}$

اندازه تبدیل فوریه را رسم و مقدارگذاری کنید.

حل: (الف)

$$X_1(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\delta(t+1)+\delta(t-1)\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+1)e^{-j\omega(-1)}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-1)e^{-j\omega(1)}dt=e^{+j\omega}+e^{-j\omega}=2\cos\omega$$

$$\Rightarrow \left|X_1(j\omega)\right| = |\,2\cos\omega\,|$$

(ب)

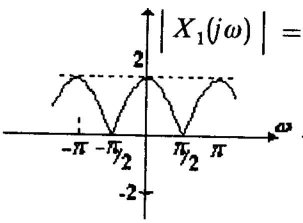
$$X_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left\{u(-2-t)+u(t-2)\right\}e^{-j\omega t}dt$$

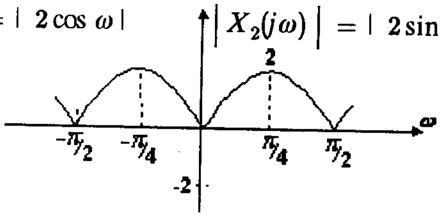
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{-\delta(-2-t)+\delta(t-2)\right\}e^{-j\omega t}dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-2-t)e^{-j\omega(-2)}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2)e^{-j\omega(2)}dt$$

$$=-e^{+j2\omega}+e^{-j2\omega}=-2j\left\{\frac{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}}{2j}\right\}=-2j\sin 2\omega \Rightarrow \left|X_2(j\omega)\right| = |-2j\sin 2\omega|$$

اندازه تبدیل فوریه سیگنال های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در شکل زیر نمایش داده شده اند:

$$\left|X_1(j\omega)\right| = |\,2\cos\omega\,| \qquad \left|X_2(j\omega)\right| = |\,2\sin 2\omega\,|$$





۴-۳ تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای متناوب زیر را بیابید:

(الف) $\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$ (ب) $1+\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{8}\right)$

حل : (الف) با توجه به جدول های *(1-4)* و *(2-4)* می توان نوشت :

$$X_1(j\omega)=f\left\{x_1(t)\right\}=f\left\{\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=f\left\{\frac{1}{2j}e^{j\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{1}{2j}e^{-j\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)}\right\}$$

$$=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}f\left\{e^{j2\pi t}\right\}-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2j}f\left\{e^{-j2\pi t}\right\}=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}\left[2\pi\delta(\omega-2\pi)\right]-\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2j}\left[2\pi\delta(\omega+2\pi)\right]$$

$$=\frac{\pi}{j}\left[e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-2\pi)-e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+2\pi)\right]$$

(ب)

$$X_2(j\omega)=f\left\{x_2(t)\right\}=f\left\{1+\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{8}\right)\right\}=f\left\{1+\frac{1}{2}e^{j\left(6\pi t+\frac{\pi}{8}\right)}+\frac{1}{2}e^{-j\left(6\pi t+\frac{\pi}{8}\right)}\right\}$$

$$=f\{1\}+\frac{e^{j\frac{\pi}{8}}}{2}f\left\{e^{j6\pi t}\right\}+\frac{e^{-j\frac{\pi}{8}}}{2}f\left\{e^{-j6\pi t}\right\}=2\pi\delta(\omega)+\frac{e^{j\frac{\pi}{8}}}{2}\left[2\pi\delta(\omega-6\pi)\right]$$

$$+\frac{e^{-j\frac{\pi}{8}}}{2}\left[2\pi\delta(\omega+6\pi)\right]=2\pi\delta(\omega)+\pi\left[e^{j\frac{\pi}{8}}\delta(\omega-6\pi)+e^{-j\frac{\pi}{8}}\delta(\omega+6\pi)\right]$$

۴ـ۴ معادله ترکیب تبدیل فوریه، معادله (۴-۸) را برای تعیین عکس تبدیل فوریه‌های زیر بکار برید :

(الف) $X_1(j\omega)=2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-4\pi)+\pi\delta(\omega+4\pi)$

(ب)
$$X_2(j\omega)=\begin{cases}2 & ;\quad 0\le\omega\le 2\\ -2 & ;\quad -2\le\omega<0\\ 0 & ;\quad |\omega|>2\end{cases}$$

حل : (الف)

$$x_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-4\pi)+\pi\delta(\omega+4\pi)\right\}e^{j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{j0\times t}d\omega+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-4\pi)e^{j4\pi t}d\omega+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+4\pi)e^{-j4\pi t}d\omega$$

$$=1+\frac{1}{2}e^{j4\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j4\pi t}=1+\cos 4\pi t$$

(ب)

$$x_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0}2e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2}(-2)e^{j\omega t}d\omega=\frac{e^{j\omega t}}{\pi jt}\Bigg|_{-2}^{0}-\frac{e^{j\omega t}}{\pi jt}\Bigg|_{0}^{2}$$

$$=\frac{1-e^{-j2t}+1-e^{j2t}}{\pi jt}=\frac{2-2\cos 2t}{\pi jt}=\frac{2-2\left(1-2\sin^2 t\right)}{\pi jt}=\frac{4\sin^2 t}{\pi jt}$$

۴-۵ معادله ترکیب تبدیل فوریه، معادله (۴-۸) را برای تعیین عکس تبدیل فوریه $|X(j\omega)|\ e^{j\angle X(j\omega)}$ بکار برید که در آن :

$$|X(j\omega)| = 2\{u(\omega+3)-u(\omega-3)\}$$

$$\angle X(j\omega) = -\frac{3}{2}\omega+\pi$$

با استفاده از جواب بدست آمده مقادیری از t را بیابید که به ازای آنها $x(t)=0$

حل : دیده می شود که $|H(j\omega)|$ فقط در فاصله $-3\leq\omega\leq 3$ مقدار دارد و در بقیه نقاط مقدارش صفر است، بنابراین بدست می آوریم :

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|\ e^{j\angle X(j\omega)}.e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{+3}2e^{j\left(-\frac{3}{2}\omega+\pi\right)}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{e^{j\pi}}{\pi}\int_{-3}^{+3}e^{j\omega\left(t-\frac{3}{2}\right)}d\omega=-\left.\frac{e^{j\omega\left(t-\frac{3}{2}\right)}}{\pi j\left(t-\frac{3}{2}\right)}\right|_{-3}^{3}$$

$$=-\frac{2}{\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)}.\frac{e^{j3\left(t-\frac{3}{2}\right)}-e^{-j3\left(t-\frac{3}{2}\right)}}{2j}=-\frac{2\sin 3\left(t-\frac{3}{2}\right)}{\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)}$$

حال برای آنکه $x(t)=0$ باشد، باید داشته باشیم :

$$x(t)=\frac{-2\sin 3\left(t-\frac{3}{2}\right)}{\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)}=0$$

$$\Rightarrow \sin 3\left(t-\frac{3}{2}\right)=0\ ,t\neq\frac{3}{2}\ \Rightarrow 3\left(t-\frac{3}{2}\right)=k\pi \Rightarrow t=\frac{k\pi}{3}+\frac{3}{2}\quad ,k=\pm1,\pm2,...$$

۴-۶ با فرض این که $x(t)$ دارای تبدیل فوریه $X(j\omega)$ است، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را برحسب $X(j\omega)$ بیابید. از خواص تبدیل فوریه مندرج در جدول ۴-۱ استفاده کنید.

(الف) $x_1(t)=x(1-t)+x(-1-t)$ (ب) $x_2(t)=x(3t-6)$ (ج) $x_3(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$

حل : (الف) ابتدا با توجه به خاصیت وارون زمانی از جدول (1-4) داریم :

$$f\{x(-t)\}=X(-j\omega)$$

حال با توجه به خاصیت جابجایی زمانی از همین جدول می توان نوشت :

$$f\left\{x(-1-t)\right\}=f\left\{x(-(t+1))\right\}=e^{-j\omega\times(-1)}f\left\{x(-t)\right\}=e^{j\omega}X(-j\omega)\qquad ,(I)$$

به همین ترتیب :

$$f\left\{x(1-t)\right\}=f\left\{x(-(t-1))\right\}=e^{-j\omega\times 1}f\left\{x(-t)\right\}=e^{-j\omega}X(-j\omega)\qquad ,(II)$$

بنابراین از روابط (I) و (II) خواهیم داشت :

$$f\{x_1(t)\}=f\{x(1-t)+x(-1-t)\}=f\{x(1-t)\}+f\{x(-1-t)\}=e^{-j\omega}X(-j\omega)+e^{j\omega}X(-j\omega)$$

$$=2X(-j\omega)\left[\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right]=2X(-j\omega)\cos\omega$$

(ب)از خاصیت تغییر مقیاس زمانی جدول *(1-4)* می توان نوشت :

$$f\{x(3t)\}=\frac{1}{3}X\left(\frac{j\omega}{3}\right)$$

اکنون جابجایی زمانی را اعمال می کنیم :

$$f\{x(3t-6)\}=f\{x(3(t-2))\}=e^{-j\omega\times 2}f\{x(3t)\}=e^{-j2\omega}\left[\frac{1}{3}X\left(\frac{j\omega}{3}\right)\right]=\frac{1}{3}e^{-j2\omega}X\left(\frac{j\omega}{3}\right)$$

(ج) ابتدا خاصیت انتقال زمانی را بکار می گیریم :

$$f\{x(t-1)\}=e^{-j\omega\times 1}f\{x(t)\}=e^{-j\omega}X(j\omega)$$

در اینصورت با توجه به خاصیت مشتقگیری زمانی ،می توان نوشت :

$$f\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t-1)\right\}=f\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}x(t-1)\right]\right\}=j\omega f\left\{\frac{d}{dt}x(t-1)\right\}$$

$$=(j\omega)(j\omega)f\{x(t-1)\}=-\omega^2e^{-j\omega}X(j\omega)$$

۴–۷ با استفاده از خواص تبدیل فوریه مندرج در جدول ۴–۱ تعیین کنید که سیگنال حوزه زمان متناظر با تبدیلهای داده شده *(i)* حقیقی است، موهومی است، یا هیچکدام و *(ii)* زوج است، فردست، یا هیچکدام. برای جواب دادن، عکس تبدیل فوریه را حساب نکنید.

(الف) $X_1(j\omega)=u(\omega)-u(\omega-2)$ (ب) $X_2(j\omega)=\cos(\omega)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

(ج) $X_3(j\omega)=A(\omega)e^{jB(\omega)}$ که در آن $A(\omega)=\frac{\sin 2\omega}{\omega}$, $B(\omega)=2\omega+\frac{\pi}{2}$

(د) $X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)$

حل : (الف) سیگنال $x_1(t)$:

(i) این سیگنال نه حقیقی و نه موهومی است زیرا :

$$if\ x_1(t):pure\ real\ \rightarrow X_1(j\omega)=X_1^*(-j\omega)\ \Rightarrow but:\ u(\omega)-u(\omega-2)\neq u(-\omega)-u(-\omega-2)$$

$$if\ x_1(t):\ pure\ \ imaginary\ \rightarrow\ X_1^*(t)=-X_1(t)$$

$$\Rightarrow\ X_1^*(-j\omega)=-X_1(j\omega)\ \Rightarrow\ but:\ u(-\omega)-u(-\omega-2)\neq -u(\omega)+u(\omega-2)$$

(ii) همچنین سیگنال $x_1(t)$نه زوج است نه فرد ،چون :

$$if\ x_1(t):even\ \rightarrow x_1(-t)=x_1(t)\ \Rightarrow X_1(-j\omega)=X_1(j\omega)\Rightarrow but:u(-\omega)-u(-\omega-2)\neq u(\omega)-u(\omega-2)$$

$$if\ x_1(t):odd \rightarrow x_1(-t)=-x_1(t) \Rightarrow X_1(-j\omega)=-X_1(j\omega) \Rightarrow but: u(-\omega)-u(-\omega-2)\neq -u(\omega)+u(\omega-2)$$

ب) سیگنال $x_2(t)$:

(i) این سیگنال موهومی خالص می باشد، چرا که :

$$X_2^*(-j\omega)=\cos^*(-\omega)\sin^*\left(-\frac{\omega}{2}\right)=-\cos(\omega)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)=-X_2(j\omega)$$

(ii) همچنین یک سیگنال فرد است :

$$X_2(-j\omega)=\cos(-\omega)\sin\left(-\frac{\omega}{2}\right)=-\cos(\omega)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)=-X_2(j\omega)$$

بنابراین در کل ،سیگنال $x_2(t)$، سیگنالی موهومی و فرد می باشد.

ج) سیگنال $x_3(t)$:

(i) این سیگنال ، موهومی خالص است :

$$X_3^*(-j\omega)=\left(A(-\omega)e^{jB(-\omega)}\right)^*=A^*(-\omega)e^{-jB^*(-\omega)}$$

$$=A(\omega)e^{-j\left(-2\omega+\frac{\pi}{2}\right)}=A(\omega)e^{-j\pi}e^{j\left(2\omega+\frac{\pi}{2}\right)}=-A(\omega)e^{jB(\omega)}=-X_3(j\omega)$$

(ii) همچنین ، $x_3(t)$نه فرد است و نه زوج :

$$X_3(-j\omega)=A(-\omega)e^{jB(-\omega)}=A(\omega)e^{j\left(-2\omega+\frac{\pi}{2}\right)}\neq\left(-X_3(j\omega)\quad or\quad X_3(j\omega)\right)$$

د) سیگنال $x_4(t)$:

(i) این سیگنال حقیقی است ،زیرا:

$$X_4^*(-j\omega)=\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(-\omega-\frac{k\pi}{4}\right)\right)^*=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(-\omega-\frac{k\pi}{4}\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|-k|}\delta\left(-\omega+\frac{k\pi}{4}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)=X_4(j\omega)$$

در روابط فوق از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که سیگنال ضربه سیگنالی زوج است،یعنی $\delta(-\omega)=\delta(\omega)$

(ii) $x_4(t)$زوج هم است :

$$X_4(-j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(-\omega-\frac{k\pi}{4}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega+\frac{k\pi}{4}\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|-k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)=X_4(j\omega)$$

۴-۸ سیگنال زیر را در نظر بگیرید

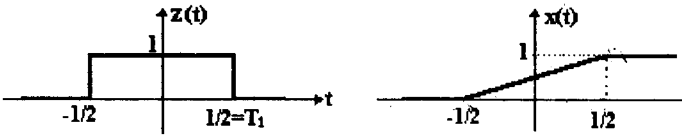
$$x(t)=\begin{cases}0 & ; \quad t<-\frac{1}{2}\\ t+\frac{1}{2} & ; \quad -\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{1}{2}\\ 1 & ; \quad t>\frac{1}{2}\end{cases}$$

(الف) با استفاده از خواص مشتقگیری و انتگرالگیری جدول ۴-۱ و تبدیل فوریه پالس مستطیلی

جدول ۴-۲ عبارت ریاضی $X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) تبدیل فوریه $g(t)=x(t)-\frac{1}{2}$ را بیابید.

حل : سیگنال $x(t)$ و مشتق آن $z(t)$ در شکل زیر رسم شده‌اند:



حال تبدیل فوریه سیگنال $z(t)$ را با توجه به جدول $(4\text{-}2)$ پیدا کرده و می نویسیم :

$$Z(j\omega)=\frac{2\sin\ (\omega T_1)}{\omega}=\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}$$

در اینصورت با مراجعه به خاصیت انتگرال گیری جدول $(4\text{-}1)$ می توان نوشت:

$$x(t)=\int_{-\infty} z(t)dt$$

$$\Rightarrow X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}Z(j\omega)+\pi Z(j0)\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}\right]+\pi\delta(\omega)=\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega^2}+\pi\delta(\omega)$$

(ب) برای این سیگنال خواهیم داشت :

$$G(j\omega)=f\left\{g(t)\right\}=f\left\{x(t)-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=f\left\{x(t)\right\}-\frac{1}{2}f\{1\}=X(j\omega)-\frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega)\right)=X(j\omega)-\pi\delta(\omega)=\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega^2}$$

۴-۹ سیگنال زیر را در نظر بگیرید ✓

$$x(t)=\begin{cases}0 & ; \ |t|>1\\ \frac{t+1}{2} & ; \ -1\le t\le 1\end{cases}$$

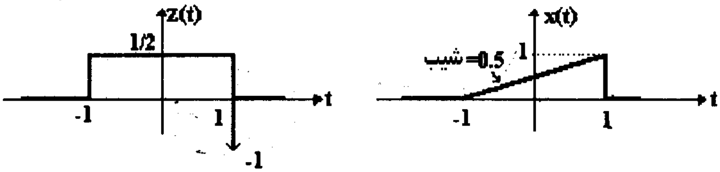
(الف) با استفاده از جدولهای ۴-۱ و ۴-۲ عبارت $X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) بخش حقیقی جواب بند (الف) را بیابید و نشان دهید که تبدیل فوریه بخش زوج $x(t)$ است.

(ج) تبدیل فوریه بخش فرد $x(t)$ را بیابید.

حل : سیگنال $x(t)$ و مشتق آن $z(t)$ در شکل زیر دیده می شوند:

$z(0)=?$



به وضوح می توان دید که سیگنال $z(t)$ متشکل از دو سیگنال ،یکی پالس مستطیلی $s_p(t)$ با $T_1=1$ و دامنه $\frac{1}{2}$ و دیگری ضربه $-\delta(t-1)$؛بنابراین می توان نوشت :

$$Z(j\omega)=f\left\{z(t)\right\}=f\left\{s_p(t)-\delta(t-1)\right\}$$

$$=f\left\{s_p(t)\right\}-f\left\{\delta(t-1)\right\}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin\left(\omega T_1\right)}{\omega}-e^{-j\omega}f\left\{\delta(t)\right\}=\frac{\sin\omega}{\omega}-e^{-j\omega}$$

در روابط فوق از خواص خطی بودن و انتقال زمانی جدول $(4-1)$ و همچنین تبدیل های فوریه داده شده در جدول $(4-2)$ برای توابع پالس مستطیلی و سیگنال ضربه ، بهره برده‌ایم . اکنون با مراجعه به خاصیت انتگرال گیری جدول $(4-1)$ می توان نوشت :

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}z(t)dt\Rightarrow X(j\omega)$$

$$=\frac{1}{j\omega}Z(j\omega)+\pi Z(j0)\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}\left[\frac{\sin\omega}{\omega}-e^{-j\omega}\right]+0\times\pi\delta(\omega)=\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$$

(ب)

$$Re\left\{X(j\omega)\right\}=\frac{1}{2}\left\{X(j\omega)+X^*(j\omega)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}\right]+\left[-\frac{\sin\omega}{j\omega^2}+\frac{e^{j\omega}}{j\omega}\right]\right\}=\left(\frac{1}{\omega}\right)\left\{\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}\right\}=\frac{\sin\omega}{\omega} \qquad ,(I)$$

همچنین بخش زوج $x(t)$ را بصورت زیر بدست می آوریم:

$$Ev\left\{x(t)\right\}=\frac{1}{2}\left\{x(t)+x(-t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{cases}0 & ;|t|>1\\ \left(\frac{t+1}{2}\right) & ;-1\le t\le 1\end{cases}+\frac{1}{2}\begin{cases}0 & ;|-t|>1\\ \left(\frac{-t+1}{2}\right) & ;-1\le -t\le 1\end{cases}=\begin{cases}0 & ;|t|>1\\ \frac{1}{2} & ;-1\le t\le 1\end{cases}$$

بنابراین بخش زوج $x(t)$ سیگنالی به شکل پالس مستطیلی با $T_1=1$ و دامنه $\frac{1}{2}$ می باشد و تبدیل فوریه‌ای به شکل زیر دارد :

$$X_e(j\omega)=f\left\{Ev\left\{x(t)\right\}\right\}=\frac{2\sin\omega T_1}{2\omega}=\frac{\sin\omega}{\omega} \qquad ,(II)$$

از روابط (I) و (II) نتیجه می گیریم که تبدیل فوریه بخش زوج $x(t)$ با بخش حقیقی $X(j\omega)$ یکی است.

(ج) برای این بند بصورت زیر می نویسیم :

$$X_o(t)=f\left\{Od\left\{x(t)\right\}\right\}=f\left\{x(t)-Ev\left\{x(t)\right\}\right\}$$

$$=f\left\{x(t)\right\}-f\left\{Ev\left\{x(t)\right\}\right\}=X(j\omega)-X_e(j\omega)=\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$=\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}-\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j\omega}=\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2j\omega}=\frac{\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{\cos\omega}{j\omega}$$

۴-۱۰ (الف) با استفاده از جدولهای ۴-۱ و ۴-۲ تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید :

$$x(t)=t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2$$

(ب) با استفاده از رابطه پارسوال و جواب بند (الف) مقدار عددی انتگرال زیر را بیابید :

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 dt$$

حل : (الف) با توجه به جدول $(2\text{-}4)$ داریم :

$$f\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\}=\begin{cases}1 & ;|\omega|<1\\ 0 & ;|\omega|>1\end{cases}$$

در اینصورت با در نظر گرفتن خاصیت ضرب جدول $(1\text{-}4)$ می توان نوشت :

$$f\left\{\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2\right\}=f\left\{\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}f\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\}*f\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\}$$

حال باید کانولوشن بالا را حساب کنیم ،در اینصورت بدست خواهیم آورد:

$$f\left\{\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2\right\}=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}\omega+2 & ;-2\le\omega<0\\ -\omega+2 & ;0\le\omega<2\\ 0 & ;elsewhere\end{cases}$$

بالاخره با توجه به خاصیت مشتق گیری جدول $(1\text{-}4)$

$$X(j\omega)=f\left\{t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2\right\}=j\frac{d}{d\omega}f\left\{\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{j}{2\pi}\cdot\frac{d}{d\omega}\begin{cases}\omega+2 & ;-2\le\omega<0\\ -\omega+2 & ;0\le\omega<2\\ 0 & ;elsewhere\end{cases}=\begin{cases}\frac{j}{2\pi} & ;-2\le\omega<0\\ -\frac{j}{2\pi} & ;0\le\omega<2\\ 0 & ;elsewhere\end{cases}$$

(ب) از رابطه پارسوال داریم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0}\left|\frac{j}{2\pi}\right|^2d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2}\left|-\frac{j}{2\pi}\right|^2d\omega=\frac{1}{8\pi^3}\left[\int_{-2}^{0}d\omega+\int_{0}^{2}d\omega\right]=\frac{1}{2\pi^3}$$

۴-۱۱ روابط زیر را داریم

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

و

$$g(t)=x(3t)*h(3t)$$

تبدیل فوریه $x(t)$و $h(t)$به ترتیب $X(j\omega)$ و $H(j\omega)$است به کمک خواص تبدیل فوریه نشان دهید که تبدیل فوریه $g(t)$به شکل زیرست

$$g(t)=Ay(Bt)$$

مقادیر A و B را تعیین کنید.

حل : با توجه به خاصیت کانوولوشن جدول $(1\text{-}4)$ برای $Y(j\omega)$ می توان نوشت :

$$Y(j\omega)=f\left\{y(t)\right\}=f\left\{x(t)*h(t)\right\}=X(j\omega)H(j\omega) \qquad (I)$$

همچنین برای $G(j\omega)$ داریم :

$$G(j\omega)=f\left\{g(t)\right\}=f\left\{x(3t)*h(3t)\right\}$$

$$=f\left\{x(3t)\right\}f\left\{h(3t)\right\}=\left[\frac{1}{3}X\left[\frac{j\omega}{3}\right]\right]\left[\frac{1}{3}H\left[\frac{j\omega}{3}\right]\right]=\frac{1}{9}X\left[\frac{j\omega}{3}\right]H\left[\frac{j\omega}{3}\right] \qquad (II)$$

اکنون با دقت در روابط (I) و (II) می توان نوشت :

$$G(j\omega)=\frac{1}{9}Y\left[\frac{j\omega}{3}\right]$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left\{G(j\omega)\right\}=\frac{1}{9}f^{-1}\left\{Y\left[\frac{j\omega}{3}\right]\right\} \quad \Rightarrow \quad g(t)=\frac{1}{3}y(3t)=Ay(Bt) \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{B}=\frac{1}{3}$$

۴-۱۲ زوج تبدیل فوریه زیر را در نظر بگیرید

$$e^{-|t|}\xleftrightarrow{F}\frac{2}{1+\omega^2}$$

(الف) با استفاده از خواص مناسب تبدیل فوریه، تبدیل فوریه $te^{-|t|}$ را بیابید.

(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) و خاصیت همزادی، تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

راهنمایی: مثال ۴-۱۳ را ببینید.

حل : (الف) از خاصیت مشتقگیری فرکانسی جدول $(1\text{-}4)$ بدست می آوریم :

$$f\left\{te^{-|t|}\right\}=j\frac{d}{d\omega}f\left\{e^{-|t|}\right\}=j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{2}{1+\omega^2}\right]=\frac{-4j\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$$

(ب) معادله ترکیب زوج تبدیل فوریه بند (الف) را بدین صورت می توان نوشت :

$$te^{-|t|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{-4j\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}\right]e^{j\omega t}d\omega$$

حال با ضرب طرفین معادله فوق در $2\pi j$ و گذاشتن $-t$ به جای t بدست می آوریم :

$$-2\pi jte^{-|t|}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{4\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}\right]e^{-j\omega t}d\omega$$

در نهایت با تعویض نام متغیرهای t و ω می نویسیم :

$$-2\pi j\omega e^{-|\omega|}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}\right]e^{-j\omega t}dt$$

سمت راست معادله فوق ،معادله تجزیه تبدیل فوریه $\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}$ است، پس نتیجه می گیریم که :

$$f\left\{\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}\right\}=-2\pi j\omega e^{-|\omega|}$$

۴–۱۳ فرض کنید $x(t)$ دارای تبدیل فوریه زیرست

$$X(j\omega)=\delta(\omega)+\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega-5)$$

و

$$h(t)=u(t)-u(t-2)$$

(الف) آیا $x(t)$ متناوب است؟

(ب) آیا $x(t)*h(t)$ متناوب است؟

(ج) آیا کانولوشن دو سیگنال نامتناوب می‌تواند متناوب باشد؟

حل : (الف) $x(t)$ متناوب نیست ،این مطلب را می توان به راحتی با گرفتن تبدیل فوریه معکوس از $X(j\omega)$ نشان داد:

$$x(t)=f^{-1}\left\{X(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\delta(\omega)+\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega-5)\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\delta(\omega)\right\}+f^{-1}\left\{\delta(\omega-\pi)\right\}+f^{-1}\left\{\delta(\omega-5)\right\}=\frac{1}{2\pi}\left[1+e^{j\pi t}+e^{j5t}\right]$$

سیگنال $x(t)$ از سه سیگنال یکی مقدار ثابت $\frac{1}{2\pi}$ ،دیگری $\frac{1}{2\pi}e^{j\pi t}$ و آخری $\frac{1}{2\pi}e^{j5t}$ تشکیل شده است ؛ تناوب پایه سیگنال $x(t)$ باید بگونه ای باشد که مضربی صحیح از تناوب پایه هر یک از این سه سیگنال باشد که البته این امکان پذیر نمی باشد، زیرا بطور مثال هر مضرب صحیحی از تناوب پایه سیگنال $\frac{1}{2\pi}e^{j5t}$ (یعنی : $\frac{2\pi}{5}$) حتما مضرب غیرصحیحی از تناوب پایه $\frac{1}{2\pi}e^{j\pi t}$ (یعنی : $\frac{2\pi}{\pi}=2$) خواهد بود.

بنابراین سیگنال $x(t)$ متناوب نمی باشد.

(ب) ابتدا تبدیل فوریه سیگنال $h(t)$ را بدست می آوریم ؛ مشاهده می کنیم که $h(t)$ یک پالس مستطیلی با $T_1=1$ است که به اندازه $t_0=1$ به سمت راست منتقل شده است ،بنابراین برای تبدیل فوریه آن می توان نوشت :

$$H(j\omega)=f\left\{s_p\left(t-t_0\right)\right\}=e^{-j\omega t_0}\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}=2e^{-j\omega}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

حال برای تبدیل فوریه $x(t)*h(t)$ بدست می آوریم :

$$f\left\{x(t)*h(t)\right\}=X(j\omega)H(j\omega)=\left[\delta(\omega)+\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega-5)\right]\left[2e^{-j\omega}\frac{\sin\omega}{\omega}\right]$$

$$=2e^{-j0}\delta(\omega)+2e^{-j\pi}\frac{\sin\pi}{\pi}\delta(\omega-\pi)+2e^{-j5}\frac{\sin 5}{5}\delta(\omega-5)=2\delta(\omega)+2e^{-j5}\frac{\sin 5}{5}\delta(\omega-5)$$

بنابراین برای سیگنال $x(t)*h(t)$ خواهیم داشت :

$$x(t)*h(t)=f^{-1}\left\{2\delta(\omega)+2e^{-j5}\frac{\sin 5}{5}\delta(\omega-5)\right\}$$

$$=\frac{2}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\times 2e^{-j5}\frac{\sin 5}{5}e^{j5t}=\frac{1}{\pi}\left\{1+\frac{\sin 5}{5}e^{j5(t-1)}\right\}$$

دیده می شود که سیگنال $x(t)*h(t)$ متناوب بوده و دارای تناوب پایه $T_0=\frac{2\pi}{5}$ می باشد.

(ج) بلی -این مطلب با توجه به بندهای (الف) و (ب) روشن می شود. در حالی که $x(t)$ و $h(t)$ سیگنالهایی غیر متناوب بودند ،کانوولوشن آنها $x(t)*h(t)$ متناوب است .

۴-۱۴ سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ را در نظر بگیرید. اطلاعات زیر داده شده است :

۱. $x(t)$ حقیقی و غیرمنفی است.

۲. $F^{-1}\left\{(1+j\omega)X(j\omega)\right\}=Ae^{-2t}u(t)$ ، که A مستقل از t است.

۳. $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(j\omega)\right|^2 d\omega=2\pi$

$x(t)$ را بیابید.

حل : ابتدا از دو طرف اطلاع (2) تبدیل فوریه گرفته و داریم :

$$(1+j\omega)X(j\omega)=f\left\{Ae^{-2t}u(t)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[Ae^{-2t}u(t)\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$=A\int_{0_-}^{+\infty}e^{-(2+j\omega)}dt=\frac{A}{2+j\omega}\quad\Rightarrow\quad X(j\omega)=\frac{A}{(1+j\omega)\;\left(2+j\omega\right)}\qquad ,(I)$$

از طرفی از اطلاع (1) می دانیم که $x(t)$ حقیقی است یعنی $X^*(-j\omega)=X(j\omega)$ و می توان نوشت :

$$X^*(-j\omega)=X(j\omega)\Rightarrow\left[\frac{A}{(1-j\omega)(2-j\omega)}\right]^*=\frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$\Rightarrow\frac{A^*}{(1+j\omega)(2+j\omega)}=\frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)}\qquad\Rightarrow A^*=A$$

یعنی A یک عدد حقیقی و با توجه به اطلاع (1) مثبت می باشد.

حال با تفکیک رابطه (I) به کسرهای جزئی داریم :

$$X(j\omega)=\frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)}=\frac{A}{1+j\omega}+\frac{-A}{2+j\omega}\quad\Rightarrow\ x(t)=f^{-1}\left\{X(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{A}{1+j\omega}+\frac{-A}{2+j\omega}\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{A}{1+j\omega}\right\}-f^{-1}\left\{\frac{A}{2+j\omega}\right\}=Ae^{-t}u(t)-Ae^{-2t}u(t)=A\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t)\qquad (II)$$

حال از اطلاع (3) و رابطه پارسوال و عبارت (I) می توان نوشت :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad \Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) u(t)\right]^2 dt = 1$$

$$\Rightarrow A^2 \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)^2 dt = 1 \Rightarrow A^2 \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-2t} + e^{-4t} - 2e^{-3t}\right) dt = 1$$

$$\Rightarrow A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad A^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad A = \pm\sqrt{12}$$

تنها مقداری از A قابل قبول است که $x(t)$ برای تمام زمان ها غیرمنفی باشد، این مقدار $A = +\sqrt{12}$ است که با جایگذاری در رابطه (II) ، $x(t)$ بالاخره به صورت زیر بدست می آید:

$$x(t) = \sqrt{12}\,\left[e^{-t} - e^{-2t}\right] u(t)$$

۴-۱۵ سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ را در نظر بگیرید. اطلاعات زیر داده شده است :

۱. $x(t)$ حقیقی است.

۲. در $t \le 0$ ، $x(t) = 0$

۳. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Re e\{X(j\omega)\} e^{j\omega t} d\omega = |t|\; e^{-|t|}$

عبارت ریاضی $x(t)$ را بیابید.

حل : از اطلاع (1) می دانیم که $x(t)$ حقیقی است ،در اینصورت با مراجعه به جدول $(4-1)$ دیده می شود که بخش حقیقی تبدیل فوریه برای سیگنال های حقیقی ، تبدیل فوریه بخش زوج سیگنال موردنظر می باشد، یعنی :

$$f\left\{x_e(t)\right\} = Re\left\{X(j\omega)\right\}$$

با مقایسه رابطه فوق با اطلاع (3) ،مشاهده می کنیم که این اطلاع ،شکل ترکیب تبدیل فوریه برای بخش زوج $x(t)$ می باشد و داریم :

$$x_e(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Re\left\{X(j\omega)\right\} e^{j\omega t} d\omega = |t|\; e^{-|t|} \qquad ,(I)$$

از سوی دیگر و از اطلاع (2) ،برای $t \le 0$ باید داشته باشیم $x(t) = 0$، بنابراین :

$$t \le 0 \Rightarrow x(t) = x_e(t) + x_o(t) = 0 \;\Rightarrow\; x_o(t) = -x_e(t) = -|t|\; e^{-|t|} = -(-t)e^{-(-t)} = te^{t}, t \le 0 \qquad (II)$$

از آنجا که $x_o(t)$ سیگنالی فرد می باشد، برای $t > 0$ داریم :

$$x_o(t) = -x_o(-t) = -(-t)e^{-t} = te^{-t} \qquad ,(III)$$

در نهایت از روابط (I) ، (II) و (III) می نویسیم :

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = \begin{cases} te^{-t} & ;t>0 \\ -te^{t} & ;t\le 0 \end{cases} + \begin{cases} te^{-t} & ;t>0 \\ te^{t} & ;t\le 0 \end{cases} = \begin{cases} 2te^{-t} & ;t>0 \\ 0 & ;t\le 0 \end{cases} = 2te^{-t}u(t)$$

۴-۱۶ سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{\left(k\frac{\pi}{4}\right)} \delta\left(t - k\frac{\pi}{4}\right)$$

(الف) $g(t)$ را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$x(t)=\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)g(t)$$

(ب) با استفاده از خاصیت ضرب تبدیل فوریه نشان دهید که $X(j\omega)$ متناوب است. $X(j\omega)$ را در یک دوره تناوب تعیین کنید.

حل : می نویسیم :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{\left(k\frac{\pi}{4}\right)}\delta\left(t-k\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\delta\left(t-k\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)\left[\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-k\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)g(t)\quad\Rightarrow g(t)=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-k\frac{\pi}{4}\right)$$

(ب) برای محاسبه $X(j\omega)$ با توجه به خاصیت ضرب جدول $(4\text{-}1)$ می نویسیم :

$$x(t)=\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)g(t)\ \Rightarrow X(j\omega)=\frac{1}{2\pi}f\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\}*f\left\{\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-k\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

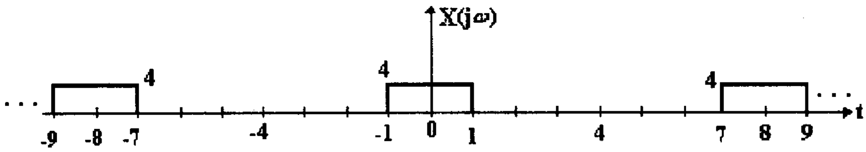
که با مراجعه به جدول $(4\text{-}1)$ خواهیم داشت :

$$X(j\omega)=\frac{1}{2\pi}S_p(\omega)*\left[8\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-8k\right)\right]$$

که در آن $S_p(\omega)$ پالس مستطیلی با دامنه 1 و $W=1$ می باشد، ادامه می دهیم :

$$X(j\omega)=4S_p(\omega)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-8k\right)=4\sum_{k=-\infty}^{+\infty}S_p(\omega)*\delta(\omega-8k)=4\sum_{k=-\infty}^{+\infty}S_p(\omega-8k)$$

$X(j\omega)$ را در شکل زیر مشاهده می کنید، این سیگنال متناوب با تناوب پایه $\omega_0=8$ می باشد:



۸ ۴-۱۷ درستی و نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای جواب خود دلیل بیاورید.

(الف) تبدیل فوریه یک سیگنال فرد و موهومی همیشه فرد و موهومی است.

(ب) کانولوشن یک تبدیل فوریه فرد و یک تبدیل فوریه زوج همیشه فردست.

حل : (الف) خیر، درست نیست: زیرا تبدیل فوریه این سیگنال نه موهومی بلکه حقیقی است ،برای نشان دادن این مطلب می نویسیم :

$$X^*(j\omega)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^*=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)e^{j\omega t}dt$$

حال چون $x(t)$ موهومی خالص است داریم: $x^*(t)=-x(t)$ و چون فرد است داریم : $x(t)=-x(-t)$، بنابراین از رابطه بالا می توان نوشت :

$$X^*(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)e^{j\omega t}dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{j\omega t}dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-x(-t)\right]e^{j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(-t)e^{j\omega t}dt$$

$$\Rightarrow (t\rightarrow -t)\Rightarrow X^*(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad X(j\omega)\in R$$

با این وجود، $X(j\omega)$ خاصیت فرد بودن را دارد :

$$X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j(-\omega)t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{j\omega t}dt \Rightarrow (t\rightarrow -t) \Rightarrow X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(-t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(-x(t))e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}(-x(t))e^{-j\omega t}dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=-X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad X(j\omega)\ is\ odd$$

بنابراین در کل ، $X(j\omega)$ خاصیت گفته شده را ندارد.

(ب) بلی، درست است ،زیرا اگر $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ به ترتیب تبدیل های فرد و زوج مورد نظر باشند و $Z(j\omega)$ کانوولوشن آنها باشد داریم : $Y(-j\omega)=Y(j\omega)$ ، $X(-j\omega)=-X(j\omega)$ و می توان نوشت :

$$Z(-j\omega)=X(-j\omega)*Y(-j\omega)=\left[-X(j\omega)\right]*\left[Y(j\omega)\right]=-X(j\omega)*Y(j\omega)=-Z(j\omega)$$

یعنی کانوولوشن این دو تبدیل ، همیشه تبدیل فرد است .

۴-۱۸ پاسخ ضربه سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر را بیابید.

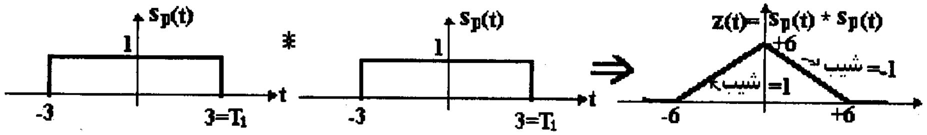
$$H(j\omega)=\frac{\left[\sin^2(3\omega)\right]\cos\omega}{\omega^2}$$

حل : کافیست از $H(j\omega)$ عکس تبدیل فوریه گرفته شود، بدین منظور بهتر است از خاصیت کانوولوشن جدول $(4-1)$ استفاده کرد و بنویسیم :

$$h(t)=f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\left[\frac{\sin 3\omega}{\omega}\right]^2\cos\omega\right\}=f^{-1}\left\{\left[\frac{\sin 3\omega}{\omega}\right]^2\right\}*f^{-1}\{\cos\omega\}$$

$$=\frac{1}{8}f^{-1}\left\{\frac{2\sin 3\omega}{\omega}\right\}*f^{-1}\left\{\frac{2\sin 3\omega}{\omega}\right\}*f^{-1}\left\{e^{j\omega}+e^{-j\omega}\right\}=\frac{1}{8}s_p(t)*s_p(t)*\left[\delta(t+1)+\delta(t-1)\right]$$

که در آن $s_p(t)$ سیگنالی به شکل پالس مستطیلی با دامنه 1 و $T_1=3$ می باشد. حال کافیست کانوولوشن $z(t)=s_p(t)*s_p(t)$ را به شکل زیر بدست آوریم :

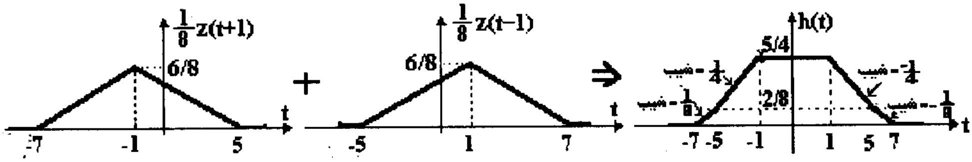


در اینصورت می توان نوشت :

$$h(t)=\frac{1}{8}z(t)*\left[\delta(t+1)+\delta(t-1)\right]=\frac{1}{8}z(t+1)+\frac{1}{8}z(t-1)$$

دیده می شود که $h(t)$ مجموع وزنداری از دو سیگنال $z(t)$ منتقل شده به چپ و راست می باشد، این

مطلب را در شکل زیر مشاهده می کنیم :



بنابراین $h(t)$ را می توان به صورت زیر نمایش داد :

$$h(t)=\begin{cases} \frac{5}{4} & ;|t|<1 \\ \frac{-|t|}{4}+\frac{3}{2} & ;1\leq |t| \leq 5 \\ \frac{-|t|}{8}+\frac{7}{8} & ;5\leq |t| <7 \\ 0 & ;otherwise \end{cases}$$

۴-۱۹ یک سیستم LTI علی با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+3}$$

این سیستم به ازای ورودی $x(t)$ خروجی زیر را ایجاد کرده است

$$y(t)=e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

$x(t)$ را بیابید.

حل : ابتدا از خروجی سیستم تبدیل فوریه گرفته و داریم :

$$Y(j\omega)=f\left\{y(t)\right\}$$

$$=f\left\{e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)\right\}=f\left\{e^{-3t}u(t)\right\}-f\left\{e^{-4t}u(t)\right\}=\frac{1}{3+j\omega}-\frac{1}{4+j\omega}=\frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$y(t)=x(t)*h(t) \Rightarrow Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega) \Rightarrow X(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}=\frac{\left(\frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}\right)}{\left(\frac{1}{3+j\omega}\right)}=\frac{1}{4+j\omega}$$

$$\Rightarrow x(t)=f^{-1}\left\{X(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1}{4+j\omega}\right\}=e^{-4t}u(t)$$

۴-۲۰ پاسخ ضربه سیستم LTI علی نشان داده شده با مدار RLC مسئله ۳-۲۰ را بیابید. برای این منظور عکس تبدیل فوریه پاسخ فرکانسی مدار را بیابید. برای این محاسبه می‌توانید از جدولهای ۴-۱ و ۴-۲ استفاده کنید.

حل : می نویسیم :

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega-\omega^2}\right\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\left[j\omega-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right]\left[j\omega-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right]}\right\}$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{-j}{\sqrt{3}}\right)}{j\omega-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)}+\frac{\left(\frac{j}{\sqrt{3}}\right)}{j\omega-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)}\right\}=-\frac{j}{\sqrt{3}}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)}\right\}$$

$$+\frac{j}{\sqrt{3}}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)}\right\}=-\frac{j}{\sqrt{3}}e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)t}+\frac{j}{\sqrt{3}}e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)t}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\left\{\frac{e^{j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}-e^{-j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}}{2j}\right\}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

۴-۲۱ تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای زیر را حساب کنید :

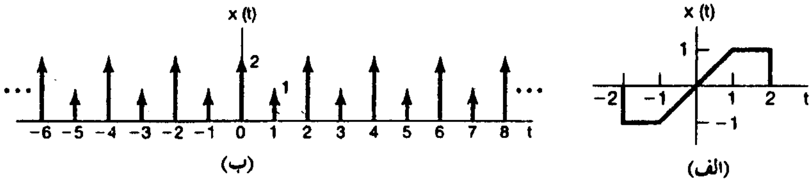
(الف) $\left[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\right]u(t),\alpha>0$ (ب) $e^{-3|t|}\sin 2t$

(ج) $x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t & ; \ |t|\le 1\\ 0 & ; \ |t|>1\end{cases}$ (د) $\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\delta(t-kT),\ |\alpha|<1$

(هـ) $\left[te^{-2t}\sin 4t\right]u(t)$ (و) $\left[\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$

(ز) $x(t)$ شکل م ۴-۲۱ (الف) (ح) $x(t)$ شکل م ۴-۲۱ (ب)

(ط) $x(t)=\begin{cases}1-t^2 & ; \ 0<t<1\\ 0 & ; \ otherwise\end{cases}$ (ی) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-|t-2n|}$



شکل م ۴-۲۱

حل : (الف)

$$f\left\{\left[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\right] u(t)\right\}=\frac{1}{2\pi}f\left\{e^{-\alpha t}u(t)\right\}*f\{\cos\omega_0 t\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\alpha+j\omega}\right]*f\left\{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right\}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\alpha+j\omega}\right]*\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+j(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{\alpha+j(\omega+\omega_0)}\right]=\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_0^2}$$

(ب)

$$f\left\{e^{-3|t|}\sin 2t\right\}=\frac{1}{2\pi}f\left\{e^{-3|t|}\right\}*f\{\sin 2t\}=\frac{1}{j4\pi}\left[\frac{2\times3}{3^2+\omega^2}\right]*f\left[e^{j2t}-e^{-j2t}\right]$$

$$=\frac{1}{j2\pi}\left[\frac{3}{9+\omega^2}\right]*\left[2\pi\delta(\omega-2)-2\pi\delta(\omega+2)\right]=\frac{1}{j}\left[\frac{3}{9+(\omega-2)^2}-\frac{3}{9+(\omega+2)^2}\right]$$

(ج) $x(t)$ را می توان به صورت حاصلضرب دو سیگنال $(1+\cos\pi t)$ و $s_p(t)$ نشان داد، که در آن $s_p(t)$ پالس مستطیلی به ارتفاع 1 و $T_1=1$ می باشد، بنابراین :

$$X(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}=f\left\{s_p(t)\,(1+\cos\pi t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}f\left\{s_p(t)\right\}*f\{1+\cos\pi t\}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right]*f\left\{1+\frac{1}{2}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\pi t}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\omega}{\omega}\right]*\left[2\pi\delta(\omega)+\frac{1}{2}\times2\pi\delta(\omega-\pi)+\frac{1}{2}\times2\pi\delta(\omega+\pi)\right]$$

$$=2\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{\sin(\omega-\pi)}{\omega-\pi}+\frac{\sin(\omega+\pi)}{\omega+\pi}$$

(د)

$$f\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\delta(t-kT)\right\}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\alpha^k f\left\{\delta(t-kT)\right\}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k e^{-j\omega(kT)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\alpha e^{-j\omega T}\right)^k=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega T}}$$

(هـ)

$$f\left\{\left[te^{-2t}\sin 4t\right]u(t)\right\}=f\left\{\left(te^{-2t}u(t)\right)(\sin 4t)\right\}$$

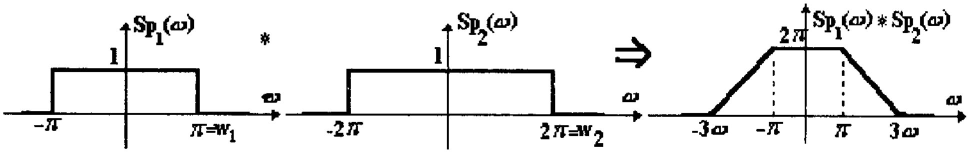
$$=\frac{1}{2\pi}f\left\{te^{-2t}u(t)\right\}*f\{\sin 4t\}=\frac{1}{j4\pi}\left(\frac{1}{(2+j\omega)^2}\right)*f\left\{e^{j4t}-e^{-j4t}\right\}$$

$$=\frac{1}{j4\pi}\left(\frac{1}{(2+j\omega)^2}\right)*\left(2\pi\delta(\omega-4)-2\pi\delta(\omega+4)\right)=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{\left(2+j(\omega-4)\right)^2}-\frac{1}{\left(2+j(\omega+4)\right)^2}\right]$$

$$X(j\omega)=f\left\{\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]\right\}=\frac{1}{2\pi}f\left\{\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right\}*f\left\{\frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}S_{p_1}(\omega)*\left[e^{-j\omega}S_{p_2}(\omega)\right]=\frac{e^{-j\omega}}{2\pi}\left(S_{p_1}(\omega)*S_{p_2}(\omega)\right)$$

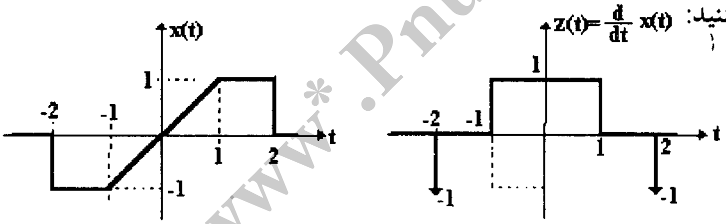
که در آن $s_{p_1}(\omega)$, $s_{p_2}(\omega)$ دو پالس مستطیلی به ارتفاع 1 و به ترتیب با $W_1=\pi$ و $W_2=2\pi$ می باشند (ر-ک جدول 2-4) ، از کانوولوشن این دو تبدیل فوریه به آسانی به شکل زیر خواهیم داشت :



در اینصورت تبدیل فوریه سیگنال کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$X(j\omega)=\frac{e^{-j\omega}}{2\pi}S_{p_1}(\omega)*S_{p_2}(\omega)=\frac{e^{-j\omega}}{2\pi}\begin{cases}2\pi & ;|\omega|<\pi\\ -|\omega|+3\pi & ;\pi\le\omega\le3\pi\\ 0 & ;|\omega|>3\pi\end{cases}$$

ز) برای این مسئله راحتِ تر است که اول تبدیل فوریه مشتق سیگنال را بدست آورده و سپس با استفاده از خاصیت انتگرال گیری جدول $(1$-$4)$ ،تبدیل فوریه سیگنال اصلی را بیابیم ؛ سیگنال $x(t)$ و مشتق آن را در شکل زیر مشاهده می کنید:



دیده می شود که سیگنال $z(t)$ از دو سیگنال (یک جفت ضربه با دامنه -1 و دیگری یک پالس با ارتفاع واحد و $T_1=1$) تشکیل یافته است ، بنابراین برای تبدیل فوریه $z(t)$ می توان نوشت :

$$Z(j\omega)=f\left\{s_p(t)-\delta(t+2)-\delta(t-2)\right\}=f\left\{s_p(t)\right\}-f\left\{\delta(t+2)\right\}-f\left\{\delta(t-2)\right\}$$

$$=\frac{2\sin \omega T_1}{\omega}-e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}=\frac{2\sin \omega}{\omega}-2\cos 2\omega$$

در اینصورت خواهیم داشت :

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}z(t)dt \Rightarrow X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}Z(j\omega)+\pi Z(j0)\delta(\omega)$$

$$\Rightarrow X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}\left[\frac{2\sin \omega}{\omega}-2\cos 2\omega\right]+\pi\times0\delta(\omega)=\frac{2\sin \omega}{j\omega^2}-\frac{2\cos 2\omega}{j\omega}$$

ح) این سیگنال را می توان مجموع دو تسلسل ضربه به صورت زیر در نظر گرفت :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)\ \Rightarrow X(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}=f\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)\right\}$$

$$=\frac{2\pi}{1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{1}k\right)+\frac{2\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{2}k\right)=\pi\left[2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\pi k)\right]$$

در بدست آوردن عبارت اخیر از تبدیل فوریه بیان شده در جدول (2-4) برای سیگنال تسلسل ضربه بهره برده‌ایم.

(ط)
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^1\left(1-t^2\right)e^{-j\omega t}dt=\int_0^1 e^{-j\omega t}dt-\int_0^1 t^2e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_0^1 e^{-j\omega t}dt+\frac{d^2}{d\omega^2}\int_0^1 e^{-j\omega t}dt=\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\Bigg|_1^0+\frac{d^2}{d\omega^2}\left[\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\Bigg|_1^0\right]=\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}+\frac{d^2}{d\omega^2}\left[\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}\right]$$

$$=\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}+\frac{d}{d\omega}\left[\frac{je^{-j\omega}(j\omega)-j\left(1-e^{-j\omega}\right)}{-\omega^2}\right]=\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}-\frac{2j+\left(j\omega^2+2\omega-2j\right)e^{-j\omega}}{\omega^3}$$

(ی) برای این سیگنال می توان نوشت:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-|t-2n|}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-|t|}*\delta(t-2n)\right]=e^{-|t|}*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2n)$$

در اینصورت با توجه به خاصیت کانوولوشن جدول (1-4) می توان نوشت:

$$X(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}=f\left\{e^{-|t|}*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2n)\right\}=f\left\{e^{-|t|}\right\}.f\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2n)\right\}$$

$$=\left(\frac{2\times1}{1^2+\omega^2}\right)\left(\frac{2\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{2}k\right)\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)\delta(\omega-\pi k)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(\pi k)^2}\delta(\omega-\pi k)$$

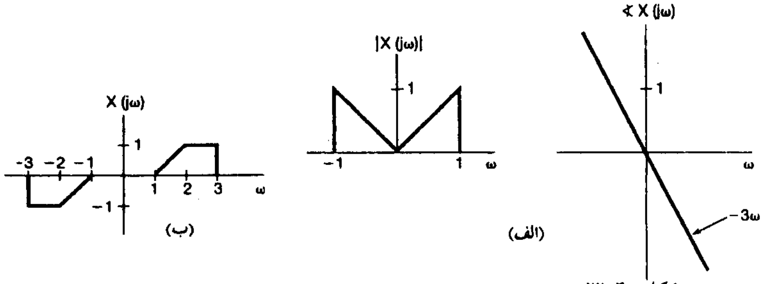
۴-۲۲ سیگنال پیوسته در زمان مربوط به هر یک از تبدیلهای زیر را بیابید:

(الف) $X(j\omega)=\dfrac{2\sin[3(\omega-2\pi)]}{(\omega-2\pi)}$ (ب) $X(j\omega)=\cos\left(4\omega+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(ج) دامنه و فاز $X(j\omega)$ در شکل م۴-۲۲(الف) رسم شده است.

(د) $X(j\omega)=2[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]+3[\delta(\omega-2\pi)+\delta(\omega+2\pi)]$

(هـ) $X(j\omega)$ مطابق شکل م۴-۲۲(ب) است.



شکل م ۴-۲۲

حل : (الف)

$$x(t)=f^{-1}\left\{X(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{2\sin\left[3(\omega-2\pi)\right]}{(\omega-2\pi)}\right\}=e^{j2\pi t}f^{-1}\left\{\frac{2\sin 3\omega}{\omega}\right\}=e^{j2\pi t}s_p(t)$$

که در آن $s_p(t)$ یک پالس مستطیلی به ارتفاع 1 و با $T_1=3$ می باشد.

(ب)

$$x(t)=f^{-1}\left\{X(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\cos\left(4\omega+\frac{\pi}{3}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1}{2}e^{j\left(4\omega+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{1}{2}e^{-j\left(4\omega+\frac{\pi}{3}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}f^{-1}\left\{e^{j4\omega}\right\}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}f^{-1}\left\{e^{-j4\omega}\right\}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(t+4)+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(t-4)$$

(ج) برای تبدیل فوریه این سیگنال می توان نوشت:

$$X(j\omega)=\left|X(j\omega)\right|e^{j\angle X(j\omega)}=\begin{cases}|\omega|\;e^{-j3\omega} & ;\;|\omega|<1\\ 0 & ;\;elsewhere\end{cases}$$

در اینصورت $x(t)$ را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}|\omega|\;e^{-j3\omega}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_{-1}^{0}\omega e^{j\omega(t-3)}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+1}\omega e^{j\omega(t-3)}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}\omega e^{-j\omega(t-3)}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}\omega e^{j\omega(t-3)}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\omega\cos\omega(t-3)d\omega=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\omega\sin\omega(t-3)}{(t-3)}\Bigg|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{\sin\omega(t-3)}{(t-3)}d\omega\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin(t-3)}{(t-3)}+\frac{\cos(t-3)-1}{(t-3)^2}\right\}$$

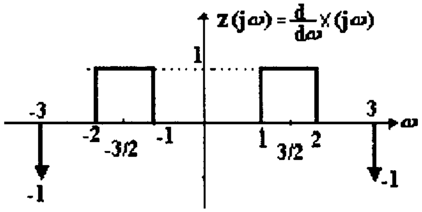
(د)

$$x(t)=f^{-1}\left\{X(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{2\left[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\right]+3\left[\delta(\omega-2\pi)+\delta(\omega+2\pi)\right]\right\}$$

$$=2f^{-1}\left\{\delta(\omega-1)\right\}-2f^{-1}\left\{\delta(\omega+1)\right\}+3f^{-1}\left\{\delta(\omega-2\pi)\right\}+3f^{-1}\left\{\delta(\omega+2\pi)\right\}$$

$$= \frac{2}{2\pi}e^{jt} - \frac{2}{2\pi}e^{-jt} + \frac{3}{2\pi}e^{j2\pi t} + \frac{3}{2\pi}e^{-j2\pi t} = j\frac{2}{\pi}\sin t + \frac{3}{\pi}\cos 2\pi t$$

(هـ) در اینجا راحت تر است که به عوض $X(j\omega)$ با مشتق آن که در شکل زیر نمایش داده شده است کار کنیم :



دیده می شود که $Z(j\omega)$ از یک جفت سیگنال ضربه و دو پالس مستطیلی به ارتفاع 1 و $W=\frac{1}{2}$ که به چپ و راست منتقل شده اند تشکیل شده است ،برای $z(t)$ می توان نوشت :

$$z(t)=f^{-1}\left\{Z(j\omega)\right\} = f^{-1}\left\{-\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)+S_p\left(\omega-\frac{3}{2}\right)+S_p\left(\omega+\frac{3}{2}\right)\right\}$$

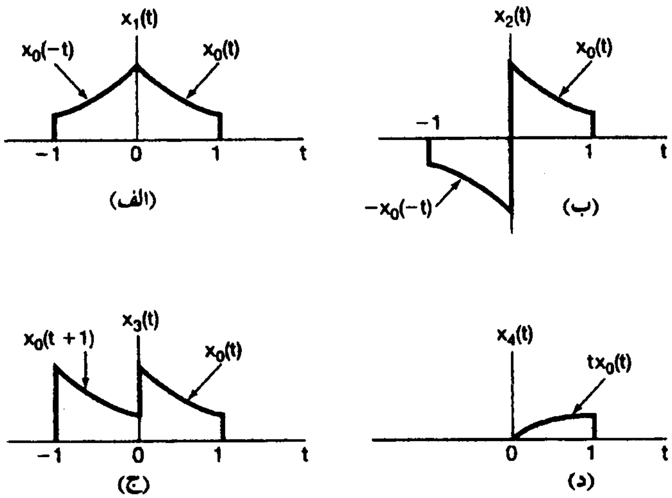
$$= -\frac{1}{2\pi}e^{-j3t}-\frac{1}{2\pi}e^{j3t}+e^{j\left(\frac{3}{2}\right)t}\left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t}\right)+e^{-j\left(\frac{3}{2}\right)t}\left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos(3t)+\frac{2}{\pi t}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

حال با توجه به جدول $(1\text{-}4)$ و از خاصیت مشتقگیری فرکانسی می توان نوشت :

$$Z(j\omega)=\frac{dX(j\omega)}{d\omega}=f\left\{-jtx(t)\right\} \Rightarrow -jtx(t)=z(t)$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{j}{t}z(t)=-\frac{j}{\pi t}\cos(3t)+\frac{2j}{\pi t^2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$



شکل م ۴-۲۳

۴-۲۳ سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x_o(t)=\begin{cases} e^{-t} & ; \quad 0\le t\le 1 \\ 0 & ; \quad otherwise \end{cases}$$

تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای شکل م۴-۲۳ را بدست آورید. باید بتوانید این کار را تنها با محاسبه تبدیل فوریه $x_o(t)$ و سپس استفاده از خواص تبدیل فوریه انجام دهید.

حل : ابتدا تبدیل فوریه سیگنال $x_o(t)$ را بدست می آوریم :

$$X_o(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^1 e^{-t}e^{-j\omega t}dt=\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{1+j\omega}\Bigg|_1^0=\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$$

اکنون تبدیل های فوریه سیگنال های شکل های (الف) تا (د) را می توان بصورت زیر و با کمک تبدیل فوریه سیگنال $x_o(t)$ بدست آورد:

(الف)

$$X_1(j\omega)=f\left\{x_1(t)\right\}=f\left\{x_o(t)+x_o(-t)\right\}=f\left\{x_o(t)\right\}+f\left\{x_o(-t)\right\}$$

$$=X_o(j\omega)+X_o(-j\omega)=\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}+\frac{1-e^{-(1-j\omega)}}{1-j\omega}=\ldots=2\,\frac{1-e^{-1}\cos\omega+\omega e^{-1}\sin\omega}{1+\omega^2}$$

(ب)

$$X_2(j\omega)=f\left\{x_2(t)\right\}=f\left\{x_o(t)-x_o(-t)\right\}=f\left\{x_o(t)\right\}-f\left\{x_o(-t)\right\}$$

$$=X_o(j\omega)-X_o(-j\omega)=\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}-\frac{1-e^{-(1-j\omega)}}{1-j\omega}=\ldots=j2\left[\frac{e^{-1}\sin\omega+\omega e^{-1}\cos\omega-1}{1+\omega^2}\right]$$

(ج)

$$X_3(j\omega)=f\left\{x_3(t)\right\}=f\left\{x_o(t)+x_o(t+1)\right\}=f\left\{x_o(t)\right\}+f\left\{x_o(t+1)\right\}$$

$$=X_o(j\omega)+e^{j\omega\times 1}X_o(j\omega)=\left(1+e^{j\omega}\right)X_o(j\omega)=\left(1+e^{j\omega}\right)\left(\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}\right)$$

(د)

$$X_4(j\omega)=f\left\{x_4(t)\right\}=f\left\{tx_o(t)\right\}=j\frac{d}{d\omega}f\left\{x_o(t)\right\}$$

$$=j\frac{d}{d\omega}X_o(j\omega)=j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}\right)=\frac{1-2e^{-(1+j\omega)}-j\omega e^{-(1+j\omega)}}{(1+j\omega)^2}$$

۴-۲۴ (الف) تعیین کنید تبدیل فوریه کدام یک از سیگنالهای حقیقی شکل م۴-۲۴، هر یک از شرایط زیر را برآورده می‌کنند:

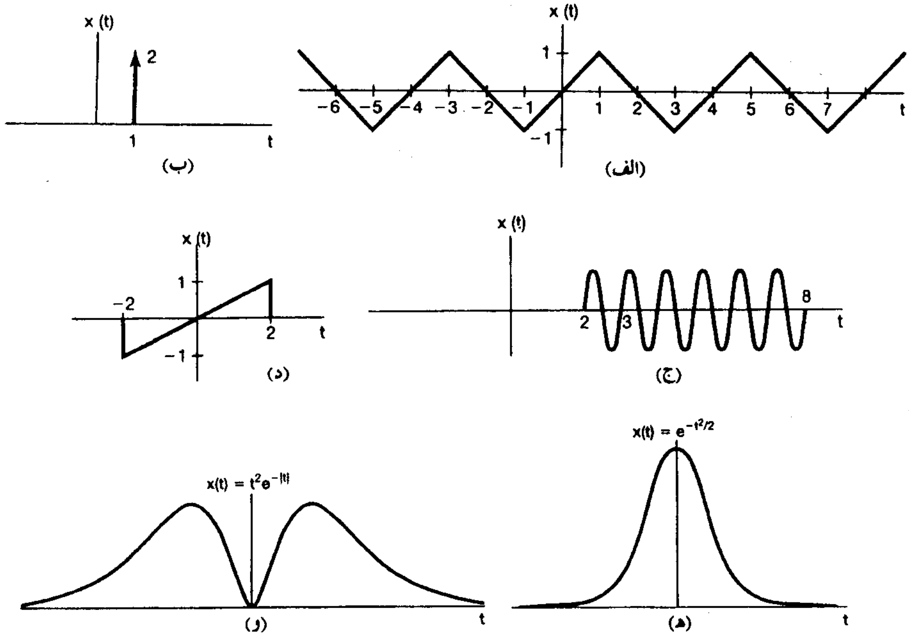
(۱) $\Re e\{X(j\omega)\}=0$ (۲) $Im\{X(j\omega)\}$

(۳) می‌توان یک α حقیقی بدست آورد به نحوی که $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ حقیقی باشد.

(۴) $\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)d\omega=0$ (۵) $\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)d\omega=0$

(۶) $X(j\omega)$ متناوب است.

(ب) سیگنالی بسازید که خصوصیات (۱)، (۴) و (۵) را داشته و بقیه را نداشته باشد.



شکل م ۴-۲۴

حل : (شکل الف) چون سیگنال $x(t)$ حقیقی و فرد است ، با توجه به جدول (4-1)، $X(j\omega)$ موهومی خالص و فرد خواهد بود ، بنابراین :

$$(1)\quad Re\left\{X(j\omega)\right\}=0$$

$$(2)\quad Im\left\{X(j\omega)\right\}\neq 0$$

(3) می دانیم که ضرب $e^{j\omega\alpha}$ در $X(j\omega)$ در حوزه فرکانس به مفهوم انتقال زمانی سیگنال $x(t)$ به اندازه α در حوزه زمان می باشد، بنابراین با توجه به شکل (الف) اگر انتخاب کنیم: $\alpha=2k-1$, $k\in z$ سیگنال حاصل در حوزه زمان سیگنالی حقیقی و زوج خواهد بود و بنابراین تبدیل فوریه آن یعنی $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ حتما حقیقی خواهد بود .

(4) از آنجا که $X(j\omega)$ فرد است ،انتگرال آن روی بازه $(-\infty,+\infty)$ صفر خواهد بود، یعنی :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)d\omega=0$$

(5) چون $X(j\omega)$ فرد می باشد، سیگنال $\omega X(j\omega)$ زوج بوده و انتگرال آن بر روی بازه $(-\infty,+\infty)$ مخالف صفر خواهد بود ،یعنی :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)d\omega\neq 0$$

(6)باتوجه به نامتناوب بودن ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$،تبدیل فوریه آن نیز نامتناوب خواهد بود.

(شکل ب) این سیگنال یک سیگنال ضربه تنها می باشد که در لحظه $t=1$ رخ داده است، بنابراین نه زوج

و نه فرد است، بلکه یک بخش زوج و یک بخش فرد دارد، در اینصورت تبدیل فوریه بـخش زوج آن، حقیقی و زوج بوده و تبدیل فوریه بخش فرد آن ،موهومی خالص و فرد خواهد بود و داریم :

$$(1)\quad Re\left\{X(j\omega)\right\}\neq 0$$

$$(2)\quad Im\left\{X(j\omega)\right\}\neq 0$$

(3) برای آنکه $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ حقیقی باشد کافیست α را بگونه ای انتخاب کنیم که سیگنال متناظرش در حوزه زمان سیگنالی زوج شود، در این مورد با انتخاب $\alpha=1$ کاری می کنیم تا سیگنال ضربه به مبدا منتقل شود، یعنی :

$$f^{-1}\left\{e^{j\omega}X(j\omega)\right\}=2x(t+1)=2\delta((t+1)-1)=2\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\mid_{t=0}=2\pi x(0)=0 \qquad (5,4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)d\omega=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}(-j)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\mid_{t=0}=-2\pi j\frac{d}{dt}x(t)\mid_{t=0}=0$$

(6) $X(j\omega)$ متناوب است ، زیرا :

$$X(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}=f\left\{2\delta(t-1)\right\}=2e^{-j\omega}f\left\{\delta(t)\right\}=2e^{-j\omega}\Rightarrow X(j(\omega+2\pi))=X(j\omega)$$

دیده می شود که $X(j\omega)$ متناوب با تناوب پایه 2π می باشد.

(شکل -ج) $x(t)$ را می توان به صورت زیر نشان داد :

$$x(t)=z(t-5)$$

که در آن $z(t)$ سیگنال فردی است که به اندازه $t_o=5$، در زمان تاخیر یافته است . چون $z(t)$ فرد و حقیقی است ، تبدیل فوریه اش $Z(j\omega)$ موهومی خالص و فرد خواهد بود ، در اینصورت تبدیل فوریه $x(t)$ یعنی :

$$X(j\omega)=f\left\{z(t-5)\right\}=e^{-j5\omega}Z(j\omega)$$

نه زوج و نه فرد است ، بنابراین همچون بندهای قبل داریم :

$$(1)\quad Re\left\{X(j\omega)\right\}\neq 0$$

$$(2)\quad Im\left\{X(j\omega)\right\}\neq 0$$

(3) می توان با توجه به شکل (ج)مشاهده کرد که به ازای هیچ انتقال زمانی، سیگنال $x(t)$ زوج نمی شود، بنابراین به ازای هیچ مقدار حقیقی از α، تبدیل فوریه حاصل یعنی $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ حقیقی نخواهد بود.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\mid_{t=0}=2\pi x(0)=0 \qquad (5,4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)d\omega=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}(-j)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\mid_{t=0}=-2\pi j\frac{d}{dt}x(t)\mid_{t=0}=0$$

(6) با توجه به نامتناوب بودن $x(t)$، $X(j\omega)$ نیز نامتناوب می باشد.

(شکل د) $x(t)$ سیگنالی حقیقی و فرد است ،بنابراین :

$$(1)\quad Re\left\{X(j\omega)\right\}=0$$

$$(2)\quad Im\left\{X(j\omega)\right\}\neq 0$$

(3) به ازای هیچ انتقال زمانی نمی توان $x(t)$ را به سیگنالی زوج (و در نتیجه دارای تبدیل فوریه حقیقی

$e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$) تبدیل نمود.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \mid_{t=0} = 2\pi x(0) = 0$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(j\omega)d\omega = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (-j)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \mid_{t=0}$

$= -j\frac{d}{dt}(2\pi x(t)) \mid_{t=0} = -2\pi j x'(0) = -2\pi j \left(\frac{1}{2}\right) = -\pi j$

(شکل هـ) $x(t)$ سیگنالی حقیقی و فرد است، بنابراین :

(1) $Re\left\{X(j\omega)\right\} \neq 0$

(2) $Im\left\{X(j\omega)\right\} = 0$

(3) در این شکل هیچ انتقال زمانی بغیر از $t_o=0$، $(\alpha=0)$ سیگنالی زوج بدست نخواهد داد، بنابراین تنها α ی قابل قبول $\alpha=0$ می باشد.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \mid_{t=0} = 2\pi x(0) = 2\pi$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(j\omega)d\omega = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (-j)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \mid_{t=0}$

$= -2\pi j\frac{d}{dt}x(t) \mid_{t=0} = -2\pi j \left(-te^{\frac{-t^2}{2}}\right)\Bigg|_{t=0} = 0$

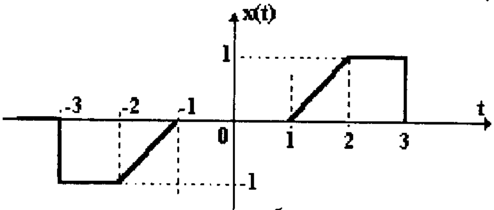
(6) با توجه به نامتناوب بودن $x(t)$، $X(j\omega)$ نیز نامتناوب می باشد.

(شکل -و) تمام موارد $(6,3,2,1)$ در این شکل درست مثل (شکل هـ) می باشند، برای موارد 4و 5 نیز خواهیم داشت :

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \mid_{t=0} = 2\pi x(0) = 0$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(j\omega)d\omega = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (-j)X(j\omega)e^{j\omega t}dt \mid_{t=0} = -2\pi j x'(0) = 0$

(ب) سیگنال زیر یک سیگنال پیشنهادی برای خواص داده شده می باشد:



زیرا اولا فرد و حقیقی است و بنابراین تبدیل فوریه آن موهومی خالص خواهد بود. ثانیا با هیچ انتقال زمانی زوج نمی شود،ثالثا هم خودش وهم مشتقش درمبدا مساوی صفر هستندوبالاخره نامتناوب است.

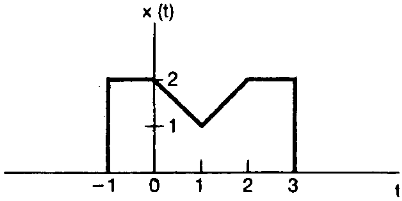
۴-۲۵ $X(j\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ شکل م۴-۲۵ است.

(الف) $\angle X(j\omega)$ را بیابید. (ب) $X(j0)$ را بیابید.

(ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega$ را بیابید. (د) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$ را بیابید.

(هـ) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$ را حساب کنید. (و) عکس تبدیل فوریه $\Re e\{X(j\omega)\}$ را رسم کنید.

راهنمایی : می‌توانید تمام این محاسبات را بدون یافتن $X(j\omega)$ انجام دهید.



شکل م ۴-۲۵

حل : ابتدا مشاهده می کنیم که $x(t)$ انتقال یافته یک سیگنال حقیقی و زوج می باشد، اگر این سیگنال حقیقی و زوج را $z(t)$ بنامیم ، تبدیل فوریه‌اش $Z(j\omega)$ نیز حقیقی و زوج خواهد بود و داریم :

$$x(t)=z(t-1) \Rightarrow X(j\omega)=e^{-j\omega}Z(j\omega)$$

(الف) در اینصورت با توجه به حقیقی بودن $Z(j\omega)$ خواهیم داشت :

$$|X(j\omega)| = |e^{-j\omega}|\ |Z(j\omega)| = |Z(j\omega)| \quad , \angle X(j\omega)=-\omega$$

(ب)

$$X(j0)= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\ |_{\omega=0}= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \text{ناحیه زیر منحنی } x(t) = 7$$

(ج)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega\times 0}d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

(د) با فرض $Y(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}$ خواهیم داشت :

$$y(t)=f^{-1}\left\{\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}\right\}=s_p(t+2)$$

که در آن $s_p(t)$ یک پالس مستطیلی به ارتفاع 1 و با $T_1=1$ می باشد.بدین ترتیب می توانیم بنویسیم :

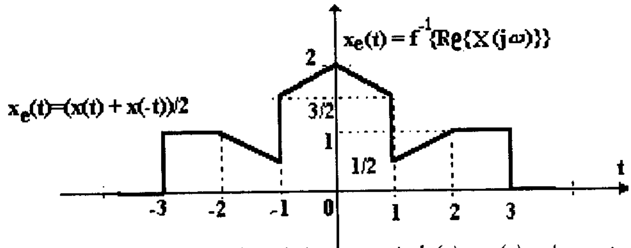
$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)Y(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)Y(j\omega)e^{j\omega\times 0}d\omega$$

$$=2\pi f^{-1}\{X(j\omega)Y(j\omega)\}\ |_{t=0} = 2\pi\{x(t)*y(t)\}\ |_{t=0} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(0-\tau)d\tau = 7\pi$$

(هـ) با توجه به رابطه پارسوال می توان دید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi\left(\frac{38}{3}\right) = 26\pi - \frac{2}{3}\pi$$

(و) چون سیگنال $x(t)$ سیگنالی حقیقی است، بخش حقیقی تبدیل فوریه آن، تبدیل فوریه بخش زوج $x(t)$ می باشد، بنابراین برای بدست آوردن عکس تبدیل فوریه سیگنال $Re\{X(j\omega)\}$ کافیست بخش زوج $x(t)$ را بیابیم ،این سیگنال در شکل زیر محاسبه و رسم شده است :



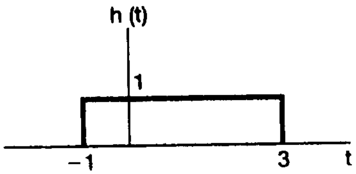
۴-۲۶ (الف) کانولوشن زوجهای $x(t)$ و $h(t)$ داده شده را با محاسبه $X(j\omega)$ و $H(j\omega)$، استفاده از خاصیت کانولوشن و عکس تبدیل فوریه بدست آورید.

$$h(t)=e^{-4t}u(t)\ ,\ x(t)=te^{-2t}u(t)\quad (i)$$

$$h(t)=te^{-4t}u(t)\ ,\ x(t)=te^{-2t}u(t)\quad (ii)$$

$$h(t)=e^{t}u(-t)\ ,\ x(t)=e^{-t}u(t)\quad (iii)$$

(ب) فرض کنید $x(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$ و $h(t)$ مطابق شکل م۴-۲۶ است. خاصیت کانولوشن را با توجه به این زوج سیگنال نشان دهید. به این منظور تبدیل فوریه $y(t)=x(t)*h(t)$ و حاصلضرب $H(j\omega)X(j\omega)$ را بیابید.



شکل م ۴-۲۶

حل : (الف-i)ابتدا داریم :

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}f\left\{h(t)\right\}=f\left\{te^{-2t}u(t)\right\}f\left\{e^{-4t}u(t)\right\}$$

$$=\left[j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right)\right]\left[\frac{1}{4+j\omega}\right]=\left[\frac{1}{(2+j\omega)^2}\right]\left[\frac{1}{4+j\omega}\right]=\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{2+j\omega}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{(2+j\omega)^2}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{4+j\omega}$$

در اینصورت برای کانوولوشن سیگنال های $x(t)$ و $h(t)$ می توان نوشت :

$$x(t)*h(t)=y(t)=f^{-1}\left\{Y(j\omega)\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{2+j\omega}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{(2+j\omega)^2}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{4+j\omega}\right\}=-\frac{1}{4}e^{-2t}u(t)+\frac{1}{2}te^{-2t}u(t)+\frac{1}{4}e^{-4t}u(t)$$

(الف-ii)

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}f\left\{h(t)\right\}=f\left\{te^{-2t}u(t)\right\}f\left\{te^{-4t}u(t)\right\}$$

$$=\left[j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right)\right]\left[j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{4+j\omega}\right)\right]=\left[\frac{1}{(2+j\omega)^2}\right]\left[\frac{1}{(4+j\omega)^2}\right]$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{2+j\omega}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{(2+j\omega)^2}+\frac{\left(+\frac{1}{4}\right)}{4+j\omega}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{(4+j\omega)^2}$$

$$\Rightarrow x(t)*h(t)=y(t)=f^{-1}\left\{Y(j\omega)\right\}=\ldots=\left(-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}te^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-4t}+\frac{1}{4}te^{-4t}\right)u(t)$$

الف-iii)

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}f\left\{h(t)\right\}=f\left\{e^{-t}u(t)\right\}f\left\{e^{t}u(-t)\right\}=\left(\frac{1}{1+j\omega}\right)\left(\frac{1}{1-j\omega}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1+j\omega}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-j\omega}\Rightarrow x(t)*h(t)=y(t)=f^{-1}\left\{Y(j\omega)\right\}=\frac{1}{2}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{t}u(-t)=\frac{1}{2}e^{-|t|}$$

ب) ابتدا کانوولوشن سیگنال های $x(t)$ و $h(t)$ را بدست می آوریم :

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{2}^{+\infty}e^{-(\tau-2)}h(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & ;t<1\\ \int_{2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau & ;1\le t<5\\ \int_{t-3}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau & ;t\ge 5\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & t<1\\ 1-e^{-(t-1)} & ;1\le t<5\\ e^{-(t-5)}-e^{-(t-1)} & ;t\ge 5\end{cases}=\left(u(t-1)-u(t-5)\right)-e^{-(t-1)}u(t-1)+e^{-(t-5)}u(t-5)$$

$$=s_p(t-3)-e^{-(t-1)}u(t-1)+e^{-(t-5)}u(t-5)$$

که در آن $s_p(t)$ سیگنال پالس مستطیلی به ارتفاع 1 و با $T_1=2$ می باشد، در اینصورت برای $Y(j\omega)$ خواهیم داشت :

$$Y(j\omega)=f\left\{y(t)\right\}=f\left\{s_p(t-3)-e^{-(t-1)}u(t-1)+e^{-(t-5)}u(t-5)\right\}$$

$$=e^{-j3\omega}\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}-e^{-j\omega}\frac{1}{1+j\omega}+e^{-j5\omega}\frac{1}{1+j\omega}=2e^{-j3\omega}\frac{\sin 2\omega}{\omega}-e^{-j3\omega}\frac{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}}{1+j\omega}$$

$$=2e^{-j3\omega}\frac{\sin 2\omega}{\omega}-2je^{-j3\omega}\frac{\sin 2\omega}{1+j\omega}=\frac{2e^{-j3\omega}\sin 2\omega}{\omega(1+j\omega)}=\left[\frac{e^{-2j\omega}}{1+j\omega}\right]\left[\frac{e^{-j\omega}\times 2\sin 2\omega}{\omega}\right]$$

$$=X(j\omega)H(j\omega)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$f\left\{x(t)*h(t)\right\}=X(j\omega)H(j\omega)$$

که همان خاصیت کانوولوشن تبدیل فوریه است که در جدول $(1\text{-}4)$ نیز آمده است .

۴–۲۷ سیگنالهای زیر ا در نظر بگیرید

$$x(t)=u(t-1)-2u(t-2)+u(t-3)$$

و

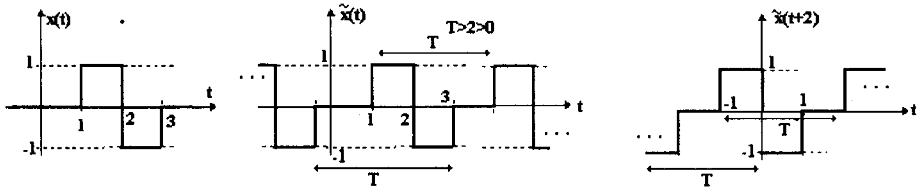
$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$$

که در آن $T>0$. a_k را ضرایب سری فوریه $\tilde{x}(t)$ و $X(j\omega)$ را تبدیل فوریه $x(t)$ فرض کنید.

(الف) عبارت ریاضی $X(j\omega)$ را بیابید.

(ب) عبارت ریاضی ضرایب a_k را یافته، نشان دهید که $a_k=\frac{1}{T}X\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)$.

حل : (الف) سیگنال های $x(t)$, $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(t+2)$ را در شکل زیر مشاهده می کنید:



حال می توان تبدیل فوریه $x(t)$ را بدست آورد:

$$X(j\omega)=f\left\{s_p\left(t-\frac{3}{2}\right)-s_p\left(t-\frac{5}{2}\right)\right\}=e^{-j\omega\left(\frac{3}{2}\right)}f\left\{s_p(t)\right\}-e^{-j\omega\left(\frac{5}{2}\right)}f\left\{s_p(t)\right\}$$

که در آن $s_p(t)$ سیگنال پالسی با ارتفاع واحد و پهنای $T_1=\frac{1}{2}$ می باشد، بنابراین داریم :

$$X(j\omega)=e^{-j\omega\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}-e^{-j\omega\left(\frac{5}{2}\right)}\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}=\frac{2e^{-j2\omega}}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[e^{\frac{j\omega}{2}}-e^{-\frac{j\omega}{2}}\right]$$

$$=\frac{4je^{-j2\omega}}{\omega}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad ,(I)$$

(ب) برای ضرایب سری فوریه سیگنال $\tilde{x}(t)$ خواهیم داشت :

$$\tilde{x}(t)\xrightarrow{Fs}a_k \Rightarrow \tilde{x}(t+2)\xrightarrow{Fs}b_k=e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)\times 2}a_k$$

حال قبل از محاسبه ضرایب a_k،ضرایب سری فوریه b_k را بدست می آوریم (محاسبه ضرایب $\tilde{x}(t+2)$ به علت فرد بودنش ساده تر به نظر می رسد):

$$b_k=\frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t+2)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-1}^{0}e^{-jk\omega_0 t}dt-\frac{1}{T}\int_0^1 e^{-jk\omega_0 t}dt=\ldots=\frac{2}{T}\left[\frac{-1+\cos k\omega_0}{jk\omega_0}\right]$$

$$=\frac{4j}{k\omega_0 T}\sin^2\left(\frac{k\omega_0}{2}\right) \quad \Rightarrow a_k=e^{-j2k\omega_0}b_k=\frac{4je^{-j2\left(k\omega_0\right)}}{\left(k\omega_0\right)T}\sin^2\left(\frac{k\omega_0}{2}\right) \qquad ,(II)$$

با مقایسه روابط (I) و (II) می بینیم که برای بدست آوردن a_k ها تنها کافی است تا قرار دهیم :

$$a_k=\frac{1}{T}X(j\omega)\mid_{\omega=k\omega_0}=\frac{1}{T}X\ (jk\omega_0)\ =\frac{1}{T}X\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

۴-۲۸ (الف) $X(j\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ و

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{jn\omega_0 t}$$

نمایش سری فوریه سیگنال متناوب $p(t)$، با فرکانس پایه ω_0 است.تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید

$$y(t)=x(t)p(t) \qquad (م\ ۴-۲۸-۱)$$

(ب) فرض کنید $X(j\omega)$ مطابق شکل م۴-۲۸(الف) است. طیف $y(t)$ معادله (م۴-۲۸-۱) را به ازای هر یک از $p(t)$ های زیر رسم کنید.

(i) $p(t)=\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ (ii) $p(t)=\cos(t)$

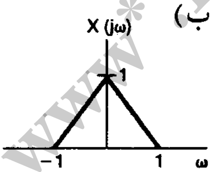
(iii) $p(t)=\cos(2t)$ (iv) $p(t)=(\sin t)(\sin 2t)$

(v) $p(t)=\cos 2t-\cos t$ (iv) $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\pi n)$

(vii) $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2\pi n)$ (viii) $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4\pi n)$

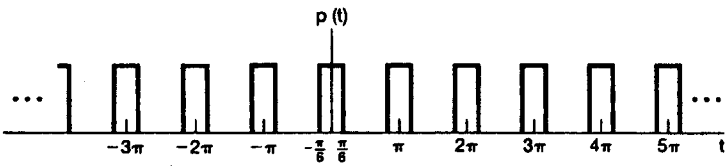
(ix) $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2\pi n)-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\pi n)$

(x) $p(t)$ موج چهارگوش متناوب شکل م۴-۲۸(ب)



(الف)

شکل م ۴-۲۸



(ب)

حل : (الف) با توجه به خاصیت ضرب جدول (4-1) می توان نوشت :

$$Y(j\omega)=f\left\{y(t)\right\}=f\left\{x(t)p(t)\right\}=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*P(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*f\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k f\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}\right]=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\ \left(2\pi\delta\ \left(\omega-k\omega_0\right)\ \right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_0)) \qquad ,(I)$$

توجه شود که ω_0، زمان تناوب پایه سیگنال $p(t)$ می باشد و برابر است با: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

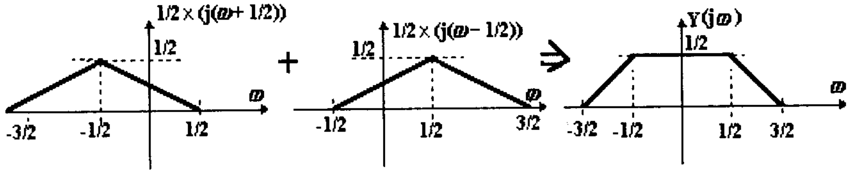
ب-i) ابتدا ضرایب a_k را بدست می آوریم ، برای این سیگنال $\omega_0 = \frac{1}{2}$ بوده و داریم :

$$p(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{t}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{1}{2}\right)t} \Rightarrow a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \quad , a_{k\neq\pm1} = 0$$

در اینصورت با توجه به رابطه (I) داریم :

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_0)) = \frac{1}{2}X\left(j\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}X\left(j\left(\omega - \frac{1}{2}\right)\right)$$

این سیگنال در شکل زیر مشاهده می شود.



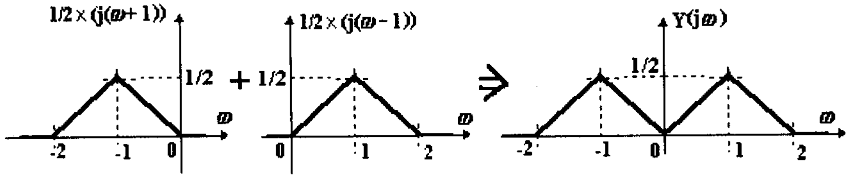
ب-ii)

$$p(t) = \cos t = \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(1)t} \Rightarrow a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \quad , a_{k\neq\pm1} = 0$$

دوباره با توجه به رابطه (I) می توان نوشت :

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_0)) = \frac{1}{2}X(j(\omega+1)) + \frac{1}{2}X(j(\omega-1))$$

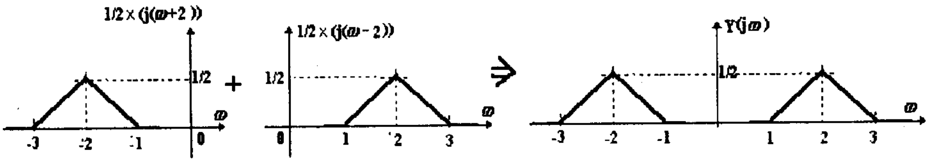
سیگنال حاصل به شکل زیر است :



ب-iii)

$$p(t) = \cos(2t) = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2)t} \Rightarrow a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \quad , a_{k\neq\pm2} = 0$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_0)) = \frac{1}{2}X(j(\omega-2)) + \frac{1}{2}X(j(\omega+2))$$



ب-iv)

$$p(t)=(\sin t)(\sin 2t)=\left[\frac{1}{2j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right]\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j2t}-e^{-j2t}\right)\right]$$

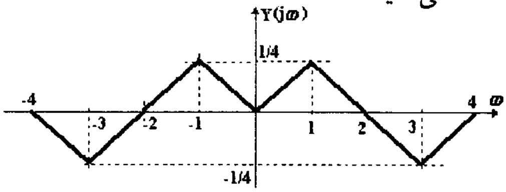
$$=-\frac{1}{4}e^{j3t}+\frac{1}{4}e^{jt}+\frac{1}{4}e^{-jt}-\frac{1}{4}e^{-j3t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(1)t}$$

$$\Rightarrow a_1=a_{-1}=-a_3=-a_{-3}=\frac{1}{4} \quad ,a_k\ (when: k\neq\pm1,\pm3)=0$$

$$Y(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k X\left(j\left(\omega-k\omega_0\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{4}X(j(\omega+3))+\frac{1}{4}X(j(\omega+1))+\frac{1}{4}X(j(\omega-1))-\frac{1}{4}X(j(\omega-3))$$

این سیگنال را در شکل زیر مشاهده می کنید:



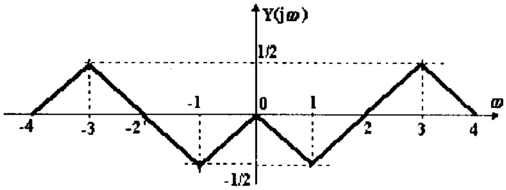
ب-v)

$$p(t)=\cos 2t-\cos t=\left[\frac{1}{2}e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{-j2t}\right]-\left[\frac{1}{2}e^{jt}+\frac{1}{2}e^{-jt}\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(1)t}$$

$$\Rightarrow a_2=a_{-2}=-a_1=-a_{-1}=\frac{1}{2},a_k\ (when: k\neq\pm1,\pm2)=0\Rightarrow Y(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k X\left(j\left(\omega-k\omega_0\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}X(j(\omega+2))-\frac{1}{2}X(j(\omega+1))-\frac{1}{2}X(j(\omega-1))+\frac{1}{2}X(j(\omega-2))$$

که به صورت زیر است :

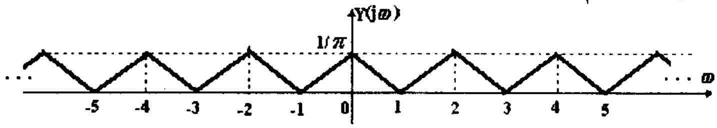


ب-vi)

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\pi n)\Rightarrow a_k=\frac{1}{T}\int_T p(t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{0^-}^{\pi^-}\delta(t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{\pi}\right)t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0^-}^{\pi^-}\delta(t)e^{-j2k\times0}dt=\frac{1}{\pi}\Rightarrow Y(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k X\left(j\left(\omega-k\omega_0\right)\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(\omega-2k))$$

این سیگنال نیز در شکل زیر رسم شده است :

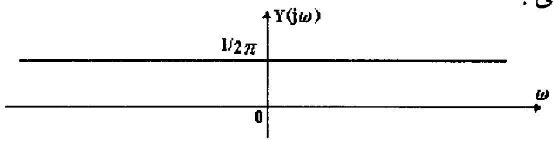


۷(ب-vii)

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2\pi n)\ \Rightarrow a_k=\frac{1}{T}\int_T p(t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0^-}^{2\pi^-}\delta(t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{2\pi}\right)t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0^-}^{2\pi^-}\delta(t)e^{-jk\times 0}dt=\frac{1}{2\pi}\ \Rightarrow Y(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kX\left(j\left(\omega-k\omega_0\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(\omega-k))$$

سیگنال حاصل به شکل زیر می باشد.



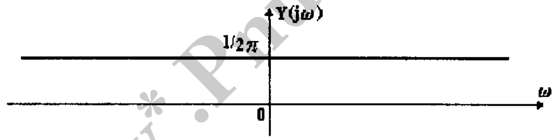
(ب-$viii$)

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4\pi n)\Rightarrow a_k=\frac{1}{T}\int_T p(t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}dt=\frac{1}{4\pi}\int_{0^-}^{4\pi^-}\delta(t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{4\pi}\right)t}dt$$

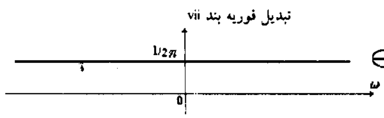
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{0^-}^{4\pi^-}\delta(t)e^{-j\left(\frac{k}{2}\right)\times 0}dt=\frac{1}{4\pi}$$

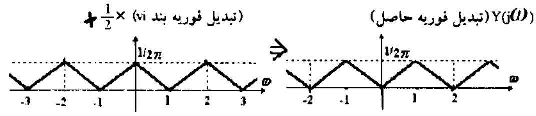
$$\Rightarrow\ Y(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kX\left(j\left(\omega-k\omega_0\right)\right)=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(j\left(\omega-\frac{k}{2}\right)\right)$$

که سیگنال حاصل به صورت زیر است :



(ب-ix) با توجه به اینکه $p(t)$ در این بند ترکیبی خطی از $p(t)$های (vii) و (vi) می باشد، تبدیل فوریه حاصل نیز ترکیب خطی از تبدیل های فوریه بدست آمده در این بند ها خواهد بود، این مطلب در شکل زیر نشان داده شده است :





(ب-x) ابتدا ضرایب a_k را برای تسلسل پالس (سیگنال $(p(t)$) محاسبه می کنیم :

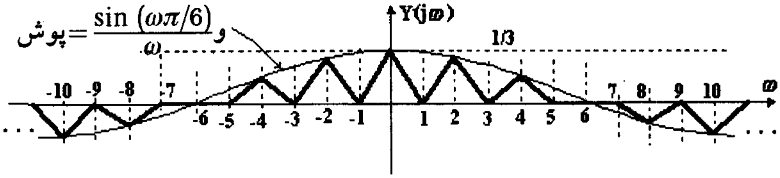
$$a_k=\frac{1}{T}\int_T p(t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}p(t)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{\pi}\right)t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{+\frac{\pi}{6}}e^{-j2kt}dt$$

$$=\frac{e^{-jk2t}}{j2k\pi}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{k\pi}\times\frac{e^{jk\frac{\pi}{3}}-e^{-jk\frac{\pi}{3}}}{j2}=\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{k\pi}$$

در اینصورت با توجه به رابطه (I) می توان نوشت :

$$Y(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X\left(j\left(\omega-k\omega_0\right)\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{k\pi}X(j(\omega-2k))$$

و شکل حاصل به صورت زیر خواهد بود :



۲۹-۴ $x(t)$ تابع حقیقی پیوسته در زمانی است که شکل م۴-۲۹ (الف) اندازه و فاز تبدیل فوریه $X(j\omega)$ آن را نشان می‌دهد.

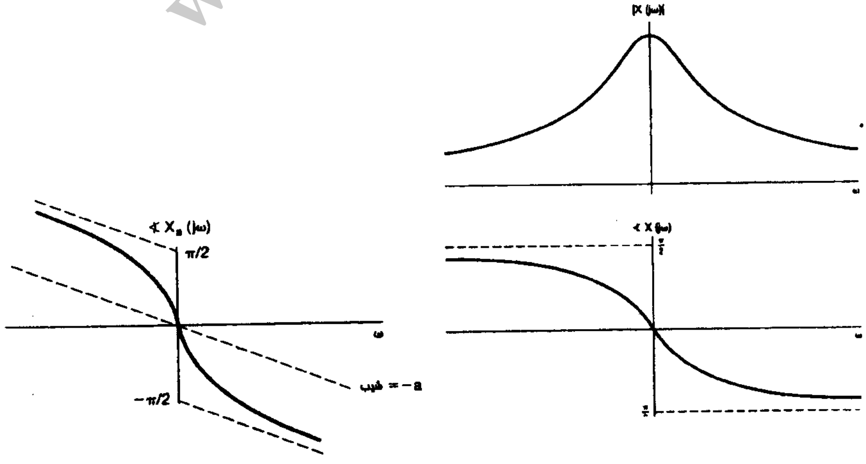
اندازه تبدیل فوریه توابع $x_a(t)$، $x_b(t)$، $x_c(t)$ و $x_d(t)$ همان اندازه $X(j\omega)$ است، ولی فاز تبدیل فوریه هر یک متفاوت، و مطابق شکلهای م۴-۲۹ (ب) تا (هـ) است. $\angle X_a(j\omega)$ و $\angle X_b(j\omega)$ با افزودن یک فاز خطی به $\angle X(j\omega)$ بدست آمده‌اند. برای بدست آوردن $\angle X_c(j\omega)$، $\angle X(j\omega)$ را حول $\omega=0$ منعکس کرده‌ایم و $\angle X_d(j\omega)$ از جمع $\angle X_c(j\omega)$ و یک فاز خطی بدست آمده است. به کمک خواص تبدیل فوریه $x_a(t)$، $x_b(t)$، $x_c(t)$ و $x_d(t)$ را برحسب $x(t)$ بدست آورید.

حل : ابتدا برای شکل (الف) می نویسیم :

$$f\left\{x(t)\right\}=X(j\omega)=\left|X(j\omega)\right|e^{j\angle X(j\omega)}$$

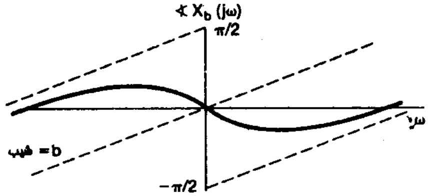
(1) در اینصورت برای تبدیل فوریه متناظر با فاز شکل (ب) خواهیم داشت :

$$f\left\{x_a(t)\right\}=X_a(j\omega)=\left[X(j\omega)\right]e^{-ja\omega}\Rightarrow x_a(t)=f^{-1}\left\{X_a(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{X(j\omega)e^{-ja\omega}\right\}=x(t-a)$$

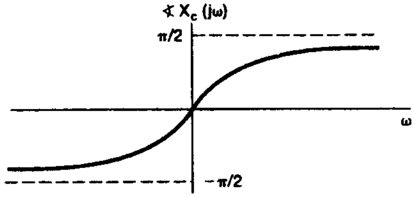


(الف) (ب)

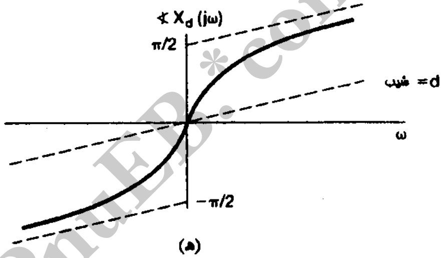
شکل م ۲۹-۴ (الف، ب)



(ج)



(د)



(ه)

شکل م ۲۹-۴ ادامه

(2) برای شکل (ج) نیز می توان نوشت :

$$X_b(j\omega)=\left[X(j\omega)\right]e^{jb\omega}\Rightarrow x_b(t)=f^{-1}\left\{X_b(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{X(j\omega)e^{jb\omega}\right\}=x(t+b)$$

(3) با توجه به زوج بودن دامنه $X(j\omega)$ و فرد بودن فازش ، سیگنال $x(t)$ حقیقی بوده و بـرای $X_c(j\omega)$ خواهیم داشت :

$$X_c(j\omega)=X^*(j\omega)=X(-j\omega)\Rightarrow x_c(t)=f^{-1}\left\{X_c(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{X(-j\omega)\right\}=x(-t)$$

(4) $X_d(j\omega)$ نیز با افزودن فاز $d\omega$ به $X_c(j\omega)$ بدست می آید:

$$X_d(j\omega)=X_c(j\omega)e^{jd\omega}$$

$$\Rightarrow x_d(t)=f^{-1}\left\{X_d(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{X_c(j\omega)e^{jd\omega}\right\}=x_c(t+d)=x(-(t+d))=x(-t-d)$$

۴-۳۰ فرض کنید $g(t)=x(t)\cos t$ و $g(t)$ دارای تبدیل فوریه زیرست

$$G(j\omega)=\begin{cases}1 & ;\ |\omega|\le 2\\ 0 & ;\ otherwise\end{cases}$$

(الف) $x(t)$ را بیابید.

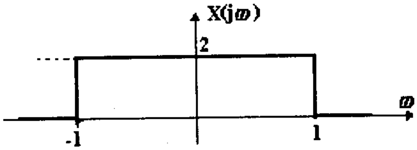
(ب) تبدیل فوریه $X_1(j\omega)$ سیگنال $x_1(t)$ را به نحوی بیابید که داشته باشیم

$$g(t)=x_1(t)\cos\left(\frac{2}{3}t\right)$$

حل : الف) با توجه به خاصیت ضرب تبدیل فوریه داریم :

$$g(t)=x(t)\cos t \Rightarrow G(j\omega)=f\left\{x(t)\cos t\right\}=\frac{1}{2\pi}f\left\{x(t)\right\}*f\{\cos t\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*f\left\{\frac{1}{2}e^{jt}+\frac{1}{2}e^{-jt}\right\}=\frac{1}{4\pi}X(j\omega)*\left[2\pi\delta(\omega+1)+2\pi\delta(\omega-1)\right]$$
$$=\frac{1}{2}X(j(\omega+1))+\frac{1}{2}X(j(\omega-1))$$

دیده می شود که $G(j\omega)$ معادل ترکیب خطی انتقال یافته های $X(j\omega)$ به چپ و راست می باشد؛ در اینصورت کافیست $X(j\omega)$ به شکل زیر انتخاب شود:



یا می توان نوشت :

$$X(j\omega)=\begin{cases}2 & ;|\omega|<1\\ 0 & ;elsewhere\end{cases} \Rightarrow x(t)=\frac{2\sin t}{\pi t}$$

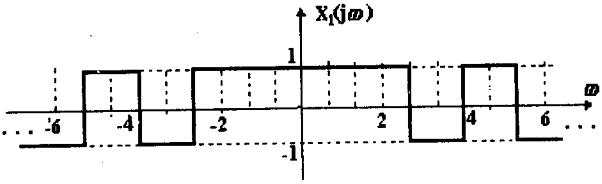
نکته : این مسئله را می توان به روش دیگر و به صورت زیر حل کرد:

$$x(t)\cos t=g(t) \Rightarrow x(t)=\frac{g(t)}{\cos t}=\frac{f^{-1}\left\{G(j\omega)\right\}}{\cos t}=\frac{\sin 2t}{\pi t\cos t}=\frac{2\sin t}{\pi t}$$

ب) از خاصیت ضرب داریم :

$$G(j\omega)=f\left\{x_1(t)\cos\left(\frac{2}{3}t\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega)*f\left\{\cos\left(\frac{2}{3}t\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega)*f\left\{\frac{1}{2}e^{j\frac{2t}{3}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2t}{3}}\right\}=\frac{1}{4\pi}X_1(j\omega)*\left[2\pi\delta\left(\omega+\frac{2}{3}\right)+2\pi\delta\left(\omega-\frac{2}{3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}X_1\left(j\left(\omega+\frac{2}{3}\right)\right)+\frac{1}{2}X_1\left(j\left(\omega-\frac{2}{3}\right)\right)$$

می توان مشاهده کرد که سیگنال $G(j\omega)$ معادل ترکیب خطی انتقال یافته های $X_1(j\omega)$ به اندازه $\omega_0=\pm\frac{2}{3}$، می باشد؛ کافیست $X_1(j\omega)$ را به صورتی انتخاب نمائیم تا رابطه اخیر صادق باشد، تنها سیگنالی که می تواند این منظور را برآورده نماید به شکل زیر است :



نکته :یک روش دیگر بدست آوردن $X_1(j\omega)$، استفاده از مفهوم سیستم وارون است، توجه می کنیم که سیستم وارون سیستمی با پاسخ ضربه $H_1(j\omega)=\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)$ (البته در حوزه فرکانس)،

می تواند به شکل :

$$H_2(j\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^k\left[\delta\left(\omega+(2k+1)\omega_0\right)+\delta\left(\omega-(2k+1)\omega_0\right)\right]$$

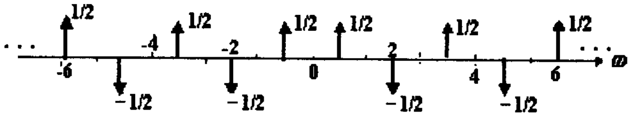
باشد، چراکه :

$$H_1(j\omega)*H_2(j\omega)=\left[\delta\left(\omega+\omega_0\right)+\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right]*\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^k\left[\delta\left(\omega+(2k+1)\omega_0\right)\right.$$

$$\left.+\delta\left(\omega-(2k+1)\omega_0\right)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^k\left[\delta\left(\omega+2(k+1)\omega_0\right)+\delta\left(\omega-2k\omega_0\right)\right]$$

$$+\left[\delta\left(\omega+2k\omega_0\right)+\delta\left(\omega-2(k+1)\omega_0\right)\right]=\ldots=\delta(\omega)$$

$H_2(j\omega)$ در شکل زیر مشاهده می شود:



همچنین داشتیم :

$$G(j\omega)=\frac{1}{2}X_1(j\omega)*\left[\delta\left(\omega+\frac{2}{3}\right)+\delta\left(\omega-\frac{2}{3}\right)\right]$$

در اینصورت با استفاده از سیستم وارون با $\omega_0=\frac{2}{3}$ می توان نوشت :

$$G(j\omega)*H_2(j\omega)=\frac{1}{2}X_1(j\omega)*\left[\delta\left(\omega+\frac{2}{3}\right)+\delta\left(\omega-\frac{2}{3}\right)\right]*H_2(j\omega)=\frac{1}{2}X_1(j\omega)*\delta(\omega)=\frac{1}{2}X_1(j\omega)$$

$$\Rightarrow X_1(j\omega)=2G(j\omega)*H_2(j\omega)=2G(j\omega)*\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^k\left[\delta\left(\omega+(2k+1)\omega_0\right)\right.$$

$$\left.+\delta\left(\omega-(2k+1)\omega_0\right)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left[G\left(j\left(\omega+(2k+1)\omega_0\right)\right)+G\left(j\left(\omega-(2k+1)\omega_0\right)\right)\right]$$

با اندکی دقت متوجه می شویم که این نتیجه همان نتیجه بدست آمده از روش قبل می باشد.
البته مفهوم سیستم وارون در حوزه فرکانس بطریقی که در بالا از آن بهره بردیم مفهومی ذهنی بوده و تنها جنبه ریاضی مسئله برای ما مهم بوده است.

۴-۳۱ (الف) نشان دهید که هر سیستم LTI دارای پاسخ ضربه‌های زیر

$$h_1(t)=u(t)\qquad h_2(t)=-2\delta(t)+5e^{-2t}u(t)\qquad h_3(t)=2te^{-t}u(t)$$

به ورودی $x(t)=\cos t$ پاسخ یکسانی می‌دهند.
(ب) پاسخ ضربه یک سیستم LTI دیگر بیابید که همین پاسخ را به ورودی $\cos t$ بدهد. این مسئله نشان می‌دهد که پاسخ به $\cos t$ را نمی‌توان برای مشخص کردن کامل یک سیستم LTI بکار برد.

حل : ابتدا تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ و پاسخ ضربه های $h_1(t)$، $h_2(t)$ و $h_3(t)$ را بدست می آوریم :

$$X(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}=f\{\cos t\}=\frac{1}{2}f\left\{e^{jt}+e^{-jt}\right\}=\pi\left[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\right]$$

$$H_1(j\omega)=f\left\{h_1(t)\right\}=f\left\{u(t)\right\}=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$H_2(j\omega)=f\left\{h_2(t)\right\}=f\left\{-2\delta(t)+5e^{-2t}u(t)\right\}=-2+5\times\frac{1}{j\omega+2}=\frac{-2j\omega+1}{j\omega+2}$$

$$H_3(j\omega)=f\left\{h_3(t)\right\}=f\left\{2te^{-t}u(t)\right\}=2j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1+j\omega}\right)=\frac{2}{(j\omega+1)^2}$$

در اینصورت برای تبدیل های فوریه سیگنال های $y_1(t)$، $y_2(t)$ و $y_3(t)$ می توان نوشت :

$$Y_1(j\omega)=f\left\{y_1(t)\right\}=f\left\{x(t)*h_1(t)\right\}=X(j\omega)H_1(j\omega)$$

$$=\pi\left[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\right]\times\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\pi\left[\frac{1}{(-j)}\delta(\omega+1)+\frac{1}{j}\delta(\omega-1)\right]$$

$$Y_2(j\omega)=f\left\{y_2(t)\right\}=f\left\{x(t)*h_2(t)\right\}=X(j\omega)H_2(j\omega)=\pi\left[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\right]\times\left[\frac{1-2j\omega}{j\omega+2}\right]$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1+2j}{-j+2}\right)\delta(\omega+1)+\left(\frac{1-2j}{j+2}\right)\delta(\omega-1)\right]=\pi\left[\frac{1}{(-j)}\delta(\omega+1)+\frac{1}{j}\delta(\omega-1)\right]$$

$$Y_3(j\omega)=f\left\{y_3(t)\right\}=f\left\{x(t)*h_3(t)\right\}=X(j\omega)H_3(j\omega)=\pi\left[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\right]\times\left[\frac{2}{(j\omega+1)^2}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{2}{(-j+1)^2}\delta(\omega+1)+\frac{2}{(j+1)^2}\delta(\omega-1)\right]=\pi\left[\frac{1}{(-j)}\delta(\omega+1)+\frac{1}{j}\delta(\omega-1)\right]$$

بنابراین: $Y_1(j\omega)=Y_2(j\omega)=Y_3(j\omega)$ بوده و در نتیجه خواهیم داشت: $y_3(t)=y_2(t)=y_1(t)$ و دیده می‌شود که هر سه سیستم مورد نظر برای یک ورودی یکسان ،خروجی یکسانی دارند؛ این بدان معنی است که دانستن خروجی حاصل از ورودی $x(t)=cost$ برای مشخص کردن کامل یک سیستم LTI کافی نیست.

(ب) هر سیستمی با پاسخ ضربه ای به شکل $h(t)=ah_1(t)+bh_2(t)+ch_3(t)$، به شرطی که $a+b+c=1$ باشد می تواند به ازای ورودی $x(t)=cost$ خروجی یکسانی را با سیستم های قبلی تولید نماید، چراکه :

$$Y(j\omega)=f\left\{\cos t*h(t)\right\}=f\left\{\cos t*\left(ah_1(t)+bh_2(t)+ch_3(t)\right)\right\}=af\left\{\cos t*h_1(t)\right\}$$

$$+bf\left\{\cos t*h_2(t)\right\}+cf\left\{\cos t*h_3(t)\right\}=aY_1(j\omega)+bY_2(j\omega)+cY_3(j\omega)\;;Y_1(j\omega)=Y_2(j\omega)=Y_3(j\omega)$$

$$=(a+b+c)Y_1(j\omega)=Y_1(j\omega)\quad\Rightarrow y(t)=y_1(t)=y_2(t)=y_3(t)$$

۴-۳۲ یک سیستم LTI، سیستم S، با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

$$h(t)=\frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}$$

خروجی S را به‌ازای ورودیهای زیر بیابید:

(الف) $x_1(t)=\cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)$ (ب) $x_2(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\sin(3kt)$

(ج) $x_3(t)=\frac{\sin 4(t+1)}{\pi(t+1)}$ (د) $x_4(t)=\left(\frac{\sin 2t}{\pi t}\right)^2$

حل: ابتدا تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم S را بدست می آوریم:

$$H(j\omega)=f\left\{h(t)\right\}=f\left\{\frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}\right\}=e^{-j\omega}f\left\{\frac{\sin 4t}{\pi t}\right\}$$

$$=e^{-j\omega}\times\begin{cases}1 & ;|\omega|<4\\ 0 & ;elsewhere\end{cases}=\begin{cases}e^{-j\omega} & ;|\omega|<4\\ 0 & ;elsewhere\end{cases}$$

حال به محاسبه خروجی ها در هر حالت می پردازیم :(الف) داریم :

$$Y_1(j\omega)=X_1(j\omega)H_1(j\omega)=f\left\{\cos\left(6t+\frac{\pi}{2}\right)\right\}H_1(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega+6)-\delta(\omega-6)\right]H_1(j\omega)$$

$$=\frac{\pi}{j}\left[H_1(-j6)\delta(\omega+6)-H_1(j6)\delta(\omega-6)\right]=\frac{\pi}{j}\left[0\times\delta(\omega+6)-0\times\delta(\omega-6)\right]=0\Rightarrow y_1(t)=0$$

(ب)

$$Y_2(j\omega)=X_2(j\omega)H(j\omega)=f\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\sin(3kt)\right\}H(j\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k f\left\{\sin(3kt)\right\}H(j\omega)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{\pi}{j}\right)\left(\delta(\omega-3k)-\delta(\omega+3k)\right)H(j\omega)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{\pi}{j}\right)\left(H(j3k)\delta(\omega-3k)-H(-j3k)\delta(\omega+3k)\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\pi}{j}\right)\left[\left(H(j0)\delta(\omega)-H(j0)\delta(\omega)\right)+\left(\frac{1}{2}H(j3)\delta(\omega-3)-\frac{1}{2}H(-j3)\delta(\omega+3)\right)\right]+0$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{j}\right)\left[e^{-j3}\delta(\omega-3)-e^{j3}\delta(\omega+3)\right]\Rightarrow y_2(t)=f^{-1}\left\{Y_2(j\omega)\right\}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2j}\right)\left[e^{-j3}\frac{e^{j3t}}{2\pi}-e^{j3}\frac{e^{-j3t}}{2\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j3(t-1)}-e^{-j3(t-1)}}{2j}\right]=\frac{1}{2}\sin 3(t-1)$$

(ج)

$$Y_3(j\omega)=X_3(j\omega)H(j\omega)=f\left\{\frac{\sin 4(t+1)}{\pi(t+1)}\right\}H(j\omega)=\left[e^{j\omega}f\left\{\frac{\sin 4t}{\pi t}\right\}\right]H(j\omega)=$$

$$\left[\begin{cases} e^{j\omega} ; |\omega| <4 \\ 0 \ ;elsewhere \end{cases}\right]\left[\begin{cases} e^{-j\omega} ; |\omega| <4 \\ 0 \ ;elsewhere \end{cases}\right] = \begin{cases} 1 \ ; |\omega| <4 \\ 0 \ ;elsewhere \end{cases} \Rightarrow y_3(t)=f^{-1}\left\{Y_3(j\omega)\right\} = \frac{\sin 4t}{\pi t}$$

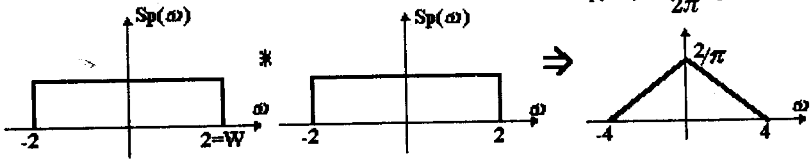
(د) در این مرحله ،ابتدا تبدیل فوریه سیگنال $x_4(t)$ را بدست می آوریم .از خاصیت ضرب داریم :

$$X_4(j\omega)=f\left\{x_4(t)\right\}=f\left\{\left(\frac{\sin 2t}{\pi t}\right)\left(\frac{\sin 2t}{\pi t}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}f\left\{\frac{\sin 2t}{\pi t}\right\}*f\left\{\frac{\sin 2t}{\pi t}\right\}=\frac{1}{2\pi}S_p(\omega)*S_p(\omega)$$

که در آن $S_p(\omega)$ پالسی به ارتفاع واحد و با $W=2$ می باشد، فرایند کانوولوشن بالایی در شکل زیر نشان داده شده است :

$$X_4(j\omega)=\frac{1}{2\pi}S_p(\omega)*S_p(\omega)$$



در اینصورت برای $Y_4(j\omega)$ خواهیم داشت :

$$Y_4(j\omega)=X_4(j\omega)H(j\omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\begin{cases} -|\omega|+4 & ;|\omega|<4 \\ 0 & ;elsewhere \end{cases}\times\begin{cases} e^{-j\omega} & ;|\omega|<4 \\ 0 & ;elsewhere \end{cases}=e^{-j\omega}\frac{1}{2\pi}\begin{cases} -|\omega|+4 & ;|\omega|<4 \\ 0 & ;elsewhere \end{cases}$$

$$=e^{-j\omega}X_4(j\omega)\Rightarrow y_4(t)=f^{-1}\left\{Y_4(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{e^{-j\omega}X_4(j\omega)\right\}=x_4(t-1)=\left(\frac{\sin 2(t-1)}{\pi(t-1)}\right)^2$$

۴-۳۳ ورودی و خروجی یک سیستم LTI علی با معادله دیفرانسیل زیر به هم مربوطاند

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=2x(t)$$

(الف) پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=te^{-2t}u(t)$ را بیابید.

(ج) بند (الف) را برای سیستم LTI علی توصیف شده با معادله زیر تکرار کنید

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=2\frac{dx^2(t)}{dt^2}-2x(t)$$

حل : (الف) با قرار دادن $x(t)=\delta(t)$ و $y(t)=h(t)$، معادله دیفرانسیل سیستم به شکل زیر حاصل می آید:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+6\frac{dh(t)}{dt}+8h(t)=2\delta(t)$$

حال با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف رابطه فوق و استفاده از خاصیت مشتق گیری زمانی جدول (1-4) می توان نوشت :

$$(j\omega)^2H(j\omega)+6(j\omega)H(j\omega)+8H(j\omega)=2\times1 \Rightarrow H(j\omega)=\frac{2}{(j\omega)^2+6j\omega+8}=\frac{2}{(j\omega+4)(j\omega+2)}$$

$$=\frac{-1}{j\omega+4}+\frac{1}{j\omega+2} \Rightarrow h(t)=f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=-e^{-4t}u(t)+e^{-2t}u(t)=\left(e^{-2t}-e^{-4t}\right)u(t)$$

ب) به آسانی می توان نوشت :

$$y(t)=x(t)*h(t) \Rightarrow Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=f\left\{te^{-2t}u(t)\right\}H(j\omega)=\left[j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{j\omega+2}\right]\right]H(j\omega)$$

$$=\left[\frac{1}{(j\omega+2)^2}\right]\left[\frac{2}{(j\omega+4)(j\omega+2)}\right]=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{j\omega+2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{(j\omega+2)^2}+\frac{1}{(j\omega+2)^3}-\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{j\omega+4} \Rightarrow y(t)=f^{-1}\left\{Y(j\omega)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}e^{-2t}u(t)-\frac{1}{2}te^{-2t}u(t)+t^2e^{-2t}u(t)-\frac{1}{4}e^{-4t}u(t)=\frac{1}{4}\left[\left(1-2t+4t^2\right)e^{-2t}-e^{-4t}\right]u(t)$$

ج) برای این سیستم نیز به همان ترتیب بند (الف) خواهیم داشت :

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+\sqrt{2}\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=2\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}-2\delta(t) \Rightarrow (j\omega)^2H(j\omega)+\sqrt{2}(j\omega)H(j\omega)+H(j\omega)$$

$$=2(j\omega)^2\times1-2\times1=2\left((j\omega)^2-1\right) \Rightarrow H(j\omega)=\frac{2\left((j\omega)^2-1\right)}{(j\omega)^2+\sqrt{2}(j\omega)+1}=2+\frac{-2\left(j\omega\sqrt{2}+2\right)}{(j\omega)^2+\sqrt{2}(j\omega)+1}$$

$$=2+\frac{-2\left(j\omega\sqrt{2}+2\right)}{\left(j\omega-\frac{\left[-\sqrt{2}+j\sqrt{2}\right]}{2}\right)\left(j\omega-\frac{\left[-\sqrt{2}-j\sqrt{2}\right]}{2}\right)}=2+\frac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{j\omega-\frac{\left[-\sqrt{2}+j\sqrt{2}\right]}{2}}+\frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{j\omega-\frac{\left[-\sqrt{2}-j\sqrt{2}\right]}{2}}$$

$$\Rightarrow h(t)=f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=2\delta(t)+\left(-\sqrt{2}+j\sqrt{2}\right)e^{\left[-\sqrt{2}+j\sqrt{2}\right]\frac{t}{2}}u(t)$$

$$+\left(-\sqrt{2}-j\sqrt{2}\right)e^{\left[-\sqrt{2}-j\sqrt{2}\right]\frac{t}{2}}u(t)=\ldots=2\delta(t)-2\sqrt{2}e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\left[\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]u(t)$$

۴-۳۴ پاسخ فرکانسی سیستم LTI پایدار S به صورت زیرست

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{6-\omega^2+5j\omega}$$

(الف) معادله دیفرانسیلی را که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستم S را به هم مرتبط می‌کند،

بنویسید.

(ب) پاسخ ضربه $h(t)$ سیستم S را بیابید.

(ج) خروجی $y(t)$ به ازای ورودی زیر را بیابید

$$x(t)=e^{-4t}u(t)-te^{-4t}u(t)$$

حل : می نویسیم :

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+5j\omega+6} \Rightarrow (j\omega)^2H(j\omega)+5(j\omega)H(j\omega)+6H(j\omega)=j\omega+2$$

حال با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین عبارت اخیر داریم :

$$f^{-1}\left\{(j\omega)^2H(j\omega)\right\}+5f^{-1}\left\{(j\omega)H(j\omega)\right\}+6f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=f^{-1}\{j\omega\}+2f^{-1}\{1\}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2h(t)}{dt^2}+5\frac{dh(t)}{dt}+6h(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}+2\delta(t)$$

و بطور کلی می توان با قرار دادن $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب به جای $\delta(t)$ و $h(t)$ نوشت :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

که معادله دیفرانسیل مورد نظر برای سیستم S می باشد.

(ب) برای بدست آوردن $h(t)$،کافیست از $H(j\omega)$ تبدیل عکس تبدیل فوریه گرفته شود، یعنی :

$$h(t)=f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{j\omega+2}{(j\omega+3)(j\omega+2)}\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+3}\right\}=e^{-3t}u(t)$$

(ج) ابتدا تبدیل فوریه سیگنال ورودی را بدست می آوریم :

$$X(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}=f\left\{e^{-4t}u(t)-te^{-4t}u(t)\right\}=\frac{1}{j\omega+4}-j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega+4}\right)=\frac{j\omega+3}{(j\omega+4)^2}$$

در اینصورت می توان برای $Y(j\omega)$ نوشت :

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\frac{j\omega+3}{(j\omega+4)^2}\times\frac{j\omega+2}{(j\omega+3)(j\omega+2)}$$

$$=\frac{1}{(j\omega+4)^2}\Rightarrow y(t)=f^{-1}\left\{Y(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1}{(j\omega+4)^2}\right\}=te^{-4t}u(t)$$

۴-۳۵ در این مسئله مثالهایی از اثر تغییر غیرخطی فاز در نظر می‌گیریم

(الف) یک سیستم LTI پیوسته در زمان، با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید

$$H(j\omega)=\frac{a-j\omega}{a+j\omega}$$

که در آن $a>0$. دامنه $H(j\omega)$ چقدرست؟ فاز $\angle H(j\omega)$ چقدرست؟ پاسخ ضربه این سیستم را بدست آورید.

(ب) خروجی سیستم بند (الف) را به ازای $a=1$ و ورودی زیر بیابید

$$\cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+\cos t+\cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

ورودی و خروجی را به طور تقریبی رسم کنید.

حل : (الف) دامنه و فاز $H(j\omega)$ را به صورت زیر بدست می آوریم :

$$\left|H(j\omega)\right|^2=H(j\omega)H^*(j\omega)=\left(\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right)\left(\frac{a+j\omega}{a-j\omega}\right)=\frac{a^2+\omega^2}{a^2+\omega^2}=1\Rightarrow\left|H(j\omega)\right|=1$$

$$\angle H(j\omega)=\angle NUM-\angle DEN=\angle(a-j\omega)-\angle(a+j\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)=-2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

برای پاسخ ضربه سیستم نیز داریم :

$$h(t)=f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right\}=f^{-1}\left\{-1+\frac{2a}{a+j\omega}\right\}=-\delta(t)+2ae^{-at}u(t)$$

(ب) با مقدار $a=1$،برای پاسخ فرکانسی سیستم خواهیم داشت :

$$H(j\omega)=\left|H(j\omega)\right|e^{j\angle H(j\omega)}=1e^{-j2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right)}=e^{-j2\tan^{-1}(\omega)}$$

همچنین تبدیل فوریه سیگنال ورودی بدین صورت می باشد:

$$X(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}=f\left\{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+\cos(t)+\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right\}=$$

$$\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\delta\left(\omega-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]+\pi\left[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\right]+\pi\left[\delta\left(\omega+\sqrt{3}\right)+\delta\left(\omega-\sqrt{3}\right)\right]$$

و بالاخره می توان نوشت :

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=\left\{\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\delta\left(\omega-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\pi\left[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\right]+\pi\left[\delta\left(\omega+\sqrt{3}\right)+\delta\left(\omega-\sqrt{3}\right)\right]\right\}e^{-j2\tan^{-1}\omega}$$

$$=\pi\left[e^{-2j\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\delta\left(\omega+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+e^{-2j\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\delta\left(\omega-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+\pi\left[e^{-2j\tan^{-1}(-1)}\delta(\omega+1)+e^{-2j\tan^{-1}(1)}\delta(\omega-1)\right]$$

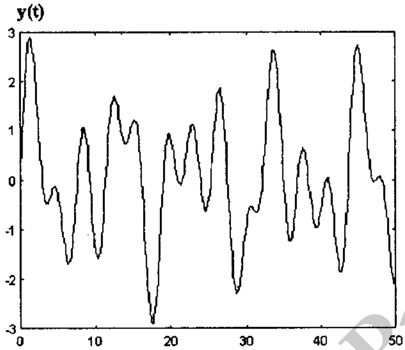
$$+\pi\left[e^{-2j\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)}\delta\left(\omega+\sqrt{3}\right)+e^{-2j\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)}\delta\left(\omega-\sqrt{3}\right)\right]$$

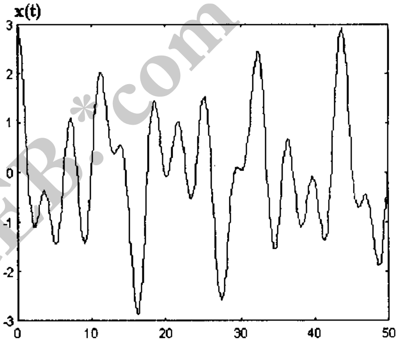
$$=\pi\left[e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(\omega+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(\omega-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]+\pi\left[e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega+1)+e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega-1)\right]$$

$$+\pi\left[e^{j\frac{2\pi}{3}}\delta\left(\omega+\sqrt{3}\right)+e^{-j\frac{2\pi}{3}}\delta\left(\omega-\sqrt{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ y(t)=f^{-1}\left\{Y(j\omega)\right\}=\cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\sqrt{3}\,t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

ورودی و خروجی در شکل زیر رسم شده‌اند:





با توجه به شکل های بالا به آسانی مشاهده می کنیم که با وجود آنکه $H(j\omega)$ فیلتری تمام گـذر است $\left(\left|H(j\omega)\right|=1\right)$ ، ولی شکل موج خروجی با شکل موج ورودی متفاوت می باشد و ایـن بـدلیل مشخصه فاز غیرخطی سیستم $H(j\omega)$ است ؛این خاصیت ، ویژگی تمامی سیستمهای تمام گذر واقعی است که اثر سیگنال های ورودی دارای فرکانس های متفاوت با سرعت های متفاوتی در خروجی ظاهر می‌شوند .

۴-۳۶ یک سیستم LTI در نظر بگیرید که به ورودی زیر

$$x(t)=\left[e^{-t}+e^{-3t}\right]u(t)$$

پاسخ زیر را بدهد

$$y(t)=\left[2e^{-t}-2e^{-4t}\right]u(t)$$

(الف) پاسخ فرکانسی این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

(ج) معادله دیفرانسیل ارتباط‌دهنده ورودی و خروجی سیستم را بیابید.

حل (الف) ابتدا تبدیل های فوریه سیگنال های ورودی و خروجی را بدست می آوریم :

$$X(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}=f\left\{e^{-t}u(t)+e^{-3t}u(t)\right\}=\frac{1}{j\omega+1}+\frac{1}{j\omega+3}=\frac{2(j\omega+2)}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

$$Y(j\omega)=f\left\{y(t)\right\}=f\left\{2e^{-t}u(t)-2e^{-4t}u(t)\right\}=\frac{2}{j\omega+1}-\frac{2}{j\omega+4}=\frac{6}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$$

در اینصورت می توان نوشت :

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{3(j\omega+3)}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

(ب)

$$h(t)=f^{-1}\{H(j\omega)\}=f^{-1}\left\{\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}\right\}=f^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{2+j\omega}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{4+j\omega}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{3}{2}e^{-4t}u(t)=\frac{3}{2}\left[e^{-2t}+e^{-4t}\right]u(t)$$

(ج) از پاسخ فرکانسی سیستم می نویسیم:

$$H(j\omega)=\frac{3(j\omega+3)}{(j\omega+2)(j\omega+4)}=\frac{3(j\omega)+9}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}\Rightarrow(j\omega)^2H(j\omega)+6(j\omega)H(j\omega)+8H(j\omega)=3(j\omega)+9$$

حال از طرفین رابطه بالا تبدیل عکس تبدیل فوریه گرفته و داریم :

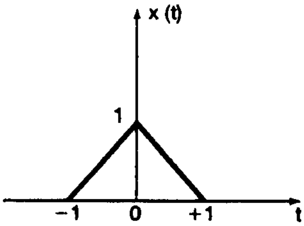
$$f^{-1}\left\{(j\omega)^2H(j\omega)\right\}+6f^{-1}\left\{(j\omega)H(j\omega)\right\}+8f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=3f^{-1}\{j\omega\}+9f^{-1}\{1\}$$

$$\Rightarrow\frac{d^2h(t)}{dt^2}+6\frac{dh(t)}{dt}+8h(t)=3\frac{d\delta(t)}{dt}+9\delta(t)$$

و در حالت کلی با قرار دادن $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب به جای $\delta(t)$ و $h(t)$ به معادله دیفرانسیل مشخص کننده سیستم دست می یابیم :

$$\Rightarrow\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

۴-۳۷ سیگنال $x(t)$ شکل م۴-۳۷ را در نظر بگیرید



شکل م ۴-۳۷

(الف) تبدیل فوریه $x(t)$ را بیابید.

(ب) سیگنال زیر را رسم کنید.

$$\tilde{x}(t)=x(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4k)$$

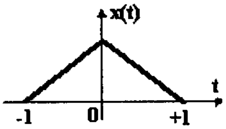
(ج) یک سیگنال $g(t)$ بیابید که همانند $x(t)$ نباشد ولی برای آن

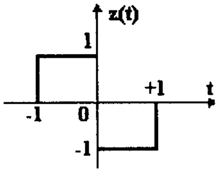
$$\tilde{x}(t)=g(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4k)$$

(د) نشان دهید که هر چند $X(j\omega)$ و $G(j\omega)$ متفاوت‌اند، ولی به ازای هر k صحیح

$G\left(j\frac{\pi k}{2}\right)=X\left(j\frac{\pi k}{2}\right)$ برای پاسخ به این سئوال لازم نیست $G(j\omega)$ را حساب کنید.

حل : (الف) راحت تر است تا ابتدا تبدیل فوریه سیگنال $z(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ را بدست آوریم ، این سیگنال به همراه $x(t)$ در شکل زیر مشاهده می شود:





در اینصورت برای $z(t)$ خواهیم داشت :

$$z(t)=s_p\left(t+\frac{1}{2}\right)-s_p\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

که در آن $s_p(t)$ پالس مستطیلی با ارتفاع واحد و $T=\frac{1}{2}$ می باشد، در اینصورت می توان دید:

$$Z(j\omega)=f\left\{z(t)\right\}=f\left\{s_p\left(t+\frac{1}{2}\right)-s_p\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\}=e^{j\frac{\omega}{2}}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}\right]-e^{-j\frac{\omega}{2}}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}\right]$$

$$=\frac{4j}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\left\{\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}{2j}\right\}=\frac{4j}{\omega}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

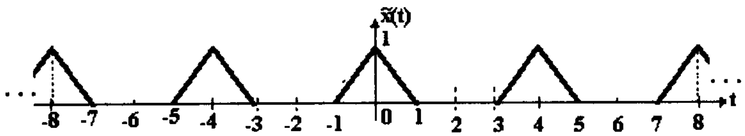
بنابراین برای $X(j\omega)$ خواهیم داشت :

$$z(t)=\frac{dx(t)}{dt}\Rightarrow X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}Z(j\omega)+\pi Z(j0)\delta(\omega)=\frac{4}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\pi\times 0\delta(\omega)=\left[\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}\right]^2$$

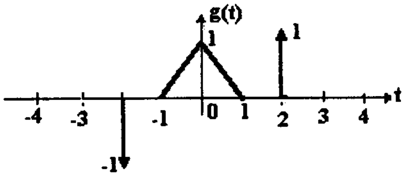
(ب) سیگنال $\tilde{x}(t)$ چنین است :

$$\tilde{x}(t)=x(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{x(t)*\delta(t-4k)\right\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(t-4k)$$

این سیگنال را در شکل زیر می بینید:



(ج) سیگنال $g(t)$ به شکل زیر می تواند سیگنال مورد نظر باشد:



(د) با توجه به اینکه $g(t)$ و $x(t)$ در فاصله $(-1,1)$ یکسان هستند می توان نوشت :

$$G\left(j\frac{k\pi}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\left(\frac{k\pi}{2}\right)t}dt = -\int_{-2^-}^{-2^+}\delta(t+2)e^{-j\left(\frac{k\pi}{2}\right)(-2)}dt + \int_{-1}^{+1} g(t)e^{-j\left(\frac{k\pi}{2}\right)t}dt$$

$$+\int_{2^-}^{2^+}\delta(t-2)e^{-j\left(\frac{k\pi}{2}\right)(2)}dt = -e^{jk\pi} + \int_{-1}^{1} x(t)e^{-j\left(\frac{k\pi}{2}\right)t}dt + e^{-jk\pi}$$

$$= -2j\sin(k\pi) + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\left(\frac{k\pi}{2}\right)t}dt = X\left(j\frac{k\pi}{2}\right)$$

۴-۳۸ $x(t)$ را سیگنال دلخواهی با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ فرض کنید. خاصیت جابجایی فرکانسی تبدیل فوریه را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$$

(الف) با اعمال جابجایی فرکانسی به معادله تجزیه تبدیل فوریه زیر، خاصیت جابجایی فرکانسی را ثابت کنید.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

(ب) خاصیت جابجایی فرکانسی را با استفاده از تبدیل فوریه $e^{j\omega_0 t}$ و خاصیت ضرب تبدیل فوریه ثابت کنید.

حل : (الف) از معادله تجزیه تبدیل فوریه شروع کرده و می نویسیم :

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\Rightarrow X\left(j\left(\omega-\omega_0\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\left(\omega-\omega_0\right)t}dt = e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = e^{j\omega_0 t}X(j\omega)$$

که همان خاصیت جابجایی فرکانسی تبدیل فوریه می باشد.

(ب) با توجه به خاصیت ضرب تبدیل فوریه داریم :

$$f\left\{e^{j\omega_0 t}x(t)\right\} = \frac{1}{2\pi}f\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} * f\left\{x(t)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right] * X(j\omega) = X\left(j\left(\omega-\omega_0\right)\right) \Rightarrow e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X\left(j\left(\omega-\omega_0\right)\right)$$

۴-۳۹ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را $X(j\omega)$ فرض کنید. سیگنال $g(t)$ را همشکل $X(j\omega)$ در نظر بگیرید، یعنی

$$g(t) = X(jt)$$

(الف) نشان دهید تبدیل فوریه $G(j\omega)$ همشکل $2\pi x(-t)$ است، یعنی

$$G(j\omega) = 2\pi x(-\omega)$$

(ب) با استفاده از این که

$$f\{\delta(t+B)\} = e^{jB\omega}$$

و نتیجه بند (الف) نشان دهید که

$$f\{e^{jBt}\}=2\pi\delta(\omega-B)$$

حل : (الف) داریم :

$$G(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}X(jt)e^{-j\omega t}dt$$

حال با تعویض نام متغیرهای ω و t داریم :

$$G(jt)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega=2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega(-t)}d\omega\right]=2\pi x(-t)$$

حال دوباره نام متغیرهای ω و t را تعویض کرده و می نویسیم : $G(j\omega)=2\pi x(-\omega)$

(ب) با فرض $x(t)=\delta(t+B)$ می بینیم :

$$f\left\{x(t)\right\}=f\left\{\delta(t+B)\right\}=e^{jB\omega}=X(j\omega)$$

حال فرض می کنیم سیگنال $g(t)$ همشکل $X(j\omega)$ باشد، یعنی $g(t)=X(jt)$، در اینصورت با توجه به نتیجه بند (الف) خواهیم داشت :

$$f\left\{g(t)\right\}=f\left\{e^{jBt}\right\}=2\pi x(-\omega)=2\pi\delta(-\omega+B)=2\pi\delta(-(\omega-B))=2\pi\delta(\omega-B)$$

که در آن از خاصیت زوج بودن سیگنال ضربه بهره برده ایم .

۴-۴۰ با استفاده از خواص تبدیل فوریه و استقراء ریاضی نشان دهید که تبدیل فوریه سیگنال زیر

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),a>0$$

عبارت است از

$$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$$

حل : ابتدا برای $n=1$ داریم :

$$f\left\{\frac{t^{1-1}}{(1-1)!}e^{-at}\right\}=f\{e^{-at}\}=\frac{1}{a+j\omega}=\frac{1}{(a+j\omega)^1}$$

حال فرض کنیم رابطه مورد نظر برای $n=k$ برقرار باشد، یعنی :

$$f\left\{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-at}u(t)\right\}=\frac{1}{(a+j\omega)^k}$$

باید ثابت کنیم که این رابطه برای $n=k+1$ نیز برقرار است، می نویسیم :

$$f\left\{\frac{t^{(k+1)-1}}{((k+1)-1)!}e^{-at}u(t)\right\}=f\left\{\frac{t}{k}\times\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-at}u(t)\right\}=\left(\frac{1}{k}\right)f\left\{t\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-at}u(t)\right\}=$$

$$\left(\frac{1}{k}\right)j\frac{d}{d\omega}f\left\{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-at}u(t)\right\}=\left(\frac{j}{k}\right)\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{(a+j\omega)^k}\right]=\left(\frac{j}{k}\right)\frac{(-jk)(1+j\omega)^{k-1}}{(a+j\omega)^{2k}}=\frac{1}{(a+j\omega)^{k+1}}$$

۴-۴۱ در این مسئله خاصیت ضرب تبدیل فوریه پیوسته در زمان را بدست می‌آوریم. $x(t)$ و $y(t)$ را دو سیگنال با تبدیل فوریه‌های $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ فرض کنید. همچنین $g(t)$ را عکس تبدیل فوریه کانولوشن $\frac{1}{2\pi}\left\{X(j\omega)*Y(j\omega)\right\}$ بگیرید.

(الف) نشان دهید که

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}d\omega\right]d\theta$$

(ب) نشان دهید که

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}d\omega=e^{j\theta t}y(t)$$

(ج) با ترکیب کردن نتایج بندهای (الف) و (ب) نشان دهید که

$$g(t)=x(t)y(t)$$

حل : (الف)

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\left\{X(j\omega)*Y(j\omega)\right\}\right]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta\right]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}d\omega\right]d\theta \qquad ,(I)$$

(ب) با تغییر متغیر $\eta=\omega-\theta$ می توان نوشت :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\eta)e^{j(\eta+\theta)t}d\eta=e^{j\theta t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\eta)e^{j\eta t}d\eta\right]=e^{j\theta t}y(t)\ ,(II)$$

(ج) با استفاده از روابط (I) و (II) به سادگی می توان نوشت :

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}d\omega\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)\left(e^{j\theta t}y(t)\right)d\theta=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)e^{j\theta t}d\theta\right)y(t)=x(t)y(t)$$

۴-۴۲ فرض کنید

$$g_2(t)=\left\{[\sin(\omega_0 t)]\ x(t)\right\}*h(t)\quad ,\quad g_1(t)=\left\{[\cos(\omega_0 t)]\ x(t)\right\}*h(t)$$

که در آن

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk100t}$$

یک سیگنال حقیقی متناوب و $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI علی است.

(الف) مقدار ω_0 و شرایط لازم $H(j\omega)$ برای داشتن روابط زیر را تعیین کنید

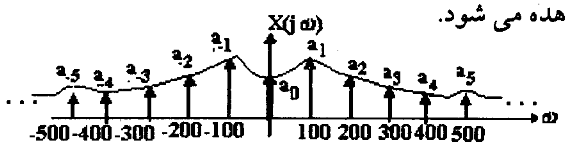
$$g_2(t)=Im\{a_5\}\quad ,\quad g_1(t)=\Re e\{a_5\}$$

(ب) یک $h(t)$ تعیین کنید، به نحوی که $H(j\omega)$ شرایطی را که در بند (الف) گذاشته‌ایم ارضا کند.

حل : (الف) ابتدا طیف فرکانسی سیگنال $x(t)$ را بدست می آوریم :

$$X(j\omega)=f\left\{x(t)\right\}=f\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk100t}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k f\left\{e^{jk100t}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-100k)\quad ,(I)$$

بنابراین طیف $X(j\omega)$،مجموعه ای از بینهایت سیگنال ضربه ای با فواصل $\Delta\omega=100$ می باشد. این طیف در شکل زیر مشاهده می شود.



همچنین برای طیف فرکانسی سیگنالهای $[\cos(\omega_0 t)]\ x(t)$, $[\sin(\omega_0 t)]\ x(t)$ می نویسیم :

$$f\left\{[\sin(\omega_0 t)]\ x(t)\right\}=\frac{1}{2\pi}f\{\sin(\omega_0 t)\}*f\left\{x(t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]*X(j\omega)=\frac{1}{2j}\left[X(j(\omega-\omega_0))-X(j(\omega+\omega_0))\right]\quad ,(II)$$

$$f\left\{[\cos(\omega_0 t)]\ x(t)\right\}=\frac{1}{2\pi}f\{\cos(\omega_0 t)\}*f\left\{x(t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]*X(j\omega)=\frac{1}{2}\left[X(j(\omega-\omega_0))+X(j(\omega+\omega_0))\right]\quad ,(III)$$

با توجه به روابط (I) ، (II) و (III) مشاهده می کنیم که برای استخراج بخش های زوج و فرد ضریب a_5 کافیست انتخاب کنیم: $\omega_0=500$ و شکل فیلتر خروجی $H(j\omega)$ را طوری انتخاب کنیم که در مبدا $(\omega=0)$ بهره واحد داشته و لااقل برای $|\omega|\geq 100$ صفر شود. در اینصورت :

$$f\left\{\left([\cos(\omega_0 t)]\ x(t)\right)*h(t)\right\}=f\left\{[\cos(\omega_0 t)]\ x(t)\right\}H(j\omega)$$

$$=\frac{1}{2}\left[X(j(\omega-500))+X(j(\omega+500))\right]H(j\omega)=\frac{1}{2}\left[X(j(0-500))+X(j(0+500))\right]\times 1$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\pi a_5\delta(\omega)+2\pi a_{-5}\delta(\omega)\right]$$

و با توجه به حقیقی بودن سیگنال $x(t)$،داریم: $a_{-k}=a_k^*$ و :

$$f\left\{\left([\cos\omega_0]\ x(t)\right)*h(t)\right\}=\pi\left(a_5+a_5^*\right)\delta(\omega)=2\pi\left(Re\{a_5\}\right)\delta(\omega)=f\{Re\{a_5\}\}$$

$$\Rightarrow\left\{[\cos(\omega_0 t)]\ x(t)\right\}*h(t)=Re\{a_5\}$$

همینطور برای $\left[\sin(\omega_0 t)\ x(t)\right]*h(t)$ می نویسیم :

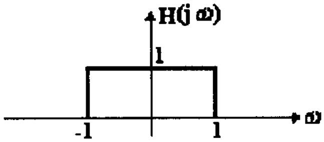
$$f\left\{\left(\left[\sin(\omega_0 t)\right]x(t)\right)*h(t)\right\}=f\left\{\left[\sin(\omega_0 t)\right]x(t)\right\}H(j\omega)$$

$$=\frac{1}{2j}\left[X(j(\omega-500))-X(j(\omega+500))\right] H(j\omega)=\frac{1}{2j}\left[X(j(0-500))-X(j(0+500))\right] H(j0)$$

$$=\frac{1}{2j}\left[2\pi a_5\delta(\omega)-2\pi a_{-5}\delta(\omega)\right]\times 1=\frac{\pi}{j}\left(a_5-a_5^*\right)\delta(\omega)=\frac{\pi}{j}\left(2jIm\{a_5\}\right)\delta(\omega)$$

$$=2\pi\left(Im\{a_5\}\right)\delta(\omega)=f\{Im\{a_5\}\}\quad\Rightarrow\quad\left\{\left[\sin(\omega_0 t)\right]x(t)\right\}*h(t)=Im\{a_5\}$$

(ب) یک $h(t)$ پیشنهادی می تواند طیفی به صورت شکل زیر داشته باشد:



در اینصورت :

$$h(t)=f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=\frac{2\sin t}{\pi t}$$

۴-۴۳ فرض کنید

$$g(t)=x(t)\cos^2 t*\frac{\sin t}{\pi t}$$

$x(t)$ را حقیقی بگیرید به نحوی که در $|\omega|\geq 1$ داشته باشیم $X(j\omega)=0$ نشان دهید که یک سیستم خطی تغییرناپذیربازمان S وجود دارد، به نحوی که

$$x(t)\xrightarrow{S}g(t)$$

حل : ابتدا تبدیل فوریه $cos^2 t$ را بدست می آوریم :

$$f\{\cos^2 t\}=\frac{1}{2\pi}f\{\cos t\}*f\{\cos t\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(\omega+1)+\pi\delta(\omega-1)\right]*\left[\pi\delta(\omega+1)+\pi\delta(\omega-1)\right]=\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega+2)+2\delta(\omega)+\delta(\omega-2)\right]$$

در اینصورت داریم :

$$f\left\{x(t)\cos^2 t\right\}=\frac{1}{2\pi}f\left\{x(t)\right\}*f\{\cos^2 t\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega+2)+2\delta(\omega)+\delta(\omega-2)\right]=\frac{1}{4}\left[X(j(\omega+2))+2X(j\omega)+X(j(\omega-2))\right]$$

چون $X(j\omega)$ فقط برای $-1<\omega<1$ مخالف صفر است ، سیگنال های $X(j(\omega+2))$ و $X(j(\omega-2))$ نیز به ترتیب در نواحی $-3<\omega<-1$ و $1<\omega<2$ می توانند غیرصفر باشند و بدیهی است که هیچگونه همپوشانی میان این سه طیف صورت نمی گیرد، بنابراین می توان طیف $X(j\omega)$ را به طور کامل و توسط یک فیلتر پائین گذر ایده‌آل بازیابی نمود:

$$\frac{1}{4}\left[X(j(\omega+2))+2X(j\omega)+X(j(\omega-2))\right]\times\begin{cases}1 & ;|\omega|<1\\ 0 & ;elsewhere\end{cases}=f\left\{x(t)\cos^2 t\right\}f\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}X(j\omega)\Rightarrow f\left\{x(t)\cos^2 t*\frac{\sin t}{\pi t}\right\}=f\left\{\frac{1}{2}x(t)\right\}\Rightarrow g(t)=x(t)\cos^2 t*\frac{\sin t}{\pi t}=\frac{1}{2}x(t)$$

و بدین ترتیب مشاهده می کنیم که رابطه میان $x(t)$ و $g(t)$ یک رابطه خطی و تغییرناپذیربازمان می باشد.

۴-۴۴ خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI علی، با معادله زیر به ورودی $x(t)$ آن مرتبط شده است

$$\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)z(t-\tau)d\tau-x(t)$$

که در آن $z(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$.

(الف) پاسخ فرکانسی این سیستم، $H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ را بیابید.

(ب) پاسخ ضربه این سیستم را پیدا کنید.

حل : (الف) ابتدا تبدیل فوریه سیگنال $z(t)$ را بدست می آوریم :

$$Z(j\omega)=f\left\{z(t)\right\}=f\left\{e^{-t}u(t)+3\delta(t)\right\}=\frac{1}{1+j\omega}+3=\frac{4+3j\omega}{1+j\omega}$$

حال با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین معادله دیفرانسیل سیستم داریم :

$$f\left\{\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)\right\}=f\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)z(t-\tau)d\tau-x(t)\right\}=f\left\{x(t)*z(t)-x(t)\right\}$$

$$\Rightarrow j\omega Y(j\omega)+10Y(j\omega)=X(j\omega)Z(j\omega)-X(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{Z(j\omega)-1}{10+j\omega}=\frac{\left(\frac{4+3j\omega}{1+j\omega}\right)-1}{10+j\omega}=\frac{3+2j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)}$$

(ب) برای پاسخ ضربه داریم :

$$h(t)=f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{3+2j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)}\right\}$$

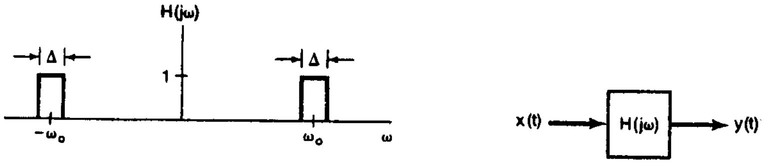
$$=f^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{9}\right)}{1+j\omega}+\frac{\left(\frac{17}{9}\right)}{10+j\omega}\right\}=\frac{1}{9}\left(e^{-t}+17e^{-10t}\right)u(t)$$

۴-۴۵ در بخش ۴-۳-۷ طی مبحث قضیه پارسوال برای سیگنالهای پیوسته در زمان نشان دادیم که

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(j\omega)\right|^2d\omega$$

یعنی با انتگرال‌گیری از $\left|X(j\omega)\right|^2$ روی تمام فرکانسها می‌توان کل انرژی موجود در سیگنال را بدست آورد. حال سیگنال حقیقی $x(t)$ را در نظر بگیرید که توسط فیلتر میانگذر ایده‌آل $H(j\omega)$ شکل م۴-۴۵ پردازش می‌شود. انرژی سیگنال خروجی $y(t)$ را به صورت انتگرال فرکانسی

$|X(j\omega)|^2$ بیان کنید. Δ را به قدر کافی کوچک فرض کنید، طوری که بتوان $|X(j\omega)|$ در یک فاصله فرکانسی به پهنای Δ را تقریباً ثابت دانست. نشان دهید که انرژی خروجی فیلتر میانگذر تقریباً با $\Delta|X(j\omega_0)|^2$ متناسب است. برمبنای نتیجه فوق $\Delta|X(j\omega_0)|^2$ با انرژی سیگنال در پهنای باند Δ حول فرکانس ω_0 متناسب است. به این دلیل $|X(j\omega_0)|^2$ را غالباً طیف چگالی انرژی سیگنال $x(t)$ می‌نامند.



شکل م ۴-۴۵

حل : انرژی سیگنال خروجی $y(t)$ را با استفاده از قضیه پارسوال و به صورت زیر بدست می آوریم :

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(j\omega)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)H(j\omega)|^2d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\frac{\Delta}{2}}^{-\omega_0+\frac{\Delta}{2}}|X(j\omega)|^2d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\frac{\Delta}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta}{2}}|X(j\omega)|^2d\omega$$

حال اگر فیلتر $H(j\omega)$ به اندازه کافی باریک باشد $(\Delta\to 0)$، می توان از تقریب های $X(j\omega)=X(j\omega_0)$ و $X(j\omega)=X(-j\omega_0)$ به ترتیب در حوالی ω_0 و $-\omega_0$ استفاده کرده و نوشت :

$$E\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\frac{\Delta}{2}}^{-\omega_0+\frac{\Delta}{2}}|X(-j\omega_0)|^2d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\frac{\Delta}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta}{2}}|X(j\omega_0)|^2d\omega$$

$$=\frac{\Delta}{2\pi}\left(|X(-j\omega_0)|^2+|X(j\omega_0)|^2\right)$$

از طرفی چون سیگنال $x(t)$ حقیقی است، داریم : $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$ و می توان دید:

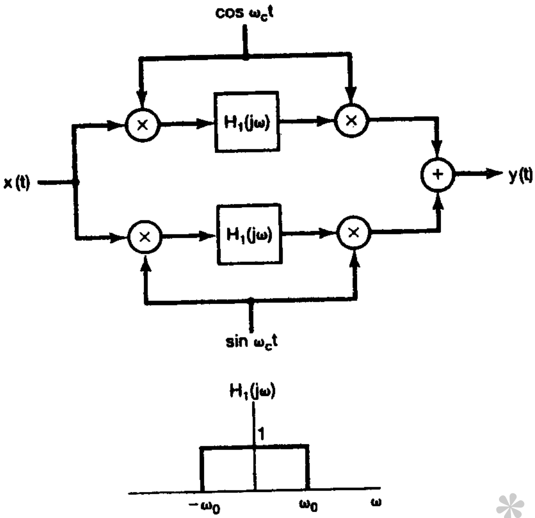
$$|X(j\omega)|^2=|X^*(j\omega)|^2=|X(-j\omega)|^2$$

$$\Rightarrow E\approx\frac{\Delta}{2\pi}\left(|X(j\omega_0)|^2+|X(j\omega_0)|^2\right)=\frac{1}{\pi}\left(\Delta|X(j\omega_0)|^2\right)$$

دیده می شود که انرژی سیگنال $y(t)$ (که بیانگر مجموع انرژی مولفه های فرکانسی حوالی $\pm\omega_0$ سیگنال $x(t)$ می باشد) با $\Delta|X(j\omega_0)|^2$ و با ضریب تناسب $\frac{1}{\pi}$ متناسب است.

۴-۴۶ در بخش ۴-۵-۱ کاربرد مدولاسیون دامنه‌ای با حامل نمایی مختلط در ساختن فیلتر میانگذر را دیدیم. سیستم در شکل ۴-۲۶ نشان داده شده است و اگر تنها بخش حقیقی $f(t)$ را نگه داریم، معادل فیلتر میانگذر شکل ۴-۳۰ است. در شکل م۴-۴۶ تحقق یک فیلتر میانگذر با استفاده از

مدولاسیون سینوسی و فیلتر پایین‌گذر نشان داده شده است. نشان دهید که خروجی $y(t)$ این سیستم با بخش حقیقی خروجی سیستم شکل ۴-۲۶، یعنی $\Re e\{f(t)\}$ یکسان است.



شکل م ۴-۴۶

حل: اگر پاسخ سیستم $H(j\omega)$ را به سیگنال های $x(t)\cos\omega_c t$ و $x(t)\sin\omega_c t$ به ترتیب $g_1(t)$ و $g_2(t)$ بنامیم با توجه به شکل $(26\text{-}4)$ می توان نوشت:

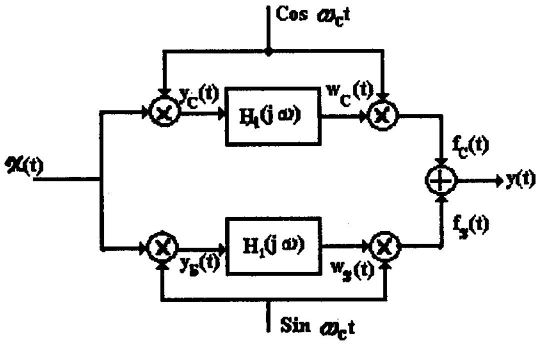
$$y(t)=x(t)e^{j\omega_c t}=x(t)\cos\omega_c t+jx(t)\sin\omega_c t$$

$$\Rightarrow w(t)=y(t)*h(t)=\left[x(t)\cos\omega_c t+jx(t)\sin\omega_c t\right]*h(t)=g_1(t)+jg_2(t)$$

$$\Rightarrow f(t)=e^{-j\omega_c t}w(t)=\left[\cos\omega_c t-j\sin\omega_c t\right]\left[g_1(t)+jg_2(t)\right]=\left[g_1(t)\cos\omega_c t+g_2(t)\sin\omega_c t\right]$$

$$+j\left[g_2(t)\cos\omega_c t-g_1(t)\sin\omega_c t\right]\quad\Rightarrow Re\left\{f(t)\right\}=g_1(t)\cos\omega_c t+g_2(t)\sin\omega_c t\qquad,(I)$$

حال به سیستم شکل (م $46\text{-}4$) می پردازیم ،این سیستم را در شکل زیر مشاهده می کنید:



با توجه به شکل فوق برای بدست آوردن $f_c(t)$ می نویسیم :

$$y_c(t)=x(t)\cos\omega_c t$$

$$\Rightarrow w_c(t)=y_c(t)*h_1(t)=\left[x(t)\cos\omega_c t\right]*h_1(t)=g_1(t)\Rightarrow f_c(t)=g_1(t)\cos\omega_c t \qquad ,(II)$$

همچنین برای $f_s(t)$ می توان دید:

$$y_s(t)=x(t)\sin\omega_c t$$

$$\Rightarrow w_s(t)=y_s(t)*h_1(t)=\left[x(t)\sin\omega_c t\right]*h_1(t)=g_2(t)\Rightarrow f_s(t)=g_2(t)\sin\omega_c t \qquad ,(III)$$

حال با توجه به روابط (II) و (III) می توان برای $y(t)$ نوشت :

$$y(t)=y_c(t)+y_s(t)=g_1(t)\cos\omega_c t+g_2(t)\sin\omega_c t \qquad ,(IV)$$

با مقایسه روابط (I) و (IV) به سادگی مشاهده می کنیم که سیستم شکل (م 46-4) تحقق از یک فیلتر میان گذر می باشد.

۲-۴۷ یکی از خواص پاسخ فرکانسی سیستمهای LTI پیوسته در زمان، با پاسخ ضربه $h(t)$ حقیقی و علی، این است که قسمت حقیقی $H(j\omega)$ یعنی $\Re e\{H(j\omega)\}$، $H(j\omega)$ را به طور کامل مشخص می‌کند. این خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی نام دارد و در این مسئله بعضی نتایج ضمنی آن بررسی می‌شود.

(الف) با بررسی سیگنال $h_e(t)$، که قسمت زوج $h(t)$ است، خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی را ثابت کنید. تبدیل فوریه $h_e(t)$ چیست؟ چگونه می‌توان $h(t)$ را از $h_e(t)$ بدست آورد.

(ب) بخش حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم علی عبارت است از

$$\Re e\{H(j\omega)\}=\cos\omega$$

$h(t)$ را بیابید.

(ج) نشان دهید که به ازای همه مقادیر t بجز $t=0$، می‌توان $h(t)$ را از $h_o(t)$، یعنی قسمت فرد $h(t)$، بدست آورد. اگر $h(t)$ در $t=0$ تابع تکین [$\delta(t)$، $u_1(t)$، $u_2(t)$ و غیره] نداشته باشد، می‌توان مقدار $h(t)$ را در $t=0$، مقدار محدود دلخواهی فرض کرد بدون اینکه پاسخ فرکانسی زیر تغییر کرد

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

به این ترتیب نشان دهید که قسمت موهومی $H(j\omega)$ نیز $H(j\omega)$ را به طور کامل مشخص می‌کند.

حل : (الف) از آنجا که سیستم حقیقی است داریم: $H(j\omega)=H^*(-j\omega)$ و چون علی است ، $h(t<0)=0$ و می توان نوشت :

$$t<0\ \Rightarrow h(t)=0 \qquad ,(I)$$

$$f\left\{h_e(t)\right\}=f\left\{\frac{1}{2}\left[h(t)+h(-t)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[H(j\omega)+H^*(j\omega)\right]=Re\left\{H(j\omega)\right\}$$

بنابراین با دانستن $Re\{H(j\omega)\}$ می توان با کمک تبدیل عکس تبدیل فوریه، $h_e(t)$ را بدست آورد ، حال کافیست نشان دهیم که با وجود $h_e(t)$، پاسخ ضربه $h(t)$ کاملا مشخص خواهد بود ،برای $t>0$ داریم :

$$h_e(t)=\frac{1}{2}\left[h(t)+h(-t)\right]=\frac{1}{2}\left[h(t)+0\right]=\frac{h(t)}{2}\Rightarrow h(t)=2h_e(t)\qquad t>0\qquad ,(II)$$

همچنین برای لحظه $t=0$ خواهیم داشت :

$$h_e(t=0)=\frac{1}{2}\left[h(0)+h(0)\right]\qquad\Rightarrow h(0)=h_e(0)\qquad ,(III)$$

در اینصورت با توجه به روابط (I) ، (II) و (III) می توان دید :

$$h(t)=\begin{cases}2h_e(t) & ;t>0\\ h_e(0) & ;t=0\\ 0 & ;t<0\end{cases}\qquad (IV)$$

بدین ترتیب خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی ثابت می شود.

(ب) ابتدا $h_e(t)$ را بدست می آوریم :

$$h_e(t)=f^{-1}\left\{Re\left\{H(j\omega)\right\}\right\}=f^{-1}\{\cos\omega\}=f^{-1}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right\}=\frac{1}{2}\left[\delta(t+1)+\delta(t-1)\right]$$

حال با توجه به رابطه (IV) می توان نوشت :

$$h(t)=\begin{cases}2h_e(t) & ;t>0\\ h_e(0) & ;t=0\\ 0 & ;t<0\end{cases}=\begin{cases}2\left(\frac{1}{2}\delta(t-1)\right) & ;t>0\\ 0 & ;t=0\\ 0 & ;t<0\end{cases}=\delta(t-1)$$

(ج) ابتدا داریم :

$$f\left\{h_o(t)\right\}=f\left\{\frac{1}{2}\left[h(t)-h(-t)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[H(j\omega)-H^*(j\omega)\right]=jIm\left\{H(j\omega)\right\}$$

بنابراین با دانستن $Im\{H(j\omega)\}$ ، می توان با کمک تبدیل عکس تبدیل فوریه ، $h_o(t)$ را بدست آورد ؛حال می خواهیم ببینیم که آیا با تعیین دقیق $h_o(t)$, $h(t)$ نیز کاملا مشخص خواهد شد ،یانه؟ اگر جواب "بلی" باشد ، خاصیت "کافی بودن قسمت موهومی" ثابت خواهد شد. برای $t>0$ داریم :

$$h_o(t)=\frac{1}{2}\left[h(t)-h(-t)\right]=\frac{1}{2}\left[h(t)-0\right]=\frac{h(t)}{2}\Rightarrow h(t)=2h_o(t)\qquad ,t>0\qquad ,(V)$$

همچنین برای $t=0$ نمی توان $h(t)$ را از روی $h_o(t)$ محاسبه کرد، زیرا $h_o(0)$ در هر صورتی صفر بوده و ارتباطی با $h(0)$ ندارد؛ در نهایت $h(t)$ را می توان به صورت زیر نمایش داد :

$$h(t)=\begin{cases}2h_o(t) & ;t>0\\ not\ specified & ;t=0\\ 0 & ;t<0\end{cases}\qquad (VI)$$

بنابراین دیده می شود که در حالت کلی تعیین دقیق $h(t)$ با توجه به $Im\{H(j\omega)\}$ میسر نیست. با این وجود اگر $h(t)$ در $t=0$ تابع تکین نداشته باشد، فرض مقدار محدودی برای $h(0)$ (مثلا $h(0)=A$) هیچ محدودیتی برای تعیین $H(j\omega)$ از $h(t)$ بدست آمده در رابطه (VI) و در کل تعیین $H(j\omega)$ از بخش

موهومی $Hj\omega$ نخواهد داشت ،چرا که :

$$\int_{0^-}^{0^+} h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0^-}^{0^+} Ae^{-j\omega t}dt=0$$

۴-۴۸ یک سیستم با پاسخ ضربه علی $h(t)$ در نظر بگیرید که در $t=0$ تکینی نداشته باشد. در مسئله ۴-۴۷ دیدیم که بخش حقیقی یا موهومی $H(j\omega)$ آن را به طور کامل تعیین می‌کند. در این مسئله رابطه صریحی بین $H_R(j\omega)$ و $H_I(j\omega)$، یعنی بخشهای حقیقی و موهومی $H(j\omega)$ بدست می‌آوریم.

(الف) ابتدا توجه کنید که چون $h(t)$ علی است و می توان نوشت

$$h(t)=h(t)u(t) \qquad (م۴-۴۸-۱)$$

بجز احتمالاً در $t=0$. چون $h(t)$ در $t=0$ تابع تکین ندارد، تبدیل فوریه دو طرف معادله (م۴-۴۸-۱) باید یکسان باشد. با استفاده از مطلب فوق و خاصیت ضرب نشان دهید که

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(j\eta)}{\omega-\eta}d\eta \qquad (م۴-۴۸-۲)$$

با استفاده از معادله فوق، $H_R(j\omega)$ را برحسب $H_I(j\omega)$ و $H_I(j\omega)$ را برحسب $H_R(j\omega)$ بیان کنید.

(ب) عمل

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau \qquad (م۴-۴۸-۳)$$

تبدیل هیلبرت نامیده می‌شود. دیدیم که برای پاسخ ضربه حقیقی و علی $h(t)$، بخشهای حقیقی و موهومی تبدیل فوریه را می‌توان به کمک تبدیل هیلبرت، به یکدیگر ربط داد.

حال معادله (م۴-۴۸-۳) را در نظر بگیرید و $y(t)$ را خروجی یک سیستم LTI به ازای ورودی $x(t)$ فرض کنید. نشان دهید که پاسخ فرکانسی این سیستم عبارت است از

$$H(j\omega)=\begin{cases}-j & ; \quad \omega>0\\ j & ; \quad \omega<0\end{cases}$$

(ج) تبدیل هیلبرت سیگنال $x(t)=\cos 3t$ را بدست آورید.

حل : (الف) با توجه به علی بودن $h(t)$ می توان نوشت :

$$h(t<0) \quad \Rightarrow h(t)=h(t)u(t)\Rightarrow f\left\{h(t)\right\}=f\left\{h(t)u(t)\right\}\Rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{2\pi}f\left\{h(t)\right\}*f\left\{u(t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}H(j\omega)*\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{1}{2}H(j\omega)+\frac{1}{2\pi j}\left[\frac{1}{\omega}*H(j\omega)\right]$$

$$\Rightarrow \ H(j\omega)=\frac{1}{j\pi}\left[\frac{1}{\omega}*H(j\omega)\right]=\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(j\eta)}{\omega-\eta}d\eta \qquad ,(I)$$

(ب) با قرار دادن $H(j\omega)=H_R(j\omega)+jH_I(j\omega)$ در رابطه (I) خواهیم داشت :

$$H_R(j\omega)+jH_I(j\omega)=\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_R(j\omega)+jH_I(j\omega)}{\omega-\eta}d\eta=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_I(j\omega)}{\omega-\eta}d\eta-j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_R(j\omega)}{\omega-\eta}d\eta$$

$$\Rightarrow\ H_R(j\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_I(j\omega)}{\omega-\eta}d\eta \qquad , \qquad H_I(j\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_R(j\omega)}{\omega-\eta}d\eta$$

اکنون با گرفتن تبدیل فوریه از تبدیل هیلبرت داریم :

$$Y(j\omega)=f\left\{y(t)\right\}=f\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau\right\}=f\left\{x(t)*\frac{1}{\pi t}\right\}=f\left\{x(t)\right\}f\left\{\frac{1}{\pi t}\right\}=X(j\omega)H(j\omega)$$

در این مرحله به محاسبه $H(j\omega)=f\left\{\frac{1}{\pi t}\right\}$ می پردازیم ، بدین منظور از خاصیت همزادی تبدیل فوریه بهره می گیریم .برای سیگنال $z(t)=u(t)-\frac{1}{2}$ می دانیم :

$$Z(j\omega)=f\left\{z(t)\right\}=f\left\{u(t)-\frac{1}{2}\right\}=f\left\{u(t)\right\}-\frac{1}{2}f\{1\}=\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]-\frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\omega)\right]=\frac{1}{j\omega}$$

حال فرض می کنیم سیگنال $w(t)$ همشکل سیگنال $Z(j\omega)$ باشد، یعنی $w(t)=\frac{1}{jt}$، در اینصورت با توجه‌به خاصیت همزادیِ تبدیل فوریه (ر-ک مسئله 4-39) می توان نوشت :

$$W(j\omega)=f\left\{\frac{1}{jt}\right\}=2\pi z(-\omega)=2\pi\left[u(-\omega)-\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=f\left\{\frac{1}{\pi t}\right\}=\frac{j}{\pi}f\left\{\frac{1}{jt}\right\}=\frac{j}{\pi}\left[2\pi u(-\omega)-\pi\right]=2ju(-\omega)-j=\begin{cases}-j & ;\omega>0\\ j & ;\omega<0\end{cases}$$

(ج) با توجه به بند (ب) می توان دید:

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)=f\{\cos 3t\}\ H(j\omega)=\pi\left[\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)\right]\times\begin{cases}-j & ;\omega>0\\ j & ;\omega<0\end{cases}=$$

$$\pi\left[j\delta(\omega+3)-j\delta(\omega-3)\right]=\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)\right]=f\{\sin 3t\}\ \Rightarrow y(t)=\mathscr{H}\{x(t)\}=\sin 3t$$

۴-۴۹ $H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI پیوسته در زمان است، $H(j\omega)$ را حقیقی، زوج و مثبت فرض کنید. همچنین فرض کنید که

$$\max_{\omega}\{H(j\omega)\}=H(0)$$

(الف) نشان دهید

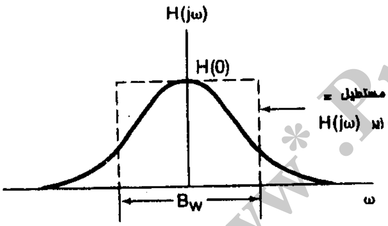
(i) پاسخ ضربه $h(t)$ حقیقی است.

(ii) $\max\left\{\left|h(t)\right|\right\}=h(0)$

راهنمایی : اگر $f(t,\omega)$ تابع مختلطی از دو متغیر باشد، آنگاه

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,\omega)d\omega \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t,\omega) \right| d\omega$$

(ب) یکی از مفاهیم مهم در تحلیل سیستم، پهنای باند سیستم LTI است. برای تعریف ریاضی پهنای باند راههای گوناگونی وجود دارد، اما اساس همه این تعریفها این ایده کیفی و حسی است که در فاصله‌ای که مقدار $G(j\omega)$ کوچک یا صفرست، سیستم سیگنالهای به شکل $e^{j\omega t}$ را "عبور نمی‌دهد"، ولی در فاصله‌ای که مقدار $G(j\omega)$ بزرگ است، سیگنالهای نمایی مختلط از سیستم می‌گذرند. پهنای این فاصله عبور سیگنال پهنای باند نامیده می‌شود.این ایده در فصل ۶ واضحتر می‌شود، ولی فعلاً برای سیستمهایی که پاسخ فرکانسی آنها خواص قبلاً بیان شده برای $G(j\omega)$ را دارد، یک پهنای باند خاص تعریف می‌کنیم. یکی از تعاریف پهنای باند B_w برای چنین سیستمی، پهنای مستطیلی به ارتفاع $H(j0)$ است، به شرطی که مساحت آن با سطح زیر $H(j\omega)$ برابر باشد. این مطلب در شکل ۴-۴۹(الف) تصویر شده است. چون $H(j0)=\max_{\omega} H(j\omega)$، فرکانسهای داخل باند نشان داده شده در شکل، فرکانسهایی‌اند که به ازای آنها $H(j\omega)$ بیشترین مقادیر را دارد. البته انتخاب دقیق این پهنا تا حدی دلخواه است، ما در اینجا تعریفی را پذیرفته‌ایم تا بتوانیم سیستمهای مختلف را با هم مقایسه و یک رابطه مهم بین زمان و فرکانس را به دقت بیان کنیم.



شکل م ۴-۴۹ الف

پهنای باند سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر چقدرست؟

$$H(j\omega)=\begin{cases}1 & ; \ |\omega| < W \\ 0 & ; \ |\omega| > W\end{cases}$$

(ج) پهنای باند B_w را برحسب $H(j\omega)$ بنویسید.

(د) $s(t)$ را پاسخ پله سیستم بند (الف) بگیرید. یکی از معیارهای مهم سرعت پاسخ سیستم زمان صعود آن است، که آن هم یک تعریف کیفی است و بنابراین می‌توان تعاریف ریاضی مختلفی برای آن ارائه داد. در اینجا یکی از این تعاریف را بکار می‌بریم. زمان صعود، به طور شهودی سرعت رسیدن پاسخ سیستم از صفر به مقدار نهایی زیرست

$$s(\infty)=\lim_{t\to\infty} s(t)$$

پس هرچه زمان صعود کمتر باشد، سیستم سریعتر است. برای سیستم مورد بررسی زمان صعود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$t_r=\frac{s(\infty)}{h(0)}$$

چون

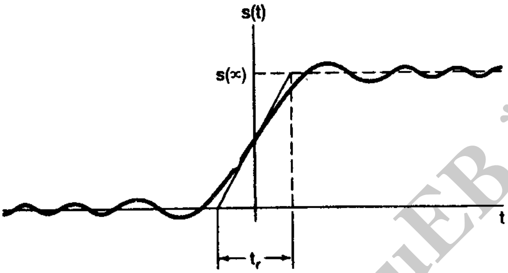
$$s'(t)=h(t)$$

دیدیم که $\max_t h(t)=h(0)$ ، پس می‌توان t_r را به صورت زمانی که طول می‌کشد تا خروجی با ماکزیمم سرعت $s(t)$ از 0 به $s(\infty)$ برسد، تعبیر کرد. این مطلب در شکل م۴-۴۹(ب) تصویر شده است.برای t_r عبارتی برحسب $H(j\omega)$ بیابید.

(هـ) با ترکیب نتایج بندهای (ج) و (د) نشان دهید که :

$$B_w t_r=2\pi \qquad \text{(م۴-۴۹-۱)}$$

پس نمی‌توانیم پهنای باند و زمان صعود را به طور مستقل مشخص کنیم. مثلاً اگر بخواهیم سیستم سریعی داشته باشیم (t_r کوچک) بنابه معادله (م۴-۴۹-۱) باید سیستمی با پهنای باند بزرگ انتخاب کنیم. این مصالحه‌ای اساسی است که در بسیاری از مسائل مربوط به طراحی سیستمها اهمیت کلیدی دارد.



شکل م ۴-۴۹ (ب)

حل : (الف-i) با توجه به حقیقی و زوج بودن $H(j\omega)$، حقیقی و زوج بودن $h(t)$ نیز آشکار می شود (ر-ک جدول 4-1).

(الف-ii)می نویسیم :

$$|h(t)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(j\omega)|\;|e^{j\omega t}|\;d\omega$$

$$\left(=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(j\omega)|\;d\omega=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)e^{-j\omega\times 0}d\omega\right|=|h(0)|\right)\Rightarrow|h(0)|\ge|h(t)|\;,(I)$$

از طرفی با توجه به اینکه داریم: $H(j\omega)>0$، می توان نتیجه گرفت :

$$h(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)e^{-j\omega\times 0}d\omega>0 \qquad ,(II)$$

حال با اعمال (II) در (I) می توان نوشت :

$$\max\{|h(t)|\}=h(0)$$

(ب) این سیستم ،سیگنال های نمایی ورودی به شکل $e^{j\omega t}$ را فقط به ازای $-W<\omega<W$ عبور می دهد ، طول این ناحیه فرکانسی همان پهنای باند سیستم است که برابر $B_w=2W$ می باشد.

(ج) اگر A را تمامی ناحیه زیر $H(j\omega)$ فرض کنیم می توان نوشت :

$$B_w=2W=\frac{2WH(j0)}{H(j0)}=\frac{A}{H(j0)}=\frac{1}{H(j0)}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)d\omega$$

(د) با توجه به اینکه $\bar{s}(t)=h(t)$، می توان دید:

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad s(\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt\,\Big|_{\omega=0}=H(j0)$$

در اینصورت برای زمان صعود بدست می آوریم :

$$t_r=\frac{s(\infty)}{h(0)}=\frac{H(j0)}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)e^{j\omega\times 0}d\omega}=2\pi\frac{H(j0)}{\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)d\omega}$$

(هـ) به سادگی می توان با توجه به نتایج بندهای (ج) و (د) نوشت:

$$t_r=2\pi\frac{H(j0)}{\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)d\omega}=\frac{2\pi}{B_w} \quad \Rightarrow \quad B_w t_r=2\pi$$

۴-۵۰ در مسائل ۱-۴۵ و ۲-۶۷ تابع همبستگی را تعریف و بعضی خواص آن را بررسی کردیم. در این مسئله، خواص این توابع را در حوزه فرکانس بررسی می‌کنیم. $x(t)$ و $y(t)$ را دو سیگنال حقیقی بگیرد. تابع همبستگی متقابل $x(t)$ و $y(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

به همین ترتیب می‌توان توابع $\phi_{yx}(t)$، $\phi_{xx}(t)$ و $\phi_{yy}(t)$ را تعریف کرد. [دو تابع آخری به ترتیب توابع خودهمبستگی $x(t)$ و $y(t)$ نام دارند.] $\Phi_{xy}(j\omega)$، $\Phi_{yx}(j\omega)$، $\Phi_{xx}(j\omega)$ و $\Phi_{yy}(j\omega)$ را به ترتیب تبدیل فوریه $\phi_{xy}(t)$، $\phi_{yx}(t)$، $\phi_{xx}(t)$ و $\phi_{yy}(t)$ فرض کنید.

(الف) $\Phi_{xy}(j\omega)$ و $\Phi_{yx}(j\omega)$ چه رابطه‌ای دارند؟

(ب) $\Phi_{xy}(j\omega)$ را برحسب $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ بدست آورید.

(ج) نشان دهید که $\Phi_{xx}(j\omega)$ برای همه مقادیر ω حقیقی و غیرمنفی است.

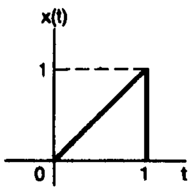
(د) حال فرض کنید $x(t)$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه حقیقی و پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ و $y(t)$ خروجی آن است. $\Phi_{xy}(j\omega)$ و $\Phi_{yy}(j\omega)$ را برحسب $\Phi_{xx}(j\omega)$ و $H(j\omega)$ بیابید.

(هـ) $x(t)$ را به صورت شکل م ۴-۵۰ بگیرید و فرض کنید پاسخ ضربه سیستم LTI، $h(t)=e^{-at}u(t)$ با $a>0$ است. با استفاده از نتایج بندهای (الف) تا (د) $\Phi_{xy}(j\omega)$ ، $\Phi_{xx}(j\omega)$ و $\Phi_{yy}(j\omega)$ را بیابید.

(و) فرض کنید تبدیل فوریه تابع $\phi(t)$ به صورت زیرست

$$\Phi(j\omega)=\frac{\omega^2+100}{\omega^2+25}$$

پاسخ ضربه دو سیستم LTI علی و پایدار، با تابع خودهمبستگی $\phi(t)$ را بیابید. کدام یک از این دو سیستم وارون پایدار و علی دارد؟



شکل م ۴-۵۰

حل : (الف) چون $\phi_{xy}(t)$ حقیقی است ، می توان نوشت :

$$\phi_{xy}(t)=\phi_{yx}(-t) \quad \Rightarrow \Phi_{xy}(j\omega)=\Phi_{yx}(-j\omega)=\Phi_{yx}^{*}(j\omega)$$

(ب) با توجه به حقیقی بودن $y(t)$ داریم :

$$\phi_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t+\tau)y(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\eta)y(-\eta)d\eta=x(t)*y(-t)$$

$$\Rightarrow \Phi_{xy}(j\omega)=f\left\{\phi_{xy}(t)\right\}=f\left\{x(t)*y(-t)\right\}=X(j\omega)Y(-j\omega)=X(j\omega)Y^{*}(j\omega)$$

(ج) با توجه به حقیقی بودن $x(t)$ خواهیم داشت :

$$\Phi_{xx}(j\omega)=f\left\{x(t)*x(-t)\right\}=X(j\omega)X(-j\omega)=X(j\omega)X^{*}(j\omega)=\left|X(j\omega)\right|^{2}\geq 0 \qquad ,\forall\omega$$

(د) می نویسیم :

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega) \;\Rightarrow \Phi_{xy}(j\omega)=X(j\omega)Y^{*}(j\omega)$$

$$=X(j\omega)\left(X(j\omega)H(j\omega)\right)^{*}=\left|X(j\omega)\right|^{2}H^{*}(j\omega)=\Phi_{xx}(j\omega)H^{*}(j\omega)$$

همچنین :

$$\Phi_{yy}(j\omega)=f\left\{y(t)*y(-t)\right\}=f\left\{(x(t)*h(t))*(x(-t)*h(-t))\right\}$$

$$=f\left\{x(t)*x(-t)\right\}f\left\{h(t)\right\}f\left\{h(-t)\right\}=\Phi_{xx}(j\omega)\left|H(j\omega)\right|^{2}$$

(هـ) ابتدا تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ را بدست می آوریم ،به آسانی می توان دید :

$$X(j\omega)=\frac{e^{-j\omega}-1}{\omega^{2}}-j\frac{e^{-j\omega}}{\omega}$$

همچنین برای پاسخ فرکانسی سیستم خواهیم داشت :

$$H(j\omega)=f\left\{h(t)\right\}=f\left\{e^{-at}u(t)\right\}=\frac{1}{a+j\omega}$$

در اینصورت با توجه به نتایج بندهای (ج) و (د) داریم :

$$\Phi_{xx}(j\omega)=\left|X(j\omega)\right|^{2}=X(j\omega)X^{*}(j\omega)$$

$$=\left(\frac{e^{-j\omega}-1}{\omega^{2}}-j\frac{e^{-j\omega}}{\omega}\right)\left(\frac{e^{j\omega}-1}{\omega^{2}}+j\frac{e^{j\omega}}{\omega}\right)=\ldots=\frac{2-2\cos\omega}{\omega^{4}}-\frac{2\sin\omega}{\omega^{3}}+\frac{1}{\omega^{2}}$$

نیز داریم :

$$\Phi_{xy}(j\omega)=\Phi_{xx}(j\omega)H^{*}(j\omega)=\left(\frac{2-2\cos\omega}{\omega^{4}}-\frac{2\sin\omega}{\omega^{3}}+\frac{1}{\omega^{2}}\right)\left(\frac{1}{a-j\omega}\right)$$

و بالاخره :

$$\Phi_{yy}(j\omega)=\Phi_{xx}(j\omega)\left|H(j\omega)\right|^{2}=\left(\frac{2-2\cos\omega}{\omega^{4}}-\frac{2\sin\omega}{\omega^{3}}+\frac{1}{\omega^{2}}\right)\left(\frac{1}{a^{2}+\omega^{2}}\right)$$

(و) می نویسیم :

$$\Phi(j\omega)=\Phi_{hh}(j\omega)=\left|H(j\omega)\right|^{2}=\frac{\omega^{2}+100}{\omega^{2}+25}$$

که با توجه به پایدار و علی بودن پاسخ ضربه $h(t)$،تنها دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$H_1(j\omega)=\frac{10+j\omega}{5+j\omega} \quad , \quad H_2(j\omega)=\frac{10-j\omega}{5+j\omega}$$

برای $h_1(t)$ می نویسیم :

$$h_1(t)=f^{-1}\left\{H_1(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{10+j\omega}{5+j\omega}\right\}=f^{-1}\left\{1+\frac{5}{5+j\omega}\right\}$$

$$=f^{-1}\{1\}+5f^{-1}\left\{\frac{1}{5+j\omega}\right\}=\delta(t)+5e^{-5t}u(t)$$

همینطور برای $h_2(t)$ داریم :

$$h_2(t)=f^{-1}\left\{H_2(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{10-j\omega}{5+j\omega}\right\}=f^{-1}\left\{-1+\frac{15}{5+j\omega}\right\}$$

$$=-f^{-1}\{1\}+15f^{-1}\left\{\frac{1}{5+j\omega}\right\}=-\delta(t)+15e^{-5t}u(t)$$

تابع تبدیل سیستم‌های وارون سیستم های دارای پاسخ ضربه $h_1(t)$ و $h_2(t)$ باید به شکل $H_{2i}(j\omega)=\frac{5+j\omega}{10-j\omega}$ و $H_{1i}(j\omega)=\frac{5+j\omega}{10+j\omega}$ باشند، چرا که :

$$H_1(j\omega)H_{1i}(j\omega)=1 \quad , \quad H_2(j\omega)H_{2i}(j\omega)=1$$

آشکارا دیده می شود که تنها $H_{1i}(j\omega)$ نمایش دهنده سیستمی پایدار و علی می باشد.

۴-۵۱ (الف) دو سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ و $g(t)$ فرض کنید و آنها را وارون یکدیگر بگیرد. همچنین پاسخ فرکانسی این سیستمها را $H(j\omega)$ و $G(j\omega)$ فرض کنید. رابطه بین $H(j\omega)$ و $G(j\omega)$ را بیابید.

(ب) سیستم LTI پیوسته در زمانی با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید

$$H(j\omega)=\begin{cases}1 & ; \quad 2<|\omega|<3\\ 0 & ; \quad otherwise\end{cases}$$

(i) آیا می‌توان برای این سیستم یک ورودی $x(t)$ یافت، به نحوی که خروجی به صورت شکل م۴-۵۰ باشد؟ اگر آری $x(t)$ را بیابید و اگرنه توضیح دهید چرا.

(ii) آیا این سیستم وارون‌پذیر است؟ جواب خود را توضیح دهید.

(ج) تالاری را در نظر بگیرید که مشکل پژواک دارد. در مسئله ۲-۶۴ گفتیم که برای مدل اکوستیک تالار می‌توان یک سیستم LTI در نظر گرفت که پاسخ ضربه آن یک رشته ضربه است، ضربه kام رشته با پژواک kام متناظرست. در این مسئله، پاسخ ضربه را به صورت زیر فرض کنید

$$h(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-kT}\delta(t-kT)$$

عامل e^{-kT} تضعیف پژواک kام را نشان می‌دهد.

برای اینکه بتوانیم صدا را با یک کیفیت خوب ضبط کنیم، باید سیگنال حس شده توسط دستگاه ضبط را پردازش و پژواکها را حذف کنیم. در مسئله ۲-۶۴ با استفاده از روش کانولوشن، یک پردازنده نمونه (برای یک مدل پژواک متفاوت) طراحی کردیم. در این مسئله از روشهای حوزه فرکانس استفاده می‌کنیم. $G(j\omega)$ را پاسخ فرکانسی سیستم LTI پردازنده سیگنال صوتی دریافت شده فرض کنید. $G(j\omega)$ را به نحوی برگزینید که تمام پژواکها حذف شود و سیگنال حاصل، کاملاً مشابه سیگنال اصلی روی صحنه باشد.

(د) معادله دیفرانسیل سیستم وارون سیستمی با پاسخ ضربه زیر را بیابید

$$h(t)=2\delta(t)+u_1(t)$$

(هـ) یک سیستم LTI ابتدائاً ساکن با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

وارون این سیستم هم ابتدائاً ساکن است و با یک معادله دیفرانسیل توصیف می‌شود. این معادله دیفرانسیل را بیابید. $h(t)$ و $g(t)$ یعنی پاسخ ضربه سیستم اصلی و سیستم وارون را بدست آورید.

حل : (الف) می دانیم برای آنکه دو سیستم LTI معکوس یکدیگر باشند کافی است کانوولوشن پاسخ های ضربه آن ها برابر پاسخ ضربه سیستم همانی باشد، یعنی :

$$g(t)*h(t)=\delta(t) \Rightarrow f\left\{g(t)*h(t)\right\}=f\left\{\delta(t)\right\} \Rightarrow G(j\omega)H(j\omega)=1 \Rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{G(j\omega)}$$

(ب-i) ابتدا بدست می آوریم :

$$Y(j0)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j0\times t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$$

از طرفی باید رابطه خروجی -ورودی سیستم در حوزه فرکانس برقرار باشد:

$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega) \Rightarrow Y(j0)=X(j0)H(j0) \Rightarrow \frac{1}{2}=X(j0)\times 0$$

دیده می شود که مولفه dcی سیگنال $x(t)$ باید مقداری نامحدود باشد، که البته غیرممکن است.

(ب-ii) به آسانی با توجه به بند (الف) مشاهده می کنیم که سیستم $H(j\omega)$ وارون‌پذیر نمی باشد، زیرا ضابطه سیستم وارون به شکل $G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}$ در تمامی نواحی بجز ناحیه $3> |\omega| >2$ تعریف نشده است .

(ج) ابتدا پاسخ فرکانسی مدل اکوستیک تالار را می یابیم :

$$H(j\omega)=f\{h(t)\}=f\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT}\delta(t-kT)\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT}f\left\{\delta(t-kT)\right\}=\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT}.e^{-jkT\omega}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-(1+j\omega)T}\right)^k=\frac{1}{1-e^{-(1+j\omega)T}}$$

در اینصورت سیستم وارون به آسانی بدست می آید:

$$G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=1-e^{-(1+j\omega)T}$$

(د) با گرفتن تبدیل فوریه از پاسخ ضربه این سیستم می نویسیم :

$$H(j\omega)=f\left\{h(t)\right\}=f\left\{2\delta(t)+u_1(t)\right\}=2f\left\{\delta(t)\right\}+f\left\{\frac{d}{dt}\delta(t)\right\}=2+j\omega f\left\{\delta(t)\right\}=2+j\omega$$

که در اینصورت ،سیستم وارون را می توان بدست آورد :

$$G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=\frac{1}{2+j\omega}$$

و ادامه می دهیم:

$$j\omega G(j\omega)+2G(j\omega)=1\Rightarrow f^{-1}\left\{j\omega G(j\omega)+2G(j\omega)\right\}=f^{-1}\{1\}\Rightarrow\frac{dg(t)}{dt}+2g(t)=\delta(t)$$

حال با جایگذاری $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب به جای $\delta(t)$ و $g(t)$ (ورودی ضربه و پاسخ ضربه) می توان معادله دیفرانسیل سیستم وارون را بدست آورد:

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

(هـ) سیستم وارون همان سیستم اصلی است که در آن جای ورودی و خروجی عـوض شـده است ، بنابراین با تعویض x و y در معادله دیفرانسیل سیستم اصلی می توان به معادله دیفرانسیل سیستم وارون دست یافت :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+6\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

حال با قرار دادن $\delta(t)$ و $g(t)$ به ترتیب به جای $x(t)$ و $y(t)$ و اعمال تبدیل فوریه می توان پاسخ فرکانسی سیستم معکوس را بدست آورد:

$$f\left\{\frac{d^2g(t)}{dt^2}+3\frac{dg(t)}{dt}+2g(t)\right\}=f\left\{\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+6\frac{d\delta(t)}{dt}+9\delta(t)\right\}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2G(j\omega)+3(j\omega)G(j\omega)+2G(j\omega)=(j\omega)^2+6j\omega+9$$

$$\Rightarrow G(j\omega)=\frac{(j\omega)^2+6j\omega+9}{(j\omega)^2+3j\omega+2}=\frac{3j\omega+7}{(2+j\omega)(1+j\omega)}+1=1+\frac{4}{1+j\omega}+\frac{-1}{2+j\omega}$$

$$\Rightarrow g(t)=f^{-1}\left\{G(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{1+\frac{4}{1+j\omega}+\frac{-1}{2+j\omega}\right\}=\delta(t)+4e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

که همان پاسخ ضربه سیستم وارون می باشد. برای سیستم اصلی نیز به همین ترتیب و این بار با قرار دادن $\delta(t)$ و $h(t)$ به ترتیب به جای $x(t)$ و $y(t)$ خواهیم داشت :

$$f\left\{\frac{d^2h(t)}{dt^2}+6\frac{dh(t)}{dt}+9h(t)\right\}=f\left\{\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+3\frac{d\delta(t)}{dt}+2\delta(t)\right\}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2H(j\omega)+6(j\omega)H(j\omega)+9H(j\omega)=(j\omega)^2+3(j\omega)+2$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}{(j\omega)^2+6j\omega+9}=1-\frac{3j\omega+7}{(3+j\omega)^2}=1-\frac{3}{(3+j\omega)}+\frac{2}{(3+j\omega)^2}$$

$$\Rightarrow h(t)=f^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=f^{-1}\left\{1-\frac{3}{3+j\omega}+\frac{2}{(3+j\omega)^2}\right\}=\delta(t)-3e^{-3t}u(t)+2te^{-3t}u(t)$$

۴-۵۲ سیستمهای وارون معمولاً در مسائل مشتمل بر وسایل اندازه‌گیری غیرکامل کاربرد دارند. مثلاً یک وسیله اندازه‌گیری دمای مایع را در نظر بگیرید. مدل کردن این وسیله با یک سیستم LTI معقول به نظر می‌رسد. این سیستم به خاطر مشخصات پاسخ عنصر اندازه‌گیری (مثلاً جیوه دماسنج) به تغییرات دما به طور ناگهانی پاسخ نمی‌دهد. پاسخ این سیستم به ورودی پله واحد به صورت زیر است

$$s(t)=\left[1-e^{-\frac{t}{2}}\right]u(t) \qquad \text{(م۴-۵۲-۱)}$$

(الف) یک سیستم جبرانساز طراحی کنید، که پاسخ آن به خروجی وسیله اندازه‌گیری دمای لحظه‌ای مایع را بدست دهد.

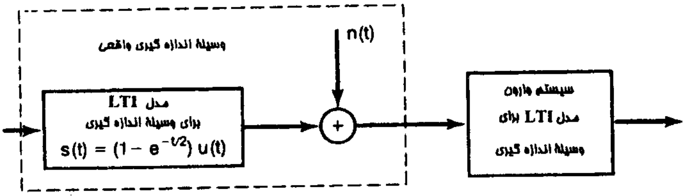
(ب) یکی از مشکلات کاربرد سیستمهای وارون بعنوان جبرانساز وسایل اندازه‌گیری این است که اگر خروجی واقعی وسیلهِ اندازه‌گیری به خاطر پدیده‌های خطاآمیز وسیله خطا داشته باشد، دمای نشان داده شده می‌تواند خطای بزرگی داشته باشد. چون در سیستمهای حقیقی چنین خطایی همیشه وجود دارد، باید آنها را در نظر گرفت. برای روشن شدن مطلب یک وسیله اندازه‌گیری در نظر بگیرید که خروجی آن را بتوان به صورت مجموع پاسخ وسیله اندازه‌گیری مطابق معادله (م۴-۵۲-۱) و یک سیگنال نویز مزاحم $n(t)$ مدل کرد. شکل م۴-۵۲(الف) این وضعیت را نشان می‌دهد. در این شکل سیستم وارون بند (الف) هم گنجانده شده است. فرض کنید $n(t)=\sin\omega t$. سهم $n(t)$ در خروجی سیستم وارون چیست و با افزایش ω این خروجی چگونه تغییر می‌کند؟

(ج) مشکل مطرح شده در بند (ب) در بسیاری از کاربردهای سیستمهای LTI اهمیت دارد. در حقیقت باید بین سرعت پاسخ و توانایی سیستم در حذف تداخلهای فرکانس بالا مصالحه‌ای صورت گیرد. در بند (ب) دیدیم که این مصالحه ایجاب می‌کند که اگر بخواهیم سرعت پاسخ وسیله اندازه‌گیری را زیاد کینم (با گذاشتن سیستم وارون)، سیستمی ایجاد خواهد شد که سیگنالهای مزاحم سینوسی را هم تقویت می‌کند. برای روشن شدن مطلب یک وسیله اندازه‌گیری در نظر بگیرید که بدون تاخیر به ورودی پاسخ دهد ولی آلوده به نویز هم باشد. پاسخ این سیستم را می‌توان مطابق شکل م۴-۵۲(ب) به صورت مجموع پاسخ یک وسیله اندازه‌گیری کامل و سیگنال نویز $n(t)$ مدل کرد. فرض کنید بخواهیم مطابق شکل م۴-۵۲(ب) سیستم جبرانسازی طراحی کنیم که پاسخ به تغییرات واقعی دما را آهسته کند، ولی در ضمن نویز $n(t)$ را نیز تضعیف کند. پاسخ ضربه این

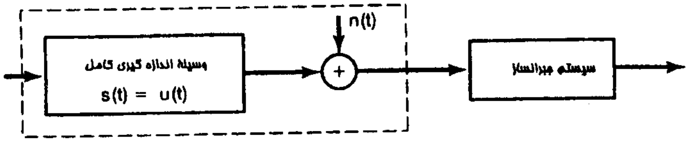
سیستم جبران‌ساز را به صورت زیر فرض کنید

$$h(t)=ae^{-at}u(t)$$

a را به نحوی برگزینید که پاسخ کل سیستم شکل م۴-۵۲(ب) به تغییرات پله‌ای دما تا حد امکان سریع باشد ولی $n(t)=\sin 6t$ خروجی بزرگتر از $\frac{1}{4}$ ایجاد نکند.



(الف)



شکل م ۴-۵۲

(ب)

حل : (الف) ابتدا پاسخ فرکانسی سیستم را بدست می آوریم :

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)\right]=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$$

$$\Rightarrow \qquad H(j\omega)=f\{h(t)\}=f\left\{\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)\right\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{2}+j\omega}=\frac{1}{1+2j\omega}$$

در اینصورت سیستم وارون ، دارای پاسخ فرکانسی $G(j\omega)$ به شکل زیر خواهد بود:

$$G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=1+2j\omega$$

که متناظر با پاسخ ضربه $g(t)$ می باشد:

$$g(t)=f^{-1}\left\{G(j\omega)\right\}=f^{-1}\{1+2j\omega\}=\delta(t)+\frac{2d\delta(t)}{dt}=\delta(t)+2u_1(t)$$

(ب) سهم سیگنال نویز را در خروجی می توان با محاسبه خروجی در شرایط ورودی صفر بدست آورد:

$$y_N(t)=\left\{x(t)+n(t)\right\}*g(t)\,|_{x(t)=0}=n(t)*g(t)=(\sin\omega t)*\left[\delta(t)+\frac{2d\delta(t)}{dt}\right]$$

$$=\sin\omega t+2\frac{d\sin\omega t}{dt}=\sin\omega t+2\omega\cos\omega t$$

به آسانی دیده می شود که با افزایش ω،اثر سیگنال نویز در خروجی بطور نامحدود افزایش می یابد.

(ج) داریم :

$$H(j\omega)=f\{h(t)\}=f\left\{ae^{-at}u(t)\right\}=\frac{a}{a+j\omega}$$

در اینصورت برای آنکه اثر سیگنال نویز $n(t)=sin6t$ در خروجی کمتر از $\frac{1}{4}$ باشد، کافیست تضعیفی بیش از $\frac{1}{4}$ در فرکانس $\omega=6$ در سیستم جبرانساز داشته باشیم ، یعنی :

$$gain\,\Big|_{\omega=6}=\frac{1}{attenutation}\Big|_{\omega=6}=\Big|H(j\omega)\Big|\,\Big|_{\omega=6}\leq\frac{1}{4}\;\Rightarrow\;\Big|H(j6)\Big|^2=H(j6)H^*(j6)\leq\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{a+j6}\right)\left(\frac{a}{a-j6}\right)\leq\frac{1}{16}\quad\Rightarrow\quad\frac{a^2}{a^2+36}\leq\frac{1}{16}\quad\Rightarrow\quad 0\leq a\leq\frac{6}{\sqrt{15}}$$

توجه شود که برای مقادیر منفی a ،سیستم جبرانساز ناپایدار می باشد. همچنین با افزایش a تا مقدار $\frac{6}{\sqrt{15}}$ ، تضعیف در پاسخ فرکانسی سیستم جبرانساز کاهش یافته و در نتیجه پهنای باند موثر سیستم افزایش می یابد که به نوبه خود موجب تسریع سیستم کلی می شود، بنابراین برای آنکه هر دو شرط داده شده در مسئله تامین شوند انتخاب می کنیم $a=\frac{6}{\sqrt{15}}$.

۴-۵۳ همانطور که در درس گفتیم، روشهای تحلیل فوریه را می‌توان به سیگنالهای دارای دو متغیر مستقل تعمیم داد. این روشها نیز مانند همتاهای یک بعدی‌شان نقش مهمی در بعضی کاربردها چون پردازش تصویر دارند. دراین مسئله ایده‌های اولیه تحلیل فوریه دوبعدی را در نظر می‌گیریم.
$x(t_1,t_2)$ را سیگنالی با دو متغیر مستقل t_1 و t_2 فرض کنید. تبدیل فوریه دوبعدی $x(t_1,t_2)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X(j\omega_1,j\omega_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t_1,t_2)e^{-j(\omega_1t_1+\omega_2t_2)}dt_1dt_2$$

(الف) نشان دهید که این انتگرال دوگانه را می‌توان به صورت دو تبدیل فوریه یک‌بعدی متوالی ابتدا نسبت به t_1 (با فرض ثابت بودن t_2) و سپس نسبت به t_2 محاسبه کرد.
(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) عکس تبدیل یعنی $x(t_1,t_2)$ برحسب $X(j\omega_1,j\omega_2)$ را بیابید.
(ج) تبدیل فوریه دوبعدی سیگنالهای زیر را بیابید.

$$x(t_1,t_2)=e^{-t_1+2t_2}u(t_1-1)u(2-t_2)\quad (i)$$

$$x(t_1,t_2)=\begin{cases}e^{-|t_1|-|t_2|} & ;\quad -1\leq t_1\leq 1\,,\,-1\leq t_2\leq 1\\ 0 & ;\quad otherwise\end{cases}\qquad (ii)$$

$$x(t_1,t_2)=\begin{cases}e^{-|t_1|-|t_2|} & ;\quad 0\leq t_1\leq 1\ or\ 0\leq t_2\leq 1\\ 0 & ;\quad otherwise\end{cases}\qquad (iii)$$

(iv) $x(t_1,t_2)$ شکل م۴-۵۳

(v) $e^{-|t_1+t_2|-|t_1-t_2|}$

(د) سیگنال $x(t_1, t_2)$ با تبدیل فوریه دوبعدی زیر را بیابید

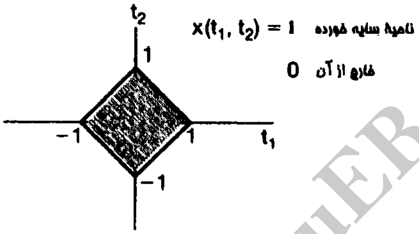
$$X(j\omega_1, j\omega_2)=\frac{2\pi}{4+j\omega_1}\delta(\omega_2-2\omega_1)$$

(هـ) $x(t_1,t_2)$ و $h(t_1,t_2)$ دو سیگنال دوبعدی با تبدیل فوریه‌های $X(j\omega_1,j\omega_2)$ و $H(j\omega_1,j\omega_2)$ هستند. تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را برحسب $X(j\omega_1,j\omega_2)$ و $H(j\omega_1,j\omega_2)$ بیابید :

(i) $x(t_1-T_1, t_2-T_2)$

(ii) $x(at_1, bt_2)$

(iii) $y(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau_1,\tau_2)h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$



شکل م ۴-۵۳

حل : (الف) می نویسیم :

$$X(j\omega_1,j\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1,t_2)\, e^{-j(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2)}dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1,t_2)\, e^{-j\omega_1 t_1}dt_1\right] e^{-j\omega_2 t_2}dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega_1,t_2)\, e^{-j\omega_2 t_2}dt_2 = f_{\omega_2}\{f_{\omega_1}\{x(t_1,t_2)\}\}$$

که همان نتیجه مورد نظر است.

(ب) داریم :

$$f_{\omega_1}^{-1}\left\{f_{\omega_2}^{-1}\{X(j\omega_1,j\omega_2)\}\right\} = f_{\omega_1}^{-1}\left\{f_{\omega_2}^{-1}\{f_{\omega_2}\{f_{\omega_1}\{x(t_1,t_2)\}\}\}\right\}$$

$$= f_{\omega_1}^{-1}\{f_{\omega_1}\{x(t_1,t_2)\}\} = x(t_1,t_2) \Rightarrow x(t_1,t_2) = f_{\omega_1}^{-1}\left\{f_{\omega_2}^{-1}\{X(j\omega_1,j\omega_2)\}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega_1,j\omega_2)\, e^{j\omega_2 t_2}d\omega_2\right] e^{j\omega_1 t_1}d\omega_1$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega_1,j\omega_2)\, e^{j(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2)}d\omega_1 d\omega_2$$

(ج-i)

$$X(j\omega_1,j\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1,t_2)\, e^{-j(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2)}dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{2}\int_{1}^{+\infty} e^{-t_1+2t_2} e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2$$

$$= \left[\int_{1}^{+\infty} e^{-\left(1+j\omega_1\right)t_1} dt_1\right]\left[\int_{-\infty}^{2} e^{\left(2-j\omega_2\right)t_2} dt_2\right] = \ldots = \left(\frac{e^{-\left(1+j\omega_1\right)}}{1+j\omega_1}\right)\left(\frac{e^{2\left(2-j\omega_2\right)}}{2-j\omega_2}\right)$$

(ج-ii)

$$X\left(j\omega_1, j\omega_2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t_1,t_2\right) e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-|t_1|-|t_2|} e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2 = \left[\int_{-1}^{1} e^{-|t_1|} e^{-j\omega_1 t_1} dt_1\right]\left[\int_{-1}^{1} e^{-|t_2|} e^{-j\omega_2 t_2} dt_2\right]$$

$$= \ldots = \frac{\left[1-e^{-\left(1+j\omega_1\right)}\right]\left[1-e^{-\left(1-j\omega_2\right)}\right]}{\left(1+j\omega_1\right)\left(1-j\omega_2\right)} + \frac{\left[1-e^{-\left(1+j\omega_1\right)}\right]\left[1-e^{-\left(1+j\omega_2\right)}\right]}{\left(1+j\omega_1\right)\left(1+j\omega_2\right)}$$

(ج-iii)

$$X\left(j\omega_1, j\omega_2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t_1,t_2\right) e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{1} e^{-|t_1|-|t_2|} e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2 + \int_{0}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t_1|-|t_2|} e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2$$

$$- \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} e^{-|t_1|-|t_2|} e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2$$

$$= \ldots = \frac{2-e^{-\left(1+j\omega_1\right)}-e^{-\left(1+j\omega_2\right)}-\left(1-e^{-\left(1+j\omega_1\right)}\right)\left(1-e^{-\left(1+j\omega_2\right)}\right)}{\left(1+j\omega_1\right)\left(1+j\omega_2\right)}$$

$$+ \frac{1-e^{-\left(1+j\omega_1\right)}}{\left(1+j\omega_1\right)\left(1-j\omega_2\right)} + \frac{1-e^{-\left(1+j\omega_2\right)}}{\left(1-j\omega_1\right)\left(1+j\omega_2\right)}$$

(ج-iv)

$$X\left(j\omega_1, j\omega_2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t_1,t_2\right) e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{-t_2-1}^{t_2+1} e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2 + \int_{0}^{1}\int_{t_2-1}^{-t_2+1} e^{-j\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2\right)} dt_1 dt_2$$

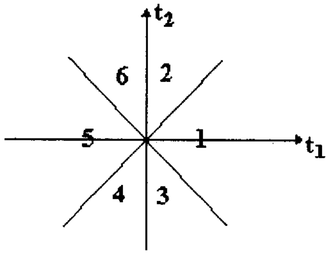
$$= \int_{-1}^{0}\left[\int_{-t_2-1}^{t_2-1} e^{-j\omega_1 t_1} dt_1\right] e^{-j\omega_2 t_2} dt_2 + \int_{0}^{1}\left[\int_{t_2-1}^{-t_2+1} e^{-j\omega_1 t_1} dt_1\right] e^{-j\omega_2 t_2} dt_2$$

$$=\ldots=-\frac{1}{j\omega_2}\left[\frac{e^{-j\omega_2}\left(1-e^{-j(\omega_1+\omega_2)}+e^{j\omega_2}\left(1-e^{-j(\omega_1+\omega_2)}\right)\right)}{-j(\omega_1+\omega_2)}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{j\omega_2}\left(1-e^{-j(\omega_1-\omega_2)}+e^{-j\omega_2}\left(1-e^{-j(\omega_1-\omega_2)}\right)\right)}{-j(\omega_1+\omega_2)}\right]$$

(ج-۷) صفحه (t_1,t_2) را به شش بخش مشخص می توان تقسیم کرد:

$$x(t_1,t_2)=\begin{cases} e^{-2t_1} & ;area\,1\\ e^{-2t_2} & ;area\,2\\ e^{2t_2} & ;area\,3\\ e^{2t_2} & ;area\,4\\ e^{2t_1} & ;area\,5\\ e^{-2t_2} & ;area\,6\end{cases}$$



با توجه به خطی بودن تبدیل فوریه می توان تبدیل فوریه تک تک نواحی نشان داده شده را بدست آورده و با جمع آن ها تبدیل فوریه سیگنال $x(t_1,t_2)$ را محاسبه کرد؛ تبدیل های فوریه نواحی فوق در زیر آمده اند:

$$area\,1: X_1(j\omega_1,j\omega_2)=\frac{2}{(2+j\omega_1+j\omega_2)(2+j\omega_1-j\omega_2)}$$

$$area\,2: X_2(j\omega_1,j\omega_2)=\frac{1}{(2+j\omega_2)(2+j\omega_1+j\omega_2)}$$

$$area\,3: X_3(j\omega_1,j\omega_2)=\frac{1}{(2-j\omega_2)(2+j\omega_1-j\omega_2)}$$

$$area\,4: X_4(j\omega_1,j\omega_2)=\frac{1}{(2-j\omega_2)(2-j\omega_1-j\omega_2)}$$

$$area\,5: X_5(j\omega_1,j\omega_2)=\frac{-2}{(2-j\omega_1-j\omega_2)(2-j\omega_1+j\omega_2)}$$

$$area\,6: X_6(j\omega_1,j\omega_2)=\frac{1}{j\omega_2(2-j\omega_1-j\omega_2)}$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$X(j\omega_1,j\omega_2)=\sum_{k=1}^{6}X_k(j\omega_1,j\omega_2)$$

(د)

$$x(t_1,t_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega_1,j\omega_2)\,e^{j(\omega_1t_1+\omega_2t_2)}d\omega_1d\omega_2$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{4+j\omega_1}\delta(\omega_2-2\omega_1)\,e^{j\omega_2t_2}d\omega_2\right]e^{j\omega_1t_1}d\omega_1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4+j\omega_1}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega_2-2\omega_1)\,e^{2j\omega_1t_2}d\omega_2\right]e^{j\omega_1t_1}d\omega_1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4+j\omega_1}e^{j(t_1+2t_2)\omega_1}d\omega_1=e^{-4(t_1+2t_2)}u(t_1+2t_2)$$

(i-هـ)می نویسیم :

$$f\{x(t_1-T_1,t_2-T_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t_1-T_1,t_2-T_2)\,e^{-j(\omega_1t_1+\omega_2t_2)}dt_1dt_2$$

حال با تغییر متغیرهای $t_1-T_1=\tau_1$ و $t_2-T_2=\tau_2$ خواهیم داشت :

$$f\{x(t_1-T_1,t_2-T_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau_1,\tau_2)\,e^{-j(\omega_1(\tau_1+T_1)+\omega_2(\tau_2+T_2))}d\tau_1d\tau_2$$

$$=e^{-j\omega_1T_1}e^{-j\omega_2T_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau_1,\tau_2)\,e^{-j(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)}d\tau_1d\tau_2=e^{-j\omega_1T_1}e^{-j\omega_2T_2}X(j\omega_1,j\omega_2)$$

(ii-هـ) ابتدا داریم :

$$f\{x(at_1,bt_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(at_1,bt_2)\,e^{-j(\omega_1t_1+\omega_2t_2)}dt_1dt_2$$

حال با تغییر متغیرهای $at_1=\tau_1$ و $bt_2=\tau_2$ می توان نوشت، $(a,b>0)$:

$$f\{x(at_1,bt_2)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau_1,\tau_2)\,e^{-j\left(\omega_1\frac{\tau_1}{a}+\omega_2\frac{\tau_2}{b}\right)}\left(\frac{1}{ab}\right)d\tau_1d\tau_2$$

$$=\frac{1}{ab}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau_1,\tau_2)\,e^{-j\left(\left(\frac{\omega_1}{a}\right)\tau_1+\left(\frac{\omega_2}{b}\right)\tau_2\right)}d\tau_1d\tau_2=\frac{1}{ab}X\left(j\frac{\omega_1}{a},j\frac{\omega_2}{b}\right)$$

می توان نشان داد در صورتی که b,a هر دو مثبت نباشند، رابطه اخیر به صورت زیر اصلاح می شود:

$$f\{x(at_1,bt_2)\}=\frac{1}{|ab|}X\left(j\frac{\omega_1}{a},j\frac{\omega_2}{b}\right)$$

(iii-هـ)

$$y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau_1,\tau_2)\,h(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2=x(t_1,t_2)*h(t_1,t_2)$$

$$\Rightarrow Y(j\omega_1,j\omega_2)=f\{y(t_1,t_2)\}=f\{x(t_1,t_2)*h(t_1,t_2)\}$$

$$=f\{x(t_1,t_2)\}f\{h(t_1,t_2)\}=X(j\omega_1,j\omega_2)\,H(j\omega_1,j\omega_2)$$

۵

تبدیل فوریه گسسته در زمان

۵-۱ به کمک معادله تجزیه تبدیل فوریه (۵-۹) تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید:

(الف) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$ (ب) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$

اندازه هر تبدیل فوریه را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حل: (الف)

$$X_1\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[n]\,e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]\,e^{-j\omega n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-j\omega(n+1)}=e^{-j\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{n}=\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

اندازه تبدیل فوریه $\left|X_1(j\omega)\right|$ را در شکل (a) مشاهده می‌نمائید.

(ب)

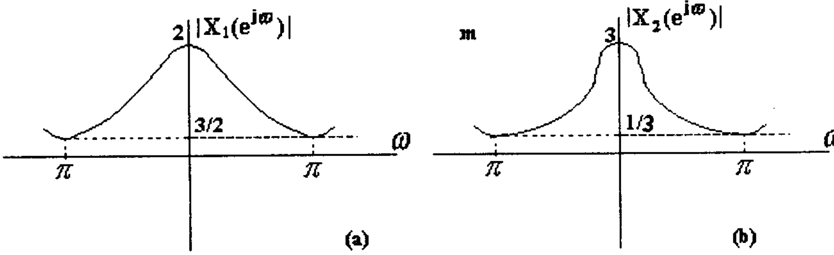
$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2[n]\,e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{-(n-1)}e^{-j\omega n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-j\omega(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)^{n}+e^{-j\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}+\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}+e^{-j\omega}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)}=\frac{0.75e^{-j\omega}}{1.25-\cos\omega}$$

اندازه تبدیل فوریه $\left|X_2\left(e^{j\omega}\right)\right|$ در شکل (b) ترسیم شده است.



۵-۲ به کمک معادله تجزیه تبدیل فوریه (۵-۹)، تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید :

(الف) $\delta[n-1]+\delta[n+1]$ (ب) $\delta[n+2]-\delta[n-2]$

اندازه هر تبدیل فوریه را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حل : (الف)

$$X_1\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[n]\,e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta[n-1]+\delta[n+1]]\,e^{-j\omega n}$$

$$=e^{-j\omega\times 1}+e^{-j\omega\times(-1)}=e^{-j\omega}+e^{j\omega}=2\cos\omega$$

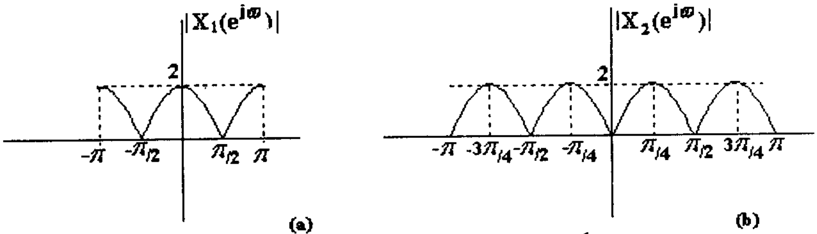
اندازه تبدیل فوریه $\left|X_1\left(e^{j\omega}\right)\right|$ در شکل (a) ترسیم شده است.

(ب)

$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\delta[n+2]-\delta[n-2]]e^{-j\omega n}$$

$$=e^{-j\omega\times(-2)}-e^{-j\omega\times 2}=e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}=2j\left[\frac{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}}{2j}\right]=2j\sin(2\omega)$$

اندازه تبدیل فوریه $\left|X_2\left(e^{j\omega}\right)\right|$ را می‌توانید در شکل (b) ببینید.



۵-۳ تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای متناوب زیر را در $-\pi\le\omega<\pi$ بدست آورید :

(الف) $\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)$ (ب) $2+\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)$

حل : (الف)

$$X_1\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{x_1[n]\right\}=f\left\{\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=f\left\{\left[\frac{e^{j\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-j\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)}}{2j}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}}f\left\{e^{j\frac{\pi}{3}n}\right\}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}n}f\left\{e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right\}=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}}\left[2\pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)\right]-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}}\left[2\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{j}\left\{e^{j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)-e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

(ب)

$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{x_2[n]\right\}=f\left\{2+\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)\right\}=f\left\{2+\frac{1}{2}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)}+e^{-j\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)}\right]\right\}$$

$$=2f\{1\}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}f\left\{e^{j\frac{\pi}{6}n}\right\}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}f\left\{e^{-j\frac{\pi}{6}n}\right\}$$

$$=2\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)\right]+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}\left[2\pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\right]+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}\left[2\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=4\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)+\pi\left\{e^{j\frac{\pi}{8}}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)+e^{-j\frac{\pi}{8}}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

در بدست آوردن نتایج فوق از خواص و زوج‌های تبدیل فوریه مندرج در جداول (5-1) و (5-2) بهره برده‌ایم.

۵-۴ با استفاده از معادله ترکیب فوریه (۵-۸) عکس تبدیل فوریه‌های زیر را بیابید:

(الف) $$X_1\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{2\pi\delta(\omega-2\pi k)+\pi\delta(\omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k)+\pi\delta(\omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k)\right\}$$

(ب) $$X_2\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}2j & ;\quad 0<\omega\leq\pi\\ -2j & ;\quad -\pi<\omega\leq 0\end{cases}$$

حل: (الف)

$$x_1[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{2\pi\delta(\omega-2\pi k)+\pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)+\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)\right\}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0^-}^{0^+}\left[2\pi\delta(\omega)e^{j\omega n}\right]d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi^-}{2}}^{\frac{\pi^+}{2}}\left[\pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)e^{j\omega n}\right]d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi^-}{2}}^{-\frac{\pi^+}{2}}\left[\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)e^{j\omega n}\right]d\omega=\int_{0^-}^{0^+}\delta(\omega)d\omega+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi^-}{2}}^{\frac{\pi^+}{2}}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)n}d\omega$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi^-}{2}}^{-\frac{\pi^+}{2}}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)n}d\omega=1+\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{1}{2}\right)n}+\frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)n}=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

(ب) داریم :

$$x_2[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_2\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2j)e^{j\omega n}+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(2j)e^{j\omega n}d\omega$$

حال با تغییر متغیر $\omega\to-\omega$ در انتگرال اول عبارت اخیر خواهیم داشت :

$$x_2[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(-2j)e^{-j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(2j)e^{j\omega n}d\omega=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{e^{j\omega n}-e^{-j\omega n}}{2j}\right]d\omega$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(\omega n)d\omega=+\frac{2}{\pi n}\cos(\omega n)\Big|_{0}^{\pi}=\frac{2}{\pi n}\left[\cos(\pi n)-1\right]$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1\right]=-4\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}$$

۵–۵ با استفاده از معادله ترکیب (۵–۸) عکس تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ را بیابید، که برای آن

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\begin{cases}1 & ;\ 0\leq|\omega|<\frac{\pi}{4}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{4}\leq|\omega|\leq\pi\end{cases}\qquad \text{و}\qquad \angle X\left(e^{j\omega}\right)=-\frac{3\omega}{2}$$

با استفاده از نتیجه بدست آمده مقادیری از n را بیابید که در آنها $x[n]=0$.

حل :

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\angle X\left(e^{j\omega}\right)}.e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}1.e^{-j\frac{3\omega}{2}}.e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}e^{j\omega\left(n-\frac{3}{2}\right)}d\omega+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}e^{j\omega\left(n-\frac{3}{2}\right)}d\omega\right]$$

با تغییر متغیر $\omega\to-\omega$ در انتگرال اول عبارت فوق خواهیم داشت :

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}e^{-j\omega\left(n-\frac{3}{2}\right)}d\omega+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}e^{j\omega\left(n-\frac{3}{2}\right)}d\omega\right]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos\left[\omega\left(n-\frac{3}{2}\right)\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}\sin\left[\omega\left(n-\frac{3}{2}\right)\right]\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}$$

از آنجا که n تنها مقادیر صحیح اعداد را می‌پذیرد، همواره داریم : $\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{4}\right) \neq k\pi$، بنابراین $\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{4}\right)\right] \neq 0$ بوده و $x[n]$ به ازای هیچ مقدار متناهی n، صفر نمی‌شود. تنها در حد $n\to\pm\infty$ خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\pm\infty} x[n]=\lim_{n\to\pm\infty}\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{4}\right)\right]}{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}=0$$

۵–۶ $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x[n]$ است. تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید. از خواص مندرج در جدول 5-1 استفاده کنید.

(الف) $x_1[n]=x[1-n]+x[-1-n]$ (ب) $x_2[n]=\dfrac{x^*[-n]+x[n]}{2}$

(ج) $x_3[n]=(n-1)^2x[n]$

حل : (الف) ابتدا از خاصیت وارونگی زمانی جدول (5-1) استفاده نموده و می‌نویسیم :

$$f\{x[-n]\}=X\left(e^{-j\omega}\right)$$

در اینصورت از ویژگی انتقال زمانی تبدیل فوریه می‌توان نوشت :

$$f\{x[1-n]\}=f\{x[-(n-1)]\}=e^{-j\omega}f\{x[-n]\}=e^{-j\omega}X\left(e^{-j\omega}\right) \quad , (I)$$

به همین ترتیب داریم :

$$f\{x[-1-n]\}=f\{x[-(n+1)]\}=e^{j\omega}f\{x[-n]\}=e^{j\omega}X\left(e^{-j\omega}\right) \quad , (II)$$

حال از ویژگی خطی بودن تبدیل فوریه (خاصیت اول جدول (5-1)) و روابط (I) و (II) داریم :

$$X_1\left(e^{j\omega}\right)=f\{x_1[n]\}=f\{x[1-n]+x[-1-n]\}=f\{x[1-n]\}+f\{x[-1-n]\}$$

$$=e^{-j\omega}X\left(e^{-j\omega}\right)+e^{j\omega}X\left(e^{-j\omega}\right)=2\left[\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right]X\left(e^{-j\omega}\right)=(2\cos\omega)X\left(e^{-j\omega}\right)$$

(ب) از ویژگی وارونگی زمانی تبدیل فوریه داریم :

$$f\{x[-n]\}=X\left(e^{-j\omega}\right)$$

که با اعمال خاصیت مزدوج‌گیری جدول (5-1) در آن بدست می‌آوریم :

$$f\{x^*[-n]\}=X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

بالاخره می‌توان نوشت :

$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=f\{x_2[n]\}=f\left\{\frac{x^*[-n]+x[n]}{2}\right\}=\frac{1}{2}f\{x^*[-n]\}+\frac{1}{2}f\{x[n]\}$$

$$=\frac{1}{2}X^*\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{2}X\left(e^{j\omega}\right)=Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

(ج) با مراجعه به خاصیت مشتق‌گیری فرکانسی تبدیل فوریه مندرج در جدول $(5\text{-}1)$ می‌نویسیم :

$$f\{nx[n]\}=j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\quad,\quad(I)$$

همینطور داریم :

$$f\{n^2x[n]\}=j\frac{d}{d\omega}f\{nx[n]\}=j\frac{d}{d\omega}\left[j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\right]=-\frac{d^2X\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega^2}\quad,\quad(II)$$

در نهایت با توجه به ویژگی خطی بودن تبدیل فوریه و استفاده از نتایج (I) و (II) بدست می‌آوریم :

$$X_3\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{(n-1)^2x[n]\right\}=f\left\{n^2x[n]-2nx[n]+x[n]\right\}$$

$$=f\left\{n^2x[n]\right\}-2f\{nx[n]\}+f\{x[n]\}=-\frac{d^2X\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega^2}-2j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}+X\left(e^{j\omega}\right)$$

۵–۷ برای هر یک از تبدیل فوریه‌های زیر، به کمک خواص تبدیل فوریه (جدول ۵–۱) تعیین کنید که آیا سیگنال حوزه‌زمان (i) حقیقی است، موهومی است، یا هیچکدام، و (ii) زوج است، فرد است، یا هیچکدام. عکس تبدیل فوریه را حساب نکنید.

(الف) $X_1\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega}\sum_{k=1}^{10}(\sin k\omega)$

(ب) $X_2\left(e^{j\omega}\right)=j\sin(\omega)\cos(5\omega)$

(ج) $X_3\left(e^{j\omega}\right)=A(\omega)\angle e^{jB(\omega)}$ که در آن

$$A(\omega)=\begin{cases}1 & ;\ 0\le|\omega|\le\frac{\pi}{8}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{8}<|\omega|\le\pi\end{cases}\qquad \text{و}\qquad B(\omega)=-\frac{3\omega}{2}+\pi$$

حل : (الف–i) دنباله $x_1[n]$ یک سیگنال موهومی است، زیرا :

$$X_1^*\left(e^{-j\omega}\right)=\left[e^{j\omega}\sum_{k=1}^{10}\sin(-k\omega)\right]^*=-e^{-j\omega}\sum_{k=1}^{10}\sin k\omega=-X_1\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow x_1^*[n]=-x_1[n]$$

(الف–ii) این سیگنال نه زوج است و نه فرد، زیرا اگر فرد باشد باید داشته باشیم :

$$x_1[-n]=-x_1[n]\Rightarrow X_1\left(e^{-j\omega}\right)=-X_1\left(e^{j\omega}\right)$$

که بوضوح چنین نیست. همچنین $x[n]$ فرد خواهد بود اگر :

$$x_1[-n]=x_1[n] \Rightarrow X_1\left(e^{-j\omega}\right)=X_1\left(e^{j\omega}\right)$$

که باز می‌توان نشان داد که چنین رابطه‌ای صادق نیست.

(ب-i) دنباله $x_2[n]$ یک سیگنال حقیقی است، زیرا :

$$X_2^*\left(e^{-j\omega}\right)=\left[j\sin(-\omega)\cos(-5\omega)\right]^*$$

$$=\left[-j\sin(\omega)\cos(5\omega)\right]^*=j\sin(\omega)\sin(5\omega)=X_2\left(e^{j\omega}\right) \quad \Rightarrow x_2^*[n]=x_2[n]$$

(ب-ii) سیگنال $x_2[n]$ یک سیگنال فرد است، زیرا داریم :

$$X_2\left(e^{-j\omega}\right)=j\sin(-\omega)\cos(-5\omega)=-j\sin(\omega)\cos(5\omega)=-X_2\left(e^{j\omega}\right) \Rightarrow x_2[-n]=-x_2[n]$$

(ج-i) $x_3[n]$ یک دنباله حقیقی است، زیرا با توجه به حقیقی و زوج بودن $A(\omega)$ می‌توان نوشت :

$$X_3^*\left(e^{-j\omega}\right)=\left(A(-\omega)\angle e^{jB(-\omega)}\right)^*=\left(A(\omega)\angle e^{j\left(\frac{3\omega}{2}+\pi\right)}\right)^*=A^*(\omega)\angle e^{-j\left(\frac{3\omega}{2}+\pi\right)}=$$

$$A(\omega)\angle\left[e^{j\left(-\frac{3\omega}{2}+\pi\right)}.e^{-j2\pi}\right]=A(\omega)\angle e^{j\left(-\frac{3\omega}{2}+\pi\right)}=A(\omega)\angle e^{jB(\omega)}=X_3\left(e^{j\omega}\right) \Rightarrow x_3^*[n]=x_3[n]$$

(ج-ii) این سیگنال به همان دلایل ذکر شده در بند (الف-ii) نه زوج است و نه فرد.

۵-۸ با استفاده از جدولهای ۵-۱ و ۵-۲ $x[n]$ دارای تبدیل فوریه زیر را تعیین کنید :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)+5\pi\delta(\omega)\quad,\quad -\pi<\omega\leq\pi$$

حل : وجود عامل $\frac{1}{1-e^{-j\omega}}$ در تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ ما را وامی‌دارد تا از خاصیت جمع انباره‌ای تبدیل فوریه جدول (5-1) استفاده کنیم؛ با فرض : $G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$، از جدول (5-2) بدست می‌آوریم :

$$g[n]=f^{-1}\left\{G\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\begin{cases}1 & ;\ |n|\leq 1\\ 0 & ;\ |n|>1\end{cases}\quad,\ (I)$$

همچنین داریم :

$$G\left(e^{j0}\right)=\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\lim_{\omega\to 0}\frac{\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}=3\quad,\ (II)$$

اکنون می‌توان با استفاده از ویژگی جمع انباره‌ای جدول $(1\text{-}5)$ و نتیجه (II) نوشت :

$$f\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} g[k]\right\} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} G\left(e^{j\omega}\right) + \pi G\left(e^{j0}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-2\pi k)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \left[\frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right] + 3\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-2\pi k)$$

که در فاصله $-\pi<\omega<\pi$ به صورت ساده‌تر زیر می‌تواند نوشته شود :

$$f\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} g[k]\right\} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \left[\frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right] + 3\pi\delta(\omega) \quad , \quad -\pi<\omega<\pi \quad , \quad (III)$$

از طرفی داریم :

$$x[n]=f^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = f^{-1}\left\{\frac{1}{1-e^{-j\omega}} \left[\frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right] + 5\pi\delta(\omega) \quad , \quad -\pi<\omega<\pi\right\}$$

$$= f^{-1}\left\{\frac{1}{1-e^{-j\omega}} \left[\frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right] + 3\pi\delta(\omega) \; , \; -\pi<\omega<\pi\right\} + f^{-1}\{2\pi\delta(\omega) \; , \; -\pi<\omega<\pi\}$$

که با استفاده از روابط (I) و (III) و نیز جدول $(2\text{-}5)$ بدست می‌دهد :

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} g[k]+1 = 1+\begin{cases} 0 & ; \; n\le -2 \\ n+2 & ; \; -1\le n\le 1 \\ 3 & ; \; n\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; \; n\le -2 \\ n+3 & ; \; -1\le n\le 1 \\ 4 & ; \; n\ge 2 \end{cases}$$

۹-۵ چهار اطلاع زیر در مورد یک سیگنال $x[n]$ با تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ داده شده است :

۱. $x[n]=0$ در $n>0$ ۲. $x[0]>0$

۳. $Im\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = \sin\omega - \sin 2\omega$ ۴. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = 3$

$x[n]$ را تعیین کنید.

حل : با فرض اینکه $x[n]$ حقیقی است، ابتدا آن را به دو بخش زوج و فرد تفکیک می‌کنیم، یعنی $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$ ؛ با توجه به خاصیت تجزیه زوج وفرد سیگنال‌های حقیقی جدول $(1\text{-}5)$ می‌دانیم :

$$f\{x_o[n]\}=jIm\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

حال با استفاده از اطلاع (3) می‌توان نوشت :

$$\mathcal{F}\{x_o[n]\}=j(\sin\omega-\sin 2\omega)=j\left[\left(\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}\right)-\left(\frac{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}}{2j}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{j\omega}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}-\frac{1}{2}e^{j2\omega}+\frac{1}{2}e^{-j2\omega} \Rightarrow x_o[n]=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}-\frac{1}{2}e^{j2\omega}+\frac{1}{2}e^{-j2\omega}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\delta[n+1]-\frac{1}{2}\delta[n-1]-\frac{1}{2}\delta[n+2]+\frac{1}{2}\delta[n-2] \qquad ,(I)$$

اکنون $x_e[n]$ را باید گونه‌ای انتخاب کنیم که سه اطلاع دیگر را برآورد، مثلاً از اطلاع (1) می‌دانیم که برای $n>0$ باید داشته باشیم : $x[n]=0$، با در نظر داشتن رابطه (I) می‌توان نوشت :

$$x[1]=x_e[1]+x_o[1]=x_e[1]-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x_e[1]=\frac{1}{2}$$

$$x[2]=x_e[2]+x_o[2]=x_e[2]+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x_e[2]=-\frac{1}{2}$$

$$n\geq 3: x[n]=x_e[n]+x_o[n]=x_e[n]+0=0 \Rightarrow x_e[n]=0 \quad , \quad n\geq 3$$

و به طور کلی با توجه به زوج بودن $x_e[n]$ خواهیم داشت :

$$x_e[n]=\begin{cases} x[0] & ; \ n=0 \\ \frac{1}{2} & ; \ n=\pm 1 \\ -\frac{1}{2} & ; \ n=\pm 2 \\ 0 & ; \ |n|\geq 3 \end{cases} \qquad , \ (II)$$

حال با ترکیب نتایج (I) و (II) می‌نویسیم :

$$x[n]=x_e[n]+x_o[n]=\left(-\frac{1}{2}\delta[n+2]+\frac{1}{2}\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]-\frac{1}{2}\delta[n-2]\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}\delta[n+1]-\frac{1}{2}\delta[n-1]-\frac{1}{2}\delta[n+2]+\frac{1}{2}\delta[n-2]\right)=-\delta[n+2]+\delta[n+1]+x[0]\delta[n] \quad ,(III)$$

همچنین از رابطه پارسوال جدول $(1\text{-}5)$ و اطلاع (4) داریم :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^2=3$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^2=(-1)^2+(1)^2+\left|x[0]\right|^2=3 \quad \Rightarrow \left|x[0]\right|=1$$

در نهایت با توجه به اطلاع (2) معلوم می‌شود که $x[0]=+1$ و با جایگذاری $x[0]$ در رابطه (III) بدست می‌آوریم :

$$x[n]=-\delta[n+2]+\delta[n+1]+\delta[n]$$

۵-۱۰ با استفاده از جدولهای ۵-۱ و ۵-۲ و این حقیقت که

$$X\left(e^{j0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]$$

مقدار عددی A تعریف شده در زیر را بیابید

$$A=\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حل : ابتدا با توجه به جدول *(2-5)* برای $w[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ داریم :

$$W\left(e^{j\omega}\right)=f\{w[n]\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

اکنون با فرض $x[n]=nw[n]$ و با استفاده از ویژگی مشتقگیری فرکانسی جدول *(1-5)* می‌توان نوشت :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\{nw[n]\}=j\frac{dW\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

در نهایت با توجه به این حقیقت که : $X\left(e^{j0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]$ بدست می‌آوریم :

$$A=\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]=X\left(e^{j0}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)e^{j0}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{j0}\right)^2}=2$$

۵-۱۱ سیگنال $g[n]$ با تبدیل فوریه $G\left(e^{j\omega}\right)$ را در نظر بگیرید: فرض کنید

$$g[n]=x_{(2)}[n]$$

سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ است. عدد حقیقی α را به نحوی تعیین کنید که $0<\alpha<2\pi$ و

$$G\left(e^{j\omega}\right)=G\left(e^{j(\omega-\alpha)}\right)$$

حل : با توجه به ویژگی انبساط زمانی جدول *(1-5)* داریم :

$$G\left(e^{j\omega}\right)=f\{g[n]\}=f\left\{x_{(2)}[n]\right\}=X\left(e^{j2\omega}\right)\quad,\quad(I)$$

در اینصورت :

$$G\left(e^{j(\omega-\alpha)}\right)=X\left(e^{j2(\omega-\alpha)}\right)\quad,\quad(II)$$

با توجه به اینکه : $G\left(e^{j(\omega-\alpha)}\right)=G\left(e^{j\omega}\right)$، از روابط (I) و (II) می‌توان نوشت :

$$X\left(e^{j2(\omega-\alpha)}\right)=X\left(e^{j2\omega}\right) \Rightarrow e^{-j2\alpha}=1=e^{j2k\pi} \Rightarrow \alpha=-k\pi \;,k\in Z$$

که به علت محدودیت $0<\alpha<\pi$، تنها αی مورد قبول $\alpha=\pi$ می‌باشد.

۵-۱۲ فرض کنید

$$y[n]=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2 * \left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right)$$

که در آن * علامت کانولوشن است و $|\omega_c|\le\pi$. ω_c را مقیدتر کنید به نحوی که داشته باشیم

$$y[n]=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2$$

حل : با فرض $h[n]=\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$ و $x[n]=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2$ می‌خواهیم داشته باشیم :

$$x[n]*h[n]=x[n] \Rightarrow f \Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right) \quad ,\ (I)$$

از طرفی از جدول $(2\text{-}5)$ داریم :

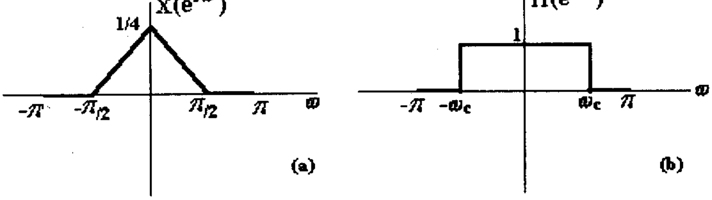
$$H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{h[n]\right\}=\begin{cases}1 & ;\ 0\le|\omega|\le\omega_c\\ 0 & ;\ \omega_c<|\omega|<\pi\end{cases} \quad ,\ (II)$$

همینطور از خاصیت ضرب جدول $(1\text{-}5)$ می‌توان نوشت :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2\right\}=\frac{1}{2\pi}f\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\pi n}\right\}*f\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\begin{cases}1 & ;\ 0\le|\omega|\le\frac{\pi}{4}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{4}<|\omega|<\pi\end{cases}\right]*\left[\begin{cases}1 & ;\ 0\le|\omega|\le\frac{\pi}{4}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{4}<|\omega|<\pi\end{cases}\right]$$

کانولوشن "متناوب" فوق را می‌توان به سادگی و از روش ترسیمی محاسبه نمود؛ $X\left(e^{j\omega}\right)$ حاصل را در شکل (a) به همراه $H\left(e^{j\omega}\right)$ در شکل (b) مشاهده می‌کنید :



حال می‌توان محدوده ω_c را با توجه به شکل فوق طوری انتخاب نمود که رابطه (I) برقرار باشد، روشن است که باید داشته باشیم : $\frac{\pi}{2} \leq |\omega_c| \leq \pi$.

۵-۱۳ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_1[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ با یک سیستم LTI علی دیگر با پاسخ ضربه $h_2[n]$ موازی شده است. پاسخ فرکانسی سیستم کل عبارت است از

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{-12+5e^{-j\omega}}{12-7e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}}$$

$h_2[n]$ را بیابید.

حل : ابتدا از جدول $(5\text{-}1)$ بدست می‌آوریم :

$$H_1\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{h_1[n]\right\}=f\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \quad , (I)$$

از طرفی می‌دانیم، پاسخ ضربه کلی دو سیستم موازی با مجموع پاسخ‌های ضربه آن دو سیستم برابر است، پس با در نظر داشتن رابطه (I) می‌توان نوشت :

$$h[n]=h_1[n]+h_2[n] \Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=H_1\left(e^{j\omega}\right)+H_2\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow H_2\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)-H_1\left(e^{j\omega}\right)=\frac{-12+5e^{-j\omega}}{12-7e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{-12+5e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(12-3e^{-j\omega}\right)}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}=\frac{-12+5e^{-j\omega}-12+3e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(12-3e^{-j\omega}\right)}=\frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

اکنون می‌توان با اعمال تبدیل عکس فوریه به $H_2\left(e^{j\omega}\right)$، پاسخ ضربه سیستم مرتبط با آن را بدست آورد :

$$h_2[n]=f^{-1}\left\{H_2\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\}=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

۵-۱۴ اطلاعات زیر در مورد سیستم LTI، S با پاسخ ضربه $h[n]$ و پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ داده شده است :

۱. $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \rightarrow g[n]$، که در آن $g[n]=0$، در $n\geq 2$ و $n<0$.

۲. $H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)=1$

۳ $H\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$

$h[n]$ را تعیین کنید.

حل : با توجه به اطلاع (1) می‌توان نوشت :

$$g[n]=g_0\delta[n]+g_1\delta[n-1] \Rightarrow G\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{g[n]\right\}=f\left\{g_0\delta[n]+g_1\delta[n-1]\right\}=g_0+g_1e^{-j\omega} \quad ,(I)$$

از اطلاع (1) همچنین داریم :

$$g[n]=\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right]*h[n]\Rightarrow f\Rightarrow G\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\}.H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}H\left(e^{j\omega}\right) \quad , \quad (II)$$

با ترکیب روابط (I) و (II) بدست می آوریم :

$$g_0+g_1e^{-j\omega}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}H\left(e^{j\omega}\right) \quad , \quad (III)$$

از طرفی از اطلاع (2) داریم :

$$H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)=1 \quad , \quad (IV.1)$$

از اطلاع (3) نیز می‌بینیم :

$$H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)=H\left(e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}\right)=H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)=1 \quad , \quad (IV.2)$$

و با ترکیب روابط (III) و (IV) دستگاه معادله زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases}\omega=\frac{\pi}{2}\\ \omega=-\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g_0+g_1e^{-j\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}}H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\\ g_0+g_1e^{j\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}}H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g_0-jg_1=\frac{1}{1+\frac{j}{4}}\times 1\\ g_0+jg_1=\frac{1}{1-\frac{j}{4}}\times 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g_0=\frac{16}{17}\\ g_1=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{16}{17}\right)\end{cases}$$

حال می‌توان $H\left(e^{j\omega}\right)$ را به سهولت از رابطه (III) محاسبه نمود :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left(g_0+g_1e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)=\frac{16}{17}\left(1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)=\frac{16}{17}-\frac{1}{17}e^{-j2\omega}$$

بالاخره با اعمال تبدیل عکس فوریه به $H\left(e^{j\omega}\right)$ می‌توانیم $h[n]$ را بدست آوریم :

$$h[n]=f^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{16}{17}-\frac{1}{17}e^{-j2\omega}\right\}=\frac{16}{17}\delta[n]-\frac{1}{17}\delta[n-2]$$

۵-۱۵ عکس تبدیل فوریه $Y\left(e^{j\omega}\right)$ عبارت است از

$$y[n]=\left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right)^2$$

که در آن $0<\omega_c<\pi$ را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم ω_c

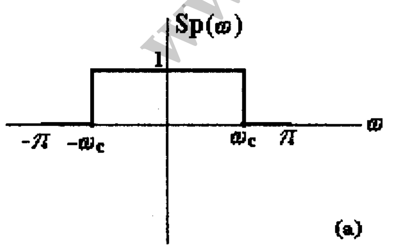
$$Y\left(e^{j\pi}\right)=\frac{1}{2}$$

حل : از خاصیت ضرب جدول $(5\text{-}1)$ داریم :

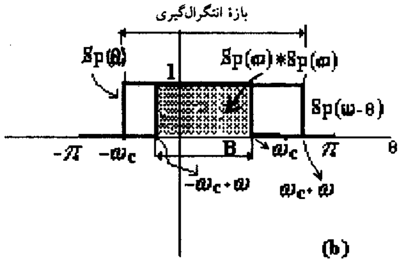
$$Y\left(e^{j\omega}\right)=f\{y[n]\}=f\left\{\left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right)^2\right\}=\frac{1}{2\pi}f\left\{\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right\}*f\left\{\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\begin{cases}1 & ;\ 0\le|\omega|\le\omega_c\\ 0 & ;\ \omega_c<|\omega|<\pi\end{cases}\right]*\left[\begin{cases}1 & ;\ 0\le|\omega|\le\omega_c\\ 0 & ;\ \omega_c<|\omega|<\pi\end{cases}\right]=\frac{1}{2\pi}S_p(\omega)*S_p(\omega)\qquad,\quad(I)$$

که در آن $s_p(\omega)$ همانگونه که می‌بینیم یک تسلسل پالس مستطیلی (در حوزه فرکانس) با ارتفاع 1 و پهنای $2\omega_c$ می‌باشد. (شکل (a) را ببینید.)
کانولوشن متناوب فوق را می‌توان به روش ترسیمی برای $\omega=\pi$ حساب نمود. این کانولوشن را در شکل (b) مشاهده می‌کنید :



(a)



(b)

با توجه به شکل (b) داریم :

$$0<\omega_c<\pi\ \Rightarrow S_p(\omega)*S_p(\omega)=1\times B=\omega_c-(-\omega_c+\omega)=2\omega_c-\omega$$

که با جایگذاری در رابطه (I) بدست می‌دهد :

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(2\omega_c-\omega\right)\Rightarrow Y\left(e^{j\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(2\omega_c-\pi\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\omega_c=\pi$$

۵–۱۶ تبدیل فوریه یک سیگنال خاص به صورت زیرست

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{3}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)}}$$

می‌توان نشان داد که

$$x[n]=g[n]\,q[n]$$

که $g[n]$ به شکل $\alpha^n u[n]$ و $q[n]$ سیگنال متناوبی با دوره تناوب N است.

(الف) α را تعیین کنید. (ب) N را تعیین کنید. (ج) آیا $x[n]$ حقیقی است؟

حل : ابتدا می‌نویسیم :

$$x[n]=f^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{3}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)}}\right\}=\sum_{k=0}^{3}f^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\left(\omega-k\frac{\pi}{2}\right)}}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k}.e^{j\left(\frac{k\pi}{2}\right)n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]\right]=\left[\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}e^{j\pi\frac{n}{2}}\right)^{k}\right]\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]\right]=q[n]\,g[n]$$

اکنون به سادگی مشاهده می‌کنیم :

$$q[n]=\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}e^{j\pi\frac{n}{2}}\right)^{k}=1+\frac{1}{2}j^{n}+\frac{1}{4}(-1)^{n}+\frac{1}{8}(-j)^{n}\quad,\quad(I)$$

و :

$$g[n]=\alpha^{n}u[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]\quad,\quad(II)$$

بدین ترتیب از روابط (I) و (II) داریم :

(الف) $\alpha=\frac{1}{4}$ است ؛

(ب) $q[n]$ متناوب با تناوب پایه $N=4$ می‌باشد.

(ج) $x[n]$ حقیقی نمی‌باشد، چون $q[n]$ حقیقی نیست.

۵–۱۷ سیگنال $x[n]=(-1)^n$ دارای تناوب پایه 2 و ضرایب سری فوریه a_k است. با استفاده از خاصیت همزادی، ضرایب سری فوریه b_k سیگنال $g[n]=a_n$ با دوره تناوب پایه 2، را تعیین کنید.

حل :از آنجاکه دنباله a_k، ضرایب سری فوریه $x[n]=(-1)^n$ هستند، می‌توان از معادله تجزیه سری فوریه نوشت :

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]\,e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}=\frac{1}{2}\sum_{n=<2>}(-1)^{n}e^{-jk\pi n}\quad,\quad(I)$$

عبارت $n=<2>$ در مجموع فوق بیانگر آن است که عمل جمع، بر روی دو نمونه دلخواه متوالی انجام می‌پذیرد. با تعویض نام متغیرهای n و k در رابطه (I) خواهیم داشت :

$$g[n]=\frac{1}{2}\sum_{k=<2>}(-1)^k e^{-jk\pi n}=\sum_{k=<2>}\left(\frac{1}{2}(-1)^k\right)e^{-jk\pi n}$$

بالاخره با تغییر متغیر $k\to -k$ می‌نویسیم :

$$g[n]=\sum_{k=<2>}\left(\frac{1}{2}(-1)^k\right)e^{jk\pi n}$$

رابطه فوق بوضوح، رابطه ترکیب سری فوریه است، بنابراین ضرایب سری فوریه $g[n]$ عبارتند از :

$$b_k=\frac{1}{2}(-1)^k$$

این نتیجه را می‌توانستیم بصورت سرراست از خاصیت همزادی سری فوریه گسسته در زمان بدست آوریم؛ بنابه این خاصیت، ضرایب سری فوریه دنباله $g[n]=a_n$، به شرط آنکه خود a_k ها ضرایب سری فوریه سیگنال دیگری همچون x[n] باشند از رابطه $b_k=\frac{1}{N}x[-k]$ بدست می‌آیند، (b_k ها ضرایب سری فوریه دنباله g[n] هستند)، در این مورد داریم :

$$b_k=\frac{1}{N}x[-k]=\frac{1}{2}(-1)^{(-k)}=\frac{1}{2}(-1)^k$$

۱۸-۵ می دانیم که

$$a^{|n|}\xleftrightarrow{F}\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}\quad,\ |a|<1$$

با استفاده از همزادی، ضرایب سری فوریه سیگنال پیوسته در زمان با تناوب $T=1$ زیر را بیابید :

$$x(t)=\frac{1}{5-4\cos(2\pi t)}$$

حل : با توجه به زوج تبدیل فوریه داده شده می‌توان نوشت :

$$a^{|n|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

حال با تغییر متغیرهای $\omega\to 2\pi t$ و $n\to k$ در عبارت فوق و همچنین انتخاب $a=\frac{1}{2}$ می‌نویسیم :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{5-4\cos(2\pi t)}\right].e^{jk2\pi t}dt$$

بالاخره با تغییر متغیر $k\to -k$ بدست می‌آوریم :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|-k|}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}=\int_{T=1}\left[\frac{3}{5-4\cos\left(2\pi t\right)}\right].e^{-jk2\pi t}dt$$

رابطه اخیر همان رابطه تجزیه سری فوریه سیگنال $x(t)$ می‌باشد، بنابراین ضرایب سری فوریه a_k برابر خواهند بود با :

$$a_k=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

۵–۱۹ سیستم LTI علی و پایدار S با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ توسط معادله تفاضلی مرتبه دوم زیر به هم مربوط می‌شوند

$$y[n]-\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ سیستم S را بیابید. (ب) پاسخ ضربه $h[n]$ سیستم S را بیابید.

حل : (الف) با اعمال تبدیل فوریه به طرفین معادل تفاضلی این سیستم داریم :

$$f\left\{y[n]-\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]\right\}=f\{x[n]\}$$

$$\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)-\frac{1}{6}e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

(ب) برای محاسبه پاسخ ضربه سیستم کافیست از $H\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل عکس تبدیل فوریه گرفته شود :

$$h[n]=f^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}\right\}=f^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right\}$$

$$=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$

۵–۲۰ سیستم LTI علی و پایدار S دارای خاصیت زیرست

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n}u[n]\rightarrow n\left(\frac{4}{5}\right)^{n}u[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ سیستم S را بیابید.

(ب) معادله تفاضلی ارتباط‌دهنده ورودی $x[n]$ به خروجی $y[n]$ را بیابید.

حل : ابتدا تبدیل‌های فوریه سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستم را محاسبه می‌کنیم :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=f\{y[n]\}=f\{nx[n]\}=j\frac{d}{d\omega}f\{x[n]\}=j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}\right]=\frac{\frac{4}{5}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}\right)^2}$$

در اینصورت :

(الف) پاسخ فرکانسی سیستم را می‌توان به سادگی بدست آورد :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\frac{4}{5}e^{-j\omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

(ب) از پاسخ فرکانسی بالا می‌توان نوشت :

$$Y\left(e^{j\omega}\right)-\frac{4}{5}e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{4}{5}e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)-\frac{4}{5}e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{4}{5}e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\Rightarrow y[n]-\frac{4}{5}y[n-1]=\frac{4}{5}x[n-1]$$

۲۱-۵ تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید.

(الف) $x[n]=u[n-2]-u[n-6]$ (ب) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-1]$

(ج) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}u[-n-2]$ (د) $x[n]=(2)^n\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[-n]$

(هـ) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cos\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right)$ (و) $x[n]=\begin{cases}n & ; \quad -3\le n\le 3\\ 0 & ; \quad elsewhere\end{cases}$

(ز) $x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\cos(n)$ (ح) $x[n]=\sin\left(\frac{5\pi}{3}n\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{3}n\right)$

(ط) $x[n]=x[n-6]$ ودر $0\le n\le 5$ ، $x[n]=u[n]-u[n-5]$

(ی) $x[n]=(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$ (ک) $x[n]=\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2}n\right)$

حل : (الف)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\{u[n-2]-u[n-6]\}=e^{-j2\omega}f\{u[n]\}-e^{-j6\omega}f\{u[n]\}$$

$$= \left(e^{-j2\omega}-e^{-j6\omega}\right) f\{u[n]\}=e^{-j4\omega}\left(e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}\right)\frac{1}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{7\omega}{2}}\sin(2\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

ب) ابتدا داریم :

$$f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Rightarrow f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$\Rightarrow f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-(n+1)}u[-(n+1)]\right\}=\frac{e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

در اینصورت :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-1]\right\}=\frac{1}{2}f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-(n+1)}u[-(n+1)]\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)}$$

ج) ابتدا داریم :

$$f\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \Rightarrow f\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}u[-n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}}$$

$$\Rightarrow f\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-(n+2)}u[-(n+2)]\right\}=\frac{e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}}$$

در اینصورت :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}u[-n-2]\right\}=f\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}u[-(n+2)]\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}f\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-(n+2)}u[-(n+2)]\right\}=\frac{1}{9}\left[\frac{e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}}\right]$$

(د)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{0}2^{n}\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0}2^{n}\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{4}n}-e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2j}\right]e^{-j\omega n}=\frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}\right]$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cos\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\cos\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right)e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{8}(-n-1)}+e^{-j\frac{\pi}{8}(-n-1)}}{2}\right]e^{+j\omega n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{8}(n-1)}+e^{-j\frac{\pi}{8}(n-1)}}{2}\right]e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{8}(-(n+1)-1)}+e^{-j\frac{\pi}{8}(-(n+1)-1)}}{2}\right]e^{+j\omega(n+1)}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{8}(n-1)}+e^{-j\frac{\pi}{8}(n-1)}}{2}\right]e^{-j\omega n}$$

$$=\left(\frac{1}{4}e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{8}\right)}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{8}\right)}\right)^{n}$$

$$+\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{8}\right)}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{8}\right)}\right)^{n}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}}{1-\frac{1}{2}e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{8}\right)}}$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}{1-\frac{1}{2}e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{8}\right)}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)e^{-j\frac{\pi}{8}}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{8}\right)}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)e^{j\frac{\pi}{8}}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{8}\right)}}$$

(و)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-3}^{+3}ne^{-j\omega n}$$

$$=(-3)e^{-j\omega(-3)}+(-2)e^{-j\omega(-2)}+(-1)e^{-j\omega(-1)}+0e^{-j\omega\times 0}+1e^{-j\omega\times 1}+2e^{-j\omega\times 2}+3e^{-j\omega\times 3}$$

$$=-2j\left[\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}\right]-4j\left[\frac{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}}{2j}\right]-6j\left[\frac{e^{j3\omega}-e^{-j3\omega}}{2j}\right]=-2j\sin\omega-4j\sin 2\omega-6j\sin 3\omega$$

(ز)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\cos(n)\right\}=f\left\{\left[\frac{e^{j\frac{\pi n}{2}}-e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2j}\right]+\left[\frac{e^{jn}+e^{-jn}}{2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}f\left\{e^{j\frac{\pi n}{2}}\right\}-\frac{1}{2j}f\left\{e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right\}+\frac{1}{2}f\left\{e^{jn}\right\}+\frac{1}{2}f\left\{e^{-jn}\right\}=\frac{2\pi}{2j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}-2k\pi\right)$$

$$-\frac{2\pi}{2j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}-2k\pi\right)+\frac{2\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-1-2k\pi\right)+\frac{2\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+1-2k\pi)$$

$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[j\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}-2k\pi\right)+\delta\left(\omega+1-2k\pi\right)+\delta(\omega-1-2k\pi)-j\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}-2k\pi\right)\right]$$

ح)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\left\{\sin\left(\frac{5\pi}{3}n\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{3}n\right)\right\}$$

$$=f\left\{\left[\frac{e^{j\frac{5\pi n}{3}}-e^{-j\frac{5\pi n}{3}}}{2j}\right]+\left[\frac{e^{j\frac{7\pi n}{3}}+e^{-j\frac{7\pi n}{3}}}{2}\right]\right\}=\frac{1}{2j}f\left\{e^{j\frac{5\pi n}{3}}\right\}-\frac{1}{2j}f\left\{e^{-j\frac{5\pi n}{3}}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}f\left\{e^{j\frac{7\pi n}{3}}\right\}+\frac{1}{2}\left\{e^{-j\frac{7\pi n}{3}}\right\}=\frac{2\pi}{2j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{5\pi}{3}-2k\pi\right)-\frac{2\pi}{2j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega+\frac{5\pi}{3}-2k\pi\right)$$

$$+\frac{2\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{7\pi}{3}-2k\pi\right)+\frac{2\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega+\frac{7\pi}{3}-2k\pi\right)$$

$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(\omega+\frac{7\pi}{3}-2k\pi\right)+j\delta\left(\omega+\frac{5\pi}{3}-2k\pi\right)-j\delta\left(\omega-\frac{5\pi}{3}-2k\pi\right)+\delta\left(\omega-\frac{7\pi}{3}-2k\pi\right)\right]$$

ط) ابتدا با تعریف سیگنال نامتناوب $\hat{x}[n]$ بصورت زیر داریم :

$$\hat{x}[n]=\begin{cases}x[n] & ;\ 0\le n\le 5\\ 0 & ;\ elsewhere\end{cases}\Rightarrow\hat{x}[n]=u[n]-u[n-5]\Rightarrow\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\hat{x}[n]\right\}=f\{u[n]-u[n-5]\}$$

$$=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{5\omega}{2}}\left(e^{j\frac{5\omega}{2}}-e^{-j\frac{5\omega}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}=e^{-j2\omega}\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\quad,\quad(I)$$

از طرفی می‌توان برای $x[n]$ نوشت :

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{x}[n-6k]=\hat{x}[n]*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-6k]\Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\hat{x}[n]*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-6k]\right\}$$

$$=\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)f\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-6k]\right\}$$

حال با استفاده از جدول (2-5) و همچنین رابطه (I) بدست می‌آوریم :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\left[e^{-j2\omega}\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]\left[\frac{2\pi}{6}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{6}\right)\right]$$

(ی)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}e^{-j\omega n}$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}e^{-j\omega n}=\sum_{n=1}^{+\infty}-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}e^{j\omega n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}-(n+2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}e^{j\omega(n+1)}+\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}e^{-j\omega n}=-\left(\frac{1}{3}\right)e^{j\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}e^{j\omega}\right)^{n}$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)e^{j\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\omega}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^{n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^{n}$$

$$=+j\left(\frac{1}{3}e^{j\omega}\right)\frac{d}{d\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\omega}\right)^{n}-\left(\frac{2}{3}e^{j\omega}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\omega}\right)^{n}+j\frac{d}{d\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^{n}$$

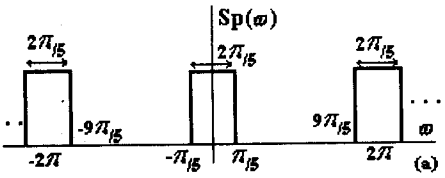
$$-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^{n}=\left(\frac{j}{3}e^{j\omega}\right)\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}}\right]-\frac{\frac{2}{3}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}}+j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right]-\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}=\dots$$

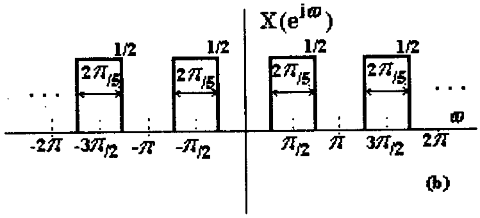
(ک) می‌دانیم که تبدیل فوریه سیگنال $\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n}$ بصورت تسلسل پالس مستطیلی، با ارتفاع 1 و پهنای $\frac{2\pi}{5}$ است، این تبدیل را در شکل (a) مشاهده می‌کنید؛ در اینصورت می‌توان نوشت :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\left\{\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n}\right]\cos\left(\frac{7\pi}{2}n\right)\right\}=f\left\{\frac{1}{2}e^{j\frac{7\pi n}{2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}e^{-j\frac{7\pi n}{2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n}\right]\right\}=\frac{1}{2}S_p\left(\omega-\frac{7\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}S_p\left(\omega+\frac{7\pi}{2}\right)$$

که $S_p(\omega)$ در آن همان تبدیل نشان داده شده در شکل (a) می‌باشد، تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ حاصل را در شکل (b) می‌توانید ببینید :





۵–۲۲ عبارتهای زیر تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته در زمان هستند. سیگنال متناظر با هر کدام را بیابید.

(الف)
$$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & ; \frac{\pi}{4}\le|\omega|\le\frac{3\pi}{4}\\ 0 & ; \frac{3\pi}{4}\le|\omega|\le\pi,\ 0\le|\omega|<\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

(ب)
$$X\left(e^{j\omega}\right)=1+3e^{-j\omega}+2e^{-2j\omega}-4e^{-3j\omega}+e^{-10j\omega}$$

(ج) $X\left(e^{j\omega}\right)=e^{-\frac{j\omega}{2}}$ در $-\pi\le\omega\le\pi$

(د) $X\left(e^{j\omega}\right)=\cos^2\omega+\sin^2 3\omega$

(هـ) $X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}k\right)$

(و) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{e^{-j\omega}-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}$

(ز) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$

(ح) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6e^{-j6\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

حل : (الف)

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{j2\pi n}\left[e^{j\omega n}\Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}+e^{j\omega n}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\right]=\frac{1}{\pi n}\left[e^{-j\frac{\pi n}{2}}\left(\frac{e^{j\frac{\pi n}{4}}-e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2j}\right)+e^{j\frac{\pi n}{2}}\left(\frac{e^{j\frac{\pi n}{4}}-e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2j}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left[\frac{e^{j\frac{\pi n}{2}}+e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2}\right]\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

(ب)

$$x[n]=f^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{1+3e^{-j\omega}+2e^{-j2\omega}-4e^{-j3\omega}+e^{-j10\omega}\right\}$$

$$=\delta[n]+3\delta[n-1]+2\delta[n-2]-4\delta[n-3]+\delta[n-10]$$

(ج)

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\frac{\omega}{2}}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{j2\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}e^{j\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{e^{j\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}-e^{-j\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}}{2j}\right]=\frac{\sin\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$

(د)

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos^2\omega+\sin^2 3\omega\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1+\cos 2\omega}{2}+\frac{1-\cos 6\omega}{2}\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}+\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega-\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{j6\omega}+e^{-j6\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\ldots=\frac{\sin \pi n}{\pi n}+\frac{\sin (n+2)\pi}{4\pi(n+2)}+\frac{\sin (n-2)\pi}{4\pi(n-2)}-\frac{\sin (n+6)\pi}{4\pi(n+6)}-\frac{\sin (n-6)\pi}{4\pi(n-6)}$$

تمام عبارت‌های سینوسی فوق همواره به جز مواردی که مخرج صفر شود، صفر هستند و داریم :

$$x[n]=\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n+2]+\frac{1}{4}\delta[n-2]-\frac{1}{4}\delta[n+6]-\frac{1}{4}\delta[n-6]$$

(هـ)

$$x[n]=f^{-1}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}k\right)\right\}=f^{-1}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(e^{j\pi}\right)^k\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}k\right)\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{j4\omega}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}k\right)\right\}=f^{-1}\left\{\left[e^{j4\omega}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}k\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{4}{\pi}f^{-1}\left\{e^{j4\omega}\right\}*f^{-1}\left\{\frac{2\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{8}k\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{4}{\pi}\right)\delta[n+4]*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-8k]=\frac{4}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n+4-8k]$$

(و)

$$x[n]=f^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{e^{-j\omega}-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}\right\}=f^{-1}\left\{\frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}\right\}-\frac{1}{5}f^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}u[n-1]-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}[25u[n-1]-u[n]]$$

(ز)

$$x[n]=f^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{2}{9}\right)}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left(\frac{7}{9}\right)}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\}=\frac{2}{9}f^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}+\frac{7}{9}f^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\}$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{7}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

(ح)

$$x[n]=f^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{6}e^{-j6\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right\}$$

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^{6}f^{-1}\left\{\frac{e^{-j6\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]-\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-6}u[n-6]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\{u[n]-u[n-6]\}$$

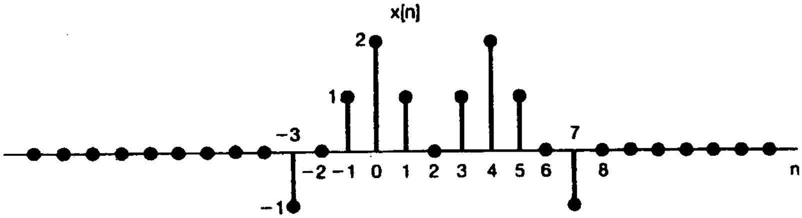
۵-۲۳ $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ شکل م۵-۲۳ است. محاسبات زیر را بدون محاسبه صریح $X\left(e^{j\omega}\right)$ انجام دهید:

(الف) $X\left(e^{j0}\right)$ (ب) $\angle X\left(e^{j\omega}\right)$ را بیابید.

(ج) $\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega$ (د) $X\left(e^{j\pi}\right)$

(هـ) سیگنالی با تبدیل فوریه $\Re e\{X(e^{j\omega})\}$ بیابید و آن رسم کنید.

(و) (i) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^{2}d\omega$ (ii) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\right|^{2}d\omega$



شکل م ۵-۲۳

حل : (الف)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}\Rightarrow X\left(e^{j0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]=6$$

(ب) x[n] را می‌توان سیگنال حقیقی و زوجی همچون $\hat{x}[n]$ دانست که به اندازه دو نمونه به سمت راست منتقل شده باشد. از آنجاکه تبدیل فوریه $\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)$ حقیقی و زوج بوده و بنابراین غیر از یک فاز احتمالی $\pm\pi$، آن هم به دلیل علامت $\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)$ هیچ فاز دیگری ندارد، تمام فاز حاصل در اثر عمل انتقال بوده

است و می‌توان نوشت :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\hat{x}[n-2]\right\}=e^{-j2\omega}\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)\ \Rightarrow \angle X\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j2\omega}\pm\pi$$

(ج)

$$\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega=2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega\times 0}d\omega\right]=2\pi x[0]$$

(د)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\pi}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=\pi}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\pi n}$$

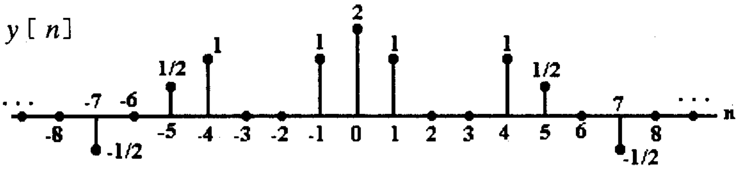
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\left(e^{-j\pi}\right)^{n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n}x[n]=2$$

(هـ) اگر سیگنال موردنظر را $y[n]$ بنامیم، داریم :

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X^{*}\left(e^{j\omega}\right)\right]\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X^{*}\left(e^{j\omega}\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\}=Ev\{x[n]\}$$

این سیگنال را در شکل زیر مشاهده می‌کنید :



(و-i) از رابطه پارسوال می‌توان نوشت :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^{2}d\omega=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^{2}=28\pi$$

(و-ii) از خاصیت مشتقگیری فرکانسی داریم :

$$f\{nx[n]\}=j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\Rightarrow f\left\{\frac{n}{j}x[n]\right\}=\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

حال با اعمال رابطه پارسوال به این زوج تبدیل فوریه می‌نویسیم .

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\right|^{2}d\omega=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{n}{j}x[n]\right|^{2}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|nx[n]\right|^{2}=316\pi$$

۵-۲۴ تعیین کنید که تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای داده شده کدام یک از خاصیتهای زیر را دارند :

۱. $\Re e\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=0$ ۲. $Im\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=0$

۳. عدد حقیقی α وجود دارد که به ازای آن $e^{j\alpha\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$ حقیقی است.

۴. $\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)d\omega=0$ ۵. $X\left(e^{j\omega}\right)$ متناوب است.

۶. $X\left(e^{j0}\right)=0$

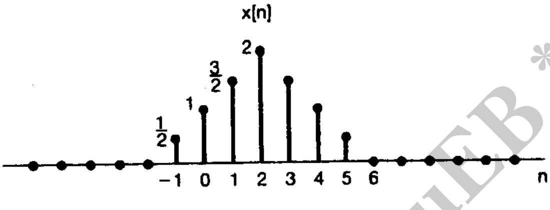
(الف) $x[n]$ شکل م۵-۲۴(الف) (ب) $x[n]$ شکل م۵-۲۴(ب)

(ج) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$ (د) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

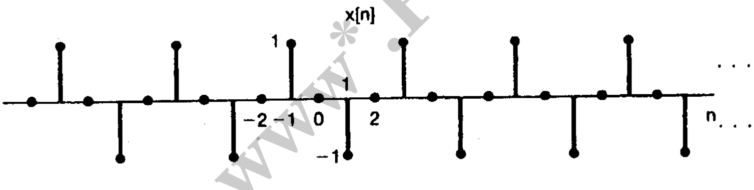
(هـ) $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+2]$ (و) $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+3]$

(ز) $x[n]$ شکل م۵-۲۴(ج) (ح) $x[n]$ شکل م۵-۲۴(د)

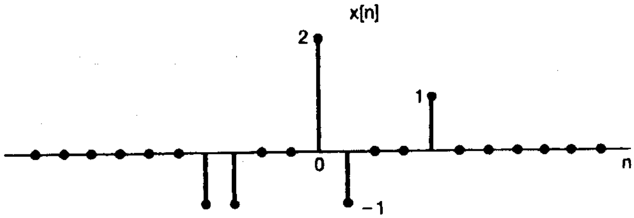
(ط) $x[n]=\delta[n-1]-\delta[n+1]$



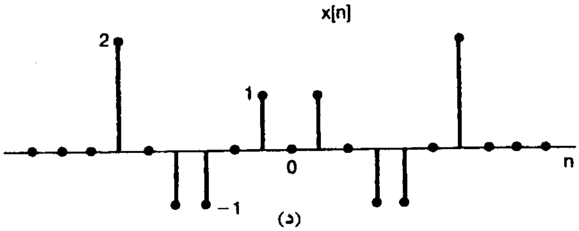
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل م ۵-۲۴

حل : وجود یا عدم وجود خاصیت‌های موردنظر را برای سیگنال بند (الف) بررسی می‌کنیم، این بررسی را می‌توان با سیگنالهای دیگر نیز انجام داد :

(الف-خاصیت 1) می دانیم $Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$ تبدیل فوریه بخش زوج دنباله $x[n]$ می‌باشد، بنابراین زمانی $Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$ مساوی صفر می‌شود که سیگنال $x[n]$ بخش زوج نداشته باشد (فرد باشد)، اما به سادگی دیده می‌شود که چنین نیست، پس داریم : $Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\neq 0$.

(الف- خاصیت 2) می‌دانیم $jIm\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$ تبدیل فوریه بخش فرد دنباله $x[n]$ می‌باشد، بنابراین زمانی $Im\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$ مساوی صفر می‌شود که سیگنال $x[n]$ بخش فرد نداشته باشد (زوج باشد)، اما به سادگی دیده می‌شود که چنین نیست، پس داریم : $Im\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\neq 0$.

(الف - خاصیت ۳) می‌دانیم تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی زمانی حقیقی خواهد بود که سیگنال موردنظر بخش فرد نداشته باشد (زوج باشد) همچنین اگر بتوان با یک انتقال زمانی این سیگنال را به یک سیگنال زوج تبدیل کرد، تبدیل فوریه حاصل حقیقی خواهد شد. روشن است که یک انتقال زمانی به اندازه α متناظر با یک ضریب $e^{j\alpha\omega}$ در حوزه فرکانس می‌باشد. این خصوصیت در مورد سیگنال بند (الف) صادق است، زیرا با یک انتقال زمانی به صورت $x[n+\alpha]=x[n+2]$ این سیگنال به یک سیگنال زوج تبدیل شده و تبدیل فوریه آن یعنی $e^{j2\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$ حقیقی می‌شود.

(الف - خاصیت 4) از بند (ج) مسئله (23-5) می‌دانیم :

$$\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega=2\pi x[0]$$

بنابراین تنها زمانی $\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega$ برابر صفر می‌شود که داشته باشیم : $x[0]=0$ ولی این شرط برای سیگنال بند (الف) برقرار نمی‌باشد پس داریم : $\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega\neq 0$

(الف - خاصیت 5) تبدیل فوریه ذاتاً متناوب است و بنابراین متناوب بودن آن ربطی به چگونگی سیگنال $x[n]$ ندارد.

(الف - خاصیت 6) از بند (الف) مسئله (23-5) می‌دانیم :

$$X\left(e^{j0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]$$

به روشنی می‌بینیم که این خاصیت برای سیگنال بند (الف) برقرار نیست، چرا که در این مورد داریم :

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]=8\neq 0$. در زیر می‌توانید خواصی را که هر سیگنال داراست، بطور خلاصه ببینید.

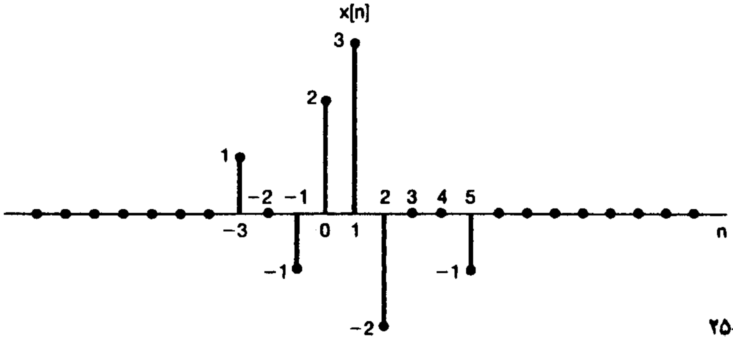
(الف : 5 ,3) ؛ (ب : 6,5,4, 3, 1) ، (ج : 5) ؛ (د : 5, 3 , 2)؛ (هـ: 4 , 5) ؛ (و: 3 , 4 , 5)؛ (ز : 5 , 6)؛ (ح : 2 , 3 , 4 , 5) ؛ (ط : 1, 4, 5 , 6).

۵-۲۵ سیگنال شکل م۵-۲۵ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه این سیگنال را به شکل دکارتی زیر می‌نویسیم

$$X\left(e^{j\omega}\right)=A(\omega)+jB(\omega)$$

تابع زمانی متناظر با تبدیل فوریه زیر را پیدا کنید

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[B(\omega)+A(\omega)e^{j\omega}\right]$$



شکل م ۵-۲۵

حل : با توجه به حقیقی بودن x[n]، بخش‌های موهومی و حقیقی $X\left(e^{j\omega}\right)$ به ترتیب تبدیل فوریه‌های بخش‌های فرد و زوج x[n] هستند، یعنی :

$$A(\omega)=Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{2}f\left\{x[n]+x^*[-n]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}f\left\{x[n]+x[-n]\right\}=f\left\{x_e[n]\right\} \quad , \quad (I)$$

$$B(\omega)=Im\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{2j}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)-X^*\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{2j}f\left\{x[n]-x^*[-n]\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}f\{x[n]-x[-n]\}=\frac{1}{j}f\{x_o[n]\} \quad , \quad (II)$$

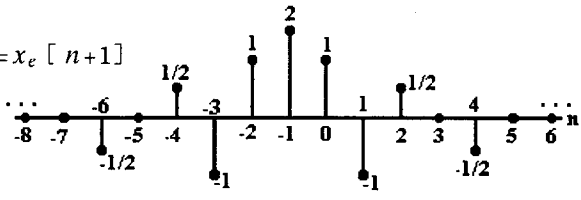
در اینصورت با توجه به روابط (I) و (II) می‌توان نوشت :

$$y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{B(\omega)+A(\omega)e^{j\omega}\right\}$$

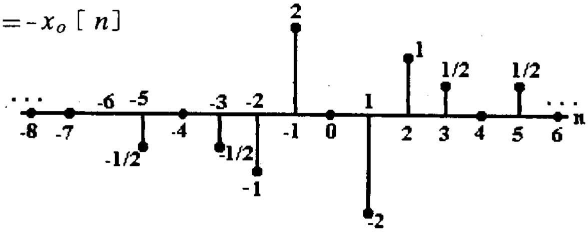
$$=f^{-1}\{B(\omega)\}+f^{-1}\left\{A(\omega)e^{j\omega}\right\}=\frac{1}{j}x_o[n]+x_e[n+1]$$

بخش‌های موهومی و حقیقی $y[n]$ را در دو نمودار زیر مشاهده می‌کنید :

$Re\{y[n]\}=x_e[n+1]$



$y_m\{y[n]\} = -x_o[n]$



۵-۲۶ فرض کنید $x_1[n]$ سیگنالی با تبدیل فوریه $X_1(e^{j\omega})$ شکل م۵-۲۶(الف) است.

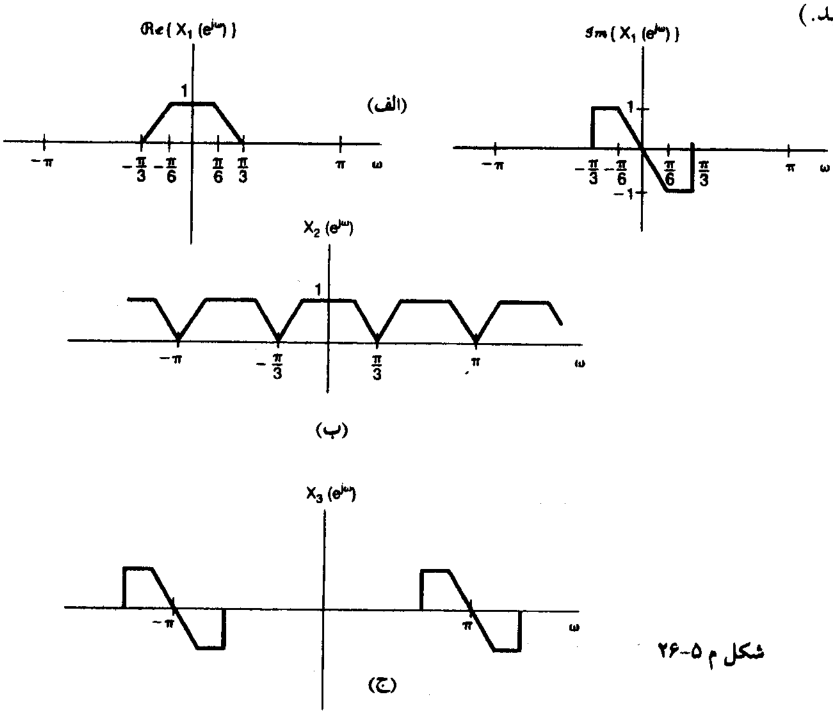
(الف) سیگنال $x_2[n]$ با تبدیل فوریه $X_2(e^{j\omega})$ شکل م۵-۲۶(ب) را در نظر بگیرید. $x_2[n]$ را برحسب $x_1[n]$ بیان کنید. [راهنمایی: ابتدا $X_2(e^{j\omega})$ را برحسب $X_1(e^{j\omega})$ بنویسید و سپس خواص تبدیل فوریه را بکار برید.]

(ب) بند (الف) را برای $x_3[n]$ دارای تبدیل فوریه $X_3(e^{j\omega})$ شکل م۵-۲۶(ج) تکرار کنید.

(ج) کمیت زیر را که مرکز گرانش سیگنال $x_1[n]$ است

$$\alpha = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x_1[n]}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]}$$

معمولاً زمان تاخیر سیگنال $x_1[n]$ می‌نامند. α را بیابید. (برای انجام این کار لازم نیست $x_1[n]$ را صریحاً بیابید.)



شکل م ۵-۲۶

(د) سیگنال $x_4[n]=x_1[n]*h[n]$ را در نظر بگیرید، که در آن

$$h[n]=\frac{\sin\frac{\pi n}{6}}{\pi n}$$

$X_4\left(e^{j\omega}\right)$ را رسم کنید.

حل : (الف) با توجه به اینکه بخش‌های حقیقی و موهومی $X_1\left(e^{j\omega}\right)$ بترتیب زوج و فرد هستند، سیگنال $x_1[n]$ حقیقی بوده و برای بخش‌های زوج و فرد آن داریم :

$$f\left\{x_{1e}[n]\right\}=Re\left\{X_1\left(e^{j\omega}\right)\right\} \quad , \quad (I)$$

$$f\left\{x_{1o}[n]\right\}=jIm\left\{X_1\left(e^{j\omega}\right)\right\} \quad , \quad (II)$$

از طرفی با توجه به شکل‌های داده شده برای $X_1\left(e^{j\omega}\right)$ و $X_2\left(e^{j\omega}\right)$ می‌توان نوشت :

$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=Re\left\{X_1\left(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\right\}+Re\left\{X_1\left(e^{j\omega}\right)\right\}+Re\left\{X_1\left(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\right\}$$

حال با اعمال تبدیل عکس تبدیل فوریه به عبارت فوق و در نظر داشتن رابطه (I) می‌نویسیم :

$$x_2[n]=e^{-j\frac{2\pi}{3}n}x_{1e}[n]+x_{1e}[n]+e^{j\frac{2\pi}{3}n}x_{1e}[n]=\left(1+2\left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}n}-e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}{2}\right)\right)x_{1e}[n]$$

$$=\left(1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\right)x_{1e}[n]$$

(ب) با مراجعه به شکل‌های داده شده می‌توان نوشت :

$$X_3\left(e^{j\omega}\right)=Im\left\{X_1\left(e^{j(\omega+\pi)}\right)\right\}+Im\left\{X_1\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)\right\}$$

دوباره با اعمال تبدیل عکس تبدیل فوریه و استفاده از رابطه (II) داریم :

$$x_3[n]=\frac{1}{j}e^{-j\pi n}x_{1o}[n]+\frac{1}{j}e^{j\pi n}x_{1o}[n]$$

$$=\frac{2}{j}\left(\frac{e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}}{2}\right)x_{1o}[n]=\frac{2}{j}\cos(\pi n)x_{1o}[n]=\frac{2}{j}(-1)^n x_{1o}[n]$$

(ج)

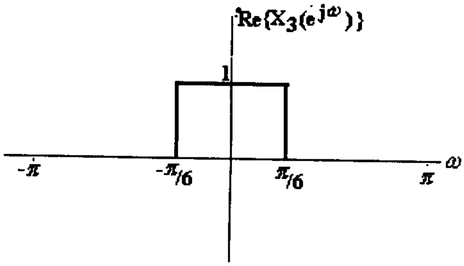
$$\alpha=\frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x_1[n]}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]}=\frac{\left[j\frac{dX_1\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\Big|_{\omega=0}\right]}{\left[X_1\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=0}\right]}=\frac{\left[j\frac{d}{d\omega}\left(1e^{-j\left(\frac{6}{\pi}\right)\omega}\right)\Big|_{\omega=0}\right]}{\left[1e^{-j\left(\frac{6}{\pi}\right)\omega}\Big|_{\omega=0}\right]}=\frac{j\left(\frac{-6j}{\pi}\right)}{1}=\frac{6}{\pi}$$

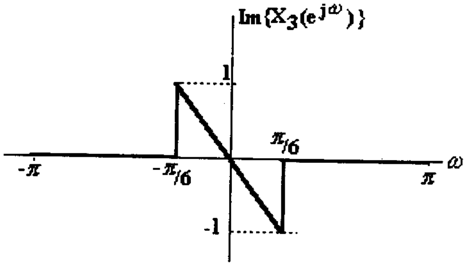
(د) از خاصیت کانولوشن زمانی تبدیل فوریه داریم :

$$x_3[n]=x_1[n]*h[n] \Rightarrow X_3\left(e^{j\omega}\right)=X_1\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=X_1\left(e^{j\omega}\right)\mathcal{F}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}\right\}$$

$$=X_1\left(e^{j\omega}\right)\begin{cases}1 & ;\ |\omega|\le\frac{\pi}{6}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{6}<|\omega|<\pi\end{cases}=\begin{cases}X_1\left(e^{j\omega}\right) & ;\ |\omega|\le\frac{\pi}{6}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{6}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

$X_3\left(e^{j\omega}\right)$ را در شکل زیر مشاهده می‌کنید :

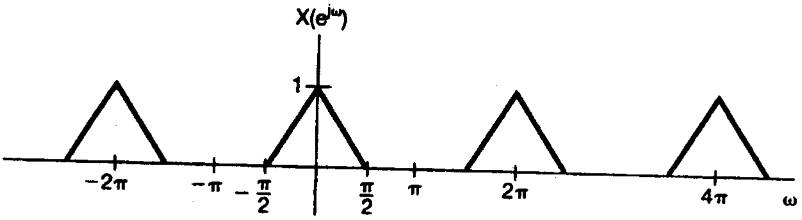




۲۷–۵ (الف) $x[n]$ یک رشته گسسته در زمان با تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ شکل م۵–۲۷ است. به ازای هر یک از سیگنالهای $p[n]$ زیر تبدیل فوریه $w[n]=x[n]p[n]$ را رسم کنید :

$p[n]=\cos\pi n$ (i) $\quad p[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ (ii) $\quad p[n]=\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ (iii)

$p[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-2k]$ (iv) $\quad p[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-4k]$ (v)



شکل م ۲۷–۵

ب) فرض کنید سیگنال $w[n]$ بند (الف) ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیرست

$$h[n]=\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n}$$

خروجی $y[n]$ را به ازای هر یک از $p[n]$ های بند (الف) تعیین کنید.

حل: (الف-i)

$$W_1\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{w_1[n]\right\}=f\left\{p_1[n]x[n]\right\}=f\left\{\cos(\pi n)x[n]\right\}$$

$$=f\left\{\frac{1}{2}e^{j\pi n}x[n]+\frac{1}{2}e^{-j\pi n}x[n]\right\}=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)+X\left(e^{j(\omega+\pi)}\right)\right\}$$

(الف-ii)

$$W_2\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{w_2[n]\right\}=f\left\{p_2[n]x[n]\right\}=f\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)x[n]\right\}$$

$$=f\left\{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{2}}x[n]+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{2}}x[n]\right\}=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\right)+X\left(e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}\right)\right\}$$

(الف-iii)

$$W_3\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{w_3[n]\right\}=f\left\{p_3[n]x[n]\right\}=f\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)x[n]\right\}$$

$$=f\left\{\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{2}}x[n]-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi n}{2}}x[n]\right\}=\frac{1}{2j}\left\{X\left(e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\right)-X\left(e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}\right)\right\}$$

(الف-iv)

$$W_4\left(e^{j\omega}\right)=f\{w_4[n]\}=f\left\{p_4[n]x[n]\right\}=f\left\{x[n]\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-2k]\right\}=f\left\{\begin{cases}x[n] & ;\ n=2k\\ 0 & ;\ n\neq 2k\end{cases}\right\}$$

$$=f\left\{\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)x[n]\right\}=f\left\{\frac{1}{2}x[n]+\frac{1}{2}e^{j\pi n}x[n]\right\}=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)\right\}$$

(الف-v)

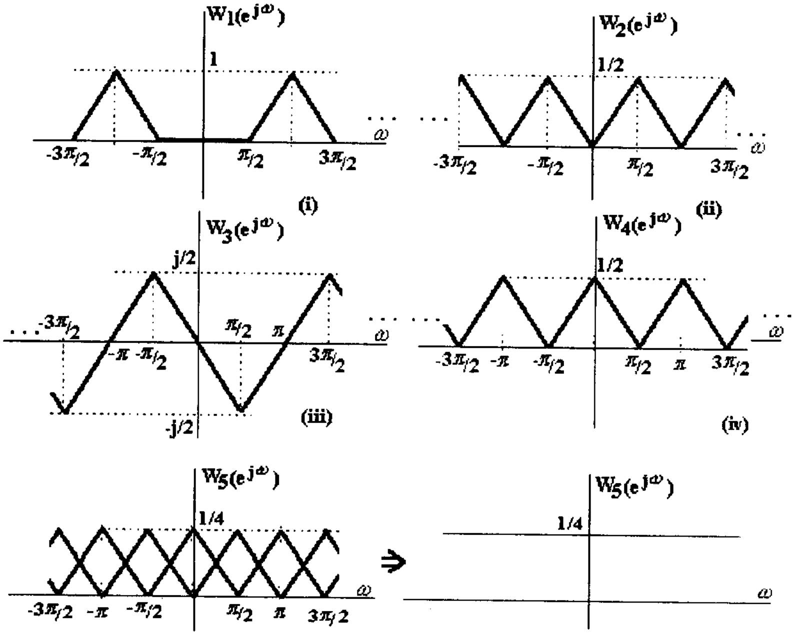
$$W_5\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{w_5[n]\right\}=f\left\{p_5[n]x[n]\right\}=f\left\{x[n]\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-4k]\right\}=f\left\{\begin{cases}\cancel{x[n]} & ;\ n=4k\\ 0 & ;\ n\neq 4k\end{cases}\right\}$$

$$=f\left\{\frac{1}{4}\left[\left(1+(-1)^n\right)\left(1+j^{-n}\right)\right]x[n]\right\}=f\left\{\frac{1}{4}\left[\left(1+e^{j\pi n}\right)\left(1+e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right)\right]x[n]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}f\left\{\left(1+e^{j\pi n}+e^{j\frac{\pi n}{2}}+e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right)x[n]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)+X\left(e^{j\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\right)+X\left(e^{j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}\right)\right\}$$

این تبدیل‌ها را در شکل زیر مشاهده می‌کنید:

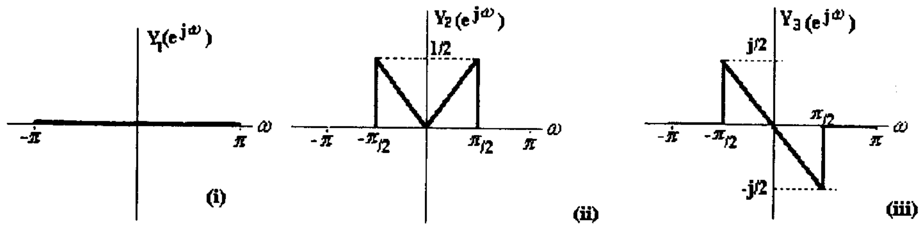


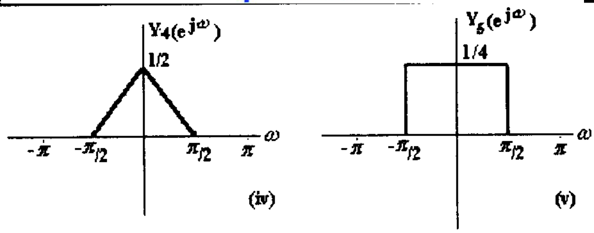
(ب) ابتدا داریم:

$$Y_k\left(e^{j\omega}\right)=P_k\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=P_k\left(e^{j\omega}\right)f\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}\right\}$$

$$=P_k\left(e^{j\omega}\right)\begin{cases}1 & ;\ |\omega|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{2}<|\omega|<\pi\end{cases}=\begin{cases}P_k\left(e^{j\omega}\right) & ;\ |\omega|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{2}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

تبدیل فوریه های حاصل را در شکل زیر مشاهده می‌کنید:





حال می‌توان به راحتی با اعمال تبدیل عکس تبدیل فوریه به $Y_k\left(e^{j\omega}\right)$ها $y_k[n]$را محاسبه نمود :

$$y_1[n]=f^{-1}\left\{Y_1\left(e^{j\omega}\right)\right\}=0$$

$$y_2[n]=f^{-1}\left\{Y_2\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{2\pi n}-\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi^2 n^2}$$

$$y_3[n]=f^{-1}\left\{Y_3\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi^2 n^2}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{2\pi n}$$

$$y_4[n]=f^{-1}\left\{Y_4\left(e^{j\omega}\right)\right\}=2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right]^2$$

$$y_5[n]=f^{-1}\left\{Y_5\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}\right]$$

۵–۲۸ سیگنالهای $x[n]$و $g[n]$با تبدیل فوریه‌های $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $G\left(e^{j\omega}\right)$ داده شده است. همچنین رابطه $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $G\left(e^{j\omega}\right)$ به صورت زیر است :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X\left(e^{j\theta}\right)G\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta=1+e^{-j\omega} \qquad \text{(م۵–۲۸–۱)}$$

(الف) به ازای $x[n]=(-1)^n$سیگنال $g[n]$را چنان تعیین کنید که تبدیل فوریه $G\left(e^{j\omega}\right)$ آن معادله (م۵–۲۸–۱) را ارضا کند. آیا جوابهای دیگری هم برای $g[n]$وجود دارد؟

(ب) بند (الف) را به ازای $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ تکرار کنید.

حل : با استفاده از خاصیت ضرب جدول (1-5) داریم :

$$f^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\theta}\right)G\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta\right\}=f^{-1}\left\{1+e^{-j\omega}\right\} \quad , \quad (I)$$

$$\Rightarrow x[n]g[n]=\delta[n]+\delta[n-1] \quad , \quad (II)$$

(الف) برای آنکه $G\left(e^{j\omega}\right)$ معادله (I) را ارضا کند، سیگنال g[n] کافیست رابطه (II) را تامین نماید :

$$x[n]\,g[n]=\delta[n]+\delta[n-1]=\begin{cases}1 & ;\ n=0,1\\ 0 & ;otherwise\end{cases}\Rightarrow(-1)^n g[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$$

$$\Rightarrow\ g[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

روشن است که g[n] فوق تنها جواب کلی ممکن می‌باشد.

(ب) در این مورد نیز داریم :

$$x[n]\,g[n]=\delta[n]+\delta[n-1]=\begin{cases}1 & ;n=0,1\\ 0 & ;otherwise\end{cases}\Rightarrow g[n]\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]=g[n]\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n & ;n\geq0\\ 0 & ;\ n<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & ;n=0,1\\ 0 & ;otherwise\end{cases}\Rightarrow g[n]=\begin{cases}2^n & ;\ n=0,1\\ 0 & ;\ n>1\\ arbitrary & ;\ n<0\end{cases}$$

بوضوح دیده می‌شود که در انتخاب g[n] در $n<0$ آزاد هستیم ، بنابراین بینهایت جواب ممکن برای این حالت می‌توان پیشنهاد نمود.

۵–۲۹ (الف) یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

با استفاده از تبدیل فوریه، پاسخ این سیستم را به سیگنالهای ورودی زیر بیابید :

$$(i)\quad x[n]=\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]\qquad\qquad (ii)\quad x[n]=(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$(iii)\quad x[n]=(-1)^n$$

(ب) فرض کنید

$$h[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]u[n]$$

و با استفاده از روش تبدیل فوریه پاسخ به ورودیهای زیر را بیابید

$$(i)\quad x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\qquad\qquad (ii)\quad x[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

(ج) $x[n]$ و $h[n]$ را سیگنالهایی با تبدیل فوریه‌های زیر در نظر بگیرید

$$X\left(e^{j\omega}\right)=3e^{j\omega}+1-e^{-j\omega}+2e^{-j3\omega}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=-e^{j\omega}+2e^{-2j\omega}+e^{j4\omega}$$

$y[n]=x[n]*h[n]$ را بیابید.

حل : ابتدا پاسخ فرکانسی این سیستم را بدست می‌آوریم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=f\{h[n]\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

(الف- i)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]\right\}H\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$=\frac{3}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(الف- ii)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\}H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]=\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}-\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

(الف- iii)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{(-1)^n\right\}H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{e^{j\pi n}\right\}H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi)H\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}H\left(e^{j(2k+1)\pi}\right)\delta(\omega-(2k+1)\pi)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(2k+1)\pi}}\right](\delta(\omega-(2k+1)\pi))=\frac{4\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-(2k+1)\pi)$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{4\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-(2k+1)\pi)\right\}=\frac{2}{3}e^{j\pi n}=\frac{2}{3}(-1)^n$$

ب) ابتدا پاسخ فرکانسی سیستم را بدست می‌آوریم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=f\{h[n]\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]\right\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{e^{j\frac{\pi n}{2}}+e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2}\right]u[n]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}f\left\{e^{j\frac{\pi n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}+\frac{1}{2}f\left\{e^{-j\frac{\pi n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{j}{2}\right)e^{-j\omega}}+\frac{1}{1+\left(\frac{j}{2}\right)e^{-j\omega}}\right)$$

در اینصورت داریم :

(ب-i)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{1}{1-\left(\frac{j}{2}\right)e^{-j\omega}}+\frac{1}{1+\left(\frac{j}{2}\right)e^{-j\omega}}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left[\frac{1}{2(1-j)}\right]}{1+\left(\frac{j}{2}\right)e^{-j\omega}}+\frac{\left[\frac{1}{2(1+j)}\right]}{1-\left(\frac{j}{2}\right)e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2(1-j)}\left(-\frac{j}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2(1+j)}\left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]$$

(ب-ii)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=f\left\{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{2}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right\}H\left(e^{j\omega}\right)=\dots=f\left\{\frac{1}{2}H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)e^{j\frac{\pi n}{2}}+\frac{1}{2}H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right\}$$

$$=f\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)e^{j\frac{\pi n}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right\}=f\left\{\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

(ج)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=\left[3e^{j\omega}+1-e^{-j\omega}+2e^{-j3\omega}\right]\left[-e^{j\omega}+2e^{-j2\omega}+e^{j4\omega}\right]$$

$$=3e^{j5\omega}+e^{j4\omega}-e^{j3\omega}-3e^{j2\omega}+e^{j\omega}+e^{j0}+6e^{-j\omega}-2e^{-j3\omega}+4e^{-j5\omega}$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=3\delta[n+5]+\delta[n+4]-\delta[n+3]$$

$$-3\delta[n+2]+\delta[n+1]+\delta[n]+6\delta[n-1]-2\delta[n-3]+4\delta[n-5]$$

۵-۳۰ در فصل ۴ دیدیم که سیستم دارای پاسخ ضربه زیر نقش مهمی در تحلیل سیستمهای LTI دارد

$$h(t)=\frac{W}{\pi}sinc\left(\frac{Wt}{\pi}\right)=\frac{\sin Wt}{\pi t}$$

در حالت گسسته در زمان، یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر همین نقش را دارد

$$h[n]=\frac{W}{\pi}sinc\left(\frac{Wn}{\pi}\right)=\frac{\sin Wn}{\pi n}$$

(الف) پاسخ فرکانسی سیستم دارای پاسخ ضربه $h[n]$ را تعیین و آن را رسم کنید.

(ب) سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x[n]=\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)-2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

فرض کنید این سیگنال ورودی سیستمهای LTI با پاسخ ضربه زیرست. در هر حالت خروجی را بیابید.

$$(i)\quad h[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n} \qquad (ii)\quad h[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n}+\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

$$(iii)\quad h[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi^2 n^2} \qquad (iv)\quad h[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n}$$

(ج) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

$$h[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n}$$

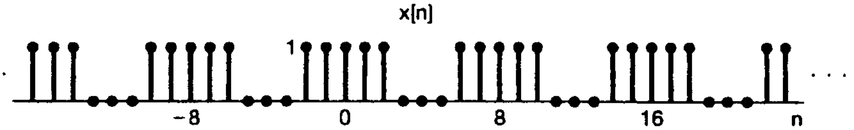
خروجی این سیستم را به ازای هر یک از ورودیهای زیر تعیین کنید:

(i) $x[n]$= موج مستطیلی شکل م ۵-۳۰

$$(ii)\quad x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-8k]$$

(iii) $x[n]$= حاصلضرب $(-1)^n$ در موج مستطیلی شکل م ۵-۳۰.

(iv) $x[n]=\delta[n+1]+\delta[n-1]$

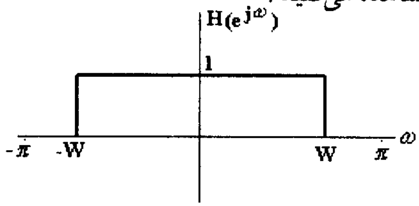


شکل م ۵-۳۰

حل : (الف) داریم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=f\{h[n]\}=f\left\{\frac{\sin Wn}{\pi n}\right\}=\begin{cases}1 & ;\ 0\leq|\omega|\leq W\\ 0 & ;\ W<|\omega|<\pi\end{cases}$$

این پاسخ فرکانسی را در شکل زیر مشاهده می‌کنید :



(ب) ابتدا برای سیگنال ورودی می‌نویسیم :

$$x[n]=\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)-2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{8}}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi n}{8}}-e^{j\frac{\pi n}{4}}-e^{-j\frac{\pi n}{4}}$$

(ب-i) برای پاسخ فرکانسی این سیستم داریم :

$$H_1\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n}\right\}=\begin{cases}1 & ;\ 0\leq|\omega|\leq\frac{\pi}{6}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{6}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

این پاسخ فرکانسی را در شکل (i) مشاهده می‌کنید. حال با توجه به اینکه نمایی‌های مختلط به شکل $e^{j\omega_0 n}$ تابع ویژه سیستم‌های خطی با مقدار ویژه $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ هستند، می‌توان نوشت :

$$y_1[n]=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{8}}H_1\left(e^{j\frac{\pi}{8}}\right)-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi n}{8}}H_1\left(e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)-e^{j\frac{\pi n}{4}}H_1\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)-e^{-j\frac{\pi n}{4}}H_1\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{8}}\times 1-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{n\pi}{8}}\times 1+0=\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right)$$

(ب-ii) برای پاسخ فرکانسی این سیستم داریم :

$$H_2\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n}+\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}\right\}$$

$$=\begin{cases}1 & ;\ 0\leq|\omega|\leq\frac{\pi}{6}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{6}<|\omega|<\pi\end{cases}+\begin{cases}1 & ;\ 0\leq|\omega|\leq\frac{\pi}{2}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{2}<|\omega|<\pi\end{cases}=\begin{cases}2 & ;\ 0\leq|\omega|\leq\frac{\pi}{6}\\ 1 & ;\ \frac{\pi}{6}<|\omega|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{2}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

این پاسخ فرکانسی را در شکل (ii) می‌بینید؛ به همان روش بند قبل داریم :

$$y_2[n]=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{8}}H_2\left(e^{j\frac{\pi}{8}}\right)-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi n}{8}}H_2\left(e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)-e^{j\frac{\pi n}{4}}H_2\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)-e^{-j\frac{\pi n}{4}}H_2\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{8}}\times 2-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi n}{8}}\times 2-e^{j\frac{\pi n}{4}}\times 1-e^{-j\frac{\pi n}{4}}\times 1=2\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)-2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

(ب-iii) برای پاسخ فرکانسی این سیستم داریم :

$$H_3\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi^2 n^2}\right\}=\frac{1}{2\pi}f\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n}\right\}*f\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\begin{cases}1\ ;\ 0\le|\omega|\le\frac{\pi}{6}\\ 0\ ;\ \frac{\pi}{6}<|\omega|<\pi\end{cases}\right]*\left[\begin{cases}1\ ;\ 0\le|\omega|\le\frac{\pi}{3}\\ 0\ ;\ \frac{\pi}{3}<|\omega|<\pi\end{cases}\right]$$

از کانولوشن " متناوب " فوق پاسخ فرکانسی $H_3\left(e^{j\omega}\right)$ بدست می آید، این پاسخ فرکانسی در شکل (iii) نشان داده شده است؛ اکنون داریم :

$$y_3[n]=\frac{1}{2j}e^{j\frac{n\pi}{8}}H_3\left(e^{j\frac{\pi}{8}}\right)-\frac{1}{2j}e^{-jn\frac{\pi}{8}}H_3\left(e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)-e^{j\frac{\pi n}{4}}H_3\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)-e^{-j\frac{\pi n}{4}}H_3\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{8}}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi n}{8}}-e^{j\frac{\pi n}{4}}\times\frac{1}{8}-e^{-j\frac{\pi n}{4}}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{6}\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

(ب-iv) پاسخ فرکانسی این سیستم چنین است :

$$H_4\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n}\right\}=f\left\{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n}\right)\left(\frac{e^{j\frac{\pi n}{3}}-e^{-j\frac{\pi n}{3}}}{2j}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}f\left\{e^{j\frac{\pi n}{3}}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n}\right]\right\}-\frac{1}{2j}f\left\{e^{-j\frac{\pi n}{3}}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n}\right]\right\}$$

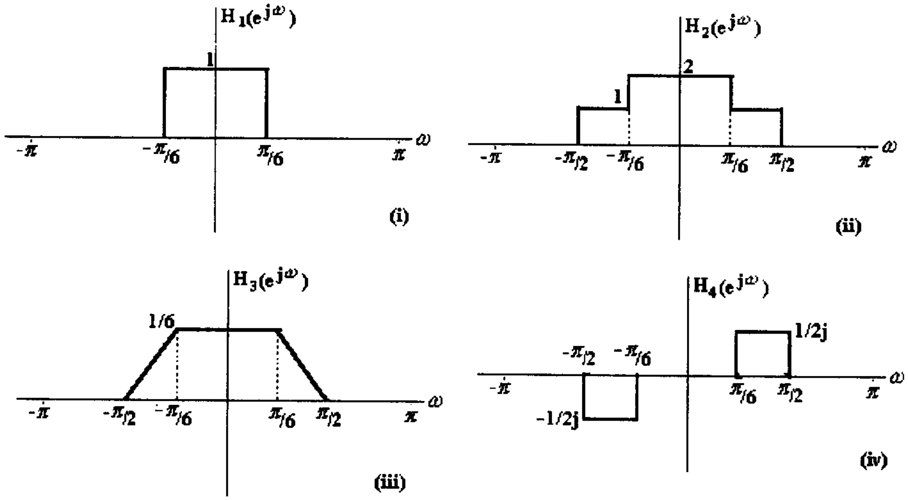
$$=\frac{1}{2j}\begin{cases}1\ ;\ 0\le\left|\omega-\frac{\pi}{3}\right|\le\frac{\pi}{6}\\ 0\ ;\ \frac{\pi}{6}<\left|\omega-\frac{\pi}{3}\right|<\pi\end{cases}-\frac{1}{2j}\begin{cases}1\ ;\ 0\le\left|\omega+\frac{\pi}{3}\right|\le\frac{\pi}{6}\\ 0\ ;\ \frac{\pi}{6}<\left|\omega+\frac{\pi}{3}\right|<\pi\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2j}\begin{cases}1\ ;\frac{\pi}{6}\le\omega\le\frac{\pi}{2}\\ 0\ ;elsewhere\end{cases}-\frac{1}{2j}\begin{cases}1\ ;\ -\frac{\pi}{2}\le\omega\le-\frac{\pi}{6}\\ 0\ ;\ elsewhere\end{cases}$$

این پاسخ فرکانسی را در شکل iv می‌توانید ببینید؛ حال می‌توان نوشت :

$$y_4[n]=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{8}}H_4\left(e^{j\frac{\pi}{8}}\right)-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi n}{8}}H_4\left(e^{-j\frac{\pi}{8}}\right)-e^{j\frac{\pi n}{4}}H_4\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)-e^{-j\frac{\pi n}{4}}H_4\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi n}{8}}\times 0-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi n}{8}}\times 0-e^{j\frac{\pi n}{4}}\times\left(\frac{1}{2j}\right)-e^{-j\frac{\pi n}{4}}\times\left(-\frac{1}{2j}\right)=-\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$



ج) پاسخ فرکانسی این سیستم به صورت زیر است :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=f\{h[n]\}=f\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n}\right\}=\begin{cases}1 & ;\ 0\le|\omega|\le\frac{\pi}{3}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{3}<|\omega|<\pi\end{cases}$$

حال داریم :(ج-i) از جدول $(2\text{-}5)$ می‌توان تبدیل فوریه موج مستطیلی را بدست آورد :

$$X_1\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{x_1[n]\right\}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

که در آن N تناوب پایه موج مربعی بوده (در اینجا $N=8$) و a_k ها ضرایب "سری فوریه" سیگنال $x_1[n]$ می‌باشند، با مراجعه به مثال $(3\text{-}12)$ کتاب داریم :

$$a_k=\frac{1}{N}\frac{\sin\left(2\pi k\frac{\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\left(2\pi k\frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{8}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{5k\pi}{8}\right)}{8\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)}$$

در اینصورت برای $Y_1\left(e^{j\omega}\right)$ خواهیم داشت :

$$Y_1\left(e^{j\omega}\right)=X_1\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)\right]H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{a_k\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)H\left(e^{j\frac{k\pi}{4}}\right)\right\}=2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left\{a_{8l-3}\delta\left(\omega-\frac{(8l-3)\pi}{4}\right)H\left(e^{j\frac{(8l-3)\pi}{4}}\right)\right.$$

$$+a_{8l-2}\delta\left(\omega-\frac{(8l-2)\pi}{4}\right)H\left(e^{j\frac{(8l-2)\pi}{4}}\right)+a_{8l-1}\delta\left(\omega-\frac{(8l-1)\pi}{4}\right)H\left(e^{j\frac{(8l-1)\pi}{4}}\right)+\dots$$

$$\left.+a_{8l+3}\delta\left(\omega-\frac{(8l+3)\pi}{4}\right)H\left(e^{j\frac{(8l+3)\pi}{4}}\right)+a_{8l+4}\delta\left(\omega-\frac{(8l+4)\pi}{4}\right)H\left(e^{j\frac{(8l+4)\pi}{4}}\right)\right\}$$

در بدست آوردن روابط فوق از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که ضرایب سری فوریه سیگنال x[n] دارای تناوب پایه N، خود با تناوب پایه N متناوب‌اند، با ساده‌سازی عبارت اخیر بدست می‌آوریم :

$$Y_1\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left\{a_{8l-3}\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{4}-2l\pi\right)H\left(e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)+a_{8l-2}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{4}-2l\pi\right)H\left(e^{-j\frac{2\pi}{4}}\right)\right.$$

$$\left.+\dots+a_{8l+3}\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{4}-2l\pi\right)H\left(e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)+a_{8l+4}\delta\left(\omega-\frac{4\pi}{4}-2l\pi\right)H\left(e^{j\frac{4\pi}{4}}\right)\right\}$$

$$=2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left\{a_{8l-1}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)+a_{8l}\delta(\omega-2l\pi)+a_{8l+1}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)\right\}$$

$$=2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)+\frac{5}{8}\delta(\omega-2l\pi)+\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{8}\left[2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2l\pi)\right]+\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\left[2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)+2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)\right]$$

حال با اعمال عکس تبدیل فوریه به $Y_1\left(e^{j\omega}\right)$ بدست می‌آوریم :

$$y_1[n]=\frac{5}{8}+\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\left[e^{-j\frac{\pi n}{4}}+e^{j\frac{\pi n}{4}}\right]=\frac{5}{8}+\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

ج-ii)

$$Y_2\left(e^{j\omega}\right)=X_2\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-8k]\right\}H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\left[\frac{2\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{8}\right)\right]H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{8}\right)H\left(e^{j\frac{k\pi}{4}}\right)\right\}$$

$$=\frac{2\pi}{8}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta\left(\omega-\frac{2\pi(8l-3)}{8}\right)H\left(e^{j\frac{(8l-3)\pi}{4}}\right)+\delta\left(\omega-\frac{2\pi(8l-2)}{8}\right)H\left(e^{j\frac{(8l-2)\pi}{4}}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+\delta\left(\omega-\frac{2\pi(8l+3)}{8}\right)H\left(e^{j\frac{(8l+3)\pi}{4}}\right)+\delta\left(\omega-\frac{2\pi(8l+4)}{8}\right)H\left(e^{j\frac{(8l+4)\pi}{4}}\right)\right\}=\ldots$$

$$=\frac{2\pi}{8}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta\left(\omega+\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)+\delta(\omega-2l\pi)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)\right\}\Rightarrow y_2[n]=f^{-1}\left\{Y_2\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{1}{8}\left[2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2l\pi)\right]+\frac{1}{8}\left[2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)+2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}-2l\pi\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(e^{-j\frac{\pi n}{4}}+e^{j\frac{\pi n}{4}}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

(ج-iii) در این مورد داریم :

$$X_3\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{x_3[n]\right\}=f\left\{(-1)^n x_1[n]\right\}=f\left\{e^{j\pi n}x_1[n]\right\}=X_1\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

در این حالت نیز مشابه دو بند قبل عمل می‌کنیم، در اینصورت خواهیم داشت :

$$y_3[n]=\frac{1}{8}-\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

(ج-iv) به سادگی می‌نویسیم :

$$y_4[n]=x_1[n]*h[n]=\{\delta[n+1]+\delta[n-1]\}*h[n]=h[n+1]+h[n-1]=\frac{\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right)}{\pi(n+1)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right)}{\pi(n-1)}$$

۵-۳۱ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ دارای این ویژگی است که

به ازای $-\pi\le\omega_0\le\pi$ ، $\cos\omega_0 n\rightarrow\omega_0\cos\omega_0 n$

(الف) $H\left(e^{j\omega}\right)$ را بیابید.

(ب) $h[n]$ را بیابید.

حل : با توجه به اینکه نمایی‌های مختلط به شکل $e^{j\omega_0 n}$ ، توابع ویژه سیستم‌های LTI هستند، برای

خروجی سیستم S می‌توان نوشت :

$$y[n]=S\{x[n]\}=S\{\cos\omega_0 n\}=S\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\omega_0 n}=\omega_0\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}\omega_0 e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}\omega_0 e^{-j\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow since: -\pi<\omega<\pi \Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\omega_0 \quad ,(I)$$

رابطه اخیر همان پاسخ فرکانسی سیستم S می‌باشد.

(ب) با اعمال تبدیل عکس تبدیل فوریه به $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ بدست می‌آوریم :

$$h[n]=f^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\{\omega_0\}=\omega_0\delta[n]$$

۵-۳۲ $h_1[n]$ و $h_2[n]$ را پاسخ ضربه‌های دو سیستم LTI علی با پاسخ فرکانسی $X_1\left(e^{j\omega}\right)$ و $X_2\left(e^{j\omega}\right)$ فرض کنید. آیا معادله زیر در حالت کلی درست است یا نه؟ برای جواب خود دلیل بیاورید.

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H_1\left(e^{j\omega}\right)d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H_2\left(e^{j\omega}\right)d\omega\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}H_1\left(e^{j\omega}\right)H_2\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

حل : ابتدا از رابطه ترکیب فوریه داریم :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_1\left(e^{j\omega}\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_1\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega\,\Big|_{n=0}=h_1[n]\,\Big|_{n=0}=h_1[0] \quad ,(I)$$

همینطور :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_2\left(e^{j\omega}\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_2\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega\,\Big|_{n=0}=h_2[n]\,\Big|_{n=0}=h_2[0] \quad ,(II)$$

از سوی دیگر با توجه به علی بودن دو سیستم می‌توان قرار دارد:

$$h_1[n]=h_1[n]u[n] \quad , \quad h_2[n]=h_2[n]u[n]$$

در اینصورت داریم :

$$h_1[n]*h_2[n]\,\Big|_{n=0}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_1[k]h_2[n-k]\,\Big|_{n=0}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{h_1[k]u[k]\}\{h_2[-k]u[-k]\}$$

$$=h_1[0]h_2[0]=h_1[n]h_2[n]\,\Big|_{n=0} \quad ,(III)$$

حال از روابط (I)، (II) و (II) می‌توان نوشت :

$$h_1[n]h_2[n]\,\Big|_{n=0}=h_1[n]*h_2[n]\,\Big|_{n=0}\Rightarrow\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_1\left(e^{j\omega}\right)d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_2\left(e^{j\omega}\right)d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left\{h_1[n]*h_2[n]\right\} d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1\left(e^{j\omega}\right) H_2 e^{j\omega} d\omega$$

بنابراین رابطه داده شده یک اتحاد بوده و به ازای جمیع مقادیر ω برقرار می‌باشد.

۵-۳۳ سیستم LTI علی توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ سیستم را به ورودیهای زیر بیابید :

(i) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ $\quad$ (ii) $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

(iii) $x[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$ $\quad$ (iv) $x[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$

(ج) پاسخ سیستم را به ورودیهای با تبدیل فوریه داده شده پیدا کنید :

(i) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ $\quad$ (ii) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

(iii) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$ $\quad$ (iv) $X\left(e^{j\omega}\right)=1+2e^{-3j\omega}$

حل : (الف) با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین معادله تفاضلی این سیستم بدست می‌آوریم :

$$f\left\{y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]\right\}=f\{x[n]\}$$

$$\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

(i-ب)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}H\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

(ب-ii)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\right\}H\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]^{2}=-2e^{j\omega}.j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$=-2f^{-1}\left\{e^{j\omega}.j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\right\}=-2(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]=(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n+1]$$

$$=(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

(ب-iii)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]\right\}H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]=1\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\{1\}=\delta[n]$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]\right\}H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

(ج-i)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{2}}+\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-j\omega}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{2}}=-2e^{j\omega}.j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]+\frac{1}{2}j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=-2f^{-1}\left\{e^{j\omega}j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)\right\}+\frac{1}{2}f^{-1}\left\{j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)\right\}$$

$$=-2(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]+\frac{1}{2}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]=(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{4}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

(ج-ii)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right]\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

(ج-iii)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}\right]\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{9}\right)}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{\left(\frac{2}{9}\right)}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{2}}=\frac{\left(\frac{1}{9}\right)}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{\left(\frac{2}{9}\right)}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{4}{3}e^{j\omega}j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]+\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{4}{3}(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]+\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{2}{3}(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

(ج-iv)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=\left(1+2e^{-j3\omega}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{2e^{-j3\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}u[n-3]$$

۵-۳۴ سیستمی از اتصال سری دو سیستم LTI با پاسخ فرکانسی زیر تشکیل شده است :

$$H_1\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

و

$$H_2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

(الف) معادله دیفرانسیل توصیف کننده کل سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ ضربه سیستم کل را تعیین کنید.

حل : (الف) می‌دانیم پاسخ فرکانسی کلی یک سیستم سری با حاصلضرب پاسخ‌های فرکانسی زیر-سیستمهای آن برابر است،پس داریم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_1\left(e^{j\omega}\right)H_2\left(e^{j\omega}\right)=\left(\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}\right)\quad,(I)$$

$$=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{8}e^{-j3\omega}}=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}\quad,(II)\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{8}e^{-j3\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)=2X\left(e^{j\omega}\right)-e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\Rightarrow y[n]+\frac{1}{8}y[n-3]=2x[n]-x[n-1]$$

(ب) برای بدست آوردن پاسخ ضربه این سیستم کافیست از پاسخ فرکانسی آن تبدیل عکس تبدیل فوریه گرفته شود :

$$h[n]=f^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{8}e^{-j3\omega}}\right\}=2f^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{8}e^{-j3\omega}}\right\}-f^{-1}\left\{\frac{e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{8}e^{-j3\omega}}\right\}$$

$$=2\begin{cases}\left(-\frac{1}{8}\right)^r & ;\ n=3r\\ 0 & ;\ n\neq 3r\end{cases}-\begin{cases}\left(-\frac{1}{8}\right)^r & ;\ n-1=3r\\ 0 & ;\ n-1\neq 3r\end{cases}$$

در محاسبه عبارت اخیر از خاصیت‌های جابجایی و انبساط زمانی جدول *(5-1)* بهره برده‌ایم. یک راه دیگر محاسبه $h[n]$ استفاده از پاسخ فرکانسی بیان شده توسط رابطه *(I)* به عوض رابطه *(II)* می‌باشد، در این مورد با تفکیک $H\left(e^{j\omega}\right)$ به کسرهای جزئی ضرایب مختلط ظاهر می‌شوند که محاسبه آن‌ها کار را اندکی پیچیده‌تر می‌کند :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left(\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}\right)$$

$$=\frac{2-e^{-j\omega}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)e^{-j\omega}\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)e^{-j\omega}\right)}=\ldots$$

$$=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left[\frac{1+j\sqrt{3}}{3}\right]}{1-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)e^{-j\omega}}+\frac{\left[\frac{1-j\sqrt{3}}{3}\right]}{1-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)e^{-j\omega}}\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\ldots$$

۳۵-۵ یک سیستم LTI علی با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است

$$y[n]-ay[n-1]=bx[n]+x[n-1]$$

که در آن a حقیقی و کوچکتر از 1 است.

(الف) مقدار b را به نحوی تعیین کنید که پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر باشد

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=1 \text{ ، } \omega \text{ برای تمام مقادیر}$$

این سیستم را سیستم تمام‌گذر می‌گویند، چنین سیستمی به ازای تمام مقادیر ω، $e^{j\omega n}$ را بدون تضعیف عبور می‌دهد. در بقیه این مسئله، همین مقدار b را بکار برید.

(ب) $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ را در فاصله $0\leq\omega\leq\pi$، به ازای $a=\frac{1}{2}$، به طور تقریبی رسم کنید.

(ج) $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ را در فاصله $0\leq\omega\leq\pi$، به ازای $a=-\frac{1}{2}$، به طور تقریبی رسم کنید.

(د) خروجی سیستم را به ازای $a=-\frac{1}{2}$ و ورودی زیر محاسبه و رسم کنید

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

این مثال نشان می‌دهد که فاز غیرخطی اثر عمده‌ای بر سیگنال می‌گذارد، برخلاف فاز خطی که تنها اثرش ایجاد یک جابجایی زمانی است.

(الف) ابتدا پاسخ فرکانسی سیستم را بدست می آوریم :

$$f\{y[n]-ay[n-1]\}=f\{bx[n]+x[n-1]\}\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)-ae^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)=$$

$$=bX\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{b+e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

در اینصورت برای آنکه سیستم تمام‌گذر باشد کافیست داشته باشیم :

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=1 \qquad or \qquad \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^{2}=1$$

$$\Rightarrow \quad H\left(e^{j\omega}\right)H^{*}\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{b+e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}\right]\left[\frac{b+e^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}\right]=1$$

$$\Rightarrow \left(b^{2}+1+2b\cos\omega\right)=\left(1+a^{2}-2a\cos\omega\right) \quad \Rightarrow b=-a$$

ب) به ازای $a=\frac{1}{2}$ و $\left(b=-a=-\frac{1}{2}\right)$ داریم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{-\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=\frac{\left(-\frac{1}{2}+\cos\omega\right)-j\sin\omega}{\left(1-\frac{1}{2}\cos\omega\right)+j\frac{1}{2}\sin\omega}$$

$$\Rightarrow \angle H\left(e^{j\omega}\right)=\tan^{-1}\left[\frac{-\sin\omega}{-\frac{1}{2}+\cos\omega}\right]-\tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}\right]$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{2\sin\omega}{1-2\cos\omega}\right]-\tan^{-1}\left[\frac{\sin\omega}{2-\cos\omega}\right]$$

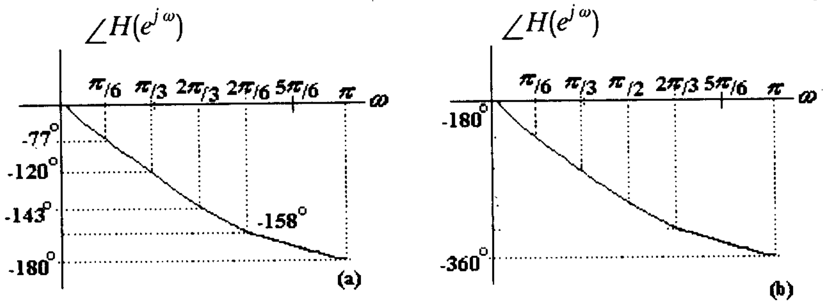
منحنی $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ حاصل بطور تقریبی در شکل (a) رسم شده است.

ج) به ازای $a=-\frac{1}{2}$ و $\left(b=-a=\frac{1}{2}\right)$ خواهیم داشت :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\cos\omega\right)-j\sin\omega}{\left(1+\frac{1}{2}\cos\omega\right)-j\frac{1}{2}\sin\omega} \Rightarrow \angle H\left(e^{j\omega}\right)=\tan^{-1}\left[\frac{-\sin\omega}{\frac{1}{2}+\cos\omega}\right]$$

$$-\tan^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{2}\sin\omega}{1+\frac{1}{2}\cos\omega}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{-2\sin\omega}{1+2\cos\omega}\right]-\tan^{-1}\left[\frac{-\sin\omega}{2+\cos\omega}\right]$$

منحنی $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ حاصل بطور تقریبی در شکل (b) رسم شده است .



(د)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)\cdot H\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\right\}H\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{4}\right)}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

به سادگی دیده می‌شود که با وجود تمام‌گذر بودن سیستم، سیگنال خروجی بطور کلی با سیگنال ورودی متفاوت است، این به خاطر مشخصه فاز غیرخطی $H\left(e^{j\omega}\right)$ می‌باشد. می‌دانیم در صورتی که فاز $H\left(e^{j\omega}\right)$ خطی بود عاملی به شکل $Ae^{j\omega n_0}$ به $X\left(e^{j\omega}\right)$ می‌افزود و این کار تنها موجب یک انتقال زمانی ساده در سیگنال $x[n]$ می‌شد، که در این مثال چنین چیزی وجود ندارد.

۵-۳۶ (الف) فرض کنید $h[n]$ و $g[n]$ پاسخ ضربه‌های دو سیستم LTI پایدار گسسته در زمان وارون هستند. رابطه بین پاسخ فرکانسی دو سیستم را بیابید.

(ب) سیستمهای LTI علی توصیف شده با معادلات تفاضلی زیر را در نظر بگیرید. در هر مورد پاسخ ضربه سیستم وارون و معادله تفاضلی توصیف کننده آن را بیابید.

$$(i)\quad y[n]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1] \qquad (ii)\quad y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

$$(iii)\quad y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]$$

$$(iv)\quad y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

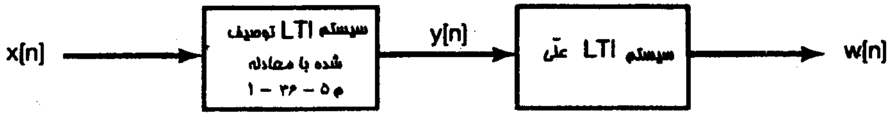
$$(v)\quad y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

$$(vi)\quad y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n-1]$$

(ج) سیستم LTI گسسته در زمان علی توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]+y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2] \qquad \text{(م۵-۳۶-۱)}$$

وارون این سیستم را بیابید. نشان دهید که وارون این سیستم علی نیست. یک سیستم LTI علی بیابید که وارون تاخیردار سیستم توصیف شده با معادله (م۵-۳۶-۱) باشد. مشخص‌تر این که یک سیستم LTI علی بیابید به نحوی که خروجی $w[n]$ شکل م۵-۳۶ برابر $x[n-1]$ باشد.



شکل م ۵–۳۶

حل : (الف) برای آنکه دو سیستم وارون هم باشند، پاسخ ضربه حاصل از اتصال سری آن دو باید یک ضربه واحد باشد :

$$g[n]*h[n]=\delta[n]\Rightarrow G\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=1\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{G\left(e^{j\omega}\right)}$$

(ب–i) برای سیستم اِصلی داریم :

$$y[n]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]\Rightarrow f\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)-\frac{1}{4}e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}$$

حال با توجه به بند (ب) برای سیستم وارون می‌توان نوشت :

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{H\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\Rightarrow f^{-1}\Rightarrow g[n]=f^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

همچنین داریم :

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$$

(ب–ii) برای سیستم اصلی داریم :

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

حال برای سیستم وارون می‌توان نوشت :

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{H\left(e^{j\omega}\right)}=1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\Rightarrow f^{-1}\Rightarrow g[n]=f^{-1}\left\{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right\}=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

همینطور :

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)=\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]$$

(ب-iii) به طور خلاصه برای سیستم اصلی خواهیم داشت :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{G\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

برای سیستم وارون نیز بدست می‌آید :

$$g[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n-1\}\Rightarrow y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]$$

(ب-iv) برای سیستم اصلی خواهیم داشت :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{G\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

برای سیستم وارون نیز بدست می‌آوریم :

$$g[n]=f^{-1}\left\{G\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{i}{8}e^{-j2\omega}}\right\}=f^{-1}\left\{1+\frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\}$$

$$=\delta[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-2\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

همچنین :

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

(ب-v) برای سیستم اصلی بدست خواهیم آورد :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{G\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j\omega}}$$

برای سیستم وارون نیز خواهیم داشت :

$$g[n]=f^{-1}\left\{G\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}=f^{-1}\left\{-2+\frac{1}{4}e^{-j\omega}+\frac{3}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}$$

$$=-2\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n-1]+3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

همینطور برای معادله تفاضلی مشخص کننده سیستم وارون بدست می‌آوریم :

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

(ب-vi) برای سیستم وارون خواهیم داشت :

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{H\left(e^{j\omega}\right)}=1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}\Rightarrow g[n]=f^{-1}\left\{G\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$=\delta[n]+\frac{5}{4}\delta[n-1]-\frac{1}{8}\delta[n-2]$$

و همچنین معادله تفاضلی سیستم وارون بدین صورت خواهد بود :

$$y[n]=x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

(ج) برای سیستم اصلی داریم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{-j\omega}-\frac{1}{2}e^{-j2\omega}}{1+e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

برای سیستم وارون نیز بدست می‌آوریم :

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{H\left(e^{j\omega}\right)}=e^{j\omega}\left[\frac{1+e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\Rightarrow g[n]=f^{-1}\left\{G\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

روشن است که $g[-1]\neq 0$، بنابراین پاسخ ضربه سیستم برای $n<0$ صفر نبوده و از اینرو سیستم وارون، علی نمی‌باشد. برای اینکه این سیستم علی شود کافیست به پاسخ ضربه آن ($g[n]$) به اندازه یک نمونه تاخیر داد تا دقیقاً از $n=0$ شروع شود؛ بنابراین پاسخ ضربه سیستم وارون حاصل چنین خواهد بود :

$$g_d[n]=g[n-1]$$

باید توجه داشت اگر چه با عمل تاخیر، سیستم وارون را به یک سیستم واقعی و قابل ساخت تبدیل کرده‌ایم، با این وجود یک تاخیر یک نمونه‌ای در خروجی نهایی خواهیم داشت :

$$h[n]*g_d[n]=h[n]*g[n-1]=h[n]*(g[n]*\delta[n-1])=(h[n]*g[n])*\delta[n-1]=\delta[n]*\delta[n-1]=\delta[n-1]$$

۵-۳۷ فرض کنید $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x[n]$ است. تبدیل فوریه سیگناهای زیر را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ پیدا کنید. (فرض نکنید که $x[n]$ حقیقی است.)

(الف) $\Re e\left\{x[n]\right\}$ (ب) $x^*[-n]$ (ج) $Ev\{x[n]\}$

حل : (الف)

$$f\left\{Re\{x[n]\}\right\}=f\left\{\frac{1}{2}\left[x[n]+x^*[n]\right]\right\}=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{-j\omega}\right)\right\}$$

(ب)

$$f\left\{x^*[n]\right\}=X^*\left(e^{-j\omega}\right)\Rightarrow f\left\{x^*[-n]\right\}=X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

(ج)

$$f\left\{Ev\{x[n]\}\right\}=f\left\{\frac{1}{2}[x[n]+x[-n]]\right\}=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{-j\omega}\right)\right\}$$

۵-۳۸ فرض کنید $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه سیگنال حقیقی $x[n]$ است. نشان دهید که $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x[n]=\int_0^{\pi}\{B(\omega)\cos\omega_n+C(\omega)\sin\omega_n\}d\omega$$

عبارتهایی برای $B(\omega)$ و $C(\omega)$ برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ پیدا کنید.

حل : با توجه به رابطه ترکیب فوریه برای سیگنال x[n] می‌نویسیم :

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

حال با تغییر متغیر $\omega\to-\omega$ در انتگرال اول عبارت فوق و توجه به این نکته که برای سیگنال‌های حقیقی $X^*\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{-j\omega}\right)$، خواهیم داشت :

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}X^*\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}-jIm\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\right]e^{-j\omega n}d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)+jIm\left\{X\left(e^{j\varphi}\right)\right\}\right\}e^{j\omega n}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\left[e^{j\omega n}+e^{-j\omega n}\right]+jIm\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\left[e^{j\omega n}-e^{-j\omega n}\right]\right\}d\omega$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{\frac{Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}}{\pi}\cos\omega n-\frac{Im\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}}{\pi}\sin\omega n\right\}d\omega$$

یا بطور خلاصه :

$$x[n]=\int_0^{\pi}\left\{B(\omega)\cos\omega n+C(\omega)\sin\omega n\right\}d\omega$$

که در آن :

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\qquad,\qquad C(\omega)=-\frac{1}{\pi}Im\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

۵–۳۹ خاصیت کانولوشن زیر را ثابت کنید

$$x[n]*h[n]\xleftrightarrow{F}X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

حل :

$$f\left\{x[n]*h[n]\right\}=f\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]\right\}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{x[k]h[n-k]e^{-j\omega n}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{x[k]e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n-k]e^{-j\omega(n-k)}\right\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{x[k]e^{-j\omega k}H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=H\left(e^{j\omega}\right)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-j\omega k}$$

$$=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

۵–۴۰ $x[n]$ و $h[n]$ دو سیگنال هستند و $y[n]=x[n]*h[n]$. دو عبارت برای $y[0]$ بنویسید: یکی برحسب $x[n]$ و $h[n]$ (با استفاده از جمع کانولوشن) و یکی برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $H\left(e^{j\omega}\right)$ (با استفاده از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه). با انتخاب سنجیده $h[n]$ و استفاده از دو عبارت فوق، رابطه پارسوال را ثابت کنید یعنی نشان دهید که

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2d\omega$$

به همین روش رابطه زیر را که تعمیم رابطه پارسوال است بیابید.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^*[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)Z^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

حل : عبارت اول $y[0]$ را از رابطه کانولوشن بدست می‌آوریم :

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]\Rightarrow y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[-k]\quad,\quad(I)$$

عبارت دوم $y[0]$ را از رابطه ترکیب تبدیل فوریه می‌یابیم :

$$y[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} Y\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f\left\{y[n]\right\} e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f\left\{x[n]*h[n]\right\} e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}d\omega$$

$$\Rightarrow y[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{j\omega}\right) d\omega \qquad , (II)$$

اکنون اگر فرض کنیم : $h[n]=x^*[-n]$، از روابط (I) و (II) خواهیم داشت :

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x^*[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) X^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

همچنین اگر فرض کنیم : $h[n]=z^*[-n]$، باز از روابط (I) و (II) بدست می‌آوریم :

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^*[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) Z^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

۵-۴۱ فرض کنید $\tilde{x}[n]$ سیگنال متناوبی با دوره تناوب N است. سیگنال دارای عمر محدود $x[n]$ به ازای یک عدد صحیح n_0 با $\tilde{x}[n]$ رابطه زیر را داراست

$$x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n] & ; \quad n_0\le n\le n_0+N-1\\ 0 & ; \quad otherwise\end{cases}$$

یعنی $x[n]$ در یک تناوب با $\tilde{x}[n]$ برابرست و بقیه جاها صفرست.

(الف) a_k ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ و $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x[n]$ است. نشان دهید که مستقل از مقدار n_0 داریم

$$a_k=\frac{1}{N}X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)$$

(ب) دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x[n]=u[n]-u[n-5]$$

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-kN]$$

که در آن N یک عدد مثبت است. a_k را ضرایب فوریه $\tilde{x}[n]$ و $X\left(e^{j\omega}\right)$ را تبدیل فوریه آن فرض کنید.

(i) عبارت $X\left(e^{j\omega}\right)$ را بیابید.

(ii) با استفاده از نتیجه بند (الف) عبارتی برای ضرایب فوریه a_k بیابید.

حل : (الف) از معادله تجزیه سری فوریه برای سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ می‌توان نوشت :

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}^{+\infty}\tilde{x}[n]\,e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)n}$$

عبارت $n=<N>$ همچنانکه می‌دانیم بر این نکته تاکید دارد که مجموع فوق را می‌توان بر روی هر دنباله اختیاری به طول N محاسبه نمود. مثلاً می‌توان انتخاب کرد :

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1}\tilde{x}[n]\,e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)n}$$

اما می‌دانیم که در این بازه $\tilde{x}[n]=x[n]$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت :

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1}x[n]\,e^{-j\left(\frac{2k\pi}{N}\right)n}$$

از طرفی x[n] در خارج این فاصله حتماً صفر می‌شود، پس می‌توان حدود مجموع فوق را تا بینهایت گسترد :

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\left(\frac{2k\pi}{N}\right)n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}=\frac{1}{N}X\left(e^{j\omega}\right)\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}=\frac{1}{N}X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)$$

(ب-i)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{u[n]-u[n-5]\}=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}-\frac{e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{5\omega}{2}}\left[e^{j\frac{5\omega}{2}}-e^{-j\frac{5\omega}{2}}\right]}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left[e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right]}=e^{-j2\omega}\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

(ب-ii) با استفاده از نتیجه بند (الف)، ضرایب سری فوریه a_k سیگنال $\tilde{x}[n]$ بصورت زیر خواهند بود :

$$a_k=\frac{1}{N}X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)=\frac{1}{N}e^{-j\frac{4\pi k}{N}}\frac{\sin\left(\frac{5k\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}$$

۵-۴۲ در این مسئله خاصیت جابجایی فرکانسی تبدیل فوریه گسسته در زمان را به عنوان حالت خاصی از خاصیت ضرب ثابت می‌کنیم. $x[n]$ را یک سیگنال گسسته در زمان دلخواه با تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ بگیرید و فرض کنید

$$g[n]=e^{j\omega_0 n}x[n]$$

(الف) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید و آن را رسم کنید.

$$p[n]=e^{j\omega_0 n}$$

(ب) خاصیت ضرب تبدیل فوریه می‌گوید که چون

$$g[n]=p[n]x[n]$$

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}X\left(e^{j\theta}\right)P\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

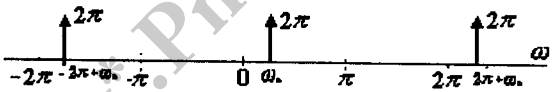
با محاسبه این انتگرال نشان دهید که

$$G\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

حل : (الف) با توجه به جدول (۵-۲) داریم :

$$P\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{p[n]\right\}=f\left\{e^{j\omega_0 n}\right\}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\omega_0-2k\pi\right)$$

تبدیل فوریه $P\left(e^{j\omega}\right)$ را در شکل زیر مشاهده می‌کنید :



(ب)

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\theta}\right)P\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega-\omega_0-\pi}^{\omega-\omega_0+\pi}X\left(e^{j\theta}\right)P\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{(\omega-\omega_0)^-}^{(\omega-\omega_0)^+}X\left(e^{j\theta}\right)\left[2\pi\delta\left(\omega-\omega_0-\theta\right)\right]d\theta=X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)\int_{(\omega-\omega_0)^-}^{(\omega-\omega_0)^+}\delta\left(\omega-\omega_0-\theta\right)d\theta$$

$$=X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

۵-۴۳ $x[n]$ را سیگنالی با تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ بگیرید وفرض کنید

$$g[n]=x[2n]$$

سیگنالی با تبدیل فوریه $G\left(e^{j\omega}\right)$ است. در این مسئله رابطه بین $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $G\left(e^{j\omega}\right)$ را بدست می‌آوریم.

(الف) فرض کنید

$$v[n]=\frac{\left(e^{-j\pi n}x[n]\right)+x[n]}{2}$$

تبدلی فوریه $V\left(e^{j\omega}\right)$ را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید.

(ب) با توجه به این که برای nهای فرد $v[n]=0$ نشان دهید که تبدیل فوریه $v[2n]$ برابر $V\left(e^{\frac{j\omega}{2}}\right)$ است.

(ج) نشان دهید

$$x[2n]=v[2n]$$

و نتیجه بگیرید که

$$G\left(e^{j\omega}\right)=V\left(e^{\frac{j\omega}{2}}\right)$$

حال با استفاده از نتیجه بند (الف) $G\left(e^{j\omega}\right)$ را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید.

حل : (الف) با استفاده از خواص خطی بودن و جابجای فرکانسی تبدیل فوریه داریم :

$$V\left(e^{j\omega}\right)=f\{v[n]\}=f\left\{\frac{\left(e^{-j\pi n}x[n]\right)+x[n]}{2}\right\}=\frac{1}{2}f\left\{e^{-j\pi n}x[n]\right\}+\frac{1}{2}f\{x[n]\}$$

$$=\frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\pi)}\right)+\frac{1}{2}X\left(e^{j\omega}\right)\quad,\quad(I)$$

(ب) با توجه به اینکه $v[2n+1]=0$، بدست می‌آوریم :

$$V\left(e^{j\omega}\right)=f\{v[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}v[n]e^{-j\omega n}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}v[2k+1]e^{-j\omega(2k+1)}+\sum_{l=-\infty}^{+\infty}v[2l]e^{-j\omega 2l}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}v[2n]e^{-j\omega 2n}\Rightarrow V\left(e^{\frac{j\omega}{2}}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}v[2n]e^{-j\left(\frac{\omega}{2}\right)2n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}v[2n]e^{-j\omega n}=f\{v[2n]\}\ ,(II)$$

(ج) به سادگی می‌توان دید :

$$v[2n]=\frac{\left(e^{-j\pi 2n}x[2n]\right)+x[2n]}{2}=\frac{1\times x[2n]+x[2n]}{2}=x[2n]$$

و با توجه به اینکه $g[n]=x[2n]$، نتیجه می‌دهد :

$$g[n]=v[2n]\Rightarrow G\left(e^{j\omega}\right)=f\{v[2n]\}\quad,\quad(III)$$

بالاخره با استفاده از روابط (I) و (II) در رابطه (III) خواهیم داشت :

$$G\left(e^{j\omega}\right)=V\left(e^{\frac{j\omega}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)+X\left(e^{\frac{j\omega}{2}}\right)\right\}$$

۵-۴۴ (الف) فرض کنید

$$x_1[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

و تبدیل فوریه آن را با $X_1\left(e^{j\omega}\right)$ نشان دهید. $x_1[n]$ و سیگنالهای دارای تبدیل فوریه زیر را رسم کنید :

$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=X_1\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega},\quad |\omega|<\pi \quad (i)$$

$$X_3\left(e^{j\omega}\right)=X_1\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\frac{3\omega}{2}},\quad |\omega|<\pi \quad (ii)$$

(ب) فرض کنید

$$w(t)=\cos\left(\frac{\pi t}{3T}\right)+\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$$

یک سیگنال پیوسته در زمان است. توجه کنید که $x_1[n]$ را می‌توان نمونه‌های متساوی‌الفاصله $w(t)$ به حساب آورد، یعنی

$$x_1[n]=w(nT)$$

نشان دهید که

$$x_2[n]=w(nT-\alpha)$$

و

$$x_3[n]=w(nT-\beta)$$

و مقادیر α و β را بیابید. با استفاده از این نتایج نشان دهید که $x_2[n]$ و $x_3[n]$ نیز نمونه‌های متساوی‌الفاصله $w(t)$ هستند.

حل : (الف- i)

$$x_2[n]=f^{-1}\left\{X_2\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{X_1\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega}\right\}$$

$$=x_1[n+1]=\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right)$$

(الف- ii) ابتدا داریم :

$$x_3[n]=f^{-1}\left\{X_3\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{X_1\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right\}=x_1\left[n-\frac{3}{2}\right]$$

البته می‌دانیم که نمونه $\left(m-\frac{3}{2}\right)$ ام سیگنال $x_1[n]$ مفهومی ندارد، با این وجود در اینجا تنها جنبه ریاضی مسئله موردنظر ما بوده و فرض می‌کنیم در حالت کلی $n\in R$ ؛ درنهایت n را به مجموعه اعداد صحیح محدود خواهیم کرد :

(ب) با فرض $n\in R$ سیگنال $x_1[n]$ دارای تناوب پایه‌ای همچون T خواهد بود، با توجه به اینکه سیگنالهای $\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ به ترتیب با تناوب‌های پایه $T_c=6$ و $T_s=4$ متناوب هستند، تناوب

پایه سیگنال $x_1[n]$ برابر 12 $T=T_c \cup T_s=12$ خواهد بود، بدینصورت می‌توان با تغییر متغیر $nT\to t$ و استفاده از نماد () به عوض []، سیگنال پیوسته در زمان متناظر با سیگنال گسستهٔ $x_1[n]$ را به صورت زیر نوشت:

$$x_1(t)=\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\Bigg|_{n=\frac{t}{T}}=\cos\left(\frac{\pi t}{3T}\right)+\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)=w(t)\Rightarrow x_1[n]=w(nT)$$

بدین ترتیب با توجه به نتیجه بند (الف-i) می‌توان نوشت:

$$x_2[n]=x_1[n+1]=w((n+1)T)=w(nT-\alpha)\ ,\ (I)\ \Rightarrow\ \alpha=-T=-12$$

همینطور از بند (الف-ii) داریم:

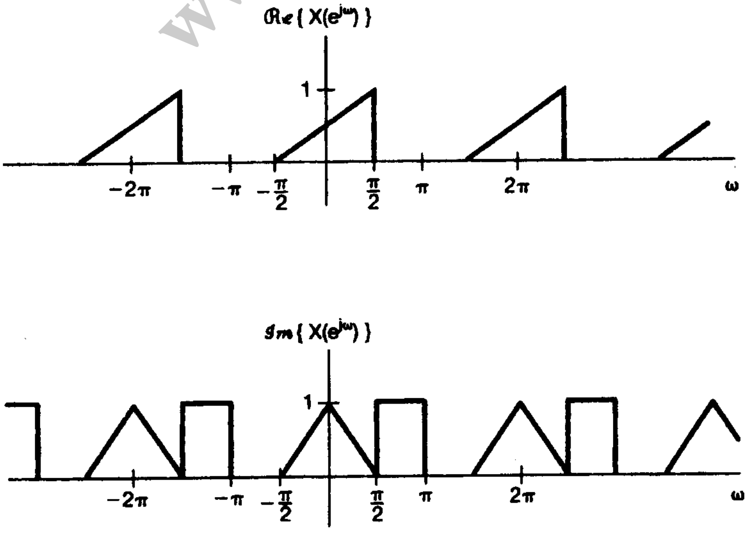
$$x_3[n]=x_1\left[n-\frac{3}{2}\right]=w\left(\left(n-\frac{3}{2}\right)T\right)=w(nT-\beta)\ ,\ (II)\ \Rightarrow\beta=\frac{3}{2}T=18$$

با توجه به نتایج (I) و (II) روشن می‌شود که $x_2[n]$ و $x_3[n]$ نیز همچون $x_1[n]$ دنباله‌هایی از نمونه‌های متساوی‌الفاصله از $w(t)$ هستند، تنها اختلاف میان این سه دنباله در فاز نمونه‌گیری اولیه است.

۵-۴۵ سیگنال $x[n]$ با تبدیل فوریه شکل م۵-۴۵ را در نظر بگیرید. سیگنالهای پیوسته در زمان زیر را رسم و مقدارگذاری کنید.

(الف) $x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\,e^{j\left(\frac{2\pi}{10}\right)nt}$ (ب) $x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[-n]\,e^{j\left(\frac{2\pi}{10}\right)nt}$

(ج) $x_3(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Od\{x[n]\}\,e^{j\left(\frac{2\pi}{8}\right)nt}$ (د) $x_4(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Re e\{x[n]\}\,e^{j\left(\frac{2\pi}{6}\right)nt}$



شکل م ۵-۴۵

حل : (الف) با توجه به رابطه تجزیه تبدیل فوریه داریم :

$$x_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{j\left(\frac{2\pi}{10}\right)nt}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\left(-\frac{2\pi t}{10}\right)n}=X\left(e^{-j\frac{2\pi t}{10}}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=-\frac{2\pi t}{10}}$$

منحنی $x_1(t)$را در شکل (a) مشاهده می‌کنید :

(ب) دوباره از رابطه تجزیه تبدیل فوریه می‌نویسیم :

$$x_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]\, e^{j\left(\frac{2\pi}{10}\right)nt}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}\right)nt}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi t}{10}\right)n}=X\left(e^{j\frac{2\pi t}{10}}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi t}{10}}$$

منحنی $x_2(t)$به روشنی همان سیگنال $x_1(t)$است که دچار وارونگی زمانی شده است، بدین دلیل $x_2(t)$را نمایش نداده‌ایم.

(ج)

$$x_3(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Od\{x[n]\}\, e^{j\left(\frac{2\pi}{8}\right)nt}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\{x[n]-x[-n]\}\, e^{j\left(\frac{2\pi}{8}\right)nt}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\left(-\frac{2\pi t}{8}\right)n}-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]\, e^{j\left(\frac{2\pi t}{8}\right)n}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{-j\frac{2\pi t}{8}}\right)-X\left(e^{j\frac{2\pi t}{8}}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{-j\omega}\right)-X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\Big|_{\omega=\frac{2\pi t}{8}}$$

این سیگنال نیز در شکل (b) نشان داده شده است.

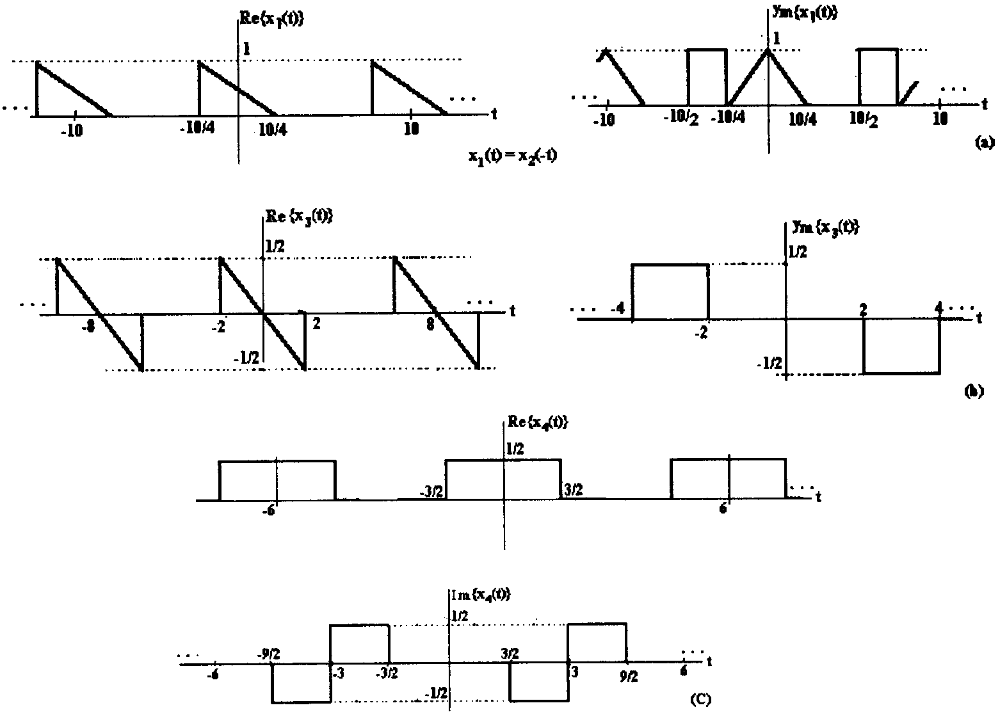
(د)

$$x_4(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Re\{x[n]\}\, e^{j\left(\frac{2\pi}{6}\right)nt}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\{x[n]+x^*[n]\}\, e^{j\left(\frac{2\pi}{6}\right)nt}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\left(\frac{-2\pi t}{6}\right)n}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]\, e^{-j\left(-\frac{2\pi t}{6}\right)n}=\frac{1}{2}X\left(e^{-j\frac{2\pi t}{6}}\right)+\frac{1}{2}X^*\left(e^{j\frac{2\pi t}{6}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{X\left(e^{-j\omega}\right)+X^*\left(e^{j\omega}\right)\right\}\Big|_{\omega=\frac{2\pi t}{6}}$$

سیگنال $x_4(t)$، در شکل (c) دیده می‌شود.



۵–۴۶ در مثال ۵–۱ دیدیم که به ازای $|\alpha|<1$

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

(الف) با استفاده از خواص تبدیل فوریه نشان دهید که

$$(n+1)\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^2}$$

(ب) با استفاده از استقراء نشان دهید که عکس تبدیل فوریه

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^r}$$

عبارت است از

$$x[n]=\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}\alpha^n u[n]$$

حل : (الف) از خاصیت مشتقگیری فرکانسی تبدیل فوریه داریم :

$$f\{\alpha^n u[n]\}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \Rightarrow f\left\{n\alpha^n u[n]\right\}$$

$$=j\frac{d}{d\omega}\left(f\left\{\alpha^n u[n]\right\}\right)=j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right]=\frac{\alpha e^{-j\omega}}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^2}$$

حال از خاصیت انتقال زمانی تبدیل فوریه می‌توان نوشت :

$$f\left\{(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1]\right\}=e^{j\omega}f\left\{n\alpha^n u[n]\right\}=\frac{\alpha}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^2}$$

از طرفی در $n=-1$ داریم : $(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1]=0$، بنابراین بطور خلاصه خواهیم داشت :

$$f\left\{(n+1)\,\alpha^n u[n]\right\}=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^2}$$

(ب) رابطه برای $r=1$ (و $r=2$) صادق است، حال نشان می‌دهیم که اگر رابطه برای $r=k-1$ صادق باشد، برای $r=k$ نیز صادق خواهد بود، داریم :

$$f\left\{\frac{(n+(k-1)-1)!}{n!((k-1)-1)!}\alpha^n u[n]\right\}=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^{k-1}}$$

با اعمال خاصیت مشتقگیری فرکانسی به عبارت فوق خواهیم داشت :

$$f\left\{n\frac{(n+k-2)!}{n!(k-2)!}\alpha^n u[n]\right\}=j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^{k-1}}\right]=\frac{\alpha(k-1)e^{-j\omega}}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^{k}}$$

$$\Rightarrow f\left\{\frac{(n+k-2)!\alpha^{n-1}}{(n-1)!(k-2)!(k-1)}u[n]\right\}=\frac{e^{-j\omega}}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^{k}}$$

اکنون از خاصیت انتقال زمانی تبدیل فوریه استفاده کرده و می‌نویسیم :

$$f\left\{\frac{((n+1)+k-2)!\alpha^{(n+1)-1}}{((n+1)-1)!(k-1)!}u[n+1]\right\}=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^{k}}$$

یا بطور ساده‌تر :

$$f\left\{\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}\alpha^n u[n+1]\right\}=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^{k}}$$

حال با توجه به اینکه برای $k>1$، صورت عبارت سمت چپ رابطه بالا حتماً شامل عامل $(n+1)$ می‌باشد، و در $n=-1$ این عامل صفر می‌شود، می‌توان نوشت :

$$f\left\{\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}\alpha^n u[n]\right\}=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^k}$$

که همان حکم مسئله است. بنابراین استقرار ثابت می‌شود.

۵-۴۷ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. برای جوابتان دلیل بیاورید. در هر گزاره $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x[n]$ است.

(الف) اگر $X\left(e^{j(\omega-1)}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$، آنگاه در $|n|>0$، $x[n]=0$.

(ب) اگر $X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$، آنگاه در $|n|>0$، $x[n]=0$.

(ج) اگر $X\left(e^{\frac{j\omega}{2}}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$، آنگاه در $|n|>0$، $x[n]=0$.

(د) اگر $X\left(e^{j2\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$، آنگاه در $|n|>0$، $x[n]=0$.

حل : (الف) با اعمال تبدیل عکس تبدیل فوریه می‌نویسیم :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega-1)}\right)\Rightarrow f^{-1}\Rightarrow x[n]=e^{jn}x[n]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^{jn}=1=e^{j2k\pi}\\ or\\ x[n]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=2k\pi\ ,\ k=0,\pm1,\ldots\\ or\\ x[n]=0\end{cases}$$

با توجه به اینکه n تنها مقادیر صحیح را می‌پذیرد، در $n\neq0$ باید داشته باشیم $x[n]=0$، فقط در $n=0$ (متناظر با $k=0$) است که $x[n]$ می‌تواند غیرصفر باشد، بنابراین :

$$|n|>0\ \Rightarrow x[n]=0$$

(ب) با اعمال تبدیل عکس تبدیل فوریه داریم :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)\Rightarrow f^{-1}\Rightarrow x[n]=e^{j\pi n}x[n]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^{jn\pi}=1=e^{j2k\pi}\\ or\\ x[n]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=2k\ \ ;\ k=0,\pm1,\ldots\\ or\\ x[n]=0\end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود که برای مقادیر زوج n، $x[n]$ می‌تواند صفر یا غیرصفر باشد، پس حکم داده شده در این بند کلی نیست.

(ج) با اعمال تبدیل عکس تبدیل فوریه و در نظر داشتن بندهای (الف) و (ب) مسئله (5-43) خواهیم

داشت :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)\Rightarrow f^{-1}\Rightarrow x[n]=\begin{cases}x[n]\ ;\ n=2k\\ 0\ \ ;\ n\neq 2k\end{cases}$$

بوضوح دیده می‌شود که فقط برای مقادیر فرد n داریم : $x[n]=0$، اما برای مقادیر زوج n، رابطه فوق هیچ محدودیتی را بر $x[n]$ اعمال نمی‌کند، بنابراین در حالت کلی گزاره داده شده درست نیست.

(د) با اعمال تبدیل عکس تبدیل فوریه و مراجعه به ویژگی انبساط زمانی جدول *(1-5)* می‌توان نوشت :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j2\omega}\right)\Rightarrow f^{-1}\Rightarrow x[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{2}\right]\ ;\ n=2k\\ 0\ \ ;\ n\neq 2k\end{cases}$$

با توجه به رابطه فوق دیده می‌شود که برای مقادیر فرد n مطمئناً داریم : $x[n]=0$، از طرفی از همین رابطه مشاهده می‌کنیم که هر نمونه فرد $x[n]$ با یک نمونه زوج متناظرش در $x[n]$ برابر است، بنابراین تمام نمونه‌های زوج $x[n]$ نیز صفر هستند. تنها برای $n=0$ بدست می‌آوریم : $x[0]=x[0]$ که هیچ محدودیتی را بر $n=0$ اعمال نمی‌کند؛ بطور کلی داریم :

$$|n|>0\Rightarrow x[n]=0$$

۵-۴۸ یک سیستم LTI گسسته در زمان علی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ داده شده است. این سیستم با دو معادله تفاضلی برحسب سیگنال واسطه $w[n]$ مشخص شده است.

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]+w[n]+\frac{1}{2}w[n-1]=\frac{2}{3}x[n]$$

$$y[n]-\frac{5}{4}y[n-1]+2w[n]-2w[n-1]=-\frac{5}{3}x[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه این سیستم را بدست آورید.

(ب) یک معادله تفاضلی پیدا کنید که $x[n]$ و $y[n]$ این سیستم رابه هم ربط دهد.

حل : (الف) از معادلات تفاضلی داده شده می‌نویسیم :

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]+w[n]+\frac{1}{2}w[n-1]=\frac{2}{3}x[n]$$

$$\Rightarrow f\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{4}e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)+W\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\omega}W\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2}{3}X\left(e^{j\omega}\right)\quad ,(I)$$

همینطور :

$$y[n]-\frac{5}{4}y[n-1]+2w[n]-2w[n-1]=-\frac{5}{3}x[n]$$

$$\Rightarrow f\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)-\frac{5}{4}e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)+2W\left(e^{j\omega}\right)-2e^{-j\omega}W\left(e^{j\omega}\right)=-\frac{5}{3}X\left(e^{j\omega}\right)\quad ,(II)$$

حال با حل همزمان معادلات *(I)* و *(II)* و حذف $W\left(e^{j\omega}\right)$ میان آنها بدست می‌آوریم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}=\frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

برای بدست آوردن پاسخ ضربه سیستم نیز کافیست از $H\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل عکس تبدیل فوریه گرفته شود:

$$h[n]=f^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\}=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

(ب) دوباره از پاسخ فرکانسی سیستم می‌نویسیم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)\left[1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right]$$

$$=X\left(e^{j\omega}\right)\cdot\left[3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right]\Rightarrow f^{-1}\Rightarrow y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=3x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

معادله فوق همان معادله تفاضلی سیستم است.

۵-۴۹ (الف) $y[n]$ پاسخ یک سیستم گسسته در زمان خاص به ورودی $x[n]$ است. تبدیل فوریه این سیگنالها به صورت زیر به هم مرتبطاند

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=2X\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)-\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

(i) آیا سیستم خطی است؟ استدلالی روشن برای جوابتان بیاورید.

(ii) آیا سیستم تغییرناپذیربازمان است؟ استدلال کنید.

(iii) به ازای $x[n]=\delta[n]$، $y[n]$ را بیابید.

(ب) سیستم گسسته در زمانی را در نظر بگیرید که تبدیل خروجی $Y\left(e^{j\omega}\right)$ آن و تبدیل فوریه ورودی‌اش به صورت زیر به هم مرتبط باشد.

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\int_{\omega-\frac{\pi}{4}}^{\omega+\frac{\pi}{4}}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

$y[n]$ را برحسب $x[n]$ پیدا کنید.

حل : (الف-i) برای دو زوج ورودی-خروجی مختلف می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} Y_1\left(e^{j\omega}\right)=2X_1\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}X_1\left(e^{j\omega}\right)-\dfrac{dX_1\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} \\ Y_2\left(e^{j\omega}\right)=2X_2\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}X_2\left(e^{j\omega}\right)-\dfrac{dX_2\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} aY_1\left(e^{j\omega}\right)=2aX_1\left(e^{j\omega}\right)+ae^{-j\omega}X_1\left(e^{j\omega}\right)-a\dfrac{dX_1\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} \\ bY_2\left(e^{j\omega}\right)=2bX_2\left(e^{j\omega}\right)+be^{-j\omega}X_2\left(e^{j\omega}\right)-b\dfrac{dX_2\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} \end{cases}$$

با جمع دو معادله اخیر خواهیم داشت :

$$\left[aY_1\left(e^{j\omega}\right)+bY_2\left(e^{j\omega}\right)\right]=2\left[aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

$$+e^{-j\omega}\left[aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)\right]-\frac{d}{d\omega}\left[aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

از معادله اخیر بخوبی دیده می‌شود که خروجی سیستم به ازای ورودی $ax_1[n]+bx_2[n]$ برابر $ay_1[n]+by_2[n]$ بوده و بنابراین وجود خاصیت خطی برای سیستم اثبات می‌شود.

(الف-ii) سیستم تغییرناپذیربازمان نمی‌باشد، مثلاً برای ورودی $x_2[n]=x_1[n-1]$ داریم :

$$Y_2\left(e^{j\omega}\right)=2X_2\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}X_2\left(e^{j\omega}\right)-\frac{dX_2\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

$$=2e^{-j\omega}X_1\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j2\omega}X_1\left(e^{j\omega}\right)-\frac{d}{d\omega}\left[e^{-j\omega}X_1\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

$$=e^{-j\omega}\left\{2X_1\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}X_1\left(e^{j\omega}\right)-\frac{dX_1\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}+jX_1\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$\neq e^{-j\omega}\left\{2X_1\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}X_1\left(e^{j\omega}\right)-\frac{dX_1\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\right\}\left(=e^{-j\omega}Y_1\left(e^{j\omega}\right)\right)\Rightarrow y_2[n]\neq y_1[n-1]$$

دیده می‌شود که با انتقال زمانی ورودی، خروجی تغییر شکل داده است.

(الف–iii) به ازای $x[n]=\delta[n]$ داریم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=2X\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)-\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}=2+e^{-j\omega}-\frac{d}{d\omega}(1)=2+e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow y[n]=f^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{2+e^{-j\omega}\right\}=2\delta[n]+\delta[n-1]$$

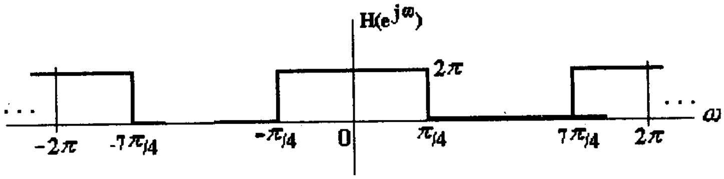
(ب) ابتدا داریم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\int_{\omega-\frac{\pi}{4}}^{\omega+\frac{\pi}{4}}X\left(e^{j\eta}\right)d\eta$$

حال با تغییر متغیر $\eta=\omega-\theta$ می‌نویسیم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}X\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\theta}\right)X\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta \qquad , \quad (I)$$

که در آن $H\left(e^{j\omega}\right)$ پاسخ فرکانسی سیستم و به شکل زیر می‌باشد:



حال با مقایسه رابطه (I) با ویژگی ضرب تبدیل فوریه می‌توان نوشت:

$$y[n]=x[n]\,h[n]=x[n]f^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=x[n]f^{-1}\left\{2\pi\begin{cases}1 & ;\ |\omega|\le\frac{\pi}{4}\\ 0 & ;\ \frac{\pi}{4}<|\omega|<\pi\end{cases}\right\}$$

$$=x[n]\left[2\pi\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}\right]=2\,x[n]\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{n}$$

۵–۵۰ (الف) می‌خواهیم یک سیستم LTI گسسته در زمان طرح کنیم که به ازای ورودی زیر

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

خروجی زیر را ایجاد کند

$$y[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(i) پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی سیستم LTI دارای مشخصات بالا را پیدا کنید.

(ii) معادله تفاضلی ارتباط‌دهنده $y[n]$ و $x[n]$ این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ یک سیستم به ورودی $(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ عبارت است از $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. اگر خروجی $\delta[n]-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ باشد، ورودی چیست؟

حل : (الف-i) ابتدا تبدیل فوریه سیگنال ورودی را می‌یابیم :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{x[n]\right\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{\left(\frac{1}{4}\right)e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

همینطور برای تبدیل فوریه دنباله خروجی داریم :

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{y[n]\right\}=f\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

اکنون می‌توانیم پاسخ فرکانسی این سیستم را بدست آوریم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right]}{\left[\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

پاسخ ضربه نیز چنین خواهد بود :

$$h[n]=f^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right\}=3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(الف-ii) دوباره از پاسخ فرکانسی این سیستم داریم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\Rightarrow Y\left(e^{j\omega}\right)\left[1-\frac{7}{12}e^{-j\omega}+\frac{1}{12}e^{-j2\omega}\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow f^{-1}\Rightarrow y[n]-\frac{7}{12}y[n-1]+\frac{1}{12}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

(ب) ابتدا پاسخ فرکانسی این سیستم را بدست می‌آوریم :

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\left\{(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}=f\left\{n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}$$

$$=j\frac{d}{d\omega}f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}+2f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}=j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]+\frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}=\frac{2\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=f\{y[n]\}=f\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}{2\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}$$

اکنون می‌توان ورودی مرتبط با خروجی $y[n]=\delta[n]-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ را محاسبه نمود :

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{H\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{f\{y[n]\}}{H\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$=\frac{f\left\{\delta[n]-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}}{H\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\left[1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]}{H\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{e^{-j\omega}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$$

$$=e^{-j\omega}\left[\frac{\frac{3}{8}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{1}{8}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{2}}\right]\Rightarrow x[n]=f^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]+\frac{1}{8}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

۵-۵۱ (الف) یک سیستم گسسته در زمان با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

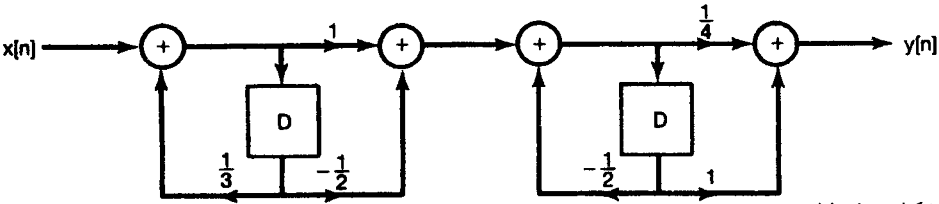
یک معادله تفاضلی خطی باضرایب ثابت بیابیدکه رابطه ورودی وخروجی این سیستم راتوصیف‌کند

(ب) شکل م۵-۵۱ نمودار جعبه‌ای یک سیستم LTI علی را نشان می‌دهد.

(i) معادله تفاضلی بیان کننده رابطه ورودی و خروجی این سیستم را بیابید.

(ii) پاسخ فرکانسی این سیستم را بیابید.

(iii) پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید.



شکل م ۵-۵۱

حل : (الف) برای پاسخ فرکانسی این سیستم می‌نویسیم :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=f\{h[n]\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

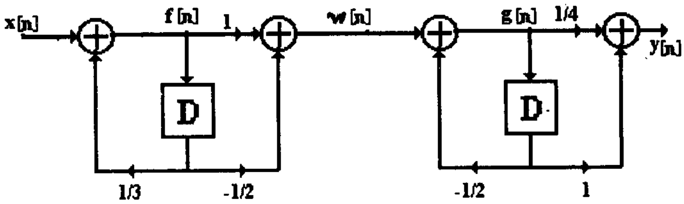
$$=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow\left[1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right]Y\left(e^{j\omega}\right)=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

حال با اعمال تبدیل عکس تبدیل فوریه به عبارت فوق ، معادله تفاضلی سیستم را بدست می آوریم :

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=\frac{3}{8}x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

(ب) نمودار جعبه‌ای این سیستم را دوباره در شکل زیر می‌بینید :



با توجه به این سیستم داریم :

$$\begin{cases} f[n]=x[n]+\frac{1}{3}f[n-1] \\ w[n]=f[n]-\frac{1}{2}f[n-1] \end{cases} \Rightarrow w[n]-\frac{1}{3}w[n-1]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1] \quad , \quad (I)$$

همینطور :

$$\begin{cases} g[n]=w[n]-\frac{1}{2}g[n-1] \\ y[n]=\frac{1}{4}g[n]+g[n-1] \end{cases} \Rightarrow y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=\frac{1}{4}w[n]+w[n-1] \quad , \quad (II)$$

حال از روابط (I) و (II) تبدیل فوریه گرفته و می‌نویسیم :

$$\begin{cases} W\left(e^{j\omega}\right)-\frac{1}{3}e^{-j\omega}W\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)-\frac{1}{2}e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right) \\ Y\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{2}e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{4}W\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}W\left(e^{j\omega}\right) \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق برای $Y\left(e^{j\omega}\right)$,$X\left(e^{j\omega}\right)$ ، خواهیم داشت :

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{4}+e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \left[1+\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}\right]Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{4}+\frac{7}{8}e^{-j\omega}-\frac{1}{2}e^{-j2\omega}\right]X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1} \Rightarrow y[n]+\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=\frac{1}{4}x[n]+\frac{7}{8}x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2]$$

$(ii$–ب) پاسخ فرکانسی سیستم را در بند (i) بدست آورده‌ایم.

$(iii$–ب)

$$h[n]=f^{-1}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=f^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{4}+e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}\right\}$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\left\{3-\frac{\frac{13}{20}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}-\frac{\frac{21}{10}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}=3\delta[n]-\frac{13}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]-\frac{21}{10}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

۵-۵۲ (الف) $h[n]$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI حقیقی، علی و گسسته در زمان است. نشان دهید که بخش حقیقی پاسخ فرکانسی برای مشخص کردن کامل این سیستم کافی است. (راهنمایی: نشان دهید چگونه می‌توان $h[n]$ را از $Ev\{h[n]\}$ بدست آورد.) تبدیل فوریه $Ev\{h[n]\}$ چیست؟ این همتای گسسته در زمان خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی است که در مسئله ۴-۴۷ بـرای سیستمهای پیوسته در زمان بیان شد.

(ب) $h[n]$ را حقیقی و علی فرض کنید. اگر

$$\Re e\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=1+\alpha\cos 2\omega \quad (\text{حقیقی } \alpha)$$

$h[n]$ و $H\left(e^{j\omega}\right)$ را بدست آورید.

(ج) نشان دهید که $h[n]$ را می‌توان به طور کامل از $Im\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$ و $h[0]$ بدست آورد.

(د) دو سیستم LTI حقیقی و علی پیدا کنید که قسمت موهومی پاسخ فرکانسی آنها $\sin\omega$ باشد.

حل: (الف) ابتدا نشان می‌دهیم که با معلوم بودن $Ev\left\{h[n]\right\}$ می‌توان h[n] را دقیقاً مشخص نمود، با توجه به اینکه h[n] پاسخ ضربه یک سیستم علی است می‌توان نوشت: h[n]=h[n]u[n]، در اینصورت داریم:

$$Ev\left\{h[n]\right\}=\frac{1}{2}\{h[n]+h[-n]\}=\frac{1}{2}\{h[n]u[n]+h[-n]u[-n]\}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}h[n] & ; n>0\\ h[n] & ; n=0\\ \frac{1}{2}h[-n] & ; n<0\end{cases}\Rightarrow h[n]=\begin{cases}2Ev\{h[n]\} & ; n>0\\ Ev\{h[n]\} & ; n=0\\ 0 & ; n<0\end{cases}\qquad ,\ (I)$$

از رابطه (I) دیده می‌شود که با دانستن بخش زوج سیگنال $h[n]$، خود $h[n]$ معلوم می‌شود. از طرفی می‌دانیم بخش زوج سیگنال‌های حقیقی متناظر با بخش حقیقی تبدیل فوریه این سیگنال‌هاست. بدین ترتیب می‌توان با معلوم بودن بخش حقیق تبدیل فوریه h[n]، بخش زوج h[n] را بدست آورده و h[n] را از رابطه (I) بازسازی نمود. از آنجا که پاسخ ضربه یک سیستم LTI رفتار آن را کاملاً مشخص می‌کند، نتیجه می‌گیریم که بخش حقیق پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI حقیقی و علی برای مشخص کردن این سیستم کافی است.

(ب) با توجه به اینکه سیستم علی و حقیقی فرض شده است، داریم:

$$Ev\{h[n]\}=f^{-1}\left\{Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\right\}=f^{-1}\{1+\alpha\cos 2\omega\}$$

$$=f^{-1}\left\{1+\frac{\alpha}{2}e^{j2\omega}+\frac{\alpha}{2}e^{-j2\omega}\right\}=\delta[n]+\frac{\alpha}{2}\delta[n+2]+\frac{\alpha}{2}\delta[n-2]$$

حال با توجه به رابطه (I) می‌نویسیم :

$$h[n]=\begin{cases}2Ev\{h[n]\} & ; n>0\\ Ev\{h[n]\} & ; n=0\\ 0 & ; n<0\end{cases}=\begin{cases}\alpha\delta[n-2] & ; n<0\\ \delta[n] & ; n=0\\ 0 & ; n<0\end{cases}=\delta[n]+\alpha[n-2]$$

$$\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right)=f\{h[n]\}=f\left\{\delta[n]+\alpha\delta[n-2]\right\}=1+\alpha e^{-j2\omega}$$

(ج) ابتدا نشان می‌دهیم که با معلوم بودن $Od\{h[n]\}$ و h[0] می‌توان h[n] را دقیقاً مشخص نمود، برای این سیستم حقیقی و علی داریم :

$$Od\{h[n]\}=\frac{1}{2}\{h[n]-h[-n]\}=\frac{1}{2}\{h[n]u[n]-h[-n]u[-n]\}=\begin{cases}\frac{1}{2}h[n] & ; n>0\\ 0 & ; n=0\\ -\frac{1}{2}h[-n] & ; n<0\end{cases}$$

در اینصورت با توجه به معلوم بودن h[0] می‌توان نوشت :

$$\rightarrow\begin{cases}2Od\{h[n]\} & ; n>0\\ h[0] & ; n=0\\ 0 & ; n<0\end{cases}\quad ,(II)$$

از رابطه (II) دیده مشود که با دانستن بخش فرد سیگنال h[n] بعلاوه مقدار h[0]، خود h[n] معلوم می‌شود. از طرفی می‌دانیم بخش فرد سیگنال‌های حقیقی متناظر است با بخش موهومی تبدیل فوریه این سیگنال‌ها. بدین ترتیب می‌توان با معلوم بودن بخش موهومی تبدیل فوریه h[n]، بخش فرد h[n] را بدست آورده و h[n] را از رابطه (II) بازسازی نمود. بنابراین بخش موهومی پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI حقیقی و علی به همراه مقدار h[0]، برای مشخص کردن این سیستم کافی هستند.

(د) با توجه به اینکه سیستم، علی و حقیقی فرض شده است، داریم :

$$Od\{h[n]\}=f^{-1}\left\{jIm\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}\right\}=f^{-1}\{j\sin\omega\}$$

$$=f^{-1}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right\}=\frac{1}{2}\delta[n+1]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

حال با توجه به رابطه (II) می‌نویسیم :

$$h[n]=\begin{cases}2Od\{h[n]\} & ; n>0\\ h[0] & ; n=0\\ 0 & ; n<0\end{cases}=\begin{cases}-\delta[n-1] & ; n>0\\ h[0] & ; n=0\\ 0 & ; n<0\end{cases}=h[0]\,\delta[n]-\delta[n-1]$$

آشکار است که با هر انتخاب جدید برای h[0] به h[n] متفاوتی خواهیم رسید، بعنوان دو نمونه :

$$h[0]=1 \Rightarrow h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$
$$h[0]=2 \Rightarrow h[n]=2\delta[n]-\delta[n-1]$$

۵-۵۳ یکی از دلایل رشد عظیم کاربرد روشهای گسسته در زمان برای تحلیل و طراحی سیگنالها و سیستمها پیشرفت ابزارهای کارآمد محاسبات تحلیل فوریه سیگنالهای گسسته در زمان بوده است. قلب این روشها را روشی مرتبط با تبدیل فوریه گسسته در زمان تشکیل می‌دهد که برای پیاده‌سازی روی کامپیوترهای دیجیتال و سخت‌افزارهای دیجیتال بسیار مناسب است. این روش تبدیل فوریه گسسته DFT سیگنالهای دارای عمر محدود می‌باشد.

$x[n]$ را سیگنالی با عمر محدود فرض کنید، یعنی یک عدد صحیح N_1 وجود دارد، به نحوی که

در خارج فاصله $0\le n\le N_1-1$ ، $x[n]=0$

$X\left(e^{j\omega}\right)$ را تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ فرض کنید. می‌توانیم سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ را به نحوی بسازیم که در یک تناوب با $x[n]$ برابر باشد. دقیقتر این که به ازای عدد صحیح N بزرگتر یامساوی N_1، می‌توان $\tilde{x}[n]$ را با دوره تناوب N به نحوی ساخت که

$\tilde{x}[n]=x[n]$ ، $0\le n\le N_1-1$

ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ عبارتند از

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\tilde{x}[n]\,e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

فاصله جمع‌بندی را فاصله‌ای در نظر می‌گیریم که در آن $\tilde{x}[n]=x[n]$. پس

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad (\text{م۵-۵۳-۱})$$

ضرایب تعریف شده با معادله (م۵-۵۳-۱) DFT سیگنال $x[n]$ را تشکیل می‌دهند. معمولاً DFT سیگنال $x[n]$ را با $\tilde{X}[k]$ نشان می‌دهند و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنند

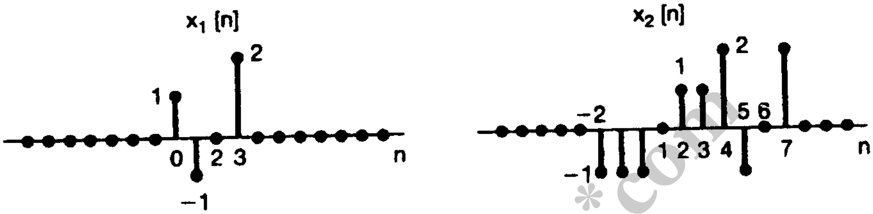
$$\tilde{X}[k]=a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}\ ,\quad k=0,1,\ldots,N-1 \qquad (\text{م۵-۵۳-۲})$$

اهمیت DFT از چندجا ریشه می‌گیرد. اول این که سیگنال دارای عمر محدود اصلی را می‌توان از

DFT بازسازی کرد. در واقع داریم

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\,e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad , \; n=0,1,\ldots,N-1 \qquad (\text{م}۵-۵۳-۳)$$

پس سیگنال دارای عمر محدود را می‌توان هم با مقادیر غیرصفر آن مشخص کرد و هم با مقادیر $\tilde{X}[k]$ آن. اهمیت دیگر DFT در این است که الگوریتم بسیار سریعی موسوم به تبدیل فوریه سریع FFT برای محاسبه آن وجود دارد (این روش بسیار مهم در مسئله ۵-۵۴ معرفی شده است). همچنین به خاطر رابطه نزدیکی که بین سری فوریه گسسته در زمان و تبدیل فوریه وجود دارد، DFT برخی خواص مهم آن را داراست.



شکل م ۵-۵۳

(الف) فرض کنید $N\geq N_1$. نشان دهید

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}X\left(e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}\right)$$

که در آن $\tilde{X}[k]$، DFT سیگنال $x[n]$ است. یعنی DFT نمونه‌های $X\left(e^{j\omega}\right)$، با فاصله‌های $\frac{2\pi}{N}$ است. معادله (م۵-۵۳-۳) ما را به این نتیجه رهنمون می‌شود که $x[n]$ را می‌توان به طور یکتا از نمونه‌های $X\left(e^{j\omega}\right)$ بازیافت.

(ب) نمونه‌های $X\left(e^{j\omega}\right)$ به فاصله $\frac{2\pi}{M}$ با $M<N_1$ را در نظر بگیرید. این نمونه‌ها بیش از یک رشته به طول N_1 را تعیین می‌کند. برای نشان دادن این مطلب دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ شکل م۵-۵۳ را در نظر بگیرید. نشان دهید که به ازای $M=4$ داریم

$$X_1\left(e^{j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)}\right)=X_2\left(e^{j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)}\right)$$

حل: (الف) پاسخ این بند در قسمت (الف) مسئله (5-41) به تشریح آمده است و تنها کافیست داشته باشیم : $n_0=0$

(ب)

$$X_1\left(e^{j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[n]\,e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)n}=1-e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)\times 1}+2e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)\times 3}=1-e^{-j\frac{k\pi}{2}}+2e^{-j\frac{3k\pi}{2}}$$

$$X_2\left(e^{j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2[n]\,e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)n}=-e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)\times(-2)}-e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)\times(-1)}$$

$$-e^{-j\left(\frac{2k\pi}{4}\right)\times 0}+e^{-j\left(\frac{2k\pi}{4}\right)\times 2}+e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)\times 3}+2e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)\times 4}-e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)\times 5}+2e^{-j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)\times 7}=\ldots$$

$$=1-e^{-j\frac{k\pi}{2}}+2e^{-j\frac{3k\pi}{2}}=X_1\left(e^{j\left(\frac{2\pi k}{4}\right)}\right)$$

۵-۵۴ همان طور که در مسئله ۵-۵۳ گفتیم مسائل بسیاری با اهمیت عملی وجود دارد که مستلزم محاسبه تبدیل فوریه گسسته (DFT) سیگنالهای گسسته در زمان است. این سیگنالها غالباً عمر طولانی دارند و در این موارد باید روشهای محاسباتی کارآمدی به کار برد. یکی از دلایل رشد قابل توجه به کار بردن تکنیکهای کامپیوتری در تحلیل سیگنالها، پی‌ریزی روش محاسباتی سریعی موسوم به الگوریتم تبدیل فوریه سریع FFT است. با این روش می‌توان DFT سیگنالهای دارای عمر محدود را پیدا کرد. در این مسئله اصول الگوریتم FFT را بررسی می‌کنیم.

$x[n]$ را سیگنالی فرض کنید که در خارج از فاصله $0\leq n\leq N_1-1$ صفرست. به ازای $N\geq N_1$، DFT N-نقطه‌ای $x[n]$ عبارت است از

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\,e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}\quad,\quad k=0,1,\ldots,N-1\qquad\text{(م۵-۵۴-۱)}$$

بهترست معادله (م۵-۵۴-۱) را به صورت زیر بنویسیم

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}\qquad\text{(م۵-۵۴-۲)}$$

که در آن

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

(الف) یک روش محاسبه $\tilde{X}[k]$، محاسبه مستقیم معادله (م۵-۵۴-۲) است. تعداد ضربهای مختلط لازم برای محاسبه (م۵-۵۴-۲)، معیار خوبی از پیچیدگی محاسبه است. نشان دهید که تعداد ضربهای لازم برای محاسبه مستقیم معادله (م۵-۵۴-۲) به ازای $k=0,1,\ldots,N-1$ برابر N^2 است. فرض کنید $x[n]$ مختلط است و W_N^{nk} قبلاً محاسبه و در جدولی ذخیره شده است. برای آسانی، از اینکه به ازای مقادیر خاصی از n و k، W_N^{nk} برابر ± 1 یا $\pm j$ است و در حقیقت ضرب مختلط کامل

لازم نیست، چشم بپوشید.

(ب) N را زوج بگیرید. فرض کنید $f[n]=x[2n]$ نمونه‌های شماره زوج $x[n]$ و $g[n]=x[2n+1]$ نمونه‌های شماره فرد $x[n]$ است.

(i) نشان دهید که $g[n]$ و $f[n]$ خارج از فاصله $0\leq n\leq \left(\frac{N}{2}\right)-1$ برابر صفرند.

(ii) نشان دهید که N DFT-نقطه‌ای $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} f[n]W_{\frac{N}{2}}^{nk}+\frac{1}{N}W_N^k\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} g[n]W_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

$$=\frac{1}{2}\tilde{F}[k]+\frac{1}{2}W_N^k\tilde{G}[k]\ ,\ \ k=0,1,\dots,N-1 \qquad (\text{م}۵-۵۴-۳)$$

که در آن

$$\tilde{F}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} f[n]W_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

$$\tilde{G}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} g[n]W_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

(iii) نشان دهید که برای تمام مقادیر k داریم

$$\tilde{F}\left[k+\frac{N}{2}\right]=\tilde{F}[k]$$

$$\tilde{G}\left[k+\frac{N}{2}\right]=\tilde{G}[k]$$

دقت کنید که $\tilde{F}[k]$ با $k=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$ و $\tilde{G}[k]$ با $k=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$ به ترتیب $\frac{N}{2}$ DFT-نقطه‌ای $f[n]$ و $g[n]$ هستند. بنابراین معادله (م۵-۵۴-۳) نشان می‌دهد که N DFT-نقطه‌ای $x[n]$ را می‌توان برحسب دو $\frac{N}{2}$ DFT-نقطه‌ای بدست آورد.

(iv) تعداد ضربهای مختلط لازم برای محاسبه $\tilde{X}[k]$ با $k=0,1,\dots,N-1$، از معادله (م۵-۵۴-۳) چقدرست؟[از فرضهای بند (الف) استفاده کنید و ضرب در $\frac{1}{2}$ را در معادله (م۵-۵۴-۳) حساب نکنید].

(ج) اگر $\frac{N}{2}$ هم زوج باشد، می‌توان $f[n]$ و $g[n]$ را باز هم به نمونه‌های شماره زوج و فرد تجزیه کرد و DFT آنها را به روشی شبیه معادله (م۵-۵۴-۳) محاسبه کرد. به علاوه اگر N توان صحیحی از ۲ باشد، می‌توان با ادامه این فرایند، وقت زیادی در محاسبات صرفه‌جویی کرد. در این صورت به ازای $N=32,256,1024,4096$ تقریباً چند ضرب مختلط لازم است؟ نتیجه را با روش مستقیم بند (الف)

مقایسه کنید.

حل : (الف) باتوجه به رابطه :

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}$$

می‌بینیم که برای محاسبه تنها یک عنصر دنباله $\tilde{X}[k]$ به N عمل ضرب مختلط $\left(x[n].W_N^{nk};n=0,\ldots,N-1\right)$ نیاز داریم، از طرفی $\tilde{X}[k]$ (که متناوب با تناوب پایه N است) وقتی کاملاً مشخص می‌شود که N عنصر متوالی آن محاسبه شوند، بنابراین برای محاسبه $\tilde{X}[k]$ باید N^2 عمل ضرب مختلط صورت پذیرد.

(ب-i) از آنجا که $x[n]$ در خارج فاصله $0\le n\le N-1$ صفر است، $f[n]=x[2n]$ نیز در خارج فاصله $0\le 2n\le N-1$ صفر خواهد بود، با توجه به اینکه N زوج است نتیجه می‌گیریم که $f[n]$ حتماً در خارج فاصله $0\le n\le \left(\frac{N}{2}\right)-1$ صفر است. همینطور ثابت می‌شود که $g[n]$ در خارج فاصله $0\le 2n+1\le N-1$ (یعنی : $0\le n\le \left(\frac{N}{2}\right)-1$) صفر می‌باشد.

(ب-ii) با تفکیک دنباله $x[n]$ به نمونه‌های زوج و فرد آن و توجه به نتیجه (بند ب-i) می‌توان نوشت :

$$\tilde{X}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}=\frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1}x[2n]W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1}x[2n+1]W_N^{(2n+1)k}\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1}f[n]W_N^{2nk}+\frac{1}{N}W_N^{k}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1}g[n]W_N^{2nk}\qquad,\ (I)$$

از طرفی با توجه به زوج بودن N داریم :

$$W_N^{2nk}=\left(W_N\right)^{2nk}=\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{2nk}=\left(e^{-j\frac{2\pi}{\left(\frac{N}{2}\right)}}\right)^{nk}=\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{nk}=W_{\frac{N}{2}}^{nk}\qquad,\ (II)$$

حال با جایگذاری (II) در (I) خواهیم داشت :

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1}f[n]W_{\frac{N}{2}}^{nk}+\frac{1}{N}W_N^{k}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1}g[n]W_{\frac{N}{2}}^{nk}=\frac{1}{2}\tilde{F}[k]+\frac{1}{2}W_N^{k}\tilde{G}[k]\ ,\ k=0,1,\ldots,N-1$$

که در آن :

$$\tilde{F}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1}f[n]W_{\frac{N}{2}}^{nk}\qquad\qquad \tilde{G}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1}g[n]W_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

(ب-iii) برای $\tilde{F}[k]$ داریم :

$$\tilde{F}\left[k+\frac{N}{2}\right]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} g[n]W_{\frac{N}{2}}^{n\left(k+\frac{N}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} g[n]\left(W_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\right)^{n}W_{\frac{N}{2}}^{nk}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} g[n]W_{\frac{N}{2}}^{nk}=\tilde{F}[k]$$

دقیقاً به همان ترتیب بالا ثابت می‌شود که :

$$\tilde{G}\left[k+\frac{N}{2}\right]=\tilde{G}[k]$$

(ب-iv) برای محاسبه هر نمونه از $\tilde{G}[k]$ یا $\tilde{F}[k]$ به $\frac{N}{2}$ عمل ضرب مختلط احتیاج داریم، از طرفی با توجه به بند (ب-iii) در هر تناوب $\tilde{F}[k], \tilde{G}[k]$، $\frac{N}{2}$ نمونه داریم، در اینصورت برای محاسبه $\tilde{G}[k]$ و یا $\tilde{F}[k]$ به $\left(\frac{N}{2}\right)\times\left(\frac{N}{2}\right)=\frac{N^2}{4}$ عمل ضرب مختلط نیاز داریم. همچنین درمحاسبه هر نمونه از $\tilde{X}[k]$ یک عمل ضرب $\tilde{G}[k]$. W_N^k داریم ، بدین ترتیب برای محاسبه کل $\tilde{X}[k]$ باید $\frac{N^2}{4}+\frac{N^2}{4}+N=\frac{N^2}{2}+N$ عمل ضرب مختلط صورت پذیرد.

(ج) ابتدا با استقرای ریاضی نشان می‌دهیم که تعداد ضرب‌های روش FET را در صورتی که طول دنباله $x[n]$ توان صحیحی از 2 باشد $\left(N_m=2^m\right)$ می‌توان از رابطهٔ

$$P(m)=N_m\log_2 N_m=2^m\log_2\left(2^m\right)=m2^m$$

محاسبه نمود، رابطه فوق آشکارا برای $m=0$ (یا $N_m=1$) برقرار می‌باشد، حال فرض کنیم رابطه برای $m=k-1$ برقرار باشد، ثابت می‌کنیم که برای $m=k$ نیز صادق است، داریم :

$$P(k)=k2^k=2(k-1)2^{k-1}+2^k=2P(k-1)+2^k \Rightarrow P(k)=2P(k-1)+N_k$$

که این همان نتیجه‌ای است که در بند (ب-iv) ملاحظه نمودیم. بنابراین استقرا ثابت است.

تعداد ضرب‌های مختلط روش‌های FFT و DFT در جدول زیر با یکدیگر مقایسه شده‌اند :

N_m	تعداد ضرب‌های مختلط در روش FFT	تعداد ضرب‌های مختلط در روش DFT
$2^5=32$	$32\log_2 32=160$	$32^4=1024$
$2^8=256$	$256\log_2 256=2048$	$256^2=65536$
$2^{10}=1024$	$1024\log_2 1024=10240$	$1024^2=1048576$
$2^{12}=4096$	$4096\log_2 4096=49152$	$4096^2=16777216$

با توجه به این جدول به خوبی می‌توان برتری روش FFT را بر روش DFT در کاستن از تعداد ضرب‌های مختلط (و در نتیجه کاهش زمان محاسبات) مشاهده نمود.

۵-۵۵ در این مسئله مفهوم قاب کردن را که هم در طراحی سیستمهای LTI و هم در تحلیل طیفی سیگنالها اهمیت بسزایی دارد معرفی می‌کنیم : منظور از قاب کردن، ضرب سیگنال $x[n]$ در سیگنال دارای عمر محدود $w[n]$، موسوم به سیگنال قاب است. یعنی

$$p[n]=x[n]w[n]$$

دقت کنید که $p[n]$ هم عمر محدود دارد.

اهمیت قاب کردن در تحلیل طیفی از اینجا ریشه می‌گیرد که در کاربردهای بسیاری لازم است که تبدیل فوریه یک سیگنال اندازه‌گیری شده حساب شود. چون در عمل تنها می‌توان سیگنال $x[n]$ را در یک فاصله محدود (پنجره زمانی) اندازه‌گرفت، سیگنال قابل دسترس برای تحلیل فوریه عبارت است از

$$p[n]=\begin{cases}x[n] & ; \quad -M\le n\le M\\ 0 & ; \quad otherwise\end{cases}$$

که در آن $-M\le n\le M$ قاب یا پنجره زمانی است. بنابراین

$$p[n]=x[n]w[n]$$

که $w[n]$ قاب یا پنجره مستطیلی است؛ یعنی

$$w[n]=\begin{cases}1 & ; \quad -M\le n\le M\\ 0 & ; \quad otherwise\end{cases} \qquad (\text{م}۵-۵۵-۱)$$

قاب کردن در طراحی سیستمهای LTI هم نقش مهمی بازی می‌کند. به دلایل مختلف (مثلاً توانایی به کار بردن الگوریتم FFT، مسئله ۵-۵۴ را ببینید) بهتر است برای انجام پردازش مورد نظر سیستمی طراحی کنیم که پاسخ ضربه محدودی داشته باشد. به عبارت دیگر معمولاً از پاسخ فرکانسی مطلوب $H\left(e^{j\omega}\right)$ شروع می‌کنیم که عکس تبدیل فوریه آن، یعنی پاسخ ضربه $h[n]$ عمر نامحدودی (یا حداقل بسیار طولانی) دارد. باید یک پاسخ ضربه محدود $g[n]$ طراحی کنیم که تبدیل فوریه $G\left(e^{j\omega}\right)$ آن تقریب مناسبی از $H\left(e^{j\omega}\right)$ باشد. یک روش کلی انتخاب $g[n]$، یافتن یک تابع قاب $w[n]$ مناسب است، به نحوی که $h[n]w[n]$ مشخصات دلخواه $G\left(e^{j\omega}\right)$ را برآورده کند.

مسلم است که قاب کردن سیگنال بر طیف آن اثر می‌گذارد. در این مسئله، این اثرها را بررسی می‌کنیم.

(الف) برای درک اثر قاب کردن، سیگنال زیر

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-k]$$

را با پنجره مستطیلی معادله (م۵-۵۵-۱) قاب می‌کنیم.

(i) $X\left(e^{j\omega}\right)$ را بیابید.

(ii) تبدیل فوریه $p[n]=x[n]w[n]$ را به ازای $M=1$ رسم کنید.

(iii) بند پیش را به ازای $M=10$ تکرار کنید.

(ب) حال سیگنالی با تبدیل فوریه زیر در نظر بگیرید

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & ; \ |\omega|<\dfrac{\pi}{4}\\ 0 & ; \ \dfrac{\pi}{4}<|\omega|\leq\pi\end{cases}$$

فرض کنید $p[n]=x[n]w[n]$ که $w[n]$ پنجره مستطیلی معادله (م۵-۵۵-۱) است. $P\left(e^{j\omega}\right)$ را به طور تقریبی به ازای $M=4,8,16$ رسم کنید.

(ج) یکی از مشکلات استفاده از پنجره مستطیلی ایجاد تموج در تبدیل $P\left(e^{j\omega}\right)$ است. (این تموج با پدیده گیبس مرتبط است.) به همین علت سیگنالهای پنجره دیگری پی‌ریزی شده است. این سیگنالها به تدریج از 0 به 1 می‌رسند، نه مثل پنجره مستطیلی که گذر آن ناگهانی است. اثر این تدرج، کاهش دامنه تموج $P\left(e^{j\omega}\right)$ است که به قیمت افزایش اندکی اعوجاج و هموارتر شدن $X\left(e^{j\omega}\right)$ تمام می‌شود. برای روشن کردن نکات فوق، سیگنال $x[n]$ بند (ب) را با پنجره مثلثی یا بارتلت زیر

$$w[n]=\begin{cases}1-\dfrac{|n|}{M+1} & ; \ -M\leq n\leq M\\ 0 & ; \ otherwise\end{cases}$$

در نظر بگیرید و فرض کنید $p[n]=x[n]w[n]$. تبدیل فوریه $p[n]$ را به ازای $M=4,8,16$ به طور تقریبی رسم کنید [راهنمایی : توجه کنید که سیگنال مثلثی، حاصل کانولوشن سیگنال مستطیلی با خودش است. با توجه به این مطلب عبارت مناسبی برای $W\left(e^{j\omega}\right)$ بدست آورید.]

(د) فرض کنید $p[n]=x[n]w[n]$ که $w[n]$ سیگنال کسینوسی بالا رفته موسوم به پنجره هنینگ است؛ یعنی

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{\pi n}{M}\right)\right] & ; \ -M\leq n\leq M\\ 0 & ; \ otherwise\end{cases}$$

$P\left(e^{j\omega}\right)$ را به ازای $M=4,8,16$ به طور تقریبی رسم کنید.

حل : (الف-i)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=f\{x[n]\}=f\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-k]\right\}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

(الف-ii) با استفاده از خاصیت ضرب تبدیل فوریه می‌توان نوشت :

$$p_1[n]=x[n]\,w_1[n] \Rightarrow P_1\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)*W_1\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)*f\left\{\begin{cases}1\ ;\ -1\le n\le 1\\ 0\ ;\ otherwise\end{cases}\right\}=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)\right]*\left[\frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\theta-2\pi k)\right]\left[\frac{\sin\left(\frac{3(\omega-\theta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\omega-\theta)}{2}\right)}\right]d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta)\frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}d\theta=\frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$=\ldots=1+2\cos\omega$$

این تبدیل فوریه در شکل (a) رسم شده است.

الف- iii) به ازای $M=10$ نیز خواهیم داشت :

$$P_{10}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)*W_{10}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)\right]*\left[\frac{\sin\left(\frac{21\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\theta-2\pi k)\right]\left[\frac{\sin\left(\frac{21(\omega-\theta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\omega-\theta)}{2}\right)}\right]d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta)\frac{\sin\left(\frac{21\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}d\theta=\frac{\sin\left(\frac{21\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{3}\right)}$$

تبدیل فوریه $P_{10}\left(e^{j\omega}\right)$ را می‌توانید در شکل (b) مشاهده نمائید. با مقایسه شکل‌های (a) و (b) می‌بینیم که هر چه طول قاب $w[n]$ بزرگتر انتخاب شود طیف $P\left(e^{j\omega}\right)$ حاصل تقریب بهتری را از طیف ایده‌آل $X\left(e^{j\omega}\right)$ بدست می‌دهد. البته با افزایش طول قاب از مزیت قاب کردن کاسته می‌شود، بدین معنی که طول دنباله $p[n]$ افزایش می‌یابد. بدین ترتیب میان حداقل طول قاب و کیفیت تقریب فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ توسط $P\left(e^{j\omega}\right)$ باید موازنه‌ای صورت پذیرد.

ب) ابتدا داریم :

$$P_M\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{p_M[n]\right\}=f\{x[n]w_M[n]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\theta}\right)W_M\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}W_M\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left[(\omega-\theta)\left(M+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left[\frac{(\omega-\theta)}{2}\right]}d\theta$$

انتگرال فوق را می‌توان به روش عددی و برای مقادیر مختلف ω، برای یک M مورد نظر محاسبه نمود، شکل‌های (c) و (d) و (e) نتیجه محاسبات را به ترتیب برای $M=4$، $M=8$ و $M=16$ نشان می‌دهند. دوباره با توجه به این شکل‌ها در می‌یابیم که با افزایش هر چه بیشتر طول پنجره، $P\left(e^{j\omega}\right)$ حاصل

تقریب بهتری را در اختیار ما می‌گذارد.

(ج) با فرض M زوج مشاهده می‌کنیم که پنجره مثلثی را می‌توان از کانولوشن سیگنال مستطیلی زیر با خودش بدست آورد :

$$s_M[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{M+1} & ; \quad 0\leq |\ n\ | \leq \dfrac{M}{2}\\ 0 & ; \quad elsewhere\end{cases}$$

در اینصورت خواهیم داشت :

$$W_M\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{w_M[n]\right\}=f\left\{s_M[n]*s_M[n]\right\}=S_M\left(e^{j\omega}\right).S_M\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\left(\frac{\sin\left[\omega\left(\frac{M}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2=\frac{\sin^2\left[\frac{\omega(M+1)}{2}\right]}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

که به همان ترتیب بند (ب) نتیجه می‌دهد :

$$P\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\left[\frac{(\omega-\theta)(M+1)}{2}\right]}{\sin^2\left[\frac{(\omega-\theta)}{2}\right]}d\theta$$

انتگرال عددی بالا را برای سه حالت $M=4$، $M=8$ و $M=16$ محاسبه کرده و در شکل‌های (f)، (g) و (h) نشان داده‌ایم. با مقایسه این شکل‌ها به ترتیب با شکل‌های (c)، (d) و (e) مشاهده می‌کنیم که از دامنه تموج $P\left(e^{j\omega}\right)$ کاسته می‌شود.

(د) ابتدا داریم :

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi n}{M}\right)\right) & ; \quad -M\leq n\leq M\\ 0 & ; \quad elsewhere\end{cases}=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)\right].w_M[n]$$

$$\Rightarrow p[n]=x[n]w[n]=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)\right].\left[x[n]w_M[n]\right]=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)\right]p_M[n]$$

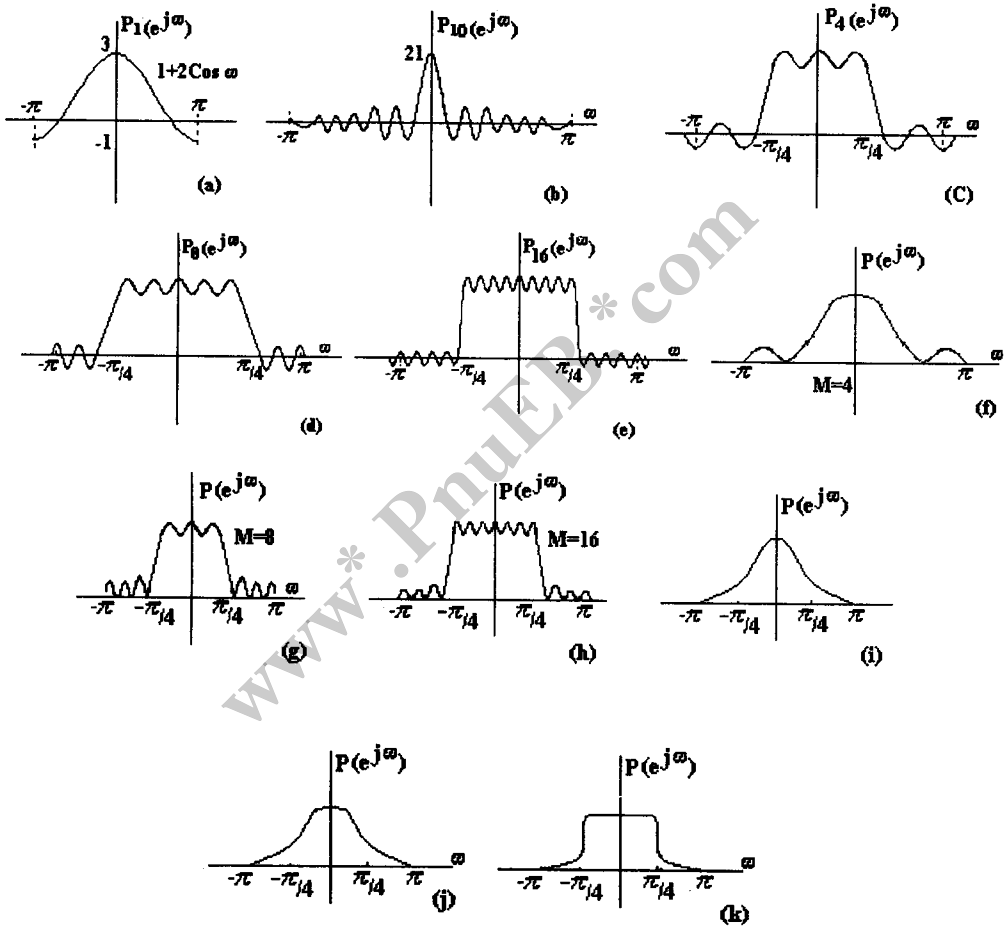
که در آن $w_M[n]$ و $p_M[n]$ به ترتیب قاب مستطیلی بیان شده در بند (ب) و سیگنال حاصل از قاب کردن در این بند هستند. در اینصورت توجه به خاصیت ضرب تبدیل فوریه می‌توان نوشت :

$$P\left(e^{j\omega}\right)=f\left\{\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)\right]p_M[n]\right\}=\frac{1}{4\pi}f\left\{1+\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)\right\}*P_M\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta\left(\omega+\frac{\pi}{M}-2\pi k\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{M}-2\pi k\right)\right\}\right]*P_M\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{2}P_M\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{4}\left\{P_M\left(e^{j\left[\omega+\frac{\pi}{M}\right]}\right)+P_M\left(e^{j\left[\omega-\frac{\pi}{M}\right]}\right)\right\}$$

تبدیل فوریه $P\left(e^{j\omega}\right)$ را برای مقادیر مختلف M، با توجه به نتایج بند (ب) و با کمک رابطه بالا در شکل‌های (i)، (j) و (k) رسم نموده‌ایم :



۵-۵۶ $x[m,n]$ سیگنالی با دو متغیر مستقل گسسته m و n است. به قیاس سیگنال یک بعدی و حالت پیوسته در زمان بیان شده در مسئله ۴-۵۳، می‌توانیم تبدیل فوریه دوبعدی $x[m,n]$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[m,n]\,e^{-j\left[\omega_1 m+\omega_2 n\right]} \qquad (م۵-۵۶-۱)$$

(الف) نشان دهید که می‌توانیم معادله (م۵-۵۶-۱) را به صورت دو تبدیل فوریه یک بعدی حساب

کنیم، یعنی ابتدا n را ثابت بگیریم و جمع را برحسب m محاسبه کنیم و سپس محاسبه را برحسب n انجام دهیم. با استفاده از این نتیجه $x[m,n]$ را برحسب $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ بدست آورید.

(ب) فرض کنید $$x[m,n]=a[m]b[n]$$

که در آن $a[m]$ و $b[n]$ توابع یک متغیره‌اند. تبدیل فوریه این دو سیگنال به ترتیب $A\left(e^{j\omega}\right)$ و $B\left(e^{j\omega}\right)$ است. $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ را برحسب $B\left(e^{j\omega}\right)$ و $A\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید.

(ج) تبدیل فوریه دو بعدی سیگنالهای زیر را پیدا کنید

$$(i)\quad x[m,n]=\delta[m-1]\delta[n+4] \qquad (ii)\quad x[m,n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}u[n-2]\,u[-m]$$

$$(iii)\quad x[m,n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\left(\frac{2\pi m}{3}\right)u[n]$$

$$(iv)\quad x[m,n]=\begin{cases}1 & ; \ -2\le m\le 2\ ,\ -4\le n\le 4\\ 0 & ; \ otherwise\end{cases}$$

$$(v)\quad x[m,n]=\begin{cases}1 & ; \ -2+n\le m\le 2+n\ ,\ -4\le n\le 4\\ 0 & ; \ otherwise\end{cases}$$

$$(vi)\quad x[m,n]=\sin\left(\frac{\pi n}{3}+\frac{2\pi m}{5}\right)$$

(د) سیگنال $x[m,n]$ با تبدیل فوریه زیر را بیابید

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\begin{cases}1 & ; \ |\omega_1|\le\frac{\pi}{4}\ ,\ |\omega_2|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & ; \ \frac{\pi}{4}<|\omega_1|\le\pi \ \ or\ \ \frac{\pi}{2}<|\omega_2|\le\pi\end{cases}$$

(هـ) $x[m,n]$ و $h[m,n]$ دو سیگنال با تبدیل فوریه دوبعدی $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ و $H\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ هستند. تبدیل سیگنالهای زیر را برحسب $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ و $H\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ بیان کنید:

$$(i)\quad x[m,n]e^{jW_1m}e^{jW_2n}$$

$$(ii)\quad y[m,n]=\begin{cases}x[k,r] & ; \ n=3r, m=2k\\ 0 & ; \ \text{در صورتی که } m \text{ مضرب } 2 \text{ و } n \text{ مضرب } 3 \text{ نباشد}\end{cases}$$

$$(iii)\quad y[m,n]=x[m,n]h[m,n]$$

حل: (الف)

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m,n]\,e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{e^{-j\omega_2 n}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m,n]\,e^{-j\omega_1 m}\right\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X\left(e^{j\omega_1},n\right)e^{-j\omega_2 n}\qquad,\ (I)$$

که در آن :

$$X\left(e^{j\omega_1},n\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m,n]\,e^{-j\omega_1 m}\qquad,\quad (II)$$

تبدیل فوریه یک بعدی $x[m,n]$ نسبت به متغیر m می‌باشد.

برای محاسبه $x[m,n]$ برحسب $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$، از رابطه ترکیب فوریه و با توجه به رابطه (II) داریم :

$$x[m,n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega_1},n\right)e^{j\omega_1 m}d\omega_1\qquad,\quad (III)$$

همینطور از رابطه (I) می‌توان نوشت :

$$X\left(e^{j\omega_1},n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)e^{j\omega_2 n}d\omega_2\qquad,\quad (IV)$$

حال با ترکیب روابط (III) و (IV) بدست می‌آوریم :

$$x[m,n]=\frac{1}{4\pi^2}\int_{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)e^{j\omega_1 m}e^{j\omega_2 n}d\omega_1 d\omega_2$$

ب)

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m,n]\,e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a[m]b[n]\,e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}$$

$$=\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a[m]\,e^{-j\omega_1 m}\right\}\cdot\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}b[n]\,e^{-j\omega_2 n}\right\}=A\left(e^{j\omega_1}\right).B\left(e^{j\omega_2}\right)$$

(ج-i) با توجه به نتیجه بند (ب) داریم :

$$x[m,n]=\delta[m-1]\,\delta[n+4]=a[m]\,b[n]\Rightarrow\begin{cases}a[m]=\delta[m-1]\\ b[n]=\delta[n+4]\end{cases}\Rightarrow X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$$

$$=A\left(e^{j\omega_1}\right)B\left(e^{j\omega_2}\right)=f\{a[m]\}f\{b[n]\}=f\{\delta[m-1]\}\,f\{\delta[n+4]\}=e^{-j\omega_1}.e^{j4\omega_2}$$

(ج-ii) به همان ترتیب بند (i) می‌نویسیم :

$$A\left(e^{j\omega_1}\right)=f\{a[m]\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-m}u[-m]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega_1}}$$

همینطور داریم :

$$B\left(e^{j\omega_2}\right)=f\{b[n]\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-2]\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^2 f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]\right\}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)e^{-j2\omega_2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_2}}$$

بالاخره بدست می‌آوریم :

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=A\left(e^{j\omega_1}\right)B\left(e^{j\omega_2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)e^{-j2\omega_2}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega_1}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_2}\right)}$$

(ج-iii)

$$A\left(e^{j\omega_1}\right)=f\{a[m]\}=f\left\{\cos\left(\frac{2\pi m}{3}\right)\right\}$$

$$=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta\left(\omega_1+\frac{2\pi}{3}-2\pi k\right)+\delta\left(\omega_1-\frac{2\pi}{3}-2\pi k\right)\right\}$$

$$B\left(e^{j\omega_2}\right)=f\{b[n]\}=f\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_2}}\Rightarrow X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=A\left(e^{j\omega_1}\right)B\left(e^{j\omega_2}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_2}}\right]\left[\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta\left(\omega_1+\frac{2\pi}{3}-2\pi k\right)+\delta\left(\omega_1-\frac{2\pi}{3}-2\pi k\right)\right\}\right]$$

(ج-iv)

$$x[m,n]=\begin{cases}1 & ;\ -2\le m\le 2,\ -4\le n\le 4\\ 0 & ;\ otherwise\end{cases}=\left[\begin{cases}1\ ;\ -2\le m\le 2\\ 0\ ;\ otherwise\end{cases}\right]\cdot\left[\begin{cases}1\ ;\ -4\le n\le 4\\ 0\ ;\ otherwise\end{cases}\right]=a[m]b[n]$$

$$\Rightarrow A\left(e^{j\omega_1}\right)=f\{a[m]\}=f\left\{\begin{cases}1\ ;\ -2\le m\le 2\\ 0\ ;\ otherwise\end{cases}\right\}=\frac{\sin\left(\frac{5\omega_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}$$

$$B\left(e^{j\omega_2}\right)=f\{b[n]\}=f\left\{\begin{cases}1\ ;\ -4\le n\le 4\\ 0\ ;\ otherwise\end{cases}\right\}=\frac{\sin\left(\frac{9\omega_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=A\left(e^{j\omega_1}\right)B\left(e^{j\omega_2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{5\omega_1}{2}\right)\sin\left(\frac{9\omega_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}$$

(ج-v) در این مورد نمی‌توانیم x[m,n] را به حاصلضرب دو تابع تک‌متغیره تفکیک نمائیم، بنابراین از

تعریف اصلی فوریه دوبعدی داریم :

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m,n]e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}=\sum_{n=-4}^{+4}\sum_{m=-2+n}^{2+n}1.e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}$$

$$=\sum_{n=-4}^{+4}\left[e^{-j\omega_2 n}\sum_{m=-2+n}^{2+n}e^{-j\omega_1 m}\right]=\sum_{n=-4}^{+4}\left[e^{-j\omega_2 n}\sum_{m=0}^{+4}e^{-j\omega_1(m-2+n)}\right]$$

$$=e^{j2\omega_1}\sum_{n=-4}^{+4}\left[e^{-j\left(\omega_2+\omega_1\right)n}\sum_{m=0}^{+4}\left(e^{-j\omega_1}\right)^m\right]=e^{j2\omega_1}\sum_{n=-4}^{+4}\left[e^{-j\left(\omega_2+\omega_1\right)n}\left(\frac{1-e^{-j5\omega_1}}{1-e^{-j\omega_1}}\right)\right]$$

$$=e^{j2\omega_1}\left(\frac{1-e^{-j5\omega_1}}{1-e^{-j\omega_1}}\right)\sum_{n=-4}^{+4}e^{-j\left(\omega_1+\omega_2\right)n}=e^{j2\omega_1}\left(\frac{1-e^{-j5\omega_1}}{1-e^{-j\omega_1}}\right)e^{j4\left(\omega_1+\omega_2\right)}\sum_{n=0}^{+8}\left(e^{-j\left(\omega_1+\omega_2\right)}\right)^n$$

$$=e^{j\left(6\omega_1+4\omega_2\right)}\left(\frac{1-e^{-j5\omega_1}}{1-e^{-j\omega_1}}\right)\left(\frac{1-e^{-j9\left(\omega_1+\omega_2\right)}}{1-e^{-j\left(\omega_1+\omega_2\right)}}\right)$$

ج-vi) ابتدا داریم :

$$x[m,n]=\sin\left(\frac{\pi n}{3}+\frac{2\pi m}{5}\right)=\frac{1}{2j}\left[e^{j\left(\frac{\pi n}{3}+\frac{2\pi m}{5}\right)}-e^{-j\left(\frac{\pi n}{3}+\frac{2\pi m}{5}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\left(e^{j\frac{\pi n}{3}}\right)\left(e^{j\frac{2\pi m}{5}}\right)-\left(e^{-j\frac{\pi n}{3}}\right)\left(e^{-j\frac{2\pi m}{5}}\right)\right]=\frac{1}{2j}\left[a_1[m]\,b_1[n]-a_2[m]\,b_2[n]\right]$$

$$\Rightarrow X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\frac{1}{2j}\left[X_1\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)-X_2\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[A_1\left(e^{j\omega_1}\right)B_1\left(e^{j\omega_2}\right)-A_2\left(e^{j\omega_1}\right)B_2\left(e^{j\omega_2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\left(2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega_1-\frac{2\pi}{5}-2\pi k\right)\right)\left(2\pi\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega_2-\frac{\pi}{3}-2\pi r\right)\right)\right.$$

$$\left.-\left(2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega_1+\frac{2\pi}{5}-2\pi k\right)\right)\left(2\pi\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega_2+\frac{\pi}{3}-2\pi r\right)\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(\omega_1-\frac{2\pi}{5}-2\pi k\right)\delta\left(\omega_2-\frac{\pi}{3}-2\pi r\right)-\delta\left(\omega_1+\frac{2\pi}{5}-2\pi k\right)\delta\left(\omega_2+\frac{\pi}{3}-2\pi r\right)\right]$$

د) از نتیجه بند (الف) می‌توان نوشت :

$$x[m,n]=\frac{1}{4\pi^2}\int_{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)e^{j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}d\omega_1 d\omega_2=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^{j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}d\omega_1 d\omega_2$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{j\omega_2 n}d\omega_2\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^{j\omega_1 m}d\omega_1\right)=\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}\right]\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi m}{4}\right)}{\pi m}\right]$$

(هـ - i) از تعریف تبدیل فوریه دوبعدی داریم :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[m,n]e^{jW_1 m}e^{jW_2 n}\right)e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[m,n]e^{-j\left[\left(\omega_1-W_1\right)m+\left(\omega_2-W_2\right)n\right]}=X\left(e^{j\left(\omega_1-W_1\right)},e^{j\left(\omega_2-W_2\right)}\right)$$

(هـ - ii)

$$Y\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y[m,n]e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}y[2k,3r]e^{-j\left(\omega_1 2k+\omega_2 3r\right)}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x[k,r]e^{-j\left[\left(2\omega_1\right)k+\left(3\omega_2\right)r\right]}=X\left(e^{j2\omega_1},e^{j3\omega_2}\right)$$

(هـ - iii)

$$Y\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y[m,n]e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[m,n]h[m,n]e^{-j\left(\omega_1 m,\omega_2 n\right)}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[m,n]\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right).e^{j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}.d\omega_1 d\omega_2\right)e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[m,n]\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\theta_1},e^{j\theta_2}\right).e^{j\left(\theta_1 m+\theta_2 n\right)}d\theta_1 d\theta_2\right)e^{-j\left(\omega_1 m+\omega_2 n\right)}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{2\pi}\int_{2\pi}\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X\left(e^{j\theta_1},e^{j\theta_2}\right)h[m,n].e^{-j\left((\omega_1-\theta_1)m+(\omega_2-\theta_2)n\right)}\right\}d\theta_1 d\theta_2$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\theta_1},e^{j\theta_2}\right)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{h[m,n].e^{-j\left[\left(\omega_1-\theta_1\right)m+\left(\omega_2-\theta_2\right)n\right]}\right\}d\theta_1 d\theta_2$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\theta_1},e^{j\theta_2}\right)Y\left(e^{j\left(\omega_1-\theta_1\right)},e^{j\left(\omega_2-\theta_2\right)}\right)d\theta_1 d\theta_2$$

۹

تبدیل لاپلاس

۹-۱ در هریک از انتگرالهای زیر، مقادیری از پارامتر حقیقی σ را که به ازای آن انتگرال همگراست، تعیین کنید:

(الف) $\int_{0}^{+\infty} e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$ (ب) $\int_{-\infty}^{0} e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$

(ج) $\int_{-5}^{5} e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$ (د) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$

(هـ) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|t|}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$ (و) $\int_{-\infty}^{0} e^{-5|t|}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$

حل: (الف) به سادگی می‌نویسیم:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \leq \int_{0}^{+\infty} \left| e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t} \right| dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(5+\sigma)t}dt < \infty \Rightarrow 5+\sigma>0 \Rightarrow \sigma>-5$$

(ب)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \leq \int_{-\infty}^{0} \left| e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t} \right| dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-(5+\sigma)t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(5+\sigma)t}dt < \infty \Rightarrow 5+\sigma<0 \Rightarrow \sigma<-5$$

(ج)

$$\int_{-5}^{5} e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \leq \int_{-5}^{5} \left| e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t} \right| dt = \int_{-5}^{5} e^{-(5+\sigma)t}dt < \infty \;\; , \forall\sigma\in R \Rightarrow -\infty<\sigma<+\infty$$

(د)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-5t}e^{-(\sigma+j\omega)t} \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(5+\sigma)t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(5+\sigma)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(5+\sigma)t}dt$$

دو انتگرال اخیر به ترتیب به ازای مقادیری از σ که در آن $5+\sigma<0$ و $5+\sigma>0$ باشند، همگرا می‌شوند، بنابراین هیچ مقداری از σ هر دو انتگرال را به طور همزمان همگرا نمی‌کند و همواره داریم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \to \infty$$

(هـ)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5|t|} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-5|t|} e^{-(\sigma+j\omega)t} \right| dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5|t|} e^{-\sigma t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(5-\sigma)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(5+\sigma)t} dt$$

برای آنکه مقدار اخیر همگرا شود، باید بطور همزمان داشته‌باشیم: $5-\sigma>0$ و $5+\sigma>0$، که بصورت زیر خلاصه می‌شوند :

$$-5<\sigma<5 \Rightarrow |\sigma| <5$$

۹–۲ سیگنال زیر را در نظر بگیرید و تبدیل لاپلاس آن را $X(s)$ بنامید.

$$x(t)=e^{-5t}u(t-1)$$

(الف) $X(s)$ را با معادله (۹–۳) حساب کنید و ناحیه همگرایی آن را بیابید.

(ب) اعداد A و t_0 را به نحوی تعیین کنید که عبارت جبری تبدیل لاپلاس $G(s)$ سیگنال زیر

$$g(t)=Ae^{-5t}u(-t-t_0)$$

همانند $X(s)$ باشد. ناحیه همگرایی $G(s)$ را تعیین کنید.

حل : (الف)

$$X(s)= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t}u(t-1)e^{-st}dt = \int_{1}^{+\infty} e^{-5t}e^{-st}dt$$

به ازای $s=\sigma+j\omega$ داریم :

$$X(s)= \int_{1}^{+\infty} e^{-(5+\sigma)t} e^{-j\omega t} dt$$

مقایسه رابطه اخیر با رابطه (۹–۹)، روشن می‌کند که $X(s)$ تبدیل فوریه سیگنال $e^{-(5+\sigma)t}u(t-1)$ می‌باشد، یعنی :

$$X(s)=f\left\{e^{-(5+\sigma)t}u(t-1)\right\} = e^{-(5+\sigma)} f\left\{e^{-(5+\sigma)(t-1)}u(t-1)\right\} = e^{-(5+\sigma)} \frac{e^{-j\omega}}{(5+\sigma)+j\omega} \ , \ 5+\sigma>0$$

$$\Rightarrow X(s)=e^{-5}\frac{e^{-(\sigma+j\omega)}}{5+(\sigma+j\omega)} = \frac{e^{-(5+s)}}{5+s} \quad , \quad \sigma=Re\{s\}>-5 \qquad (I)$$

(ب)

$$G(s)= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-5t}u\ (-t-t_0)\ e^{-st}dt$$

حال به ازای $s=\sigma+j\omega$ می‌توان نوشت :

$$G(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-5t}u\left(-t-t_0\right)\, e^{-(\sigma+j\omega)t}dt=Ae^{(5+\sigma)t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{(5+\sigma)(-t-t_0)}u(-t-t_0)\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$=Ae^{(5+\sigma)t_0}f\left\{e^{(5+\sigma)(-t-t_0)}u(-t-t_0)\right\}=Ae^{(5+\sigma)t_0}\frac{e^{j\omega t_0}}{-(5+\sigma)-j\omega}\ ,\ -(5+\sigma)>0(or\ \sigma<-5)$$

$$\Rightarrow G(s)=-A\frac{e^{(5+\sigma+j\omega)t_0}}{5+(\sigma+j\omega)}=-A\frac{e^{(5+s)t_0}}{5+s}\ ,\ \sigma=Re\{s\}<-5 \qquad ,(II)$$

با مقایسه روابط (I) و (II)، برای تساوی $G(s)$ و $X(s)$ کافیست قرار دهیم :

$A=t_0=-1$

۹–۳ سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x(t)=e^{-5t}u(t)+e^{-\beta t}u(t)$$

و تبدیل لاپلاس آن را $X(s)$ بنامید. برای این که ناحیه همگرایی $X(s)$ به صورت $\Re e\{s\}>-3$ باشد، بخش حقیقی و بخش موهومی β باید چه شرطی را برآورده کند؟

حل : $x(t)$ از مجموع دو جمله تشکیل شده است که در آن :

$$e^{-5t}u(t)\ \xleftrightarrow{\mathcal{L}}\ \frac{1}{s+5}\quad ,\ Re\{s\}>-5$$

$$e^{-\beta t}u(t)\ \xleftrightarrow{\mathcal{L}}\ \frac{1}{s+\beta}\quad ,\ Re\{s\}>-Re\{\beta\}$$

در اینصورت، مجموعه مقادیری که به ازای آن‌ها تبدیل لاپلاس هر دو جمله فوق همگرا هستند به صورت $\{Re\{s\}>-Re\{\beta\}\}\cap\{Re\{s\}>-5\}$ می‌باشد، حال اگر بخواهیم این ناحیه معادل $Re\{s\}>-3$ شود کافیست داشته باشیم :

$Re\{\beta\}=3$, $Im\{\beta\}=$ اختیاری

۹–۴ محل قطبها و ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید

$$x(t)=\begin{cases}e^{t}\sin 2t & ;\ t\le 0\\ 0 & ;\ t>0\end{cases}$$

حل : ابتدا با توجه به جدول $(2\text{-}9)$ مشاهده می‌کنیم :

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\sin(-2t)u(t)\right\}=\frac{-2}{(s+1)^2+4}\quad ,\ Re\{s\}>-1$$

اکنون با استفاده از خاصیت تغییر مقیاس زمانی جدول $(1\text{-}9)$ بدست می‌آوریم:

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{e^{t}\sin(2t)u(-t)\right\}=\frac{-2}{(-s+1)^{2}+4}\ ,\quad Re\left\{\frac{s}{-1}\right\}>-1$$

$$\Rightarrow\quad X(s)=\frac{-2}{(-s+1)^{2}+4}\ ,\ Re\{s\}<1$$

محل قطب‌ها را نیز می‌توان به سادگی، با یافتن ریشه‌های مخرج $X(s)$ بدست آورد :

$$(-s_p+1)^{2}+4=0\ \Rightarrow -s_p+1=\pm 2j\ \Rightarrow s_p=1\pm 2j$$

۹–۵ برای هر یک از تبدیل لاپلاسهای زیر تعداد صفرهای محدود و صفرهای بینهایت را تعیین کنید :

(الف) $\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}$ (ب) $\frac{s+1}{s^2-1}$ (ج) $\frac{s^3-1}{s^2+s+1}$

حل : (الف)

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}=\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

دیده می‌شود که تبدیل لاپلاس فوق شامل دو قطب محدود در $s=-1$ و $s=-3$ و یک صفر محدود در $s=-2$ می‌باشد، از آنجاکه تعداد صفر و قطب‌های این تابع باید برابر باشند، بنابراین یک صفر بی‌نهایت نیز داریم (این مطلب به آسانی روشن می‌شود، چراکه $\lim_{s\to\infty}\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}=0$).

(ب)

$$\frac{s+1}{(s^2-1)}=\frac{(s+1)}{(s+1)(s-1)}=\frac{1}{s-1}$$

دیده می‌شود که تبدیل لاپلاس فوق شامل دو قطب محدود در $s=\pm 1$ می‌باشد که قطب واقع در $s=-1$ توسط صفری در همان محل حذف می‌شود، بنابراین تبدیل فوق صفر محدودی ندارد، همچنین وجود یک قطب باقی‌مانده ، نشان دهنده یک صفر در بینهایت می‌باشد.

(ج)

$$\frac{s^3-1}{s^2+s+1}=\frac{(s-1)(s^2+s+1)}{(s^2+s+1)}=s-1$$

این تبدیل، شامل سه صفر محدود در $s=1$ و $s=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌باشد، صفرهای مختلط توسط قطب‌هایی در همان محل حذف می‌شوند، بنابراین تنها یک صفر محدود داریم، بدین ترتیب برای آنکه تعداد قطب و صفرهای برابری داشته باشیم، یک قطب در بی‌نهایت داشته و هیچ صفر نامحدودی نداریم .

۹–۶ سیگنال مطلقاً انتگرال‌پذیر $x(t)$ قطبی در $s=2$ دارد. به سوالهای زیر پاسخ دهید :

(الف) آیا $x(t)$ می‌تواند عمر محدود داشته باشد؟

(ب) آیا $x(t)$ می‌تواند دست‌چپی باشد؟

(ج) آیا $x(t)$ می‌تواند دست‌راستی باشد؟

(د) آیا $x(t)$ می‌تواند دوطرفه باشد؟

حل : (الف) خیر، اگر $x(t)$ عمر محدودی داشته باشد، ROC تبدیل لاپلاس آن باید تمام صفحه s باشد، ولی چنین چیزی درست نیست، زیرا $X(s)$ در $s=2$ قطب دارد.

(ب) بلی، اگر $x(t)$، دست چپی باشد، ROC آن در طرف چپ قطب $s=2$ بوده و می‌تواند شامل محور $j\omega$ باشد، بنابراین مطلقاً انتگرال‌پذیری سیگنال $x(t)$ نیز برقرار خواهد بود.

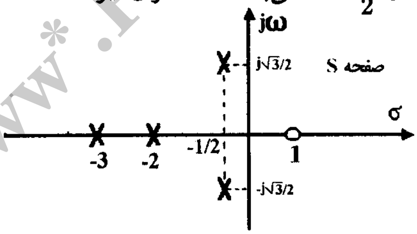
(ج) خیر، اگر $x(t)$، دست راستی باشد، ROC آن در طرف راست قطب $s=2$ بوده و نمی‌تواند شامل محور $j\omega$ باشد، بنابراین امکان این که $x(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد وجود نخواهد داشت.

(د) بله، اگر سیگنال دو طرفه $x(t)$ بگونه‌ای باشد که نوار ROC متناظر با آن شامل محور $j\omega$ باشد (و بنابراین شرط مطلقاً انتگرال‌پذیری $x(t)$ را برآورد)، پذیرفتنی خواهد بود.

۹–۷ چند سیگنال دارای تبدیل لاپلاسی با عبارت جبری زیر هستند

$$\frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

حل : نمودار صفر و قطب این تبدیل را در شکل زیر مشاهده می‌کنید، این تبدیل دارای 4 قطب در محل‌های $s=-2$,$s=-3$, $s=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌باشد و صفری نیز در $s=1$ دارد.



از آنجاکه این تبدیل لاپلاس، گویا است ، ROC آن یا به قطب محدود می‌شود و یا تا بی‌نهایت گسترده است. بعلاوه هیچکدام از قطب‌های تبدیل در ROC قرار ندارد، بدین ترتیب، با توجه به شکل فوق چهار ROCی معتبر قابل تشخیص است :

1) $Re\{s\}<-3$ 2) $Re\{s\}>-\frac{1}{2}$

3) $-3<Re\{s\}<-2$ 4) $-2<Re\{s\}<-\frac{1}{2}$

**۹–۸ $x(t)$ سیگنالی با تبدیل لاپلاس گویاست که دقیقاً دو قطب در $s=-1$ و $s=-3$ دارد. اگر $g(t)$ برابر حاصلضرب $e^{2t}x(t)$ و $G(j\omega)$ [تبدیل فوریه $g(t)$] همگرا باشد، $x(t)$ دست‌چپی، دست‌راستی یا

دوطرفه است؟

حل : ابتدا برای $G(s)$ داریم :

$$G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(s-2)t}dt=X(s-2)$$

بنابراین $G(s)$ همان $X(s)$ است که 2 واحد به سمت راست منتقل شده است، در این حالت محور $j\omega$ (یا $\sigma=0$) در ROCی $G(s)$ قرار دارد، چراکه تبدیل فوریه $g(t)$ همگراست، از طرفی $\sigma=0$ در $G(s)$، متناظر با $\sigma=-2$ در $X(s)$ می‌باشد، یعنی $\sigma=-2$ جزو ROCی $X(s)$ است و با توجه به اینکه $X(s)$ گویاست، ROCی آن به درون قطب‌های $s=-1$ و $s=-3$ محدود شده و بنابراین $x(t)$ دوطرفه می‌باشد.

۹-۹ با فرض

$$e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+a},\Re e\{s\}>\Re e\{-a\}$$

عکس تبدیل لاپلاس زیر را بیابید.

$$X(s)=\frac{2(s+2)}{s^2+7s+12},\Re e\{s\}>-3$$

حل : با بسط $X(s)$ به کسرهای جزئی می‌نویسیم :

$$X(s)=\frac{2(s+2)}{s^2+7s+12}=\frac{2(s+2)}{(s+3)(s+4)}=\frac{4}{s+4}-\frac{2}{s+3}\quad,\quad Re\{s\}>-3$$

چون ROC در سمت راست قطب‌های $s=-3$ و $s=-4$ قرار دارد، عکس تبدیل لاپلاس، سیگنالی دست‌راستی را نتیجه می‌دهد، در اینصورت داریم :

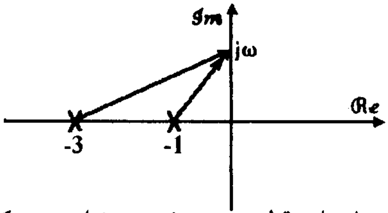
$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+4}-\frac{2}{s+3}\right\}=4e^{-4t}u(t)-2e^{-3t}u(t)$$

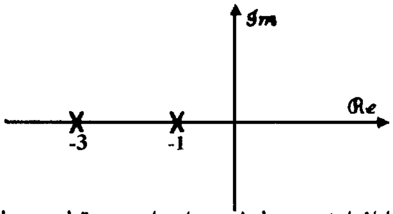
۹-۱۰ با استفاده از روش هندسی برآورد تبدیل فوریه از نمودار قطب-صفر تعیین کنید که برای هر یک از تبدیل لاپلاسهای داده شده اندازه تبدیل فوریه تقریباً پایین‌گذر، میان‌گذر یا بالاگذرست :

(الف) $H_1(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}\ ,\ \Re e\{s\}>-1$ (ب) $H_2(s)=\dfrac{s}{s^2+s+1}\ ,\ \Re e\{s\}>-\dfrac{1}{2}$

(ج) $H_3(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+1}\ ,\ \Re e\{s\}>-1$

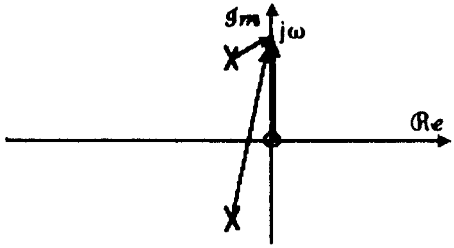
حل : (الف) نمودار قطب و صفر این تبدیل را به همراه بردارهای قطب آن در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید:

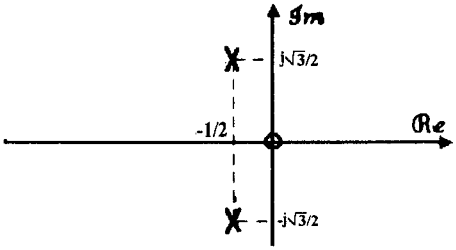




با توجه به بردارهای قطب رسم شده، مشاهده می‌کنیم که با افزایش ω طول بردارهای دو قطب بطور یکنوا بزرگتر می‌شوند و بنابراین اندازه تبدیل فوریه $\left|H_1(j\omega)\right|$، بطور یکنوا کوچکتر می‌شود که مشخص‌کننده یک تبدیل پائین‌گذر می‌باشد.

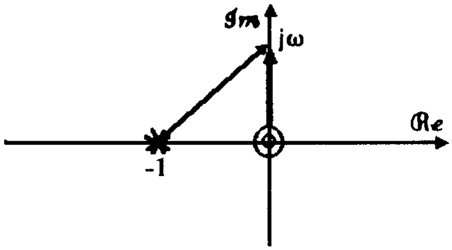
(ب) نمودار قطب و صفر این تبدیل را به همراه بردارهای قطب و صفر آن در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید:

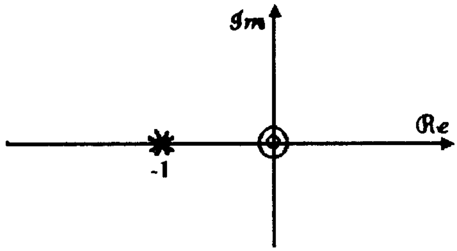




با توجه به شکل فوق دیده می‌شود که برای $\omega=0$، طول بردار صفر، صفر بوده و بنابراین اندازه تبدیل فوریه در آن صفر می‌باشد. با افزایش ω طول بردار صفر نیز افزایش می‌یابد در همین حال طول بردار یکی از قطب‌ها افزایش یافته و طول بردار قطب دیگر کاهش می‌یابد، بدین ترتیب اثر افزایش بردار صفر بیش از تاثیر تغییرات بردارهای قطب بوده و در کل اندازه تبدیل فوریه $\left|H_2(j\omega)\right|$ افزایش می‌یابد. با افزایش هر چه بیشتر ω $\left(|\omega|>\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، قطب‌ها هر دو باهم افزایش می‌یابند و اثر بردار صفر را رفته رفته تحت تاثیر قرار می‌دهند، در فرکانس‌های بسیار زیاد طول هرسه بردار یکی شده و اندازه پاسخ فرکانسی $\left|H_2(j\omega)\right|$ به صفر میل می‌کند. بدین ترتیب $H_2(j\omega)$ دارای مشخصات یک فیلتر میان‌گذر است.

(ج) نمودار قطب و صفر این تبدیل را به همراه بردارهای قطب و صفر آن در شکل زیر مشاهده می‌کنید:





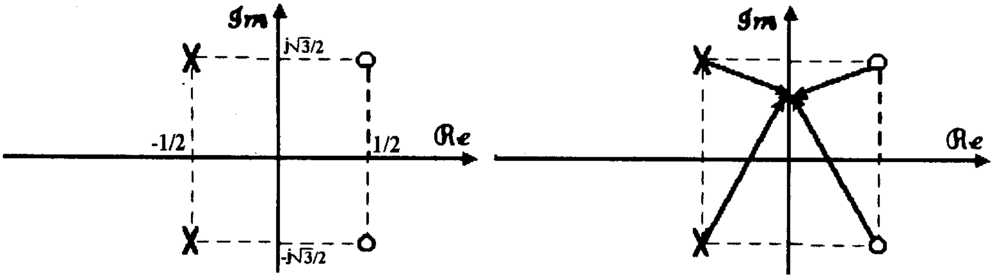
با توجه به این شکل‌ها می‌بینیم که برای $\omega=0$، طول بردارهای صفر، صفر بوده و بنابراین اندازه تبدیل فوریه در آن صفر است. با افزایش ω طول بردارهای صفر وقطب بطور یکنوا افزایش می‌یابند با این وجود سرعت افزایش طول بردارهای صفر بیش از سرعت افزایش طول بردارهای قطب بوده و در کل اندازه تبدیل فوریه $\left|H_3(j\omega)\right|$ بطور یکنوا افزایش می‌یابد، در حد $\omega\to\infty$ طول هر چهار بردار قطب و صفر

یکی بوده و $\left|H_3(j\omega)\right|$ به مقدار ثابتی $\left(\lim\limits_{\omega\to\infty}\left|H_3(j\omega)\right| = 1\right)$ می‌رسد. به آسانی مشاهده می‌کنیم که ویژگی‌های فوق یک تبدیل بالاگذر را مشخص می‌کنند.

۹-۱۱ با استفاده از روش هندسی، اندازه تبدیل فوریه سیگنالی با تبدیل لاپلاس زیر را از روی نمودار صفر-قطب بدست آورید:

$$X(s)=\frac{s^2-s+1}{s^2+s+1},\ \Re e\{s\}>-\frac{1}{2}$$

حل: نمودار صفر و قطب این تبدیل را به همراه بردارهای قطب و صفر آن در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید:



با توجه به شکل فوق به روشنی می‌بینیم که در هر نقطه‌ای از محور $j\omega$ بردارهای قطب و صفر دو به دو هم‌طول بوده و بنابراین اندازه پاسخ فرکانسی مقداری ثابت و مستقل از فرکانس می‌باشد؛ این مقدار ثابت را می‌توان با محاسبه تبدیل لاپلاس در محلی واقع بر محور $j\omega$ بدست آورد، مثلاً:

$$\left|H_3(j\omega)\right| = M = \left|\frac{s^2-s+1}{s^2+s+1}\right|_{s=j0} = 1$$

۹-۱۲ سه مطلب زیر در مورد سیگنال $x(t)$ داده شده است:

۱. در $t<0$، $x(t)=0$

۲. $x\left(\frac{k}{80}\right)=0$ به ازای $k=1,2,3,\ldots$

۳. $x\left(\frac{1}{160}\right)=e^{-120}$

$X(s)$ را تبدیل لاپلاس $x(t)$ فرض کرده، تعیین کنید که کدام یک از گزاره‌های زیر با اطلاعات داده شده در مورد سیگنال $x(t)$ سازگارست:

(الف) $X(s)$ در صفحه s تنها یک قطب محدود دارد

(ب) $X(s)$ در صفحه s تنها دو قطب محدود دارد

(ج) $X(s)$ در صفحه s بیش از دو قطب محدود دارد.

حل: (الف) ویژگی‌های بیان شده، نمایش دهنده یک سیگنال نوسانی علی دست راستی هستند؛ یک قطب محدود تنها، نمی‌تواند ویژگی نوسانی بودن را تامین نماید، چرا که تنها یک نمایی کاهشی و یا افزایشی را نمایش می‌دهد که به هیچ وجه نوسانی نیست. بنابراین این گزاره با سیگنال $x(t)$ سازگار

نمی‌باشد.

(ب) $X(s)$ در صورتی که دارای دو قطب مزدوج مختلط باشد، می‌تواند خاصیت نوسانی بودن را تامین نماید؛ بدین ترتیب که با تنظیم محل قطب‌های $s_p=\sigma_p\pm j\omega_p$، بگونه‌ای که ω_p، صفرهای $x(t)$ را بدست داده و σ_p پوش $x(t)$ (و در نتیجه ویژگی سوم) را برآورد، می‌توان سازگاری مورد نظر را بدست آورد.

(ج) این گزاره به همان دلیل بیان شده در بند بالا با $x(t)$ سازگار است. در اختیار داشتن بیش از دو قطب محدود، آزادی عمل ما را در انتخاب محل قطب‌ها افزایش می‌دهد، بطوری که می‌توان با ترکیب‌های متنوعی از قطب (و احیاناً صفر) به سازگاری موردنظر رسید.

۹-۱۳ فرض کنید

$$g(t)=x(t)+\alpha x(-t)$$

که در آن

$$x(t)=\beta e^{-t}u(t)$$

و تبدیل لاپلاس $g(t)$ به صورت زیرست

$$G(s)=\frac{s}{s^2-1}\ ,\ \ -1<\Re e\{s\}<1$$

مقدار ثابتهای α و β را تعیین کنید.

حل: ابتدا تبدیل لاپلاس $x(t)$ را بدست می‌آوریم، با توجه به دست راستی بودن $x(t)$ می‌توان نوشت:

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{\beta e^{-t}u(t)\right\}=\frac{\beta}{s+1}\quad ,\quad Re\{s\}>-1$$

حال برای $G(s)$ داریم:

$$G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}=\mathcal{L}\{x(t)+\alpha x(-t)\}=\mathcal{L}\{x(t)\}+\alpha\mathcal{L}\{x(-t)\}=X(s)+\alpha X(-s)$$

$$=\frac{\beta}{s+1}+\frac{\alpha\beta}{-s+1}=\frac{\beta(1-\alpha)s-\beta(1+\alpha)}{s^2-1}\quad ,\quad -1<Re\{s\}<1$$

با مقایسه این $G(s)$ با $G(s)$ داده شده بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\beta(1-\alpha)=1\\ -\beta(1+\alpha)=0\end{cases}\Rightarrow\ \alpha=-1\ ,\ \beta=\frac{1}{2}$$

۹-۱۴ مطلب زیر در مورد سیگنال $x(t)$ و تبدیل لاپلاس $X(s)$ آن داده شده است:

۱. $x(t)$ حقیقی و زوج است.

۲. $X(s)$ چهار قطب محدود دارد، ولی صفر محدود ندارد.

۳. $X(s)$ در $s=\left(\frac{1}{2}\right)e^{j\frac{\pi}{4}}$ یک قطب دارد.

۴. $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=4$

$X(s)$ و ROC آن را تعیین کنید.

حل : می‌دانیم که $X(s)$ را در حالت کلی به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$X(s)=A\frac{\Pi_{i=1}^{M}(s-z_i)}{\Pi_{j=1}^{N}(s-p_j)}$$

که با استفاده از اطلاع (2) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$X(s)=\frac{A}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)}$$

همچنین از اطلاع (3) داریم :

$$p_1=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

با توجه به اطلاع (1)، از حقیقی و زوج بودن $x(t)$ نتیجه می‌گیریم :

$$x(t):Real\ \Rightarrow X(s)=X^*(s^*)$$

که در آن می‌توان چنین نتیجه گرفت که اگر s_0 قطبی از $X(s)$ باشد (یعنی $X(s_0)$ نامحدود باشد)، s_0^* نیز قطب $X(s)$ خواهد بود. در اینصورت با توجه به اینکه p_1 قطب $X(s)$ است، $p_2=p_1^*$ نیز قطب آن خواهد بود :

$$p_2=p_1^*=\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^*=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

همینطور :

$$x(t):even\ \Rightarrow X(s)=X(-s)$$

که از آن می‌توان چنین نتیجه گرفت که اگر s_0 قطبی از $X(s)$ باشد، $-s_0$ نیز قطب $X(s)$ خواهد بود، در اینصورت با توجه به اینکه p_1 و p_2 قطب $X(s)$ هستند، $p_3=-p_1$ و $p_4=-p_2$ نیز قطب آن خواهند بود :

$$p_3=-p_1=-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\quad ,\quad p_4=-p_2=-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

بدین ترتیب برای $X(s)$ داریم :

$$X(s)=\frac{A}{\left(s-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

$$=\ldots=\frac{A}{\left(s^2-\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)\left(s^2+\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)}\quad ,(I)$$

حال برای تعیین A، از اطلاع (4) داریم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt\,\Big|_{s=0}=X(0)=4$$

که با قرار دادن آن در رابطه (I) بدست می‌آوریم :

$$X(0)=\frac{A}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}=4\ \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

همچنین از محدود بودن $X(0)$ می‌توان نتیجه گرفت که $s=0$ در ROCی $X(s)$ قرار دارد که با توجه به اینکه ROC به قطب‌ها محدود می‌شود، خواهیم داشت :

$$Re\{p_3\}<Re\{s\}<Re\{p_1\} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{4}<Re\{s\}<\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۹-۱۵ دو سیگنال دست‌راستی $x(t)$ و $y(t)$ با معادلات دیفرانسیل زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\frac{dx(t)}{dt}=-2y(t)+\delta(t)$$

و

$$\frac{dy(t)}{dt}=2x(t)$$

$Y(s)$ و $X(s)$ و نواحی همگرایی آنها را تعیین کنید.

حل : ابتدا از این دو معادله دیفرانسیل، تبدیل لاپلاس گرفته و داریم :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=\mathcal{L}\left\{-2y(t)+\delta(t)\right\} \Rightarrow sX(s)=-2Y(s)+1 \qquad ,(I)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}=\mathcal{L}\left\{2x(t)\right\} \Rightarrow sY(s)=2X(s) \qquad ,(II)$$

با حل (I) و (II) نسبت به $X(s)$ و $Y(s)$ بدست می‌آوریم :

$$Y(s)=\frac{2}{s^2+4} \qquad ; \qquad X(s)=\frac{s}{s^2+4}$$

باتوجه به اینکه هر دو قطب تبدیل‌های $X(s)$ و $Y(s)$ موهومی خالص $(\pm 2j)$ هستند،و نیزبا توجه به دست راستی بودن $x(t)$ و $y(t)$، ROCی هر دو آن‌ها یک راست-نیمصفحه به صورت زیر خواهد بود :

$$Re\{s\}>0$$

۹-۱۶ سیستم LTI علی S، با پاسخ ضربه $h(t)$ ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر توصیف شده است

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+(\alpha+1)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\alpha(\alpha+1)\frac{dy(t)}{dt}+\alpha^2y(t)=x(t)$$

(الف) اگر

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}+h(t)$$

$G(s)$ چند قطب دارد؟

(ب) به ازای چه مقادیری از α پایداری S تضمین می‌شود؟

حل : (الف) برای پاسخ ضربه سیستم s داریم :

$$\frac{d^3h(t)}{dt^3}+(\alpha+1)\frac{d^2h(t)}{dt^2}+\alpha(\alpha+1)\frac{dh(t)}{dt}+\alpha^2h(t)=\delta(t)$$

حال با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله دیفرانسیل فوق بدست می‌آوریم :

$$s^3H(s)+(\alpha+1)s^2H(s)+\alpha(\alpha+1)sH(s)+\alpha^2H(s)=1$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{1}{s^3+(\alpha+1)s^2+\alpha(\alpha+1)s+\alpha^2}=\frac{1}{(s+1)(s^2+\alpha s+\alpha^2)} \qquad ,(I)$$

از سوی دیگر برای $G(s)$ می‌توان نوشت :

$$G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}+h(t)\right\}=sH(s)+H(s) \Rightarrow G(s)=(s+1)H(s) \qquad , (II)$$

با جایگذاری (I) در (II) می‌نویسیم :

$$G(s)=(s+1)\frac{1}{(s+1)(s^2+\alpha s+\alpha^2)}=\frac{1}{s^2+\alpha s+\alpha^2}$$

به سادگی دیده می‌شود که قطب $s=-1$ توسط صفری در همان محل حذف شده و $G(s)$ تنها دو قطب دارد

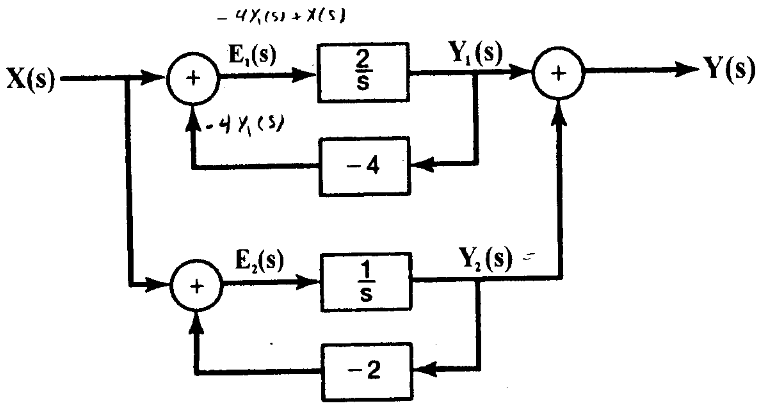
$$\left\{s_{p_1}=s^*_{p_2}=-\frac{\alpha}{2}+j\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} ;$$

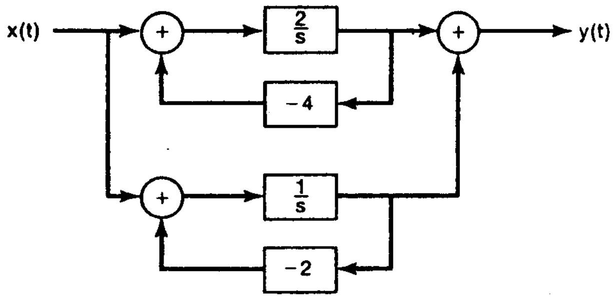
(ب) چون سیستم S علی است، وقتی پایدار خواهد بود که تمام قطب‌هایش در LHP باشند، یعنی بخش حقیقی منفی داشته باشند، در اینصورت :

$$\left[Re\{s_{p_1}\}<0 \quad \& \quad Re\{s_{p_2}\}<0\right] \Rightarrow -\frac{\alpha}{2}<0 \Rightarrow \alpha>0$$

۹-۱۷ سیستم LTI علی S، دارای نمایش جعبه‌ای شکل م۹-۱۷ است. معادله دیفرانسیلی تعیین کنید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ را به هم ارتباط می‌دهد.

حل : این سیستم را در شکل زیر مشاهده می‌کنید:





شکل م ۹-۱۷

با توجه به شکل فوق، ابتدا برای $Y_1(s)$ داریم :

$$\begin{cases} Y_1(s)=\frac{2}{s}E_1(s) \\ E_1(s)=X(s)-4Y_1(s) \end{cases} \Rightarrow Y_1(s)=\frac{2}{s+8}X(s) \quad , \quad (I)$$

به همین ترتیب برای $Y_2(s)$ می‌نویسیم :

$$\begin{cases} Y_2(s)=\frac{1}{s}E_2(s) \\ E_2(s)=X(s)-2Y_2(s) \end{cases} \Rightarrow Y_2(s)=\frac{1}{s+2}X(s) \quad , \quad (II)$$

حال با توجه به روابط (I) و (II) و شکل بالا خواهیم داشت :

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)=\frac{2}{s+8}+\frac{1}{s+2}=\frac{3(s+4)}{(s+2)(s+8)}X(s)$$

و یا :

$$s^2Y(s)+10Y(s)+16Y(s)=3sX(s)+12X(s)$$

بالاخره با اعمال تبدیل عکس تبدیل لاپلاس در رابطه اخیر بدست می‌آوریم :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+10\frac{dy(t)}{dt}+16y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+12x(t)$$

۹–۱۸ سیستم LTI علی نمایش داده شده با مدار RLC بررسی شده در مسئله ۳-۲۰ را در نظر بگیرید.

(الف) $H(s)$ و ناحیه همگرایی آن را تعیین کنید. جواب شما باید با این حقیقت که سیستم علی و پایدارست سازگار باشد.

(ب) با استفاده از نمودار قطب-صفر $H(s)$ و روش هندسی برآورد اندازه تبدیل فوریه تعیین کنید که اندازه تبدیل فوریه تقریباً پایین‌گذر، بالاگذر یا میانگذرست.

(ج) اگر مقدار R به $10^{-3}\Omega$ رسانده شود، $H(s)$ و ناحیه همگرایی آن را بیابید.

(د) بند (ب) را برای $H(s)$ بدست آمده در بند (ج) تکرار کنید.

حل : (الف) با توجه به حل مسئله $(20\text{-}3)$، معادله دیفرانسیل مدار RLC موردنظر بدین صورت است :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

برای پاسخ ضربه سیستم، معادله دیفرانسیل فوق به شکل زیر خواهد بود :

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=\delta(t)$$

و با اعمال تبدیل لاپلاس داریم :

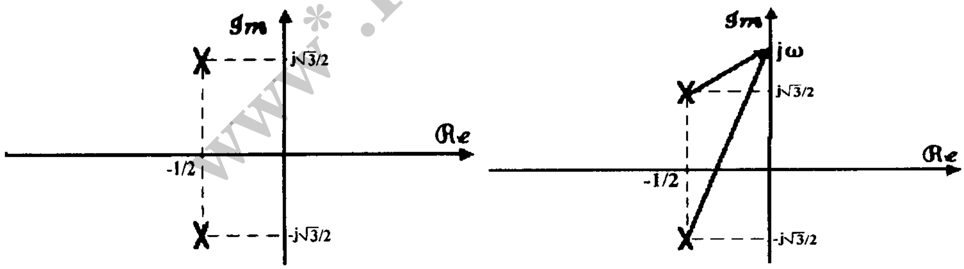
$$s^2H(s)+sH(s)+H(s)=1 \;\Rightarrow\; H(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$

قطب‌های $H(s)$ در نقاط $s_p=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ از صفحه s قرار دارند. از آنجا که سیستم موردنظر سیستمی LTI و علیست، ROCی آن یک راست-نیمصفحه خواهد بود که از چپ به قطب‌های $H(s)$ محدود می‌شود، یعنی :

$$Re\{s\}>Re\{s_p\} \;\Rightarrow\; Re\{s\}>-\frac{1}{2}$$

این نتیجه علی و پایدار بودن سیستم را تایید می‌کند، بدین ترتیب که راست-نیم‌صفحه بودن ROC دست راستی بودن $h(t)$ را نشان می‌دهد (که مشخصه پاسخ ضربه‌های علی است) و قرار داشتن محور محور $j\omega$ درون ناحیه همگرایی $H(s)$ نیز دلیلی بر همگرایی تبدیل فوریه و بنابراین پایداری $h(t)$ می‌باشد.

(ب) نمودار قطب و صفر $H(s)$ فوق، به همراه بردارهای قطب آن در شکل زیر دیده می‌شوند:



با توجه به شکل در فرکانس $\omega=0$ طول هر دو بردار قطب برابر واحد است، ولی با افزایش فرکانس تا $\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$، طول یکی از آن تا $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=3.25$ افزایش یافته و طول دیگری تا $\frac{1}{2}$ کاهش می‌یابد، روشن است که در این فاصله، حاصلضرب طول بردارها چنان تغییر عمده‌ای نمی‌کند (محاسبات نشان می‌دهد که این حاصلضرب در پایین‌ترین مقدارش و در فرکانس‌های $\omega=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌رسد). پس از این با افزایش هر چه بیشتر فرکانس، طول هر دو بردار یکنوا افزایش می‌یابد، بطوری که در $\omega\to\infty$ حاصلضرب آن‌ها بی‌نهایت شده و در نتیجه اندازه پاسخ فرکانسی به صفر می‌رسد. مشخصات فوق بوضوح ویژگی‌های یک فیلتر پایین‌گذر می‌باشند.

(ج) با مراجعه به حل مسئله 3-20، دوباره می‌نویسیم :

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dv_c(t)}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right) v_c(t) = \left(\frac{1}{LC}\right) x(t)$$

حال با جایگذاری $L=1^H$ ، $C=1^F$ ، $R=10^{-3}\ \Omega$ و $v_c(t)=y(t)$ ، داریم :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 10^{-3}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

برای پاسخ ضربه، معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} + 10^{-3}\frac{dh(t)}{dt} + h(t) = \delta(t)$$

که با اعمال تبدیل لاپلاس در آن، می‌نویسیم :

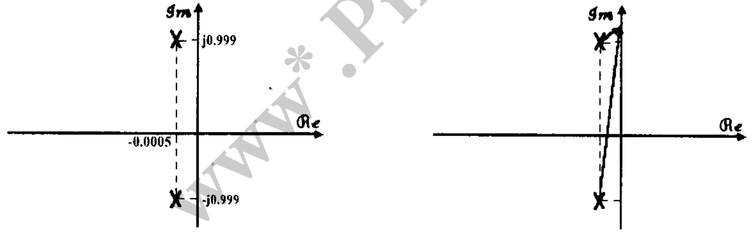
$$s^2 H(s) + 10^{-3} s H(s) + H(s) = 1 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 + 10^{-3} s + 1}$$

قطب‌های $H(s)$ در نقاط $s_p=-0.0005 \pm j0.999$ از صفحه s قرار دارند. از آنجاکه سیستم موردنظر سیستمی LTI و علی می‌باشد، ROCی آن یک راست-نیمصفحه خواهد بود که از چپ به قطب‌های $H(s)$ محدود می‌شود، یعنی :

$$Re\{s\} > Re\{s_p\} \;\Rightarrow\; Re\{s\} > -0.0005$$

باز این نتیجه علی و پایدار بودن سیستم را تایید می‌کند.

(د) نمودار قطب و صفر $H(s)$ فوق را، به همراه بردارهای قطب آن در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



با توجه به شکل فوق در فرکانس $\omega=0$ طول هر دو بردار برابر یک است، ولی با افزایش فرکانس تا $\omega=0.999$، طول یکی از آنها تا حدود 2 افزایش یافته و طول دیگری تا 0.0005 کاهش می‌یابد، آشکار است که در این فاصله، حاصلضرب طول بردارها از 1 تا 10^{-3} شدیداً کاهش یافته و بنابراین دامنه پاسخ فرکانسی در این فاصله تا 1000 برابر افزایش می‌یابد. پس از این با افزایش هر چه بیشتر فرکانس، طول هر دو بردار بطور یکنوا افزایش می‌یابد، بطوری که در $\omega \to \infty$ حاصلضرب آنها بی‌نهایت شده و در نتیجه اندازه پاسخ فرکانسی به صفر می‌رسد. مشخصات فوق بوضوح ویژگیهای یک فیلتر میانگذر می باشند. (توجه شود که اگر بطور دقیق‌تر بررسی کنیم، قله اندازه پاسخ فرکانسی کمی زودتر از فرکانس $\omega=0.999$ رخ می‌دهد؛ ولی باز ویژگی میانگذری تایید می‌شود).

۹-۱۹ تبدیل لاپلاس یکطرفه هر یک از سیگنالهای زیر را یافته، ناحیه همگرایی آنها را بیابید.

(الف) $x(t)=e^{-2t}u(t+1)$

(ب) $x(t)=\delta(t+1)+\delta(t)+e^{-2(t+3)}u(t+1)$

(ج) $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-4t}u(t)$

حل : (الف)

$$\mathscr{X}(s)=\int_{0^-}^{+\infty} e^{-2t}u(t+1)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty} e^{-(s+2)t}dt=\frac{1}{s+2} \qquad , \quad Re\{s\}>-2$$

(ب)

$$\mathscr{X}(s)=\int_{0^-}^{+\infty}\left[\delta(t+1)+\delta(t)+e^{-2(t+3)}u(t+1)\right] e^{-st}dt=0+\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)e^{-s\times 0}dt$$

$$+\int_{0^-}^{+\infty} e^{-2(t+3)}e^{-st}dt=1+e^{-6}\int_{0^-}^{+\infty} e^{-(s+2)t}dt=1+\frac{e^{-6}}{s+2} \qquad ,Re\{s\}>-2$$

(ج) چون به ازای $t\le 0$ داریم $x(t)=0$ و $x(t)$ هیچ تابع تکینی در $t=0$ ندارد، تبدیل‌های یکطرفه و دوطرفه آن یکسان هستند و از جدول 2-9 داریم :

$$\mathscr{X}(s)=X(s)=\mathscr{L}\left\{e^{-2t}u(t)+e^{-4t}u(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{e^{-2t}u(t)\right\}+\mathscr{L}\left\{e^{-4t}u(t)\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{s+2}, Re\{s\}>-2\right\}+\left\{\frac{1}{s+4}, Re\{s\}>-4\right\}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+4} \quad , \quad Re\{s\}>-2$$

۹–۲۰ مدار مسئله ۳–۱۹ را در نظر بگیرید.

(الف) پاسخ حالت صفر مدار را به ازای ورودی جریان $x(t)=e^{-2t}u(t)$ بیابید.

(ب) پاسخ ورودی صفر مدار در $t=0^-$ را به ازای شرط اولیه زیر بیابید

$$y(0^-)=1$$

(ج) خروجی مدار را به ازای ورودی $x(t)=e^{-2t}u(t)$ و شرط اولیه داده شده در بند (ب) بیابید.

حل : (الف) برای معادله دیفرانسیل این سیستم، با مراجعه به حل مسئله 19-3 داریم :

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

حال با اعمال تبدیل لاپلاس یکطرفه به معادله فوق می‌نویسیم :

$$s\mathscr{Y}(s)-\mathscr{Y}(0^-)+\mathscr{Y}(s)=\mathscr{X}(s) \quad , \quad (I)$$

همچنین برای $\mathscr{X}(s)$، با توجه به اینکه $x(t)$ برای $t<0$ برابر صفر است می‌توان نوشت :

$$\mathscr{X}(s)=X(s)=\mathscr{L}\left\{e^{-2t}u(t)\right\}=\frac{1}{s+2} \quad , \quad Re\{s\}>-2$$

در اینصورت برای پاسخ حالت صفر $(y(0^-)=0)$ خواهیم داشت :

$$s\mathscr{Y}(s)+\mathscr{Y}(s)=\mathscr{X}(s)=\frac{1}{s+2}\Rightarrow\mathscr{Y}(s)==\frac{1}{(s+1)(s+2)}\,,Re\{s\}>-1\Rightarrow\mathscr{Y}(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\,,\Re e\{s\}>-1$$

$$\Rightarrow\ y(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

(ب) برای پاسخ ورودی صفر $(x(t)\rightarrow \mathscr{X}(s)=0)$ و به ازای شرط اولیه $y(0^-)=1$، از رابطه (I) خواهیم داشت :

$$s\mathscr{Y}(s)-1+\mathscr{Y}(s)=0\rightarrow \mathscr{Y}(s)=\frac{1}{s+1}\qquad ,\quad Re\{s\}>-1$$

(توجه شود که بدلیل یکطرفه بودن $\mathscr{Y}(s)$ ، ROCی آن یک راست-نیمصفحه می‌باشد)، در اینصورت برای $y(t)$می‌توان به سادگی بدست آورد :

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{Y}(s)\}=e^{-t}u(t)\qquad ,\quad t>0^-$$

توجه شود که عبارت $t>0^-$ در رابطه فوق، بر اعتبار $y(t)$فقط برای $t>0^-$ تاکید دارد، چراکه از لحظات قبل از لحظه $t=0^-$اطلاعی نداریم.

(ج) در این مورد رابطه (I) به صورت زیر خواهد بود :

$$s\mathscr{Y}(s)-1+\mathscr{Y}(s)=\frac{1}{s+2}\Rightarrow \mathscr{Y}(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}+\frac{1}{s+1}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\qquad ,\quad Re\{s\}>-1$$

(دوباره به علت یکطرفه بودن $\mathscr{Y}(s)$، ROCی آن یک راست-نیمصفحه می‌باشد)، حال $y(t)$را می توان بدست آورد:

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{Y}(s)\}=2e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)\ ,\ t>0^-$$

۹-۲۱ تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرایی و نمودار صفر-قطب توابع زمانی زیر را تعیین کنید :

(الف) $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t)$ (ب) $x(t)=e^{-4t}u(t)+e^{-5t}(\sin 5t)u(t)$

(ج) $x(t)=e^{2t}u(-t)+e^{3t}u(-t)$ (د) $x(t)=te^{-2|t|}$

(هـ) $x(t)=|t|\ e^{-2|t|}$ (و) $x(t)=|t|\ e^{2t}u(-t)$

(ز) $x(t)=\begin{cases}1 & ;\ 0\leq t\leq 1\\ 0 & ;\ otherwise\end{cases}$ (ح) $x(t)=\begin{cases}t & ;\ 0\leq t\leq 1\\ 2-t & ;\ 1\leq t\leq 2\\ 0 & ;\ otherwise\end{cases}$

(ط) $x(t)=\delta(t)+u(t)$ (ی) $x(t)=\delta(3t)+u(3t)$

حل : (الف) با توجه به جداول 9-1 و 9-2 داریم :

$$X(s)=\mathscr{L}\left\{e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{e^{-2t}u(t)\right\}+\mathscr{L}\left\{e^{-3t}u(t)\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{s+2}\ ,\ Re\{s\}>-2\right\}+\left\{\frac{1}{s+3}\ ,\ Re\{s\}>-3\right\}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\qquad ,\quad Re\{s\}>-2$$

(ب)

$$X(s)=\mathscr{L}\left\{e^{-4t}u(t)+e^{-5t}(\sin 5t)u(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{e^{-4t}u(t)\right\}+\mathscr{L}\left\{e^{-5t}(\sin 5t)u(t)\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{s+4}, Re\{s\}>-4\right\} + \left\{\frac{5}{(s+5)^2+25}, Re\{s\}>-5\right\} = \frac{1}{s+4} + \frac{5}{(s+5)^2+25} \;,\; Re\{s\}>-4$$

(ج)

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{e^{2t}u(-t)+e^{3t}u(-t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-2(-t)}u(-t)\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-3(-t)}u(-t)\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{-s+2}, Re\{s\}<2\right\} + \left\{\frac{1}{-s+3}, Re\{s\}<3\right\} = \frac{1}{2-s} + \frac{1}{3-s} \;,\; Re\{s\}<2$$

(د)

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{te^{-2|t|}\right\} = \mathcal{L}\left\{te^{-2t}u(t)+te^{2t}u(-t)\right\} = -\mathcal{L}\left\{-te^{-2t}u(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{-te^{-2(-t)}u(-t)\right\}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\left\{e^{-2t}u(t)\right\}\right] - \frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\left\{e^{-2(-t)}u(-t)\right\}\right]$$

$$= -\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right), Re\{s\}>-2\right\} - \left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{-s+2}\right), Re\{s\}<2\right\}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right) - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2-s}\right) \;,\; -2<Re\{s\}<2 = \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{(2-s)^2} \;,\; -2<Re\{s\}<2$$

(هـ)

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{|t|\, e^{-2|t|}\right\} = \mathcal{L}\left\{te^{-2t}u(t)-te^{2t}u(-t)\right\}$$

$$= -\mathcal{L}\left\{-te^{-2t}u(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{-te^{-2(-t)}u(-t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\left\{e^{-2t}u(t)\right\}\right] + \frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\left\{e^{-2(-t)}u(-t)\right\}\right]$$

$$= -\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right), Re\{s\}>-2\right\} + \left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2-s}\right), Re\{s\}<2\right\} = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s-2)^2} \;,\; -2<Re\{s\}<2$$

(و) با توجه به دست چپی بودن این سیگنال، ROCی آن یک چپ-نیمصفحه بوده و داریم :

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{|t|\, e^{2t}u(-t)\right\} = \mathcal{L}\left\{-te^{2t}u(-t)\right\} = \frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\left\{e^{-2(-t)}u(-t)\right\}\right]$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{-s+2}\right) = \frac{1}{(2-s)^2} \;,\; Re\{s\}<2$$

(ز)

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{u(t)-u(t-1)\right\} = \mathcal{L}\left\{u(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{u(t-1)\right\} = \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{(1-e^{-s})}{s}$$

از آنجا که $x(t)$ دارای عمر محدود است، ROCی آن تمام صفحه s می‌باشد.

ح) راحت تر است که ابتدا تبدیل لاپلاس سیگنال $\frac{dx(t)}{dt}$ را بدست آوریم :

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\begin{cases}t & ; 0\le t\le 1\\ 2-t & ; 1\le t\le 2\\ 0 & ; elsewhere\end{cases}=\begin{cases}1 & ; 0<t<1\\ -1 & ; 1<t<2\\ 0 & ; elsewhere\end{cases}=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=\mathcal{L}\left\{u(t)-2u(t-1)+u(t-2)\right\}=\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}-2\mathcal{L}\left\{u(t-1)\right\}+\mathcal{L}\left\{u(t-2)\right\}$$

$$=\frac{1}{s}-2e^{-s}\frac{1}{s}+e^{-2s}\frac{1}{s}=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s}=\frac{(1-e^{-s})^2}{s}\quad ,\quad -\infty<Re\{s\}<\infty$$

در اینصورت با توجه به جدول 9-1، برای تبدیل فوریه $x(t)$ خواهیم داشت :

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]dt\right\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}\quad ,\quad -\infty<Re\{s\}<\infty$$

در بدست آوردن ناحیه همگرایی تبدیل‌های فوق، باز از این حقیقت بهره برده‌ایم که سیگنال‌های $x(t)$ و $\frac{dx(t)}{dt}$، سیگنالهای با عمر محدود و مطلقاً انتگرال‌پذیر می‌باشند و بنابراین ROC تمام صفحه s می‌باشد.

ط)

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{\delta(t)+u(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}+\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}$$

$$=\left\{1\ ,\ -\infty<Re\{s\}<\infty\right\}+\left\{\frac{1}{s}\ ,Re\{s\}>0\right\}=1+\frac{1}{s}\ ,Re\{s\}>0$$

ی)

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{\delta(3t)+u(3t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\delta(3t)\right\}+\mathcal{L}\left\{u(3t)\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{3}\times 1\ ,\ -\infty<Re\left\{\frac{s}{3}\right\}<\infty\right\}+\left\{\frac{1}{3}\times\frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)}\ ,Re\left\{\frac{s}{3}\right\}>0\right\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{s}\ ,\ Re\{s\}>0$$

۹-۲۲ تابع زمانی $x(t)$ متناظر با تبدیل لاپلاسها و نواحی همگرایی داده شده را بیابید.

(الف) $\frac{1}{s^2+9}\ ,\ \Re e\{s\}>0$ (ب) $\frac{s}{s^2+9}\ ,\ \Re e\{s\}>0$

(ج) $\frac{s+1}{(s+1)^2+9}\ ,\ \Re e\{s\}<-1$ (د) $\frac{s+2}{s^2+7s+12}\ ,\ -4<\Re e\{s\}<-3$

(هـ) $\frac{s+1}{s^2+5s+6}\ ,\ -3<\Re e\{s\}<-2$ (و) $\frac{(s+1)^2}{s^2-s+1}\ ,\ \Re e\{s\}>\frac{1}{2}$

(ز) $\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}\ ,\ \Re e\{s\}>-1$

(الف) دیده می‌شود که ROC برای این سیگنال یک راست-نیمصفحه می‌باشد $(Re\{s\}>0)$ ، در اینصورت $x(t)$ سیگنالی دست راستی به صورت زیر خواهد بود :

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{3}[\sin 3t]\ u(t)$$

(ب) به همان دلیل بند (الف) داریم :

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}=[\cos 3t]\ u(t)$$

(ج) دیده می‌شود که ROC برای این سیگنال یک چپ-نیمصفحه بوده و بنابراین $x(t)$ سیگنالی دست‌چپی خواهد بود :

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+9}\right\}=e^t\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$$

$$=-e^t\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(-s)}{(-s)^2+9}\right\}=-e^t\cos(-3t)u(-t)=-e^t\cos 3tu(-t)$$

(د) ابتدا داریم :

$$X(s)=\frac{s+2}{s^2+7s+12}=\frac{-1}{s+3}+\frac{2}{s+4}$$

در اینصورت ناحیه همگرایی داده شده را می‌توان به صورت اشتراک دو نیمصفحه مربوط به هریک از جملات فوق در نظر گرفته و نوشت :

$$X(s)=\left\{\frac{-1}{s+3},Re\{s\}<-3\right\}+\left\{\frac{2}{s+4},Re\{s\}>-4\right\}\Rightarrow x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+3},Re\{s\}<-3\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+4},Re\{s\}>-4\right\}=e^{-3t}u(-t)+2e^{-4t}u(t)$$

(هـ) داریم :

$$X(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$$

حال ناحیه همگرایی داده شده را می‌توان به صورت ناحیه مشترک دو نیمصفحه متعلق به هریک از جملات فوق در نظر گرفته و نوشت :

$$X(s)=\left\{\frac{-1}{s+2},Re\{s\}<-2\right\}+\left\{\frac{2}{s+3},Re\{s\}>-3\right\}\Rightarrow x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2},Re\{s\}<-2\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3},Re\{s\}>-3\right\}=e^{-2t}u(-t)+2e^{-3t}u(t)$$

(ز) با توجه به ROCی داده شده ، $x(t)$ سیگنالی دست راستی بوده و داریم :

$$X(s)=\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}=1+\frac{-3s}{(s+1)^2}=1+\frac{3}{(s+1)^2}-\frac{3}{(s+1)},\quad Re\{s\}>-1$$

$$\Rightarrow x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{1\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+1}\right\}=\delta(t)+3te^{-t}u(t)-3e^{-t}u(t)$$

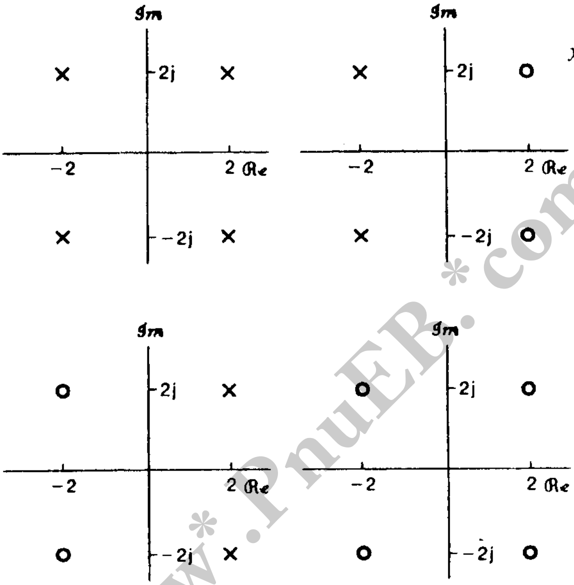
۹-۲۳ برای هر یک از گزاره‌های بیان شده در مورد $x(t)$ و هر یک از چهار نمودار قطب-صفر شکل م۹-۲۳ شرایطی را که ROC باید ارضا کند، تعیین کنید.

۱. $x(t)e^{-3t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است.

۲. $x(t)*\left(e^{-t}u(t)\right)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است.

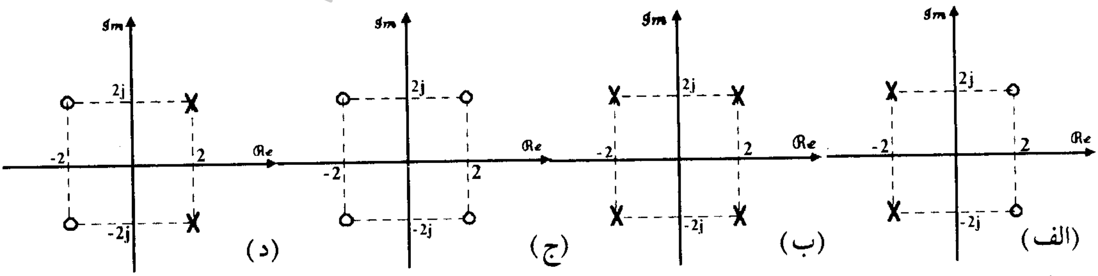
۳. در $t>1$، $x(t)=0$

۴. در $t<-1$، $x(t)=0$



شکل م ۹-۲۳

حل : نمودارهای قطب و صفر مورد نظر را دوباره در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



در اینصورت :

[شرط ۱] : می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای آنکه سیگنال $x(t)e^{-3t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد آن است که تبدیل فوریه همگرا داشته باشد. از طرفی :

$$f\left\{x(t)e^{-3t}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(t)e^{-3t}\right)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-(3+j\omega)t}dt=X(3+j\omega)$$

یعنی برای همگرایی $f\{x(t)e^{-3t}\}$ کافیست $s=3+j\omega$ درون ناحیه همگرایی $X(s)$ باشد. بدین ترتیب :

شکل الف : $x(t)e^{-3t}$ وقتی مطلقاً انتگرال‌پذیر خواهد بود که ROCی آن یک راست-نیمصفحه محدود به قطب‌های $X(s)$ باشد، چرا که فقط در این صورت است که $s=3+j\omega$ درون ناحیه همگرایی $X(s)$ قرار خواهد داشت.

شکل ب : در این مورد نیز ROC یک راست-نیمصفحه محدود به قطب‌های $s_R=2\pm 2j$ خواهد بود، توجه شود که این ROC را نمی‌توان تا محل قطب‌های $s_L=-2\pm 2j$ توسعه داد، چرا که در این حالت قطب‌های s_R درون ناحیه همگرایی واقع خواهند بود که غیرقابل قبول است (ROC شامل قطب‌ها نمی‌باشد).

شکل ج :در این مورد ROC تمام صفحه sاست، زیرا هیچ قطب محددکننده‌ای نداریم.

شکل د : ROC برای این شکل یک راست-نیمصفحه محدود به قطب‌های $X(s)$ می‌باشد، چون تنها در این حالت، $s=3+j\omega$ درون ناحیه همگرایی $X(s)$ واقع خواهد شد.

[شرط ۲] : سیگنال $x(t)*\left(e^{-t}u(t)\right)$ در صورتی مطلقاً انتگرال‌پذیر خواهد بود که تبدیل فوریه‌اش همگرا شود :

$$f\left\{x(t)*\left(e^{-t}u(t)\right)\right\}=f\left\{x(t)\right\}f\left\{e^{-t}u(t)\right\}=X(0+j\omega)\left\{\frac{1}{s+1},Re\{s\}>-1\right\}$$

یعنی برای همگرایی $f\left\{x(t)*\left(e^{-t}u(t)\right)\right\}$ کافیست حداقل $Re\{s\}>-1$ بوده و $X(s)$ در $s=0+j\omega$ همگرا باشد. بدین ترتیب :

شکل الف : $x(t)*\left(e^{-t}u(t)\right)$ وقتی مطلقاً انتگرال‌پذیر خواهد بود که ROCی آن یک راست-نیمصفحه محدود به قطب‌های $X(s)$ باشد.

شکل ب : ROC برای این مورد، نواری میان زوج قطب‌های چپ و راست می‌باشد، زیرا در این حالت $s=0+j\omega$ جزو ناحیه همگرایی بوده و نیز شرط $Re\{s\}>-1$ را برمی‌آورد .

شکل ج : ROC در این شکل تمام صفحه sاست، زیرا هیچ قطب محدودکننده‌ای نداریم.

شکل د : ROC برای این سیگنال یک چپ-نیمصفحه محدود به قطب‌های $X(s)$ می‌باشد، زیرا اولاً $s=0+j\omega$ جزو ناحیه همگرایی بوده و ثانیاً برای مقادیری از s می‌توان شرط $Re\{s\}>-1$ را برآورد.

[شرط ۳] : از آنجا که برای $t>1$، $x(t)=0$ است، $x(t)$ سیگنالی دست‌چپی بوده و در نتیجه ROCی آن یک چپ-نیمصفحه خواهد بود. داریم :

شکل الف : $Re\{s\}<-2$

شکل ب : $Re\{s\}<-2$

شکل ج :در این شکل به دلیل نبودن قطب محدود، ROC تا بی‌نهایت گسترش می‌یابد، $-\infty<Re\{s\}<+\infty$

شکل د : $Re\{s\}<2$

[شرط ۴] با توجه به اینکه برای $t<-1$، $x(t)=0$ است، $x(t)$ سیگنالی دست‌راستی بوده و ROCی آن یک

راست-نیمصفحه می‌باشد، داریم:

شکل الف : $Re\{s\}>-2$

شکل ب : $Re\{s\}>2$

شکل ج : $-\infty<Re\{s\}<+\infty$

شکل د : $Re\{s\}>2$

۹-۲۴ در این مسئله فرض می‌کنیم ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس محور $j\omega$ را شامل می‌شود.

(الف) سیگنال $x(t)$ را با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ و تبدیل لاپلاس $X(s)=s+\frac{1}{2}$ در نظر بگیرید. نمودار قطب-صفر $X(s)$ را رسم کنید. همچنین برداری رسم کنید که طول آن برابر $|X(j\omega)|$ و زاویه آن نسبت به محور حقیقی $\angle X(j\omega)$ باشد.

(ب) با بررسی نمودار قطب-صفر و نمودار برداری بند (الف) تبدیل لاپلاس $X_1(s)$ مربوط به تابع زمانی $x_1(t)$ را به نحوی تعیین کنید که

$$|X_1(j\omega)| = |X(j\omega)|$$

اما

$$x_1(t)\neq x(t)$$

نمودار قطب-صفر و بردارهای متناظر را برای $X_1(j\omega)$ نشان دهید.

(ج) با بررسی نمودار برداری بند (ب) رابطه بین $\angle X(j\omega)$ و $\angle X_1(j\omega)$ را تعیین کنید.

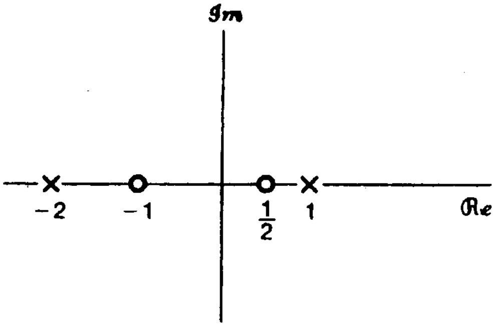
(د) تبدیل لاپلاس $X_2(s)$ را چنان تعیین کنید که

$$\angle X_2(j\omega)=\angle X(j\omega)$$

اما $x_2(t)$ با $x(t)$ متناسب نباشد. نمودار قطب-صفر و بردارهای متناظر با $X_2(j\omega)$ را رسم کنید.

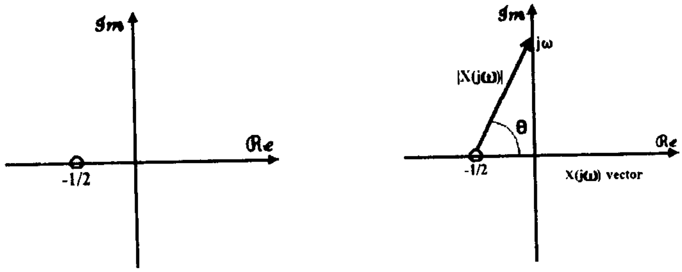
(هـ) برای جواب بند (د) رابطه بین $|X_2(j\omega)|$ و $|X(j\omega)|$ را تعیین کنید.

(و) سیگنال $x(t)$ با تبدیل لاپلاس $X(s)$ را چنان در نظر بگیرید که نمودار قطب-صفر آن مطابق شکل م۹-۲۴ باشد. $X_1(s)$ را چنان تعیین کنید که $|X_1(j\omega)| = |X(j\omega)|$ و تمام قطبها و صفرهای $X_1(s)$ در نیمه چپ صفحه s واقع باشد [یعنی $\Re e\{s\}<0$]. همچنین $X_2(s)$ را به نحوی تعیین کنید که تمام قطبها و صفرهای $X_2(s)$ در نیمه چپ صفحه s باشد و $\angle X_2(j\omega)=\angle X(j\omega)$.



شکل م ۹-۲۴

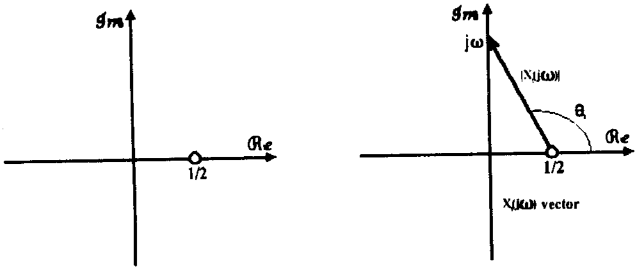
حل : (لف) نمودار قطب و صفر $X(s)$ به همراه بردار $X(j\omega)$ در شکل زیر دیده می‌شوند:



که در آن :

$$\theta = \angle X(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \tan^{-1}(2\omega) \quad , \quad |X(j\omega)| = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

(ب) می‌دانیم با هر تغییری در محل صفر و قطب‌های یک سیستم، شکل زمانی آن دگرگون می‌شود، مثلاً یک امکان برای نمودار قطب و صفرهای $x_1(t)$ جدید می‌تواند به شکل زیر باشد:



که در آن :

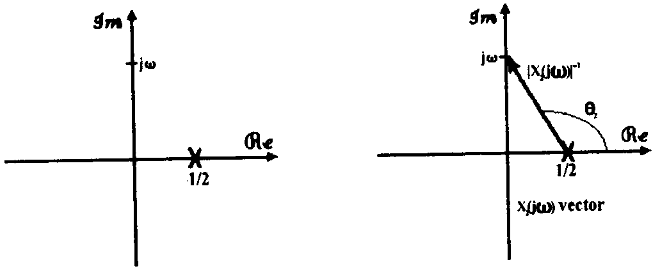
$$|X_1(j\omega)| = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = |X(j\omega)| \quad , \quad \theta_1 = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \pi - \tan^{-1}(2\omega) = \pi - \theta$$

دیده می‌شود که با وجود آنکه $x_1(t) \neq x(t)$, $|X(j\omega)| = |X_1(j\omega)|$ می‌باشد. در اینصورت برای $X_1(s)$، با توجه به نمودار قطب و صفر فوق خواهیم داشت :

$$X_1(j\omega) = s - \frac{1}{2}$$

(ج) پاسخ این مورد در بند (ب) آمده است.

(د) اگر صفر تابع $X_1(j\omega)$ را بایک قطب جایگزین نمائیم نمودار قطب و صفر $X_2(s)$ حاصل به صورت زیر خواهد بود :



که در آن :

$$X_2(s)=\frac{-1}{s-\frac{1}{2}} \quad , \quad \left|X_2(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\left|X_1(j\omega)\right|}$$

$$\angle X_2(j\omega)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)=\pi-\left(\pi-tan^{-1}(2\omega)\right)=tan^{-1}(2\omega)=\angle X(j\omega)$$

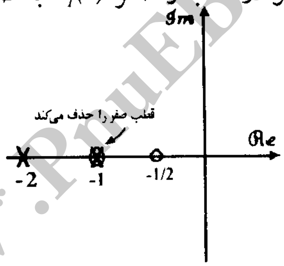
توجه شود که علامت منفی در صورت $X_2(s)$ برای افزودن مقداری فاز ثابت اضافی به تابع تبدیل (برابر π) بکار رفته است.

(هـ) پاسخ این مورد در بند (د) آمده است.

(و) برای $X(s)$، با توجه به نمودار قطب و صفر داده شده داریم :

$$X(s)=\frac{(s+1)\left(s-\frac{1}{2}\right)}{(s+2)(s-1)}$$

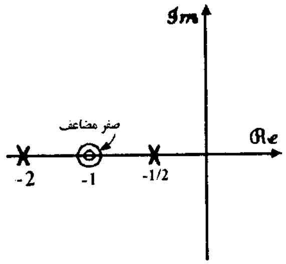
حال برای بدست آوردن $X_1(j\omega)$، باید قطب و صفر طرف راست را به شکلی به سمت چپ صفحه s منتقل کنیم که باز داشته باشیم: $\left|X_1(j\omega)\right| = \left|X(j\omega)\right|$، این کار را می‌توان با مراجعه به بند (ب) به آسانی انجام داد؛ در اینصورت نمودار قطب و صفر $X_1(s)$ به صورت زیر خواهد بود :



که در نهایت $X_1(s)$ به صورت زیر خواهد بود :

$$X_1(s)=\frac{(s+1)\left(s+\frac{1}{2}\right)}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+\frac{1}{2}}{s+2}$$

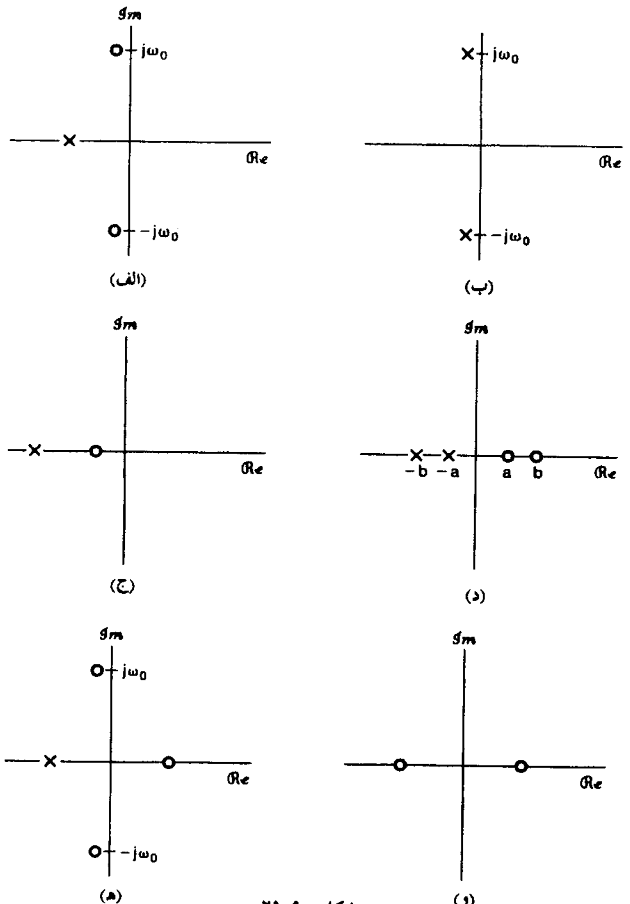
اکنون به $X_2(s)$ می‌پردازیم ، در این مورد نیز مشابه بند (د) عمل می‌کنیم، یعنی صفر وقطب طرف راست را به سمت چپ صفحه s منتقل کرده و به ترتیب با قطب و صفری در همان نقاط جایگزین می‌کنیم، در اینصورت تغییری در فاز $X_2(j\omega)$ نسبت به $X(j\omega)$ نخواهیم داشت. نمودار قطب و صفر $X_2(s)$ به صورت زیر است :



در اینصورت $X_2(s)$ حاصل به صورت زیر خواهد بود :

$$X_2(s)=\frac{(s+1)(s+1)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\ (s+2)}=\frac{(s+1)^2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\ (s+2)}$$

۹-۲۵ با استفاده از روش هندسی بیان شده در بخش *4-9* برای یافتن تبدیل فوریه، اندازه تبدیل فوریه متناظر با هر یک از نمودارهای قطب-صفر شکل م۹-۲۵ را بیابید.



شکل م ۹-۲۵

حل : (شکل الف) : در این شکل ، در فرکانس $\omega=0$ طول بردار قطب کوچکتر از بردارهای صفر رسم شده، می‌باشد، با افزایش فرکانس طول بردار قطب کوچکتر می‌شود در حالی که از دو بردار صفر طول یکی کوچکتر شده و طول دیگری افزایش می‌یابد در اینصورت با فرض جبران نسبی تغییرات طول بردارهای صفر توسط همدیگر اندازه تبدیل فوریه تحت تاثیر افزایش طول بردار قطب کاهش خواهد یافت، همچنین با افزایش بیشتر فرکانس، طول هر سه بردار به طور یکنوا افزایش خواهند یافت، در $\omega\to\infty$ طول سه بردار یکسان بوده و به ∞ میل خواهند کرد، در اینصورت :

$$\lim_{\omega\to\infty} \left| H(j\omega) \right| \propto \frac{\omega\times\omega}{\omega} = \omega$$

(شکل ب) در این مورد در فرکانس $\omega=0$ طول دو بردار قطب یکسان است، با افزایش فرکانس طول یکی از آنها کوچکتر شده و طول دیگری بزرگتر می‌شود، با این وجود و با توجه به نزدیکی زیاد قطب‌ها به محور موهومی، در حوالی قطب‌ها طول یکی از بردارهای قطب بسیار بیشتر از افزایش طول بردار قطب دیگر کاهش می‌یابد بنابراین افزایشی را در دامنه تابع تبدیل فوریه مشاهده خواهیم کرد. با افزایش بیشتر ω طول هر دو بردار بطور یکنوا کاهش می‌یابد. در فرکانس‌های $\omega\to\infty$ طول هر دو بردار یکی بوده به ω میل می‌کنند، در نتیجه :

$$\lim_{\omega\to\infty} \left| H(j\omega) \right| \propto \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\omega\times\omega} = 0$$

(شکل ج) در این شکل در فرکانس $\omega=0$، طول بردار صفر کوچکتر از بردار قطب می‌باشد ولی با افزایش ω هر دو بردار بطور یکنوا افزایش می‌یابند بطوری که در $\omega\to\infty$، طول بردار صفر با طول بردار قطب یکی خواهد بود. بدین ترتیب با افزایش فرکانس از $\omega=0$ دامنه پاسخ فرکانسی به طور یکنوا افزایش می‌یابد تا در $\omega\to\infty$ به مقدار ثابتی برسد.

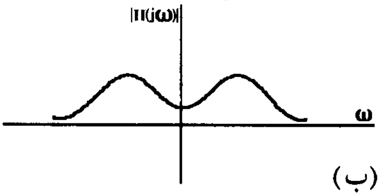
(شکل د) در این شکل طول بردارهای صفر وقطب همواره دو به دو برابر بوده و بنابراین دامنه پاسخ فرکانسی آن دارای مشخصه یک فیلتر تمام‌گذر می‌باشد.

(شکل هـ) در این حالت طول بردار قطب سمت راست همواره با طول بردار صفر سمت چپ برابر بوده و در نتیجه این قطب و صفر در تغییرات دامنه نقشی ندارند و تنها کافیست تاثیرات دو صفر مختلط را در نظر بگیریم. در فرکانس $\omega=0$ طول دو بردار صفر رسم شده برابرند، با افزایش فرکانس و به علت نزدیکی زیاد این دو صفر به محور موهومی طول یکی از بردارهای صفر سریعتر از افزایش طول بردار صفر دیگر کاهش می‌یابد، بدین ترتیب دامنه پاسخ فرکانسی رفته‌رفته کوچکتر می‌شود. پس از این مرحله با افزایش بیشتر ω طول هر دو بردار صفر بطور یکنوا افزایش می‌یابد و بنابراین دامنه پاسخ فرکانسی نیز بطور یکنوا افزایش خواهد یافت در $\omega\to\infty$ طول هر دو بردار صفر به ω میل می‌کند و داریم :

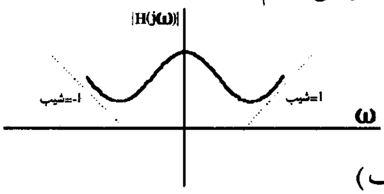
$$\lim_{\omega\to\infty} \left| H(j\omega) \right| \propto \omega\times\omega = \omega^2$$

(شکل و) در این شکل نیز با افزایش فرکانس، طول بردارهای صفر بطور یکنوا افزایش می‌یابند بطوری که در فرکانس‌های $\omega\to\infty$ دامنه پاسخ فرکانسی با نرخ ω^2 افزایش خواهد یافت.

اندازه‌های تبدیل فوریه بررسی‌شده در بالا در شکل زیر و بطور تقریبی رسم شده‌اند :

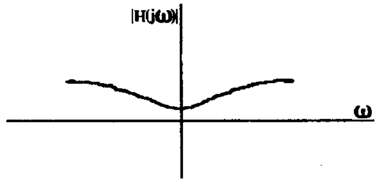


(ب)

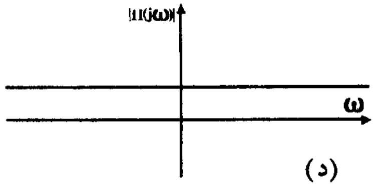


(الف)

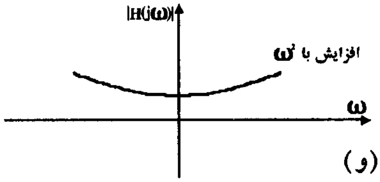
(ج)



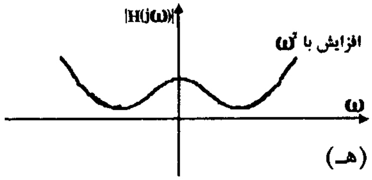
(د)



(و)



(هـ)



۹-۲۶ سیگنال $y(t)$ با دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به صورت زیر مربوط شده است

$$y(t)=x_1(t-2)*x_2(-t+3)$$

که در آن

$$x_2(t)=e^{-3t}u(t) \quad , \quad x_1(t)=e^{-2t}u(t)$$

با استفاده از رابطه

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \;, \; \Re e\{s\}>-a$$

و خواص تبدیل لاپلاس، $Y(s)$ [تبدیل لاپلاس $y(t)$] را بیابید.

حل :

$$Y(s)=\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{x_1(t-2)*x_2(-t+3)\right\}$$

خاصیت کانولوشن :

$$=\mathcal{L}\left\{x_1(t-2)\right\}.\mathcal{L}\left\{x_2(-t+3)\right\}$$

خاصیت جابجایی زمانی :

$$=\left[e^{-2s}\mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}\right]\left[e^{-3s}\mathcal{L}\left\{x_2(-t)\right\}\right]$$

$$=e^{-5s}\mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}.\mathcal{L}\left\{x_2(-t)\right\}$$

خاصیت تغییر مقیاس زمانی :

$$=e^{-5s}\left\{\frac{1}{s+2}\,,Re\{s\}>-2\right\}.\left\{\frac{1}{-s+3}\,,Re\{-s\}>-3\right\}$$

$$=\frac{-e^{-5s}}{(s+2)(s-3)} \quad , \quad -2<Re\{s\}<3$$

۹-۲۷ در مورد سیگنال حقیقی $x(t)$ و تبدیل لاپلاس $X(s)$ آن ۵ مورد زیر بیان شده است :

۱. $X(s)$ دقیقاً دو قطب دارد.

۲. $X(s)$ در صفحه s صفر محدود ندارد.

۳. $X(s)$ در $s=-1+j$ قطب دارد.

۴. مطلقاً انتگرال‌پذیر نیست.

۵. $X(0)=8$

$X(s)$ و ناحیه همگرایی‌اش را تعیین کنید.

حل : از اطلاع (1) می‌دانیم که $X(s)$ دقیقاً دو قطب دارد، با توجه به اطلاع (3) معلوم می‌شود که یکی از قطب‌ها در $s_1=-1+j$ قرار دارد ولی از آنجا که سیگنال $x(t)$ حقیقی است، مزدوج این قطب نیز باید در $X(s)$ باشد، بنابراین قطب دیگر در $s_2=s_1^*=-1-j$ واقع است. حال با توجه به اینکه سیگنال $x(t)$ صفر محدودی ندارد (اطلاع (2)) می‌توان نوشت :

$$X(s)=\frac{M}{(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{M}{(s+1-j)(s+1+j)}=\frac{M}{s^2+2s+2}$$

با مراجعه به اطلاع (5) داریم :

$$X(0)=\frac{M}{2}=8 \;\Rightarrow M=16$$

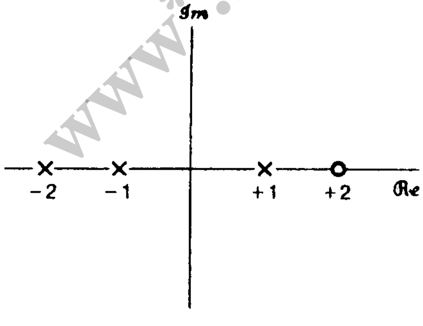
از اطلاع (4) در می‌یابیم که $x(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر نمی‌باشد، یعنی تبدیل فوریه‌اش همگرا نمی‌شود، این بدان معنی است که محور موهومی درون ROCی $X(s)$ قرار ندارد و از آنجاکه ROC به قطب‌های $X(s)$ محدود می‌شود، تنها می تواند یک چپ-نیمصفحه در صفحه s باشد؛ در نهایت داریم :

$$X(s)=\frac{16}{s^2+2s+2} \qquad , \qquad Re\{s\}<-1$$

۹-۲۸ یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$، و نمودار قطب-صفر شکل م۹-۲۸ در نظر بگیرید.

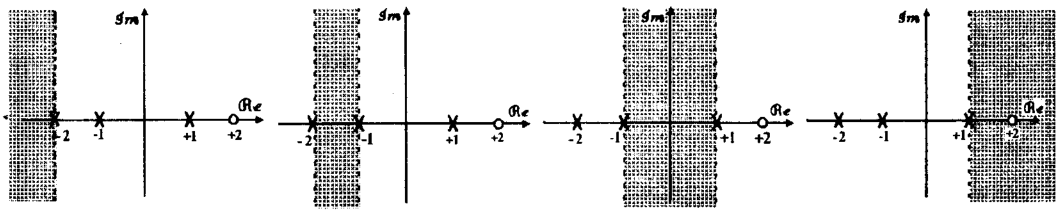
(الف) تمام ROCهای ممکن متناظر با این نمودار قطب-صفر را نشان دهید.

(ب) برای هر یک از ROCهای مشخص شده در بند (الف) تعیین کنید سیستم پایدار و یا علی هست یا نه.



شکل م ۹-۲۸

حل : (الف) برای این نمودار قطب و صفر چهار ROCی زیر را می‌توان در نظر گرفت :



(a) (b) (c) (d)

(ب) به ازای ROCی شکل (a) سیستم نه علی است و نه پایدار؛ به این دلیل علی نیست که ROCی آن یک چپ-نیمصفحه بوده و $h(t)$ متناظر با آن دست‌چپی می‌باشد. پایدار هم نیست، چراکه شامل محور موهومی نمی‌باشد.

به ازای ROCی شکل (b) سیستم نه علی است و نه پایدار؛ علی نیست بدین دلیل که ROCی نشان داده شده یک راست-نیمصفحه نمی‌باشد، پایدار هم نیست، زیرا ROCی موردنظر شامل محور موهومی نیست.

به ازای ROCی شکل (c)، سیستم علی نبوده ولی پایدار است. زیرا این ROC شامل محور موهومی می‌باشد.

به ازای ROCی شکل (d)، سیستم علی بوده ولی پایدار نمی‌باشد. علی بودن سیستم بدین سبب است که ROCی آن یک راست-نیمصفحه است. عدم پایداری آن به علت واقع نبودن محور موهومی در ROC می‌باشد.

۹-۲۹ یک سیستم LTI با ورودی $x(t)=e^{-t}u(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)=e^{-2t}u(t)$ در نظر بگیرید.

(الف) تبدیل لاپلاس $x(t)$ و $h(t)$ را تعیین کنید.

(ب) با استفاده از خاصیت کانولوشن، $Y(s)$ تبدیل لاپلاس خروجی $y(t)$ را بیابید.

(ج) به کمک تبدیل لاپلاس $y(t)$ بدست آمده در بند (ب)، $y(t)$ را پیدا کنید.

(د) درستی نتیجه بند (ب) را با کانولوشن $x(t)$ و $h(t)$ تعیین کنید.

حل : (الف)

$$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}=\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\}=\frac{1}{s+1} \quad , Re\{s\}>-1$$

$$H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}=\frac{1}{s+2} \quad , Re\{s\}>-2$$

(ب) با توجه به LTI بودن سیستم، $y(t)=x(t)*h(t)$ بوده و داریم :

$$Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{x(t)*h(t)\}=\mathcal{L}\{x(t)\}.\mathcal{L}\{h(t)\}=X(s)H(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad Re\{s\}>-1$$

(ج)

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}, Re\{s\}>-1\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \ , Re\{s\}>-1\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}, Re\{s\}>-1\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}, Re\{s\}>-2\right\}=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)=\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t)$$

(د) با محاسبه مستقیم کانوولوشن $x(t)*h(t)$ خواهیم داشت :

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\tau}u(\tau)\right)\left(e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)\right)d\tau$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}.e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau) = \begin{cases} e^{-t}-e^{-2t} & ; t\geq 0 \\ 0 & ; t<0 \end{cases} = \left[e^{-t}-e^{-2t}\right] u(t)$$

که همان نتیجه بندهای (ب) و (ج) می‌باشد.

۹-۳۰ پاسخ فشارسنجی که می‌توان آن را با یک سیستم LTI مدل کرد به ورودی پله واحد خروجی زیر

$$\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right) u(t)$$

را ایجاد می‌کند. پاسخ این سیستم به یک ورودی $x(t)$ عبارت است از

$$\left(2-3e^{-t}+e^{-3t}\right) u(t)$$

فشار ورودی واقعی را که این خروجی را ایجاد کرده است، بیابید.

حل : برای پاسخ پله این سیستم می‌توان نوشت :

$$s(t)=u(t)*h(t)= \left(1-e^{-t}-te^{-t}\right) u(t)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین رابطه فوق خواهیم داشت :

$$\mathcal{L}\left\{u(t)*h(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right) u(t)\right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\}.\mathcal{L}\{h(t)\}=\mathcal{L}\{u(t)\}+\mathcal{L}\left\{-e^{-t}u(t)\right\}+\mathcal{L}\left\{-te^{-t}u(t)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s}H(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{1}{s(s+1)^2} \Rightarrow H(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\ , Re\{s\}>-1$$

از طرفی برای تبدیل لاپلاس سیگنال خروجی $y(t)= \left(2-3e^{-t}+e^{-3t}\right) u(t)$ داریم :

$$Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\left\{\left(2-3e^{-t}+e^{-3t}\right) u(t)\right\} = \frac{2}{s}-\frac{3}{s+1}+\frac{1}{s+3}=\frac{6}{s(s+1)(s+3)}\quad , \quad Re\{s\}>-1$$

از سوی دیگر می‌توان نوشت :

$$Y(s)=X(s)H(s) \Rightarrow X(s)=\frac{Y(s)}{H(s)}=\frac{\left(\frac{6}{s(s+1)(s+3)}\right)}{\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)}=\frac{6(s+1)}{s(s+3)}\quad , \quad Re\{s\}>0$$

و بدین ترتیب، با اعمال تبدیل عکس لاپلاس می‌توان $y(t)$ را بدست آورد :

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s+1)}{s(s+3)}\ , Re\{s\}>0\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s}+\frac{4}{s+3}\right)\ , Re\{s\}>0\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}\ , Re\{s\}>0\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+3}\ , Re\{s\}>-3\right\}=2u(t)+4e^{-3t}u(t)=2\left(1+2e^{-3t}\right) u(t)$$

۹-۳۱ سیستم LTI پیوسته در زمانی در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن با معادله دیفرانسیل زیر به هم مرتبط شده باشند

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)$$

فرض کنید $X(s)$ و $Y(s)$ به ترتیب تبدیل لاپلاس $x(t)$ و $y(t)$ و $H(s)$ تبدیل لاپلاس $h(t)$ پاسخ ضربه سیستم است.

(الف) $H(s)$ را به صورت نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s بیابید. نمودار قطب-صفر $H(s)$ را رسم کنید.

(ب) $h(t)$ را در هر یک از سه حالت زیر تعیین کنید

۱. سیستم پایدار است.

۲. سیستم علی است.

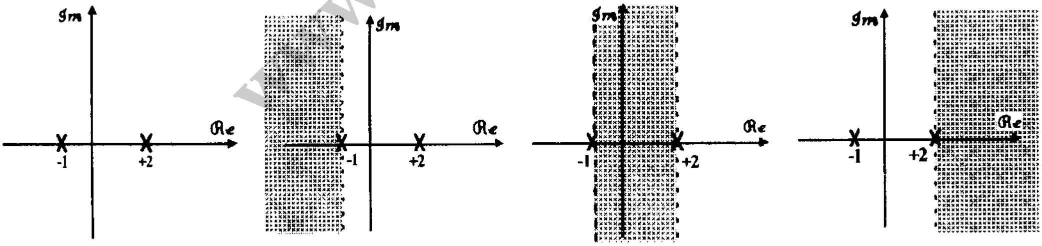
۳. سسیتم نه علی و نه پایدار است.

حل: (الف) با اعمال تبدیل لاپلاس به طرفین معادله دیفرانسیل سیستم می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}-\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)\right\}=\mathcal{L}\{x(t)\}\Rightarrow s^2Y(s)-sY(s)-2Y(s)=X(s)$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2-s-2}=\frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

نمودار قطب و صفر این سیستم به همراه سه ROCی ممکن برای آن در شکل زیر نشان داده شده‌اند:



(a) (b) (c) (d)

(ب-۱) اگر بخواهیم سیستم پایدار باشد، باید تبدیل فوریه آن همگرا شود، به بیان دیگر محور موهومی باید در ROCی $H(s)$ قرار داشته باشد؛ از سه امکان نشان داده شده در شکل بالا تنها ROCی شکل (c) این ویژگی را داراست، بنابراین در این حالت داریم:

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\ ,\ -1<Re\{s\}<2\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s+1)}\ ,\ -1<Re\{s\}<2\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s-2}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+1}\ ,\ -1<Re\{s\}<2\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s-2}\ ,Re\{s\}<2\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+1}\ ,Re\{s\}>-1\right\}=-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

(ب-۲) پاسخ ضربه سیستم علی باید سیگنالی دست‌راستی باشد: در اینصورت ROCی متناظر با آن یک راست-نیمصفحه (شکل (d)) خواهد بود، و می‌توان نوشت :

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\ ,Re\{s\}>2\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s-2}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+1}\ ,Re\{s\}>2\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s-2}\ ,Re\{s\}>2\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+1}\ ,Re\{s\}>-1\right\}=\frac{1}{3}e^{2t}u(t)-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

(ب-۳) ROCی نشان داده شده در شکل (b) مشخص‌کننده سیستمی غیرعلی و ناپایدار است؛ علی نبودن سیستم با توجه به چپ-نیمصفحه بودن ROC (و بنابراین دست چپی بودن $h(t)$) آشکار است، ناپایداری سیستم نیز با توجه به قرار نداشتن محور موهومی درون ROCی نشان داده شده در این شکل روشن می‌شود. بنابراین $h(t)$ بدینصورت خواهد بود :

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s),Re\{s\}<-1\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s-2}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+1}\ ,Re\{s\}<-1\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s-2}\ ,Re\{s\}<2\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+1}\ ,Re\{s\}<-1\right\}=-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$$

۹-۳۲ یک سیستم LTI علی با پاسخ ضربه $h(t)$ خواص زیر را دارد :

۱. خروجی سیستم به ازای ورودی $x(t)=e^{2t}$ برابر $y(t)=\left(\frac{1}{6}\right)e^{2t}$ است.

۲. پاسخ ضربه سیستم معادله دیفرانسیل زیر را ارضا می‌کند

$$\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=\left(e^{-4t}\right)u(t)+bu(t)$$

که b یک عدد ثابت مجهول است.

با توجه به معلومات فوق تابع تبدیل $H(s)$ این سیستم را پیدا کنید. در جواب شما نباید ثابت مجهول وجود داشته باشد، یعنی ثابت b نباید در جواب شما وجود داشته باشد.

حل : از خاصیت (1) روشن می‌شود که سیگنال $x(t)=e^{2t}$ یک تابع ویژه سیستم می‌باشد، یعنی :

$$y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}=H(s)e^{st}\big|_{s=2}=H(2)e^{2t} \Rightarrow H(2)=\frac{1}{6} \quad , (I)$$

بنابراین $H(2)$ مقدار ویژه سیگنال $x(t)=e^{2t}$ می‌باشد.

حال از طرفین معادله دیفرانسیل سیستم (خاصیت (2)) تبدیل لاپلاس گرفته و داریم :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\left(e^{-4t}\right)u(t)+bu(t)\right\}$$

$$\Rightarrow sH(s)+2H(s)=\frac{1}{s+4}+\frac{b}{s} \Rightarrow H(s)=\frac{(b+1)s+4b}{s(s+2)(s+4)} \ , (II)$$

که با جایگذاری از رابطه (I) خواهیم داشت :

$$H(2)=\frac{2(b+1)+4b}{2\times4\times6}=\frac{1}{6} \Rightarrow b=1$$

بالاخره با جایگذاری این مقدار b در رابطه (II) بدست می‌آوریم :

$$H(s)=\frac{2s+4}{s(s+2)(s+4)}=\frac{2}{s(s+4)}$$

۹-۳۳ تابع سیستم یک سیستم LTI علی عبارت است از

$$H(s)=\frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

پاسخ $y(t)$ را به ازای ورودی زیر بیابید و رسم کنید

$$x(t)=e^{-|t|} \ , \ -\infty<t<\infty$$

حل : ابتدا $X(s)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{e^{-|t|}\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{t}u(-t)+e^{-t}u(t)\right\}=\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{s+1}=\frac{-2}{(s-1)(s+1)} \ , -1<Re\{s\}<1$$

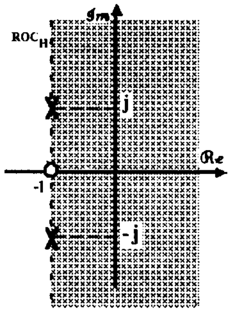
در اینصورت $Y(s)$ چنین خواهد بود :

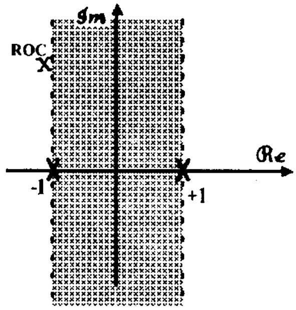
$$Y(s)=X(s)H(s)=\frac{-2}{(s-1)(s+1)}\times\frac{(s+1)}{s^2+2s+2}=\frac{-2}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$

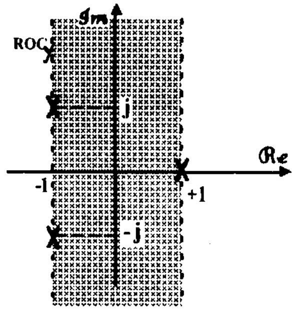
می‌دانیم که برای بدست آوردن $y(t)$ دانستن $Y(s)$ تنها کافی نیست، بلکه ناحیه همگرایی $Y(s)$ نیز باید مشخص شود؛ این ناحیه همگرایی از اشتراک نواحی همگرایی $X(s)$ و $H(s)$ بدست می‌آید. با توجه به علی بودن $H(s)$، ROC آن یک راست-نیمصفحه است که از چپ به قطب‌های $H(s)$ محدود می‌شود، یعنی داریم : $Re\{s\}>-1$؛ حال برای ناحیه همگرایی $Y(s)$ می‌توان نوشت :

$$ROC_Y = ROC_X \cap ROC_H = \{-1<Re\{s\}<1\} \cap \{Re\{s\}>-1\} \quad , \; -1<Re\{s\}<1$$

این سه ROC را در شکل زیر مشاهده می‌کنید:







با بسط $Y(s)$ به کسرهای جزئی داریم :

$$Y(s) = \frac{-2}{(s-1)(s^2+2s+2)} = \frac{\left(\frac{1}{1+2j}\right)}{s+1-j} + \frac{\left(\frac{1}{1-2j}\right)}{s+1+j} + \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)}{s-1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\;,\; -1<Re\{s\}<1\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{1+2j}\right)}{s+1-j} + \frac{\left(\frac{1}{1-2j}\right)}{s+1+j} + \frac{\left(\frac{-2}{5}\right)}{s-1}\;,\; -1<Re\{s\}<1\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{1+2j}\right)}{s+1-j}\;,\; Re\{s\}>-1\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{1-2j}\right)}{s+1+j}\;,\; Re\{s\}>-1\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)}{s-1}\;,\; Re\{s\}<1\right\}$$

$$= \frac{1}{1+2j}e^{-(1-j)t}u(t) + \frac{1}{1-2j}e^{-(1+j)t}u(t) + \frac{2}{5}e^{t}u(-t) = \ldots = e^{-t}\left[\frac{2}{5}\cos \omega t + \frac{4}{5}\sin \omega t\right]u(t) + \frac{2}{5}e^{t}u(-t)$$

۹–۳۴ اطلاعات زیر در مورد یک سیستم LTI علی و پایدار با پاسخ ضربه $h(t)$ و تابع تبدیل $H(s)$ داده شده است :

۱. $H(1)=0.2$.

۲. خروجی به ازای ورودی $u(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیرست.

۳. خروجی به ازای ورودی $tu(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر نیست.

۴. سیگنال $\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t)$ عمر محدودی دارد.

۵. $H(s)$ تنها یک صفر در بینهایت دارد.

$H(s)$ و ناحیه همگرایی‌اش را تعیین کنید.

حل : از آنجاکه سیستم علی و پایدار است، ROCی آن یک راست–نیمصفحه بوده و ضمناً هیچ قطبی در

RHP ندارد. از اطلاع *(5)* می‌دانیم که یکی از صفرهای *H(s)* در بی‌نهایت قرار دارد، بنابراین تعداد قطب‌های محدود *H(s)* یکی از تعداد صفرهای محدود آن بیشتر است. از اطلاع *(2)* دیده می‌شود که خروجی سیستم به ازای ورودی *u(t)* مطلقاً انتگرال‌پذیر است، این در صورتی خواهد بود که *H(s)* حداقل یک صفر در *s=0* داشته باشد (یعنی : *H(s)=sG(s)*) در غیر اینصورت :

$$Y(s)=X(s)H(s)=\frac{1}{s}H(s)$$

و *Y(s)* قطبی در *s=0* خواهد داشت و بنابراین محور موهومی جزو *ROC* نبوده و *y(t)* مطلقاً انتگرال‌پذیر نخواهد بود. از اطلاع *(3)* می‌بینیم که خروجی سیستم به ازای ورودی *tu(t)* مطلقاً انتگرال‌پذیر نمی‌باشد، این در صورتی درست است که *H(s)* حداکثر یک صفر در *s=0* داشته باشد، در اینصورت :

$$Y(s)=X(s)H(s)=\frac{1}{s^2}H(s)$$

حتماً قطبی در *s=0* خواهد داشت. این مسئله محور موهومی را از *ROC* خارج کرده و موجب می‌شود تا *y(t)* مطلقاً انتگرال‌پذیر نباشد. با توجه به مطالب قبلی نتیجه می‌گیریم که *H(s)* دقیقاً یک صفر در *s=0* دارد. از اطلاع *(4)* می‌دانیم که سیگنال $\frac{d^2h(t)}{dt^2}+2\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)$ عمر محدودی دارد، این معادل آن است که بگوئیم :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2h(t)}{dt^2}+2\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)\right\} = \left(s^2+2s+2\right)\,H(s)$$

در تمام صفحه *s* همگراست. با توجه به اینکه *ROC*ی *H(s)* یک راست-نیمصفحه است نتیجه می‌شود که صفرهای $\left(s^2+2s+2\right)$ با ضرب در *H(s)* قطب‌های آن را حذف کرده و موجب گسترش ناحیه همگرایی *H(s)* تا ∞- می‌شوند، بدین ترتیب *H(s)* حتماً و تنها در محل صفرهای $\left(s^2+2s+2\right)$ دارای دو قطب می‌باشد؛ با توجه به بحث‌های انجام گرفته *H(s)* را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$H(s)=\frac{Ms}{s^2+2s+2} \quad , \quad Re\{s\}>-1$$

حال برای محاسبه *M* از اطلاع *(1)* داریم :

$$H(1)=\frac{M\times 1}{1+2+2}=0.2 \quad \Rightarrow \quad M=1$$

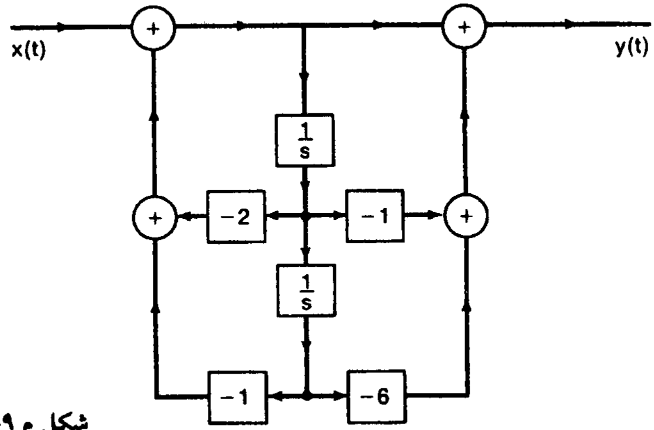
در نهایت داریم :

$$H(s)=\frac{s}{s^2+2s+2} \quad , \quad Re\{s\}>-1$$

۹-۳۵ ورودی *x(t)* و خروجی *y(t)* یک سیستم *LTI* علی توسط نمایش جعبه‌ای شکل م۹-۳۵ به هم مربوط می‌شوند.

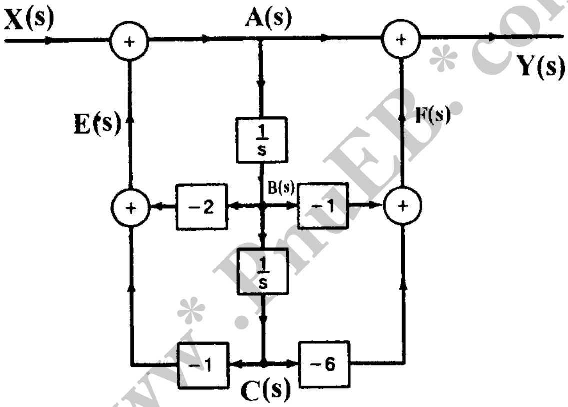
(الف) معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده *y(t)* و *x(t)* را بیابید.

(ب) آیا این سیستم پایدارست؟



شکل م ۹-۳۵

حل : (الف) نمودار جعبه‌ای این سیستم را دوباره در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



با توجه به شکل فوق می‌توان روابط زیر را استخراج نمود :

$$A(s)=X(s)+E(s) \quad ; \quad E(s)=-2B(s)-C(s)$$

$$B(s)=\frac{1}{s}A(s) \quad ; \quad F(s)=-B(s)-6C(s)$$

$$C(s)=\frac{1}{s}B(s) \quad ; \quad Y(s)=A(s)+F(s)$$

با حذف $A(s)$ ، $B(s)$ ، $C(s)$ ، $E(s)$ و $F(s)$ میان روابط فوق، خواهیم داشت :

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^2-s-6}{s^2+2s+1}$$

یا :

$$\left(s^2+2s+1\right)\ Y(s)=\ \left(s^2-s-6\right)\ X(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}-\frac{dx(t)}{dt}-6x(t)$$

(ب) با توجه به اینکه سیستم علی بوده و تمام قطبهایش در سمت چپ صفحه s قرار دارند $(s_p=\pm 1)$، پایدار نیز خواهد بود.

۹-۳۶ در این مسئله یافتن نمایشهای جعبه‌ای متفاوت سیستم LTI علی S، با ورودی $x(t)$، خروجی $y(t)$، و تابع تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$H(s)=\frac{2s^2+4s-6}{s^2+3s+2}$$

برای یافتن نمایش جعبه‌ای مستقیم S، ابتدا سیستم LTI علی S_1 با ورودی $x(t)$ و تابع سیستم زیر را در نظر می‌گیریم

$$H_1(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

اگر خروجی سیستم S_1 را با $y_1(t)$ نشان دهیم، نمایش مستقیم S_1 به صورت شکل م۹-۳۶ به دست می‌آید. سیگنالهای $e(t)$ و $f(t)$ مشخص شده در شکل، ورودیهای انتگرالگیرها را نشان می‌دهد.

(الف) $y(t)$ را به صورت ترکیب خطی $y_1(t)$، $\frac{dy_1(t)}{dt}$ و $\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}$ بیان کنید.

(ب) $\frac{dy_1(t)}{dt}$ و $f(t)$ چه رابطه‌ای دارند؟

(ج) $\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}$ و $e(t)$ چه رابطه‌ای دارند؟

(د) $y(t)$ را به صورت ترکیب خطی $e(t)$، $f(t)$ و $y_1(t)$ بیان کنید.

(هـ) با استفاده از نتایج بندهای پیش، نمایش جعبه‌ای مستقیم S_1 را تعمیم داده، نمایش جعبه‌ای S را بیابید.

(و) با توجه به این که

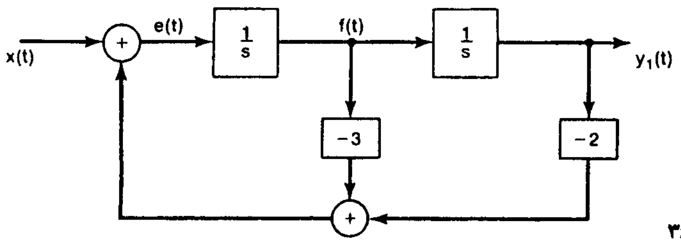
$$H(s)=\left(\frac{3(s-1)}{s+2}\right)\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

نمایش جعبه‌ای S را به صورت ترکیب سری دو زیر-سیستم رسم کنید.

(ز) با توجه به این که

$$H(s)=2+\frac{6}{s+2}-\frac{8}{s+1}$$

نمایش جعبه‌ای S را به صورت ترکیب موازی سه زیر-سیستم رسم کنید.



شکل م ۹-۳۶

حل : (الف) می‌نویسیم :

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2s^2+4s-6}{s^2+3s+2}=\left(2s^2+4s-6\right)H_1(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)=\left(2s^2+4s-6\right)\left(X(s)H_1(s)\right)=\left(2s^2+4s-6\right)Y_1(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\Rightarrow y(t)=2\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}+4\frac{dy_1(t)}{dt}-6y_1(t)\quad ,(I)$$

(ب) با توجه به وجود بلوک انتگرال‌گیر، میان $f(t)$ و $y_1(t)$ می‌توان نوشت :

$$y_1(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\ \Rightarrow\ \frac{dy_1(t)}{dt}=f(t)\quad ,(II)$$

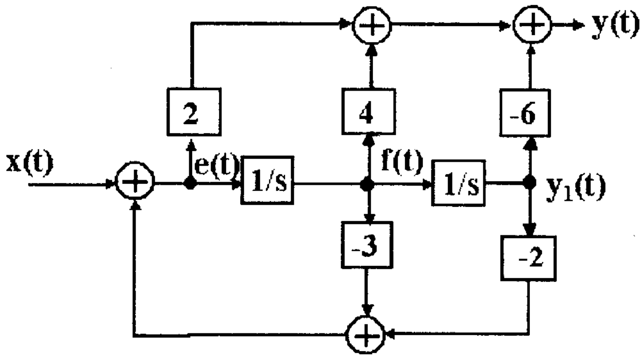
(ج) با توجه به وجود بلوک انتگرال‌گیر، میان $f(t)$ و $e(t)$ داریم :

$$f(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau\ \Rightarrow e(t)=\frac{df(t)}{dt}=\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}\quad ,(III)$$

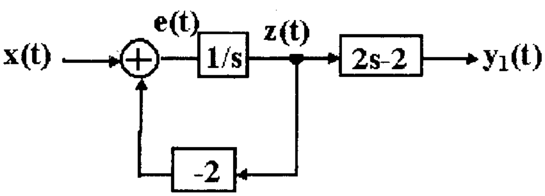
(د) با توجه به روابط I، II و III بدست می‌آوریم :

$$y(t)=2\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}+4\frac{dy_1(t)}{dt}-6y_1(t)=2e(t)+4f(t)-6y_1(t)\quad ,(IV)$$

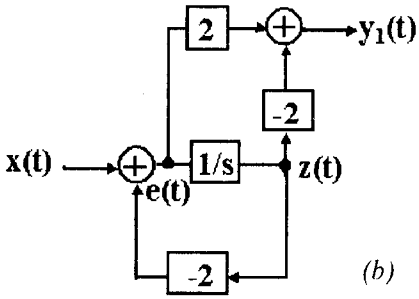
(هـ) با استفاده از نمایش جعبه‌ای S_1 و رابطه (IV)، نمایش جعبه‌ای S به صورت زیر خواهد بود :



(و) ابتدا نمایش جعبه‌ای سیستم S_1 با تابع تبدیل $H_1(s)=\frac{Y_1(s)}{X(s)}=\frac{2(s-1)}{(s+2)}$ را بدست می‌آوریم، این نمایش را می‌توان به صورت ترکیب سری دو سیستم مرتبه اول در نظر گرفت، یعنی $H_1(s)=\frac{1}{(s+2)}(2s-2)$، این نمایش جعبه‌ای S_1 را در شکل (a) مشاهده می‌کنید:



(a)



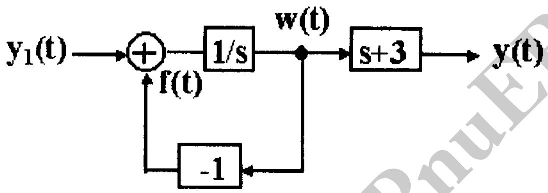
(b)

همچنین برای صرفه‌جویی در استفاده از بلوک مشتق‌گیر، شکل (b) پیشنهاد می‌شود، با توجه به شکل (a) مشاهده می‌کنیم که $z(t)$ و $y_1(t)$با رابطه زیر به هم مربوطند :

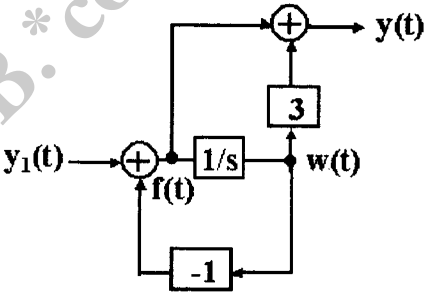
$$y_1(t)=2\frac{dz(t)}{dt}-2z(t)$$

ولی ورودی $e(t)$ انتگرال‌گیر همان مشتق $z(t)$ می‌باشد و کافیست به عوض استفاده از بلوک مشتق‌گیر برای تولید $\frac{dz(t)}{dt}$ از این سیگنال استفاده کنیم. این مسئله در شکل (b) مشاهده می‌شود.

اکنون نمایش جعبه‌ای سیستم S_2با تابع تبدیل $H_2(s)=\frac{Y(s)}{Y_1(s)}=\frac{s+3}{s+1}$ را بدست می‌آوریم. این سیستم نیز درست مثل سیستم S_1 می‌تواند به دو شکل مختلف نشان داده شود، این نمایش‌ها در شکل‌های (c) و (d) آمده‌اند.

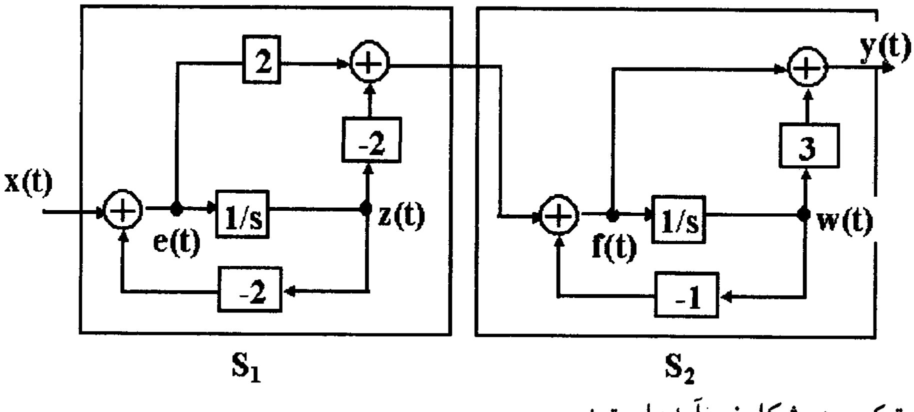


(c)

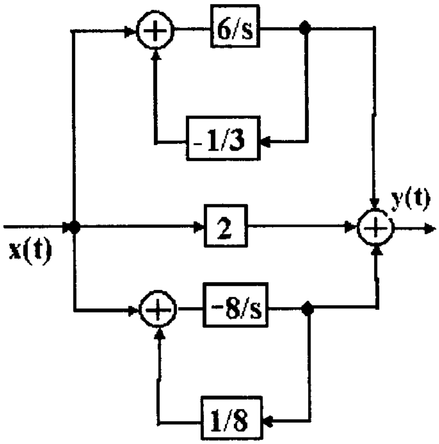


(d)

حال می‌توان نمایش جعبه‌ای S را از ترکیب سری سیستم‌های S_1 و S_2بدست آورد، برای این نمایش چهار امکان وجود دارد، (شکل (a) با شکل (c)، شکل (a) با شکل (d)، شکل (b) با شکل (c) و شکل (b) با شکل (d))، به منظور صرفه‌جویی در بلوک مشتق‌گیر، ترکیب شکل (b) با شکل (d) را در نظر گرفته و به نمایش جعبه‌ای زیر می‌رسیم :



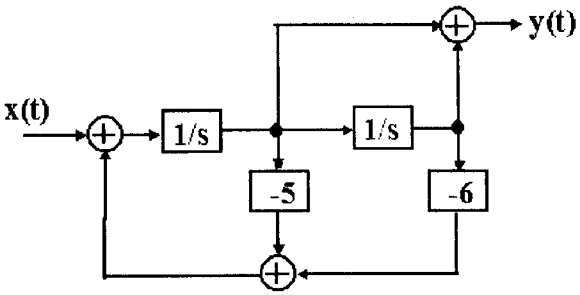
(ز) این ترکیب در شکل زیر آمده است :



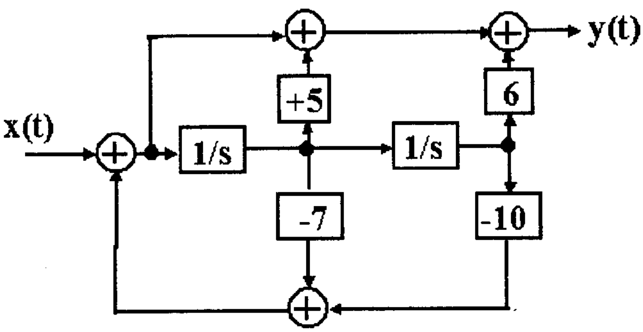
۹–۳۷ نمایش مستقیم سیستمهای LTI علی زیر را رسم کنید :

(الف) $H_1(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$ (ب) $H_1(s)=\dfrac{s^2+5s+6}{s^2+7s+10}$ (ج) $H_3(s)=\dfrac{s}{(s+2)^2}$

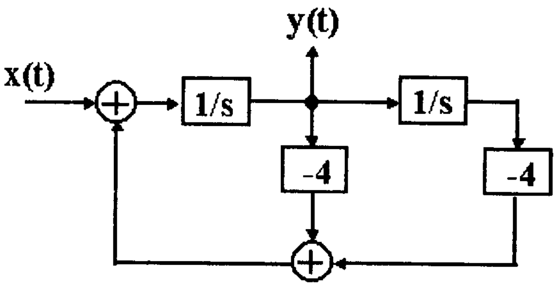
حل : (الف)



(ب)



(ج)



۹–۳۸ سیستم LTI مرتبه چهارم S با تابع سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$H(s)=\frac{1}{\left(s^2-s+1\right)\ \left(s^2+2s+1\right)}$$

(الف) نشان دهید که نمایش جعبه‌ای S به صورت ترکیب سری چهار بخش مرتبه اول مستلزم ضرب در اعداد مختلط است.

(ب) نمایش جعبه‌ای S را به صورت اتصال سری دو سیستم مرتبه دوم رسم کنید، هر سیستم مرتبه ۲ را به روش مستقیم بسازید. در نمایش جعبه‌ای حاصل نباید ضریب غیرحقیقی وجود داشته باشد.

(ج) نمایش جعبه‌ای S را به صورت اتصال موازی دو سیستم مرتبه دوم رسم کنید، هر سیستم مرتبه ۲ را به روش مستقیم بسازید. در نمایش جعبه‌ای حاصل نباید ضریب غیرحقیقی وجود داشته باشد.

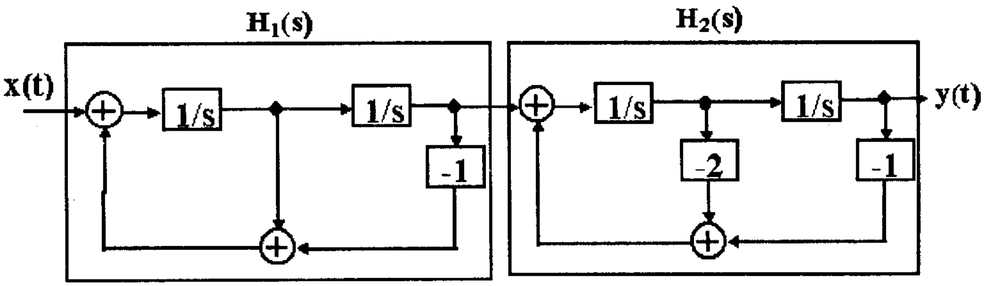
حل : (الف) سیستم S را می‌توان ترکیب سری دو سیستم مرتبه دوم S_1 و S_2 به ترتیب با تابع تبدیل‌های $H_1(s)=\frac{1}{s^2-s+1}$ و $H_2(s)=\frac{1}{s^2+2s+1}$ دانست؛ حال اگر بخواهیم نمایش جعبه‌ای S را به صورت ترکیب سری چهار بخش مرتبه اول نشان دهیم، کافیست هر یک از این دو سیستم را به صورت حاصلضرب دو سیستم مرتبه اول بنویسیم :

$$H_1(s)=\frac{1}{s^2-s+1}=\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \left(s-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$H_2(s)=\frac{1}{s^2+2s+1}=\frac{1}{(s+1)(s+1)}$$

آشکار است که هر تلاشی برای نمایش جعبه‌ای بخش‌های مرتبه اول سیستم S_1 مستلزم ضرب در اعداد مختلط خواهد بود.

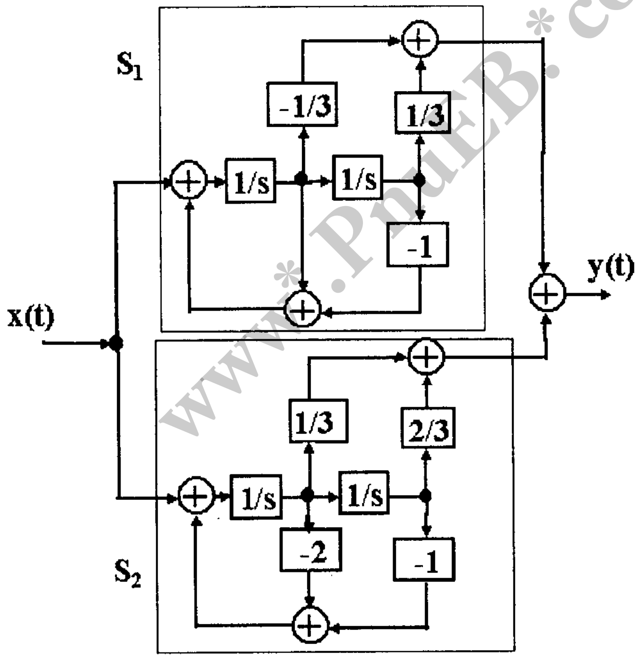
(ب) این نمایش را به آسانی و به همان روش معرفی شده در مسئله (9-36) می‌توان ارائه نمود :



(ج) ابتدا داریم :

$$H(s)=\frac{1}{\left(s^2-s+1\right)\ \left(s^2+2s+1\right)}=\frac{-\frac{1}{3}s+\frac{1}{3}}{s^2-s+1}+\frac{\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}}{s^2+2s+1}$$

در این صورت $H(s)$ را می‌توان به شکل اتصال موازی دو سیستم مرتبه دوم نمایش داد. این اتصال را در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



۹–۳۹ فرض کنید

$$x_2(t)=e^{-3(t+1)}u(t+1) \quad , \quad x_1(t)=e^{-2t}u(t)$$

(الف) تبدیل لاپلاس یکطرفه $\mathscr{X}_1(s)$ و تبدیل لاپلاس دوطرفه $X_1(s)$ سیگنال $x_1(t)$ را بیابید.

(ب) تبدیل لاپلاس یکطرفه $\mathscr{X}_2(s)$ و تبدیل لاپلاس دوطرفه $X_2(s)$ سیگنال $x_2(t)$ را بیابید.

(ج) با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس دوطرفه $X_1(s)X_2(s)$ سیگنال $g(t)=x_1(t)*x_2(t)$ را بیابید.

(د) نشان دهید که عکس تبدیل لاپلاس یکطرفه $\mathscr{X}_1(s)\mathscr{X}_2(s)$ در $t>0^-$ با $g(t)$ برابر نیست.

حل : (الف) ازآنجاکه $x_1(t)$ برای لحظات $t<0$، برابر صفر است تبدیل‌های لاپلاس دوطرفه و یکطرفه یکسانی دارد و می‌توان نوشت :

$$\mathscr{X}_1(s)=X_1(s)=\mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-2t}u(t)\right\}=\frac{1}{s+2}\quad,\quad Re\{s\}>-2$$

(ب) برای تبدیل لاپلاس دو طرفه $x_2(t)$ داریم :

$$X_2(s)=\mathcal{L}\left\{x_2(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-3(t+1)}u(t+1)\right\}=e^s\mathcal{L}\left\{e^{-3t}u(t)\right\}=\frac{e^s}{s+3}\quad,\quad Re\{s\}>-3$$

تبدیل لاپلاس یکطرفه $x_2(t)$ را نیز بدینصورت بدست می‌آوریم :

$$\mathscr{X}_2(s)=\int_{0^-}^{+\infty}x_2(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty}e^{-3(t+1)}u(t+1)e^{-st}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-3(t+1)}e^{-st}dt$$

$$=e^{-3}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-3t}u(t)\right)e^{-st}dt=e^{-3}\mathcal{L}\left\{e^{-3t}u(t)\right\}=\frac{e^{-3}}{s+3}\quad,\quad Re\{s\}>-3$$

(ج) می‌نویسیم :

$$X_1(s)X_2(s)=\frac{1}{s+2}\cdot\frac{e^s}{s+3}=e^s\left[\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\right]\Rightarrow g(t)=x_1(t)*x_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{X_1(s)X_2(s)\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^s}{s+2}-\frac{e^s}{s+3}\quad,Re\{s\}>-2\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^s}{s+2},Re\{s\}>-2\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^s}{s+3},Re\{s\}<-3\right\}$$

$$=e^{-2(t+1)}u(t+1)-e^{-3(t+1)}u(t+1)\quad,(I)$$

(د) ابتدا مشاهده می‌کنیم که :

$$\mathscr{X}_1(s)\mathscr{X}_2(s)==\frac{1}{s+2}\cdot\frac{e^{-3}}{s+3}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\{\mathscr{X}_1(s)\mathscr{X}_2(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\cdot\frac{e^{-3}}{s+3},Re\{s\}>-2\right\}$$

$$=e^{-3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\quad,Re\{s\}>-2\right\}=e^{-3}\left[e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)\right]\quad,\quad(II)$$

با مقایسه روابط (I) و (II) آشکار می‌شود که خاصیت کانوولوشن تبدیل لاپلاس یکطرفه، برقرار نیست. این موضوع قابل پیش‌بینی بود، زیرا می‌دانیم که خاصیت کانوولوشن تبدیل لاپلاس یکطرفه تنها زمانی قابل اعمال است که سیگنال‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در $t<0$ صفر باشند در حالی که در این مسئله این شرط برقرار نمی‌باشد.

۹ــ۴۰ سیستم S مشخص شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+6\frac{d^2y(t)}{dt^2}+11\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t)$$

(الف) پاسخ حالت صفر این سیستم را به ازای ورودی $x(t)=e^{-4t}u(t)$ بیابید.

(ب) پاسخ ورودی صفر این سیستم را در $t>0^-$ به ازای شرایط اولیه زیر بیابید

$$\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-}=1 \quad , \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-}=-1 \quad , \quad y(0^-)=1$$

(ج) خروجی سیستم S را به ازای ورودی $x(t)=e^{-4t}u(t)$ و شرایط اوایه بند (ب) بیابید.

حل : (الف) از دو طرف معادله دیفرانسیل سیستم تبدیل لاپلاس یکطرفه گرفته و داریم :

$$\left(s^3\mathscr{Y}(s)-s^2y(0^-)-sy'(0^-)-y''(0^-)\right)+6+\left(s^2\mathscr{Y}(s)-sy(0^-)-y'(0^-)\right)$$

$$+11(s\mathscr{Y}(s)-y(0^-))+6\mathscr{Y}(s)=\mathscr{X}(s)$$

$$\Rightarrow \mathscr{Y}(s)=\frac{\mathscr{X}(s)}{s^3+6s^2+11s+6}+\frac{y(0^-)s^2+\left(6y(0^-)+y'(0^-)\right)s+\left(y''(0^-)+6y'(0^-)+11y(0^-)\right)}{s^3+6s^2+11s+6} \quad ,(I)$$

پاسخ حالت صفر وقتی بدست می‌آید که سیستم در شرایط سکون ابتدایی بوده $\left(y''(0^-)=y'(0^-)=y(0^-)=0\right)$ و ورودی $x(t)=e^{-4t}u(t)$ به آن اعمال شود، در اینصورت از رابطه (I) خواهیم داشت :

$$\mathscr{Y}(s)=\frac{\mathscr{X}(s)}{s^3+6s^2+11s+6}+0=\frac{\left(\frac{1}{s+4}\right)}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{s+1}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{s+3}+\frac{\left(-\frac{1}{6}\right)}{s+4} \quad , \quad Re\{s\}>-1$$

حال با گرفتن تبدیل عکس تبدیل لاپلاس از رابطه اخیر می توان $y_{zs}(t)$ را بدست آورد:

$$y_{zs}(t)=\frac{1}{6}e^{-t}u(t)-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)-\frac{1}{6}e^{-4t}u(t) \quad ,(II)$$

(ب) پاسخ ورورودی صفر، پاسخ سیستم به ورودی صفر و شرایط ابتدایی (احتمالاً غیرصفر) می‌باشد در اینصورت از رابطه (I) خواهیم داشت :

$$\mathscr{Y}_{zi}(s)=0+\frac{y(0^-)s^2+\left(6y(0^-)+y'(0^-)\right)s+\left(y''(0^-)+6y'(0^-)+11y(0^-)\right)}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$=\frac{s^2+5s+6}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{1}{s+1} \quad , \quad Re\{s\}>-1$$

اکنون می‌توانیم از رابطه فوق تبدیل عکس تبدیل لاپلاس گرفته ، $y_{zi}(t)$را بدست آوریم :

$$y_{zi}(t)=e^{-t}u(t) \quad , \quad t>0^- \qquad ,(III)$$

شرط $t>0^-$در رابطه اخیر، بر اعتبار آن تنها برای لحظات $t>0^-$تاکید دارد، (چراکه از لحظات قبل از آن اطلاع درستی نمی‌دهد.).

(ج) می دانیم که در یک سیستم LTI پاسخ کلی سیستم را می‌توان از برهم‌نهی پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر بدست آورد، بنابراین به سادگی از روابط II و III خواهیم داشت :

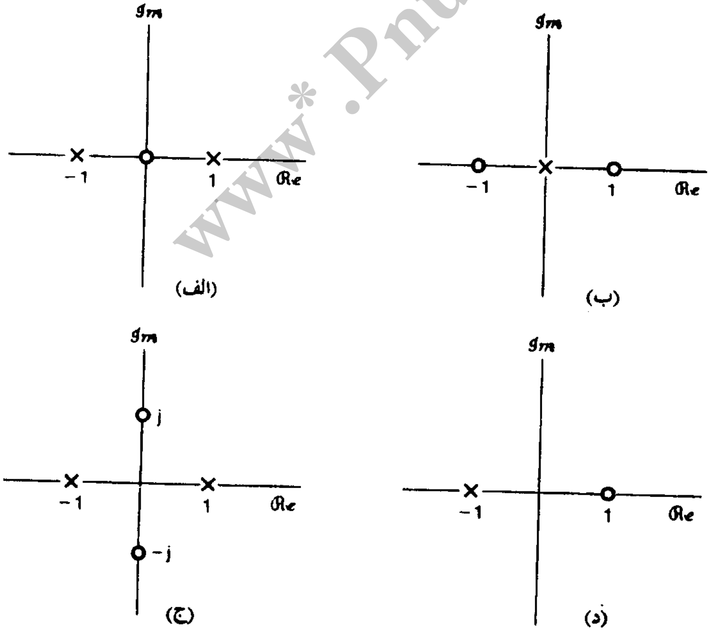
$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=\frac{1}{6}e^{-t}u(t)-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)-\frac{1}{6}e^{-4t}u(t)+e^{-t}u(t)$$

$$=\left[\frac{7}{6}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right]u(t)$$

۹-۴۱ (الف) نشان دهید که اگر $x(t)$تابعی زوج باشد، یعنی $x(t)=x(-t)$،آنگاه $X(s)=X(-s)$.

(ب) نشان دهید که اگر $x(t)$تابعی فرد باشد، یعنی $x(t)=-x(-t)$، آنگاه $X(s)=-X(-s)$.

(ج) تعیین کنید کدام یک از نمودارهای قطب-صفر شکل م۹-۴۱ می‌تواند با یک تابع زمانی زوج متناظر باشد. در هر مورد ناحیه همگرایی را مشخص کنید.



شکل ۹-۴۱

حل (الف) داریم :

$$X(-s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-(-s)t}dt$$

حال با تغییر متغیر $\xi=-t$ و با توجه به اینکه : $x(-t)=x(t)$ خواهیم داشت :

$$X(-s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(-\xi)e^{-s\xi}d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\xi)e^{-s\xi}d\xi=X(s)$$

(ب) داریم :

$$X(-s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-(-s)t}dt$$

اکنون با تغییر متغیر $\xi=-t$ و با توجه به اینکه : $x(-t)=-x(t)$ می‌نویسیم :

$$X(-s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(-\xi)e^{-s\xi}d\xi=-\int_{-\infty}^{+\infty}x(\xi)e^{-s\xi}d\xi=-X(-s)$$

(ج) ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $x(t)$ سیگنالی فرد یا زوج باشد، ROCی آن نسبت به $s=0$ متقارن خواهد بود، چرا که مثلاً اگر برای توابع زوج $X(s_0)$ همگرا باشد، $X(-s_0)$ نیز باید همگرا باشد و همینطور برای توابع فرد.

در اینصورت :

(شکل-الف) شرط تقارن ROC برای این شکل وقتی برآورده می‌شود که داشته باشیم $-1<Re\{s\}<1$؛ با توجه به شکل، تبدیل لاپلاس $x(t)$ را نوشته و داریم :

$$X(s)=\frac{Ms}{(s+1)(s-1)}\Rightarrow X(-s)=\frac{-Ms}{(-s+1)(-s-1)}=-X(s)$$

بدین ترتیب با توجه به نتیجه بند (الف)، $x(t)$ نمی‌تواند سیگنالی زوج باشد، بلکه سیگنالی فرد است.

(شکل-ب) شرط تقارن ROC برای این شکل ابداً امکان‌پذیر نبوده (ROC در این شکل می‌توان یا یک راست-نیمصفحه و یا یک چپ-نیمصفحه باشد) و بنابراین، $x(t)$ نه می‌تواند زوج باشد و نه فرد.

(شکل-ج) شرط تقارن ROC برای این شکل فقط در حالت $-1<Re\{s\}<1$ برقرار است؛ در این حالت برای $X(s)$ با توجه به شکل داریم :

$$X(s)=\frac{M(s+j)(s-j)}{(s+1((s-1)}=\frac{M(s^2+1)}{(s^2-1)}\Rightarrow X(-s)=\frac{M(s^2+1)}{(s^2-1)}=X(s)$$

بنابراین $x(t)$ می‌تواند سیگنالی زوج باشد.

(شکل-د) در این شکل نیز ROC حتماً نامتقارن بوده و در نتیجه $x(t)$ نه زوج خواهد بود ونه فرد.

۹-۴۲ درستی و نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. اگر گزاره درست است، دلیل قانع‌کننده‌ای بیاورید و اگر نادرست است مثال نقض بزنید.

(الف) تبدیل لاپلاس $t^2u(t)$ در هیچ جای صفحه s همگرا نیست.

(ب) تبدیل لاپلاس $e^{t^2}u(t)$ در هیچ جای صفحه s همگرا نیست.

ج) تبدیل لاپلاس $e^{j\omega_0 t}$ در هیچ جای صفحه s همگرا نیست.

د) تبدیل لاپلاس $e^{j\omega_0 t}u(t)$ در هیچ جای صفحه s همگرا نیست.

هـ) تبدیل لاپلاس $|t|$ در هیچ جای صفحه s همگرا نیست.

حل : (الف) نادرست است، زیرا با توجه به جدول 9-1 داریم :

$$\mathcal{L}\left\{t^2u(t)\right\}=\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}=\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s}\ ,\ Re\{s\}>0\right]=\frac{2}{s^3}\ \ ,\ Re\{s\}>0$$

(ب) درست است، می‌دانیم برای آنکه تبدیل لاپلاس $x(t)$ همگرا شود کافیست تبدیل فوریه سیگنال $x(t)e^{-\sigma t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، یعنی :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)e^{-\sigma t}\right|dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|e^{-\sigma t}<\infty$$

که در آن $\sigma=Re\{s\}$ می‌باشد. برای سیگنال $x(t)=e^{t^2}u(t)$ داریم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|e^{-\sigma t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{t^2}e^{-\sigma t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{(t-\sigma)t}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{(t-\sigma)t}dt<\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{(T-\sigma)t}dt$$

ازطرفی برای آنکه انتگرال اخیر همگرا شود باید داشته باشیم: $T-\sigma<0$ ویا $\sigma>T$ که باتوجه به اینکه $T\to\infty$ خواهیم داشت : $\sigma\to\infty$، بدین ترتیب حاشیه چپ ROC در بینهایت اتفاق می‌افتد که با توجه به دست‌راستی بودن $x(t)$ (یا راست-نیمصفحه بودن ROC)، سیگنال $e^{t^2}u(t)$ در هیچ جای صفحه s همگرا نخواهد شد.

(ج) درست است، زیرا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|e^{-\sigma t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-j\omega_0 t}\right|e^{-\sigma t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{-\sigma t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-\sigma t}dt$$

عبارت اخیر زمانی همگرا می‌شود که هر دو انتگرال آن به تنهایی همگرا شوند:

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-\sigma t}dt<\infty\quad\Rightarrow\ \sigma<0\qquad (I)$$

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-\sigma t}dt<\infty\quad\Rightarrow\ \sigma>0\qquad (II)$$

از روابط I و II مشخص می‌شود که تبدیل لاپلاس $x(t)$ به ازای هیچ مقداری از σ (یا $Re\{s\}$) همگرا نمی‌شود.

(د) نادرست است، چراکه :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|e^{-\sigma t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{j\omega_0 t}u(t)\right|e^{-\sigma t}dt=\int_{0}^{+\infty}\left|e^{j\omega_0 t}\right|e^{-\sigma t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-\sigma t}dt$$

انتگرال اخیر به ازای $\sigma>0$ همگرا بوده و بنابراین تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ به ازای

$Re\{s\}=\sigma>0$ همگرا خواهد بود.

(هـ) درست است؛ زیرا :

$$\mathscr{L}\{\,|t|\,\} = \mathscr{L}\{(-t)u(-t)+tu(t)\} = \mathscr{L}\{(-t)u(-t)\}+\mathscr{L}\{tu(t)\}$$

$$= \left\{\frac{1}{(-s)^2}, Re\{s\}<0\right\} + \left\{\frac{1}{s^2}, Re\{s\}>0\right\}$$

$$= \left\{\frac{2}{s^2}, \left[Re\{s\}<0\right] \cap \left[Re\{s\}>0\right]\right\} = \left\{\frac{2}{s^2}, ROC=\{\emptyset\}\right\}$$

یعنی سیگنال $x(t)=|t|$ در هیچ نقطه‌ای از صفحه s، همگرا نمی‌شود.

۹–۴۳ $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI پایدار و علی با تابع تبدیل گویاست.

(الف) آیا سیستم دارای پاسخ ضربه $\frac{dh(t)}{dt}$ مطمئناً علی و پایدار است؟

(ب) آیا سیستم دارای پاسخ ضربه $\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$ مطمئناً علی پایدارست؟

حل : (الف) با توجه به اینکه داریم: $\mathscr{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\}=sH(s)$، عمل مشتق‌گیری در حوزه زمان هیچ قطبی به $H(s)$ اضافه نکرده و بنابراین ترکیب قطب‌های $sH(s)$ حداکثر همان ترکیب قطب‌های $H(s)$ را داراست، بدین ترتیب ROCی $sH(s)$ نیز لااقل همان ROCی $H(s)$ (یک راست-نیمصفحه شامل محور $j\omega$) بوده و سیگنال $\frac{dh(t)}{dt}$ مطمئناً علی و پایدار خواهد بود.

(ب) با توجه به اینکه داریم: $\mathscr{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau\right\} = \frac{H(s)}{s}$، عمل انتگرال‌گیری در حوزه زمان یک قطب در $s=0$ به ترکیب قطب و صفرهای $H(s)$ می‌افزاید. در این صورت دو حالت وجود خواهد داشت، یا $H(s)$ صفری در $s=0$ دارد که اثر قطب اضافی را در آن محل از بین ببرد، که در این صورت ROCی $\frac{H(s)}{s}$ همان ROCی $H(s)$ بوده و بنابراین سیگنال $\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$ نیز علی و پایدار است و یا اینکه $H(s)$ هیچ صفری در $s=0$ نداشته باشد که در اینصورت، قطب اضافی ایجاد شده در $s=0$ محور موهومی را از ROC خارج کرده و موجب ناپایداری $\frac{dh(t)}{dt}$ خواهد شد، با این وجود ROC باز یک راست-نیمصفحه (با حاشیه

چپ در ($s=0$) است و این بدان معناست که $\frac{dh(t)}{dt}$ یک سیگنال دست‌راستی و در نتیجه علیست.

۹ـ۴۴ $x(t)$ را سیگنال نمونه‌برداری شده زیر فرض کنید

$$x(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nT}\delta(t-nT)$$

که درآن $T>0$.

(الف) $X(s)$ و ناحیه همگرایی آن را بیابید.

(ب) نمودار قطب-صفر $X(s)$ را رسم کنید.

(ج) با استفاده از روش هندسی و نمودار قطب-صفر، در مورد متناوب بودن $X(j\omega)$ استدلال کنید.

حل: (الف) با توجه به ویژگی خطی بودن تبدیل لاپلاس، می‌توان نوشت :

$$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}=\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nT}\delta(t-nT)\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nT}\left[\mathcal{L}\{\delta(t-nT)\}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nT}e^{-nsT}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-(1+s)T}\right)^n \quad ,(I)$$

جمع نامحدود (I) با توجه به حل مسئله $(54\text{-}1)$، تنها زمانی همگرا خواهد شد که داشته باشیم :

$$\left|e^{-(1+s)T}\right|<1 \;\Rightarrow\; \left|e^{-(1+\sigma+j\omega)T}\right|<1 \;\Rightarrow\; \left|e^{-(1+\sigma)T}\right|\left|e^{-j\omega T}\right|=e^{-(1+\sigma)T}<1$$

$$\Rightarrow (1+\sigma)T>0 \Rightarrow \sigma>-1$$

بنابراین ناحیه همگرایی $X(s)$، همان $Re\{s\}>-1$ می‌باشد.

(ب) در ناحیه همگرایی $X(s)$، رابطه (I) به صورت زیر ساده خواهد شد :

$$X(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-(1+s)T}\right)^n=\frac{1}{\left[1-e^{-(1+s)T}\right]} \quad , \quad Re\{s\}>-1$$

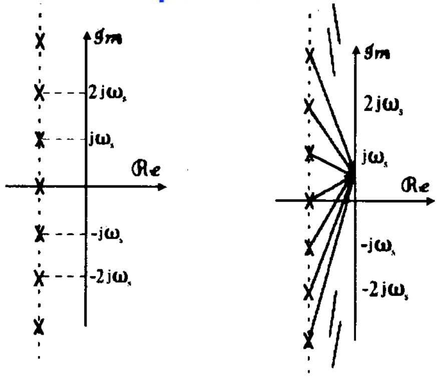
برای بدست آوردن قطب‌های $X(s)$ کافیست عبارت مخرج را برابر صفر قرار دهیم :

$$1-e^{-(1+s_p)T}=0 \;\Rightarrow\; e^{-(1+s_p)T}=1=e^{-jk2\pi} \;\Rightarrow\; (1+s_p)\,T=jk2\pi$$

$$\Rightarrow s_p=-1+jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)=-1+jk\omega_s \quad , \quad k\in Z$$

که در آن ω_s فرکانس نمونه‌برداری می‌باشد. نمودار قطب-صفر $X(s)$ در بند (ج) آمده است.

(ج) نمودار قطب-صفر $X(s)$ را به همراه بردارهای قطب آن در شکل زیر مشاهده می‌کنیم :



(با توجه به اینکه $X(s)$ صفر محدود ندارد، بینهایت صفر نامحدود خواهد داشت). به آسانی و با استفاده از روش هندسی خاصیت تناوبی بودن $X(s)$ آشکار می‌شود: " ناظر مستقر بر روی محور موهومی بـا جابجایی روی این محور، درست به اندازه ω_s هیچ تغییری در الگوی بردارهای قطب رسم شده به سوی وی مشاهده نخواهد کرد"، در نتیجه اندازه تابع تبدیل $X(j\omega)$ متناوب با تناوب پایه ω_s می‌باشد.

۹–۴۵ سیستم LTI شکل م۹–۴۵(الف) را در نظر بگیرید که در موردش اطلاعات زیر داده شده است:

$$x(t)=0\ ,\ t>0 \qquad\qquad X(s)=\frac{s+2}{s-2}$$

و

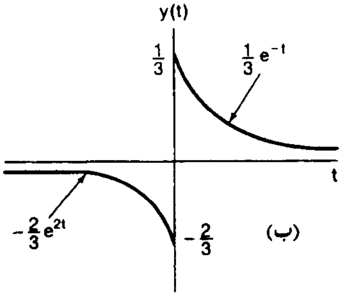
$$y(t)=-\frac{2}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$ [شکل م۹–۴۵(ب) را ببینید.]

(الف) $H(s)$ و ناحیه همگرایی آن را بیابید.

(ب) $h(t)$ را بیابید.

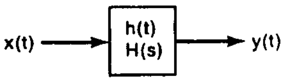
(ج) با استفاده از $H(s)$ بند (الف) خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی زیر بیابید

$$x(t)=e^{3t}\quad ,\quad -\infty<t<\infty$$



(ب)

شکل م ۹–۴۵



(الف)

حل: (الف) ابتدا با توجه به اینکه برای $t>0$، $x(t)=0$، سیگنال $x(t)$ سیگنالی دست‌چپی بوده و ROC ی آن یک چپ–نیم‌صفحه می‌باشد:

$$X(s)=\frac{s+2}{s-2} \quad , \quad Re\{s\}<2$$

همچنین :

$$Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\left\{-\frac{2}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)\right\}=-\frac{2}{3}\mathcal{L}\left\{e^{-2(-t)}u(-t)\right\}+\frac{1}{3}\mathcal{L}\left\{e^{-t}u(t)\right\}$$

$$=-\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{(-s+2)}, Re\{s\}<2\right\}+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{s+1}, Re\{s\}>-1\right\}=\frac{s}{(s-2)(s+1)} \quad , \quad -1<Re\{s\}<2$$

در اینصورت $H(s)$ به صورت زیر بدست می‌آید :

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\left[\frac{s}{(s-2)(s+1)}\right]}{\left[\frac{s+2}{s-2}\right]}=\frac{s}{(s+1)(s+2)} \quad , \quad Re\{s\}>-1$$

(ب)

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s+1)}, Re\{s\}>-1\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1}, Re\{s\}>-1\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}, Re\{s\}>-2\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}, Re\{s\}>-1\right\}=2e^{-2t}u(t)-e^{-t}u(t)$$

(ج) می‌دانیم نمایی‌هایی مختلط به شکل $e^{s_0 t}$، توابع ویژه سیستم‌های LTI بوده و مقدار ویژه آن‌ها با محاسبه $H(s_0)$ به آسانی بدست می‌آید، بنابراین :

$$x(t)=e^{3t}=e^{st}\Big|_{s=3} \quad , \quad -\infty<t<+\infty$$

$$\Rightarrow y(t)=H(s)e^{st}\Big|_{s=3}=H(3)e^{3t}=\frac{3}{(3+1)(3+2)}e^{3t}=\left(\frac{3}{20}\right)e^{3t} \quad , \quad -\infty<t<+\infty$$

۹-۴۶ $H(s)$ تابع سیستم یک سیستم علی پایدارست. ورودی سیستم مجموع سه جمله است، یکی ضربه $\delta(t)$ است و یکی دیگر نمایی مختلط به شکل $e^{s_0 t}$ که s_0 یک ثابت مختلط است. خروجی عبارت است از

$$y(t)=-6e^{-t}u(t)+\frac{4}{34}e^{4t}\cos 3t+\frac{18}{34}e^{4t}\sin 3t+\delta(t)$$

$H(s)$ سازگار با این اطلاعات را بیابید.

حل : با اندکی دستکاری در $y(t)$ داریم :

$$y(t)=-6e^{-t}u(t)+\frac{4}{34}e^{4t}\left(\frac{e^{j3t}+e^{-j3t}}{2}\right)+\frac{18}{34}e^{4t}\left(\frac{e^{j3t}-e^{-j3t}}{2j}\right)+\delta(t)$$

$$=\left[\delta(t)-6e^{-t}u(t)\right]+\left(\frac{2-j9}{34}\right)e^{(4+3j)t}+\left(\frac{2+j9}{34}\right)e^{(4-j3)t}$$

حال با توجه به اینکه نمایی‌های مختلط ورودی به شکل $e^{s_0 t}, e^{s_0^* t}$ توابع ویژه سیستم LTI می‌باشند، با مراجعه به $y(t)$ می‌توان نوشت :

$$e^{s_0 t}=e^{(4+3j)t} \Rightarrow \left(e^{s_0 t}\right) *h(t)=H(s_0)e^{s_0 t}=\left(\frac{2-j9}{34}\right) e^{(4+3j)t} \Rightarrow H(4+3j)=\frac{2-j9}{34} \quad ,(I)$$

به همن ترتیب :

$$e^{s_0^* t}=e^{(4-3j)t} \Rightarrow \left(e^{s_0^* t}\right) *h(t)=H\left(s_0^*\right) e^{s_0^* t}=\left(\frac{2+j9}{34}\right) e^{(4-3j)t} \Rightarrow H(4-j3)=\frac{2+j9}{34}, (II)$$

توجه شود که ورودی سوم که در مسئله به آن اشاره شده، ولی مشخص نشده بود همان $e^{s_0^* t}$ است که در بالا بدست آوردیم. بخش باقیمانده از خروجی همان پاسخ سیستم به تنها ورودی باقیمانده، یعنی سیگنال ضربه می‌باشد، به عبارت دیگر :

$$h(t)=\delta(t)-6e^{-t}u(t)$$

$$\Rightarrow H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\mathcal{L}\left\{\delta(t)-6e^{-t}u(t)\right\}=1-\frac{6}{s+1}=\frac{s-5}{s+1} \quad , Re\{s\}>-1 \quad ,(III)$$

نکته :گویا در طراحی مسئله اشتباهی رخ داده است، مقادیر $H(4\pm j3)$ محاسبه شده از روی $H(s)$ رابطه (III)، با مقادیر بدست آمده در روابط (I) و (II) قدری اختلاف دارند، برای رفع این اختلاف پیشنهاد می‌شود $y(t)$ به صورت زیر تصحیح شود :

$$y(t)=-6e^{-t}u(t)+\frac{8}{34}\cos 3t-\frac{36}{34}\sin 3t+\delta(t)$$

۹-۴۷ سیگنال زیر

$$y(t)=e^{-2t}u(t)$$

خروجی یک سیستم علی تمام‌گذر با تابع تبدیل زیرست

$$H(s)=\frac{s-1}{s+1}$$

(الف) حداقل دو ورودی $x(t)$ تعیین و رسم کنید که بتواند این خروجی را ایجاد کند.

(ب) اگر بدانیم شرط زیر برقرار است، ورودی $x(t)$ چیست؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right| dt<\infty$$

(ج) اگر بدانیم که سیستمی پایدار (ونه لزوماً علی) وجود دارد که اگر ورودی آن $y(t)$ باشد، خروجی آن $x(t)$ خواهد بود، ورودی $x(t)$ چیست؟ پاسخ ضربه این فیلتر را بیابید و با کانولوشن نشان دهید که خاصیت ذکر شده را دارد. [یعنی $y(t)*h(t)=x(t)$]

حل : (الف) از علی بودن سیستم نتیجه می‌گیریم که پاسخ ضربه آن یک سیگنال دست‌راستی است و این بدان معنی است که ROCی تبدیل لاپلاس آن راست-نیمصفحه می‌باشد:

$$H(s)=\frac{s-1}{s+1} \quad , \quad Re\{s\}>-1 \qquad ,(I)$$

همچنین برای تبدیل لاپلاس سیگنال خروجی $y(t)$داریم :

$$Y(s)=\mathcal{L}\left\{e^{-2t}u(t)\right\}=\frac{1}{s+2} \quad , \quad Re\{s\}>-2 \quad , \quad (II)$$

در اینصورت :

$$X(s)=\frac{Y(s)}{H(s)}=\frac{\left(\frac{1}{s+2}\right)}{\left(\frac{s-1}{s+1}\right)}=\frac{s+1}{(s+2)(s-1)} \qquad , \quad (III)$$

برای تعیین دقیق $x(t)$از روی $X(s)$، ROCی آن نیز باید مشخص شود.با توجه به روابط (I)، (II) و (III) دو ROCی ممکن را می‌توان تشخیص داد :

$$i)\ X_1(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s-1)}\ ,\ -2<Re\{s\}<1 \Rightarrow x_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+2)(s-1)}\ ,\ -2<Re\{s\}<1\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+2}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{s-1}\ ,\ -2<Re\{s\}<1\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+2}, Re\{s\}>-2\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{s-1}, Re\{s\}<1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)-\frac{2}{3}e^{t}u(-t)$$

$$ii)\ X_2(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s-1)}\ , Re\{s\}>1 \Rightarrow x_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+2}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{s-1}\ , Re\{s\}>1\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+2}\ , Re\{s\}>-2\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{s-1}\ , Re\{s\}>1\right\}=\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)+\frac{2}{3}e^{t}u(t)$$

(ب)با محاسبه $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt$ برای دو سیگنال $x_1(t)$و $x_2(t)$که در بالا بدست آمدند،مشاهده می‌کنیم که این انتگرال فقط به ازای $x(t)=x_1(t)$ همگرا خواهد بود $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1(t)|\,dt<\infty\right)$ ، این موضوع پیشاپیش معلوم بود، چراکه تنها ROCی تبدیل لاپلاس سیگنال $x_1(t)$شامل محور $j\omega$بوده و تبدیل فوریه همگرا (معادل مطلقاً انتگرال‌پذیر بودن سیگنال $x(t)$) دارد.

(ج) اگر تابع تبدیل این سیستم را $\hat{H}(s)$ بنامیم و ورودی آن سیگنال خروجی بدست آمده از سیستم با تابع تبدیل $H(s)$باشد ($\hat{x}(t)=y(t)$ یا $\hat{X}(s)=Y(s)$)،دراینصورت خروجی آن باید همان ورودی داده شده به سیستم $H(s)$باشد ($\hat{y}(t)=x(t)$ یا $\hat{Y}(s)=X(s)$) و می‌توان نوشت :

$$\hat{H}(s)=\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{X}(s)}=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{\left[\frac{s+1}{(s+2)(s-1)}\right]}{\left[\frac{1}{s+2}\right]}=\frac{s+1}{s-1}$$

حال برای بدست آوردن $\hat{h}(t)$ از روی $\hat{H}(s)$ باید ROC ی $\hat{H}(s)$ مشخص شود، با توجه به شرط پایداری داده شده در مسئله $\hat{H}(s)$ باید شامل محور $j\omega$ باشد، در نتیجه ROC ی مورد نظر یک چپ-نیمصفحه محدود به قطب $s_p=1$ بوده و داریم :

$$\hat{h}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{H}(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s-1}, Re\{s\}<1\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{1+\frac{2}{s-1}, Re\{s\}<1\right\}=\delta(t)-2e^{t}u(-t)$$

برای اطمینان از درستی $\hat{h}(t)$ می‌توان صحت رابطه $y(t)*\hat{h}(t)=x(t)$ را بررسی نمود :

$$y(t)*\hat{h}(t)=\left(e^{-2t}u(t)\right)*\left(\delta(t)-2e^{t}u(-t)\right)=e^{-2t}u(t)-2\left(e^{-2t}u(t)\right)*\left(e^{t}u(-t)\right)$$

$$=e^{-2t}u(t)-2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-2\tau}u(\tau)\right)\left(e^{t-\tau}u(\tau-t)\right)d\tau=e^{-2t}u(t)-2e^{t}\int_{0}^{+\infty}e^{-3\tau}u(\tau-t)d\tau$$

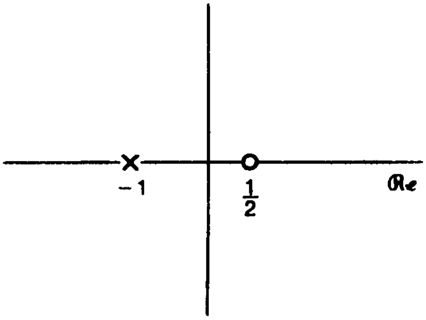
$$=e^{-2t}u(t)-2e^{t}\begin{cases}\int_{t}^{+\infty}e^{-3\tau}d\tau & ; t>0\\ \int_{0}^{+\infty}e^{-3\tau}d\tau & ; t\leq 0\end{cases}=e^{-2t}u(t)-2e^{t}\left(\frac{1}{3}e^{-3t}u(t)+\frac{1}{3}u(-t)\right)$$

$$=-\frac{2}{3}e^{t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)=x(t)$$

۹-۴۸ وارون یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ سیستمی است که وقتی با $H(s)$ سری شود، تابع تبدیل کل برابر واحد شود، یا به بیان دیگر پاسخ ضربه کل سیستم ضربه واحد باشد.

(الف) اگر $H_1(s)$ تابع تبدیل سیستم وارون $H(s)$ باشد، رابطه جبری بین $H(s)$ و $H_1(s)$ را بیابید.

(ب) در شکل م۹-۴۸ نمودار قطب-صفر یک سیستم پایدار علی $H(s)$ نشان داده شده است. نمودار قطب-صفر سیستم وارون آن را بیابید.



شکل م ۹-۴۸

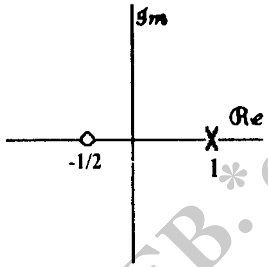
حل : (الف)

$$H(s)H_1(s)=1 \Rightarrow H_1(s)=\frac{1}{H(s)}$$

(ب) با توجه به نمودار قطب-صفر $H(s)$ می‌توان نوشت :

$$H(s)=\frac{M\left(s-\frac{1}{2}\right)}{(s+1)} \Rightarrow H_1(s)=\frac{1}{H(s)}=\frac{(s+1)}{M\left(s-\frac{1}{2}\right)}$$

آشکار است که اگر بخواهیم $H_1(s)$ تابع تبدیل یک سیستم پایدار باشد، ROCی آن باید یک چپ-نیمصفحه (شامل محور $j\omega$) باشد. نمودار قطب-صفر $H_1(s)$ در شکل زیر نشان داده شده است :



۹-۴۹ سیستمهای موسوم به سیستمهای مینیمم فاز یا مینیمم تاخیر گاهی به صورت سیستمهایی که علی و پایدارند و وارون آنها نیز علی و پایدار است، تعریف می‌شوند.
نشان دهید که بر مبنای تعریف فوق تمام قطبها و صفرهای تابع تبدیل سیستم مینیمم تاخیر باید در نیمه چپ صفحه s باشد [یعنی $\Re e\{s\}<0$].

حل : می‌دانیم که برای یک سیستم علی و پایدار، تمام قطب‌های تابع تبدیل باید در LHP باشند؛ از سوی دیگر از آنجا که صفرهای این سیستم همان قطب‌های سیستم معکوس خواهند بود، برای پایداری سیستم معکوس تمامی قطب‌های سیستم معکوس (یا صفرهای سیستم اصلی) نیز باید در LHP باشند. بدین ترتیب هم صفرها و هم قطب‌های یک سیستم مینیمم تاخیر همگی باید در نیمه چپ صفحه s باشند تا سیستم معکوس آن نیز علی و پایدار باشد.

۹-۵۰ تعیین کنید که آیا هر یک از مطالب زیر در مورد سیستمهای LTI درست است یا نه؟ اگر درست است دلیل قانع‌کننده بیاورید، و اگر نیست مثال نقض بزنید.

(الف) تمام قطبهای سیستم پیوسته در زمان پایدار باید در نیمه چپ صفحه s باشد [یعنی $\Re e\{s\}<0$]

(ب) اگر تعداد قطبهای تابع تبدیل بیش از تعداد صفرهای آن باشد و سیستم علی باشد، پاسخ پله در $t=0$ پیوسته است.

(ج) اگر تعداد قطبهای تابع تبدیل بیش از تعداد صفرهای آن باشد و سیستم قید علی بودن نداشته باشد، پاسخ پله می‌تواند در $t=0$ ناپیوسته باشد.

(د) تمام قطبها و صفرهای سیستم پایدار علی باید در نیمه چپ صفحه s باشند.

حـل : (الف) نادرست است، بعنوان مثال نقض، سیستم پیوسته در زمان S با پاسخ ضربه $h(t)=e^t u(t)$ را در نظر بگیرید، تابع تبدیل این سیستم $H(s)=\frac{1}{s-1}$ بوده و قطبی در $s=1$ دارد.

(ب) از آنجاکه سیستم علی است می‌توان نوشت :

$$t<0 \Rightarrow x(t)=u(t)=0 \Rightarrow y(t)=0 \quad ; t<0$$

یعنی سیستم قبل از لحظه $t=0$ در حالت سکون ابتدایی قرار داشته است، همچنین با توجه به قضیه مقدار اولیه بیان شده در جدول 9-1 خواهیم داشت :

$$y(0^+)=\lim_{s\to\infty} sY(s)=\lim_{s\to\infty} s\ \left(X(s)H(s)\right)$$

$$=\lim_{s\to\infty} s\ \left(\frac{1}{s}H(s)\right)\ =\lim_{s\to\infty} H(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{A(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_N)}=\lim_{s\to\infty} A\,s^{M-N}$$

که در آن M و N به ترتیب تعدادصفرها و قطب‌های محدود $H(s)$ می‌باشند. حال اگر تعداد قطب‌های $H(s)$ بیش از تعداد صفرهایش باشد، خواهیم داشت :

$$y(0^+)=\lim_{s\to\infty} A\,s^{M-N}=0$$

بنابراین $y(0^+)=y(0^-)$ و پاسخ پله سیستم در $t=0$ پیوسته است.

(ج) این بند شکل عام‌تر بند (ب) می‌باشد؛ ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $y(t)$ در لحظه $t=0$ ناپیوستگی داشته باشد، سیگنال $\frac{dy(t)}{dt}$ در $t=0$ شامل سیگنال ضربه خواهد بود، داریم :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}=sY(s)=s\ \left(X(s)H(s)\right)\ =s\ \left(\frac{1}{s}H(s)\right)\ =H(s)$$

از سویی با توجه به اینکه تعداد قطبهای $H(s)$ از صفرهای آن بیشتر بوده و هیچ مقدار ثابتی (که معرف سیگنال ضربه در حوزه زمان باشد) از بسط آن به کسرهای جزئی حاصل نمی‌شود، سیگنال $y(t)$ ابداً دارای هیچ ناپیوستگی در $t=0$ نخواهد بود. بنابراین این گزینه نادرست است.

(د) نادرست است؛ می‌دانیم برای آنکه سیستمی پایدار و علی باشد باید ROCی تبدیل لاپلاس آن یک راست-نیمصفحه شامل محور $j\omega$ باشد و بدین منظور کافیست تا تمامی قطب‌های آن در LHP باشند، بنابراین دیده می‌شود که این شرط هیچ محدودیتی بر صفرها اعمال نمی‌کند.

۹-۵۱ سیستم پایدار علی با پاسخ ضربه حقیقی $h(t)$ و تابع سیستم $H(s)$ در نظر بگیرید. می‌دانیم که $H(s)$ گویاست، یک قطب در $-1+j$، یک صفر در $3+j$ و دو قطب در بینهایت دارد. تعیین کنید که هر یک از گزاره‌های زیر درست یا نادرست است، یا نمی‌توان با توجه به اطلاعات داده شده درستی یا نادرستی آن را تعیین کرد.

(الف) $h(t)e^{-3t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است.

(ب) ناحیه همگرایی $H(s)$، $\Re e\{s\} > -1$ است.

(ج) معادله دیفرانسیل ارتباط‌دهنده ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستم را می‌توان به شکلی نوشت که تنها ضریب حقیقی داشته باشد.

(د) $\lim\limits_{s\to\infty} H(s)=1$.

(هـ) $H(s)$ چهار قطب یا بیشتر دارد.

(و) حداقل به ازای یک مقدار محدود ω داریم $H(j\omega)=0$.

(ز) $e^{3t}\cos t$ خروجی سیستم به ازای ورودی $e^{3t}\sin t$ است.

حل: ابتدا به نکاتی توجه می‌کنیم: از آنجاکه $H(s)$ گویاست این سیستم یک سیستم LTI است. با توجه به اینکه سیستم پایدار و علی است، ROCی آن یک راست-نیمصفحه شامل محور $j\omega$ می‌باشد، بنابراین تمام قطب‌های $H(s)$ در LHP واقع هستند. همچنین از اینکه $h(t)$ سیگنالی حقیقی است، $h^*(t)=h(t)$ و داریم: $H^*(s^*)=H(s)$، یعنی اگر سیستم قطب (یا صفری) در s_0 داشته باشد، در s_0^* نیز قطب (یا صفری) خواهد داشت، در اینصورت با توجه به اینکه سیستم بترتیب در $s_p=-1+j$ و $s_z=3+j$، قطب و صفر دارد، در نقاط $s_p^*=-1-j$,$s_z^*=3-j$ نیز قطب و صفر خواهد داشت. بالاخره با توجه به اینکه $H(s)$ دو قطب نامحدود دارد، دو صفر محدود بیشتراز تعداد قطب‌های محدود $H(s)$ خواهد داشت.

(الف) سیگنال $h(t)e^{-3t}$ در صورتی مطلقاً انتگرال‌پذیر خواهد بود که تبدیل فوریه‌اش همگرا باشد:

$$f\left\{h(t)e^{-3t}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-3t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-(3+j\omega)t}dt = H(3+j\omega)$$

حال با توجه به اینکه $s=3+j\omega$ حتماً درون ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار می‌گیرد. تبدیل فوریه $f\left\{h(t)e^{-3t}\right\}$ حتماً همگرا می‌شود، بدین ترتیب دیده می‌شود که سیگنال $h(t)e^{-3t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر است.

(ب) نادرست است، تنها می‌توان گفت که حداکثر ناحیه همگرایی احتمالی $Re\{s\}>-1$ است، چراکه از وجود قطب‌های احتمالی در فاصله $-1<Re\{s\}<0$ که ROC را محدودتر می‌کنند، اطلاعی نداریم.

(ج) با توجه به بحث انجام گرفته سیستم LTI است، همچنین از حقیقی بودن پاسخ ضربه $h(t)$ نتیجه می‌شود که در صورت وجود قطب یا صفر مختلط در $H(s)$، مزدوج این قطب یا صفر نیز در $H(s)$ وجود خواهد داشت و می‌توان نوشت:

$$H(s)=A\frac{\Pi_i(s-s_{zi})(s-s_{zi}^*)}{\Pi_j(s-s_{pj})(s-s_{pj}^*)}\times\frac{\Pi_k(s-z_k)}{\Pi_l(s-p_l)}=A\frac{\Pi_i\ \left(s^2-2\sigma_{zi}+\left(\sigma_{zi}^2+\omega_{zi}^2\right)\right)}{\Pi_j\ \left(s^2-2\sigma_{pj}+\left(\sigma_{pj}^2+\omega_{pj}^2\right)\right)}\times\frac{\Pi_k(s-z_k)}{\Pi_l(s-p_l)}$$

که تابع تبدیلی گویا و حقیقی است، بنابراین معادله دیفرانسیل مرتبط با آن (معادله دیفرانسیل سیستم)

تنها دارای ضرایب حقیقی خواهد بود.

(د) نادرست است؛ با توجه به وجود دو قطب در بی‌نهایت باید داشته باشیم :

$$\lim_{s\to\infty} H(s)=\infty$$

(هـ) درست است؛ چراکه $H(s)$ لااقل دو قطب نامحدود و دو قطب محدود (جمعاً چهار قطب) دارد.

(و) با توجه به اطلاعات داده شده نمی‌توان در این مورد چیزی گفت.

(ز) نادرست است؛ با توجه به وجود صفرهای $s_z=3+j$, s_z^* در تابع تبدیل $H(s)$ داریم :

$$x(t)=e^{3t}\sin t=e^{3t}\left[\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right]=\left(\frac{1}{2j}\right)e^{(3+j)t}-\left(\frac{1}{2j}\right)e^{(3-j)t}$$

$$\Rightarrow y(t)=\left(\frac{1}{2j}\right)H(3+j)e^{(3+j)t}-\left(\frac{1}{2j}\right)H(3-j)e^{(3-j)t}=\left(\frac{1}{2j}\right)\times 0e^{(3+j)t}-\left(\frac{1}{2j}\right)\times 0e^{(3-j)t}=0$$

۹-۵۲ همانطورکه در بخش ۹-۵ گفتیم، بسیاری از خواص تبدیل لاپلاس ونحوه اثباتشان شبیه خواص متناظر تبدیل فوریه پی‌ریزی شده در فصل ۴ است. در این مسئله می‌خواهیم بعضی از خواص تبدیل لاپلاس را اثبات کنید.

با توجه به نحوه اثبات خواص متناظر تبدیل فوریه در فصل ۴، خواص تبدیل لاپلاس زیر را اثبات کنید. در اثبات خود باید ناحیه همگرایی را نیز در نظر بگیرید.

(الف) جابجایی زمانی (بخش ۹-۵-۲)

(ب) جابجایی در حوزه s (بخش ۹-۵-۳)

(ج) تغییر مقیاس زمانی (بخش ۹-۵-۴)

(د) خاصیت کانولوشن (بخش ۹-۵-۶)

حل : (الف) می‌نویسیم :

$$\mathcal{L}\left\{x(t-t_0)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-t_0)e^{-st}dt$$

حال با تغییر متغیر $t-t_0=\tau$ داریم :

$$\mathcal{L}\left\{x(t-t_0)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau=e^{-st_0}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{-st_0}X(s)$$

(ب) فرض می‌کنیم $X(s)$ در بازه $\alpha<Re\{s\}<\beta$ همگرا باشد، در اینصورت :

$$\mathcal{L}\left\{e^{s_0t}x(t)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{s_0t}x(t)\right)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-(s-s_0)t}dt=X(s-s_0)\ ,\ \alpha<Re\{s-s_0\}<\beta$$

$$=X(s-s_0)\quad,\quad \alpha+Re\{s_0\}<Re\{s\}<\beta+Re\{s_0\}$$

دیده می‌شود که ناحیه همگرایی به اندازه $Re\{s_0\}$ به سمت راست جابجا شده است.

(ج) فرض می‌کنیم $X(s)$ در بازه $\alpha<Re\{s\}<\beta$ همگرا باشد، داریم :

$$\mathcal{L}\left\{x(at)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(at)e^{-st}dt \qquad , \quad (I)$$

در این مرحله دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول : $a>0$)

با تغییر متغیر $at=\tau$، از رابطه (I) خواهیم داشت :

$$\mathcal{L}\left\{x(at)\right\}=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}d\tau=\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad , \quad \alpha<Re\left\{\frac{s}{a}\right\}<\beta \qquad , \quad (II)$$

حالت دوم : $a>0$)

دوباره با تغییر متغیر $at=\tau$، از رابطه (I) می‌نویسیم :

$$\mathcal{L}\left\{x(at)\right\}=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty}x(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}d\tau=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}d\tau=-\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right),\ \alpha<Re\left\{\frac{s}{a}\right\}<\beta,\ (III)$$

توجه شود که تغییر مقیاس با ضریب $a=0$ هیچگونه مفهوم تجربی نداشته و بنابراین در بالا بررسی نشده است. حال می‌توان با توجه به روابط (II) و (III) نوشت :

$$\mathcal{L}\left\{x(at)\right\}=\frac{1}{|a|}X(s) \quad , \quad \alpha<Re\{\frac{s}{a}\}<\beta$$

(د) فرض می‌کنیم : $y(t)=x(t)*h(t)$ ، در اینصورت می‌توان نوشت :

$$Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(t)*h(t)\right)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x(\tau)h(t-\tau)e^{-st}\right]d\tau dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)e^{-st}dt\right]d\tau$$

حال فرض می‌کنیم s جزو ناحیه همگرایی $H(s)$ باشد، در اینصورت با توجه به ویژگی جابجایی زمانی تبدیل لاپلاس خواهیم داشت :

$$Y(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\left[e^{-s\tau}H(s)\right]d\tau=H(s)\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

اکنون فرض کنید s جزو ROCی $X(s)$ باشد ، در اینصورت :

$$Y(s)=H(s)\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau=X(s)H(s)$$

با توجه به دو فرض بالا، برای همگرایی $Y(s)$، s باید توماً درون نواحی همگرایی $X(s)$ و $H(s)$ باشد، البته حالت‌های خاصی نیز روی می‌دهد که در آن‌ها، برخی صفر و قطب‌های $X(s)$ و $H(s)$ بر روی هم افتاده و حذف می‌شوند، در چنین شرایطی ROC ممکن است توسعه یابد. بنابراین بطور کلی می‌توان گفت که "حداقل" ناحیه همگرایی $Y(s)$، از اشتراک نواحی همگرایی $X(s)$ و $H(s)$ پدید می‌آید.

۹-۵۳ همانطورکه در بخش ۹-۵-۱۰ گفتیم، قضیه مقدار اولیه می‌گوید، برای سیگنال $x(t)$ با تبدیل لاپلاس $X(s)$ که برای آن در $t<0$، $x(t)=0$؛ مقدار اولیه [یعنی $x(0^+)$] را می‌توان از $X(s)$ بدست آورد

[معادله (۹-۱۱۰)] $$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s)$$

ابتدا توجه کنید که چون در $t<0$ داریم $x(t)=0$، پس $x(t)=x(t)u(t)$ با بسط سری تیلور $x(t)$ حول $t=0^+$ داریم

(م۹-۵۳-۱) $$x(t)=\left[x(0^+)+x^{(1)}(0^+)t+\ldots+x^{(n)}(0^+)\frac{t^n}{n!}+\ldots\right]u(t)$$

که $x^{(n)}(0^+)$ مشتق nام در $t=0^+$ است.

(الف) تبدیل لاپلاس جمله $x^{(n)}(0^+)\left(\frac{t^n}{n!}\right)u(t)$ طرف راست معادله (م۹-۵۳-۱) را بیابید (مرور مثال ۹-۱۴ می‌تواند مفید باشد.).

(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) و بسط معادله (م۹-۵۳-۱) نشان دهید که $X(s)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$X(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^{(n)}(0^+)\frac{1}{s^{n+1}}$$

(ج) نشان دهید که معادله (۹-۱۱۰) از نتیجه بند (ب) بدست می‌آید.

(د) با تعیین $x(t)$ درستی قضیه مقدار اولیه را برای مثالهای زیر تحقیق کنید.

(۱) $X(s)=\frac{1}{s+2}$

(۲) $X(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

(هـ) شکل کلی‌تر قضیه مقدار اولیه این است که اگر به ازای $n<N$ داشته باشیم $x^{(n)}(0^+)=0$، آنگاه $x^{(N)}(0^+)=\lim_{s\to\infty} s^{N+1}X(s)$ نشان دهید که این بیان کلی‌تر از نتیجه بند (ب) بدست می‌آید.

حل: (الف) با توجه به نتیجه مثال (9-14) می‌توان نوشت :

$$\mathcal{L}\left\{x^{(n)}(0^+)\frac{t^n}{n!}u(t)\right\}=x^{(n)}(0^+)\mathcal{L}\left\{\frac{t^{(n+1)-1}}{\left[(n+1)-1\right]!}e^{-at}u(t)\right\}\Bigg|_{a=0}$$

$$=x^{(n)}(0^+)\frac{1}{(s+a)^{n+1}}\Bigg|_{a=0} \qquad , Re\{s\}>-a$$

$$=\frac{x^{(n)}(0^+)}{s^{n+1}},\quad Re\{s\}>0 \qquad (I)$$

(ب) با توجه به رابطه (I) و بسط $x(t)$ حول $t=0^+$ داریم :

$$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}=\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\left[x^{(n)}(0^+)\frac{t^n}{n!}u(t)\right]\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathcal{L}\left\{x^{(n)}(0^+)\frac{t^n}{n!}u(t)\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{(n)}(0^+)}{s^{n+1}} \quad , \; Re\{s\}>0 \qquad ,(II)$$

ج) از رابطه (II) داریم :

$$\lim_{s\to\infty} sX(s)=\lim_{s\to\infty} s\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{(n)}(0^+)}{s^{n+1}}=\lim_{s\to\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{(n)}(0^+)}{s^n}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\left[x(0^+)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{(n)}(0^+)}{s^n}\right]=x(0^+)+0=x(0^+)$$

(د-۱) با توجه به اینکه $x(t)$باید سیگنالی دست‌راستی باشد، ROCی $X(s)$یک راست-نیمصفحه بوده و داریم :

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} \quad , \; Re\{s\}>-2\right\}=e^{-2t}u(t) \;\Rightarrow\; x(0^+)=1 \quad ; \quad (III.1)$$

از قضیه مقدار اولیه نیز داریم :

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+2}=1 \qquad , \quad (III.2)$$

از نتایج $(III.1)$ و $(III.2)$ آشکار می‌شود که قضیه مقدار اولیه در این مورد صادق است.

(د-۲) برای این سیگنال نیز با توجه به دست‌راستی بودن $x(t)$داریم :

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad , \; Re\{s\}>-2\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}-\frac{1}{s+2} \; , \; Re\{s\}>-2\right\}$$

$$=2e^{-3t}u(t)-e^{-2t}u(t) \;\Rightarrow\; x(0^+)=2-1=1 \qquad ; \; (IV.1)$$

از قضیه مقدار اولیه نیز خواهیم داشت :

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}=1 \qquad ; \quad (IV.2)$$

با توجه به نتایج $(IV.1)$ و $(IV.2)$ ، صحت قضیه مقدار اولیه در این مورد نیز آشکار می‌شود.

(هـ) از رابطه (II) با توجه به اینکه به ازای $n<N$، $x^{(n)}(0^+)=0$ می‌توان نوشت :

$$X(s)=\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{x^{(n)}(0^+)}{s^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{(n+N)}(0^+)}{s^{n+1+N}} \quad , \; Re\{s\}>0$$

در اینصورت با ضرب طرفین رابطه فوق در عبارت s^{N+1} و در حد $s\to\infty$ خواهیم داشت :

$$\lim_{s\to\infty} X(s)=\lim_{s\to\infty} s^{N+1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{(n+N)}(0^+)}{s^{n+1+N}}=\lim_{s\to\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{(n+N)}(0^+)}{s^n}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\left[x^{(0+N)}(0^+)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{(n+N)}(0^+)}{s^n}\right]=x^{(N)}(0^+)+0=x^{(N)}(0^+)$$

۹-۵۴ سیگنال حقیقی $x(t)$ باتبدیل لاپلاس $X(s)$ را در نظر بگیرید.

(الف) با مزدوج مختلط کردن دو طرف معادله (۹-۵۶) نشان دهید که $X(s)=X^*(s^*)$.

(ب) با توجه به نتیجه بند (الف) نشان دهید که اگر $X(s)$ در $s=s_0$ قطب (صفر) داشته باشد، باید در $s=s_0^*$ نیز قطب (صفر) داشته باشد؛ یعنی برای $x(t)$ حقیقی قطبها و صفرهای $X(s)$ خارج محور حقیقی باید به صورت زوجهای مزدوج مختلط باشند.

حل: (الف) از رابطه (56-9) داریم :

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds\Rightarrow x^*(t)=\left(\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds\right)^*=-\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X^*(s)e^{s^*t}ds^*$$

حال با تغییر متغیر $s^*=\eta$ و با توجه به حقیقی بودن $x(t)$ می‌توان نوشت :

$$x(t)=x^*(t)=-\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma+j\infty}^{\sigma-j\infty}X^*(\eta^*)e^{\eta t}d\eta\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X^*(\eta^*)e^{\eta t}d\eta$$

که با مقایسه با رابطه (56-9) می‌توان دید :

$$X^*(s^*)=\mathscr{L}\{x(t)\}=X(s)\quad\Rightarrow X^*(s^*)=X(s)$$

(ب) ابتدا مسئله را برای حالتی که $X(s)$ در s_0 صفری داشته باشد در نظر می گیریم؛ با توجه به حقیقی بودن $x(t)$ از بند (الف) خواهیم داشت :

$$X^*(s_0^*)=X(s_0)=0\Rightarrow X^*(s_0^*)=0\Rightarrow X(s_0^*)=0$$

یعنی s_0^* نیز یک صفر $X(s)$ می‌باشد.

به همین ترتیب ،اگر s_0 قطبی از $X(s)$ باشد، خواهیم داشت :

$$X^*(s_0^*)=X(s_0)=\infty\quad\Rightarrow\quad X(s_0^*)=0$$

که نشان می‌دهد که s_0^* نیز یک قطب $X(s)$ است.

۹-۵۵ دربخش ۹-۶،جدول ۹-۲،چند زوج تبدیل لاپلاس قید شده است،ما مشخص کرده‌ایم که زوجهای ۱تا۹ را چگونه می‌توان از مثالهای ۹-۱ تا ۹-۱۴ وخواص مختلف جدول ۹-۱ استنتاج کرد.
با استفاده از خواص جدول ۹-۱ زوجهای ۱۰تا۱۶ را از زوجهای ۱ تا ۹ جدول ۹-۲ بدست آورید.

حل : (زوج 10) با توجه به خاصیت انتقال زمانی تبدیل لاپلاس می توان نوشت :

$$\mathscr{L}\{\delta(t-T)\}=e^{-sT}\mathscr{L}\{\delta(t)\}=e^{-sT}\{1,\ All\,s\}=e^{-sT}\ ,All\ s$$

(زوج 11)

$$\mathcal{L}\left\{[\cos\omega_0 t]\ u(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\left[\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]u(t)\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t}u(t)\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t}u(t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-j\omega_0},Re\{s\}>0\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s+j\omega},Re\{s\}>0\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right\}=\frac{s}{s^2+\omega_0^2},Re\{s\}>0$$

(زوج 12)

$$\mathcal{L}\left\{[\sin\omega_0 t]\ u(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\left[\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right]u(t)\right\}=\frac{1}{2j}\mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t}u(t)\right\}-\frac{1}{2j}\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t}u(t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{s-j\omega_0},Re\{s\}>0\right\}-\frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{s+j\omega_0},Re\{s\}>0\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega_0}-\frac{1}{s+j\omega_0}\right]=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2},Re\{s\}>0$$

(زوج 13) با توجه به خاصیت جابجایی فرکانسی تبدیل لاپلاس و زوج لاپلاس *(11)* می‌توان نوشت :

$$\mathcal{L}\left\{[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]\ u(t)\right\}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2},Re\{s+\alpha\}>0=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2},Re\{s\}>-\alpha$$

(زوج 14) با توجه به خاصیت جابجایی فرکانسی تبدیل لاپلاس و زوج لاپلاس *(12)* خواهیم داشت :

$$\mathcal{L}\left\{[e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t]\ u(t)\right\}=\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2},Re\{s+\alpha\}>0=\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2},Re\{s\}>-\alpha$$

(زوج 15) با توجه به خاصیت مشتقگیری زمانی تبدیل لاپلاس داریم :

$$\mathcal{L}\left\{u_n(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}\right\}=s\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1}\delta(t)}{dt^{n-1}}\right\}=s^2\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-2}\delta(t)}{dt^{n-2}}\right\}$$

$$=\ldots=s^n\mathcal{L}\{\delta(t)\}=s^n\times\{1,All\ s\}=s^n\quad,All\ s$$

(زوج 16) از خاصیت کانوولوشن تبدیل لاپلاس داریم :

$$\mathcal{L}\left\{u_{-n}(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{u_{-1}(t)*u_{-(n-1)}(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{u_{-1}(t)\right\}\mathcal{L}\left\{u_{-(n-1)}(t)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{s}\right)\mathcal{L}\left\{u_{-1}(t)*u_{-(n-2)}(t)\right\}=\left(\frac{1}{s}\right)\mathcal{L}\left\{u_{-1}(t)\right\}\left\{u_{-(n-2)}(t)\right\}$$

$$=\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{u_{-(n-2)}(t)\right\}=\ldots=\frac{1}{s^{n-1}}\mathcal{L}\left\{u_{-1}(t)\right\}=\frac{1}{s^{n-1}}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{s^n}\quad,Re\{s\}>0$$

۹–۵۶ به شرطی می‌توان گفت که برای مقدار مشخص عدد مختلط s تبدیل لاپلاس وجود دارد که اندازه تبدیل لاپلاس محدود باشد، یعنی $\left| X(s) \right| < \infty$.

نشان دهید که شرط کافی برای وجود تبدیل $X(s)$ در $s=s_0=\sigma_0+j\omega_0$ این است که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

یعنی حاصلضرب $x(t)$ و $e^{-\sigma_0 t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد. برای این کار باید رابطه زیر در مورد تابع مختلط $f(t)$ را بکار برید

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \le \int_a^b \left| f(t) \right| dt \qquad (\text{م}۹-۵۶-۱)$$

بدون اثبات دقیق معادله (م۶–۵۹–۱) در مورد معقول بودن آن استدلال کنید.

حل : فرض کنیم : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$ در اینصورت خواهیم داشت :

$$\left| X(s) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{st}dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} \right| dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma t}dt \Rightarrow \left| X(s) \right| \Big|_{s=\sigma_0+j\omega_0} \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma_0 t} < \infty$$

بنابراین شرط کافی برای اینکه $X(s)$ در $s=\sigma_0+j\omega_0$ موجود باشد، آنستکه سیگنال $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد.

نکته:معادله $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \le \int_a^b \left| f(t) \right| dt$ که در بالا از آن استفاده کردیم معقول به نظر می‌رسد . چراکه $\int_a^b \left| f(t) \right| dt$ را می‌توان سطح مطلق زیرمنحنی $f(t)$ دانست،در حالی که $\left| \int_a^b f(t)dt \right|$ قدر مطلق سطح خالص زیر منحنی $f(t)$ می‌باشد، با این وصف روشن است که همواره سطح خالص زیر منحنی ، کوچکتر یا مساوی سطح مطلق زیر منحنی خواهد بود.

۹–۵۷ تبدیل لاپلاس $X(s)$ سیگنال $x(t)$ چهار قطب و تعداد نامعلومی صفر دارد. $x(t)$ در $t=0$ یک ضربه دارد. این اطلاعات در مورد تعداد و محل صفرها چه چیزی به ما می‌گوید؟

حل : وجود سیگنال ضربه در $x(t)$ متناظر با یک مقدار ثابت در تبدیل لاپلاس $X(s)$ است (مثلاً : $\mathcal{L}\left\{k\delta(t)\right\}=k$) ، بدین ترتیب زمانی در لحظه $t=0$ ضربه خواهیم داشت که مرتبه چندجمله‌ای صورت $X(s)$ بزرگتر یا لاقل مساوی مرتبه چندجمله‌ای مخرج باشد و این بدان معنی است که $X(s)$ حداقل چهار صفر محدود دارد.

۹-۵۸ $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI علی و پایدار با تابع تبدیل $H(s)$ گویاست. نشان دهید که $g(t)=\Re e\{h(t)\}$ نیز پاسخ ضربه یک سسیتم علی و پایدارست.

حل : از آنجا که $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI علی و پایدار است، تمام قطب‌های $H(s)$ در LHP بوده و ROCی آن شامل یک راست-نیمصفحه شامل محور موهومی خواهد بود. آشکار است که قطب‌های $H^*(s)$، همان قطب‌های $H(s)$ می‌باشند. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که قطب‌های $H^*(s^*)$ مزدوج قطب‌های $H(s)$ بوده و هنوز در نیمصفحه چپ s واقعند. ROCی $H^*(s^*)$ نیز همان ROCی $H(s)$ است. داریم :

$$G(s)=\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}=\mathcal{L}\{Re\{h(t)\}\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\left[h(t)+h^*(t)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{h(t)\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{h^*(t)\}=\frac{1}{2}\left[H(s)+H^*(s^*)\right]$$

دیده می‌شود که تمامی قطب‌های $G(s)$ یا قطب‌های $H(s)$ و یا قطب‌های $H^*(s^*)$ بوده و بنابراین ROCی آن یک راست-نیمصفحه شامل محور موهومی است. و این به آن معنیست که $g(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم علی و پایدار است.

۹-۵۹ $\mathcal{X}(s)$ تبدیل لاپلاس یکطرفه $x(t)$ است. تبدیل لاپلاس یکطرفه سیگنالهای زیر را برحسب $\mathcal{X}(s)$ بیان کنید

(الف) $x(t-1)$ (ب) $x(t+1)$ (ج) $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ (د) $\dfrac{d^3x(t)}{dt^3}$

حل : (الف) با تغییر متغیر $t-1=\tau$ در تبدیل لاپلاس یکطرفه زیر خواهیم داشت :

$$\mathcal{Y}(s)=\int_{0^-}^{+\infty}y(t)e^{-st}=\int_{0^-}^{+\infty}x(t-1)e^{-st}dt=\int_{-1^-}^{+\infty}x(\tau)e^{-s(\tau+1)}d\tau$$

$$=e^{-s}\left[\int_{0^-}^{+\infty}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau+\int_{-1^-}^{0^-}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]=e^{-s}\left[\mathcal{X}(s)+\int_{-1^-}^{0^-}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]$$

(ب) با تغییر متغیر $t+1=\tau$ در تبدیل لاپلاس یکطرفه زیر خواهیم داشت :

$$\mathcal{Y}(s)=\int_{0^-}^{+\infty}y(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty}x(t+1)e^{-st}dt=\int_{1^-}^{+\infty}x(\tau)e^{-s(\tau-1)}d\tau$$

$$=e^{s}\left[\int_{0^-}^{+\infty}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau-\int_{0^-}^{1^-}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]=e^{s}\left[\mathcal{X}(s)-\int_{0^-}^{1^-}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]$$

(ج) با استفاده از خاصیت انتگرالگیری زمانی تبدیل لاپلاس یکطرفه جدول (3-9) خواهیم داشت :

$$\mathcal{Y}(s)=\int_{0^-}^{+\infty}y(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt=\int_{0^-}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{0^-}x(\tau)d\tau+\int_{0^-}^{t}x(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0^-}\left(x(\tau)e^{-st}\right)d\tau dt + \int_{0^-}^{+\infty}\left[\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$= \left(\int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}dt\right)\left(\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau\right) + \frac{1}{s}\chi(s) = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau + \frac{1}{s}\chi(s) = \frac{1}{s}\left[\mathscr{X}(s) + \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau\right]$$

(د) با انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نوشت :

$$\mathscr{Y}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty}\frac{d^3x(t)}{dt^3}e^{-st}dt$$

$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}e\Bigg|_{0^-}^{+\infty} + s\int_{0^-}^{+\infty}\frac{d^2x(t)}{dt^2}e^{-st}dt = s\int_{0^-}^{+\infty}\frac{d^2x(t)}{dt^2}e^{-st}dt - x''(0^-) \qquad , \quad (I)$$

به همین ترتیب :

$$\int_{0^-}^{+\infty}\frac{d^2x(t)}{dt^2}e^{-st}dt = \frac{dx(t)}{dt}e\Bigg|_{0^-}^{+\infty} + s\int_{0^-}^{+\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = s\int_{0^-}^{+\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt - x'(0^-) \qquad , \quad (II)$$

و بالاخره داریم :

$$\int_{0^-}^{+\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = \Big|x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{+\infty} + s\int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = s\int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} - x(0^-) = s\mathscr{X}(s) - x(0^-), (III)$$

حال با توجه به روابط (I)، (II) و (III) داریم :

$$\mathscr{Y}(s) = s^3\mathscr{X}(s) - s^2x(0^-) - sx'(0^-) - x''(0^-)$$

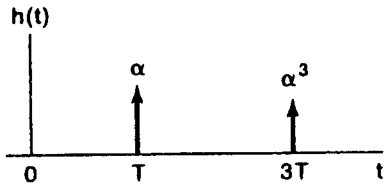
۹-۶۰ در مخابرات تلفنی راه دور گاهی پژواک بوجود می‌آید زیرا سیگنال ارسالی در گیرنده بازتاب یافته، از طریق خط برمی‌گردد و در فرستنده دوباره بازتاب یافته به گیرنده برمی‌گردد. پاسخ ضربه سیستمی که این پدیده را مدل می‌کند، در شکل م۹-۶۰ نشان داده شده است، با این فرض که تنها یک پژواک دریافت می‌شود. پارامتر T زمان انتقال بین گیرنده و فرستنده است و α تضعیف دامنه در طی کردن یک مسیر را نشان می‌دهد.

(الف) تابع تبدیل $H(s)$ و ناحیه همگرایی سیستم را تعیین کنید.

(ب) با توجه به نتیجه الف (الف) می‌بینیم که $H(s)$ نسبت دو چندجمله‌ای نیست. با این حال نمایش آن برحسب صفرها و قطبها مفیدست و مطابق معمول صفرها مقادیری از s هستند که به ازای آنها $H(s)=0$ و قطبها مقادیری از s که به ازای آنها $\left[\frac{1}{H(s)}\right]=0$. برای تابع تبدیل بند (الف) صفرها را تعیین کنید. نشان دهید که این تابع قطب ندارد.

(ج) با استفاده از نتیجه بند (ب) نمودار قطب-صفر $H(s)$ را رسم کنید.

(د) با در نظر گرفتن بردارهای مناسب در صفحه s اندازه پاسخ فرکانسی سیستم را رسم کنید.



شکل م ۹-۶۰

حل : (الف) داریم :

$$h(t)=\alpha\delta(t-T)+\alpha^3\delta(t-3T)$$

$$\Rightarrow H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\mathcal{L}\left\{\alpha\delta(t-T)+\alpha^3\delta(t-3T)\right\}=\alpha e^{-sT}+\alpha^3 e^{-3sT}\quad, All\ s$$

(ب) برای بدست آوردن محل صفرهای $H(s)$ می‌نویسیم :

$$H(s)=\alpha e^{-sT}+\alpha^3 e^{-3sT}=\alpha e^{-sT}\left[1+\alpha^2 e^{-2sT}\right]=0\Rightarrow 1+\left(\alpha e^{-sT}\right)^2=0$$

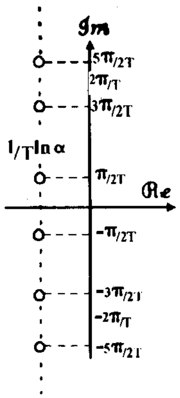
$$\Rightarrow \alpha e^{-sT}=\pm j=e^{\pm j\frac{\pi}{2}+j2k\pi}\Rightarrow \ln\left(\alpha e^{-sT}\right)=\ln\left[e^{\pm j\left[\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi\right]}\right]$$

$$\Rightarrow s=\frac{1}{T}\ln\alpha\mp j\left[\left(\frac{\pi}{2T}\right)\pm\frac{2k\pi}{T}\right]\quad, k\in Z$$

همچنین برای قطب‌های $H(s)$ باید داشته باشیم : $H(s)=\alpha e^{-sT}+\alpha^3 e^{-sT}=\infty$

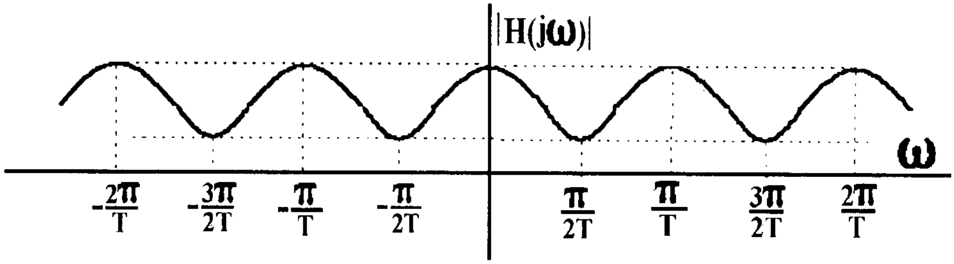
رابطه فوق تنها برای مقادیر نامحدود s برقرار است و بنابراین هیچ قطبی در صفحه محدود s نخواهیم داشت :

(ج) با توجه به نتایج بند (ب)، نمودار قطب-صفر $H(s)$ در شکل زیر رسم شده است :



(د) برای بدست آوردن شکل تقریبی از اندازه پاسخ فرکانسی این سیستم ، به سادگی می‌توان دید که اگر صفرها به اندازه‌کافی به محور موهومی نزدیک باشند، با حرکت بر روی محور $j\omega$ وقتی به نزدیک یکی از

صفرها می‌رسیم ، آن صفر، صفر غالب بوده و بنابراین دامنه پاسخ فرکانسی را کاهش می‌دهد. بدین ترتیب اندازه پاسخ فرکانسی $|H(j\omega)|$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت :



۹-۶۱ تابع خودهمبستگی سیگنال $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

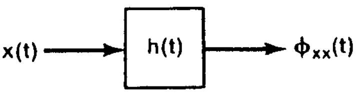
$$\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau$$

(الف) پاسخ ضربه $h(t)$ یک سیستم LTI را برحسب $x(t)$ به نحوی تعیین کنید که خروجی سیستم به ازای ورودی $x(t)$ برابر $\phi_{xx}(t)$ باشد [شکل م۹-۶۱(الف)].

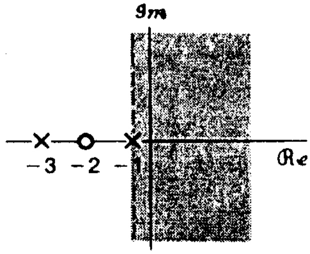
(ب) $\Phi_{xx}(s)$ یعنی تبدیل لاپلاس $\phi_{xx}(t)$ را با توجه به جواب بند (الف) برحسب $X(s)$ بدست آورید. همچنین $\Phi_{xx}(j\omega)$، یعنی تبدیل فوریه $\phi_{xx}(t)$ را برحسب $X(j\omega)$ بیان کنید.

(ج) اگر ROC و نمودار قطب-صفر $x(t)$ مطابق شکل م۹-۶۱(ب) باشد، نمودار قطب-صفر و ROC مربوط به $\phi_{xx}(t)$ را بیابید.

شکل م ۹-۶۱



(الف)



(ب)

حل : (الف) با تغییر متغیر $t+\tau=\eta$ خواهیم داشت :

$$\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\eta-t)x(\eta)d\eta=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\eta)x(-(t-\eta))d\eta$$

$$=x(t)*x(-t)=x(t)*h(t) \Rightarrow h(t)=x(-t)$$

(ب)

$$\Phi_{xx}(s)=\mathcal{L}\left\{\phi_{xx}(t)\right\}=\mathcal{L}\{x(t)*x(-t)\}=\mathcal{L}\{x(t)\}.\mathcal{L}\{x(-t)\}=X(s)X(-s) \qquad ,\ (I)$$

حال اگر قرار دهیم $s=j\omega$ (یعنی : $\delta=0$) ، تبدیل فوریه سیگنال $\phi_{xx}(j\omega)$ بدست خواهد آمد :

$$\Phi_{xx}(j\omega)=X(j\omega)X(-j\omega) \qquad , \quad (II)$$

(ج) با توجه به رابطه (I) ناحیه همگرایی $\Phi_{xx}(s)$ از اشتراک نواحی همگرایی سیگنالهای $X(s)$ و $X(-s)$ بدست می‌آید، با توجه به ROC و نمودار قطب-صفر داده شده برای $x(t)$ داریم :

$$ROC_{\Phi}=\{Re\{s\}>-1\}\cap\{Re\{-s\}>-1\}=\{Re\{s\}>-1\}\cap\{Re\{s\}<1\}=-1<Re\{s\}<1$$

۹-۶۲ در برخی کاربردهای طراحی و تحلیل سیگنال به دسته‌ای از سیگنالهای $\phi_n(t)$ برمی‌خوریم که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\phi_n(t)=e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)u(t) \qquad n=0,1,2,... \qquad \text{(م۹-۶۲-۱)}$$

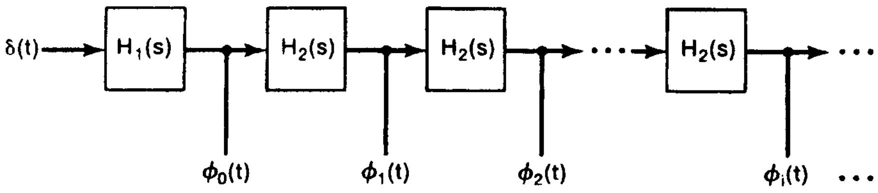
که در آن

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right) \qquad \text{(م۹-۶۲-۲)}$$

(الف) توابع $L_n(t)$ چندجمله‌ایهای لاگر نامیده می‌شوند. برای نشان دادن چندجمله‌ای بودن اینها $L_0(t)$، $L_1(t)$ و $L_2(t)$ را بیابید.

(ب) با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس مندرج در جدول ۹-۱ و زوجهای جدول ۹-۲، تبدیل لاپلاس $\phi_n(t)$ را بیابید.

(ج) می‌توان سیگنالهای $\phi_n(t)$ را با دادن یک ضربه به ورودی شبکه شکل م۹-۶۲ ایجاد کرد. با توجه به نتیجه بند (ب)، $H_1(s)$ و $H_2(s)$ تابع تبدیل شبکه‌های بعدی را بیابید، به نحوی که سیگنالهای خروجی شبکه‌های واقع در این زنجیر $\phi_n(t)$ باشند.



شکل م ۹-۶۲

حل : (الف)

$$L_0(t)=\frac{e^t}{0!}\cdot\frac{d^0}{dt^0}\left(t^0e^{-t}\right)=e^t\left(e^{-t}\right)=1$$

$$L_1(t)=\frac{e^t}{1!}\cdot\frac{d^1}{dt^1}\left(t^1e^{-t}\right)=e^t\left(e^{-t}-te^{-t}\right)=1-t$$

$$L_2(t)=\frac{e^t}{2!}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left(t^2e^{-t}\right)=\frac{e^t}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(2te^{-t}-t^2e^{-t}\right)$$

$$=\frac{e^t}{2}\left[2e^{-t}-2te^{-t}-2te^{-t}+t^2e^{-t}\right]=1-2t+\frac{t^2}{2}$$

ب) ابتدا داریم :

$$\phi_n(t)=e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)u(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left[\frac{e^t}{n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\left(t^ne^{-t}\right)\right]u(t)=\frac{e^{\frac{t}{2}}}{n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\left(t^ne^{-t}\right)u(t)$$

$$=\frac{e^{\frac{t}{2}}}{n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\left[t^ne^{-t}u(-t)+t^ne^{-t}u(t)\right].u(t)$$

$$=\frac{e^{\frac{t}{2}}}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n}\left(t^ne^{-t}u(-t)\right).u(t)+\frac{d^n}{dt^n}\left(t^ne^{-t}u(t)\right).u(t)\right]$$

$$=\frac{e^{\frac{t}{2}}}{n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\left(t^ne^{-t}u(t)\right)=e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n}{n!}e^{-t}u(t)\right)$$

در اینصورت با توجه به جداول (1-9) و (2-9) می‌توان نوشت :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!}e^{-t}u(t)\right\}=\frac{1}{(s+1)^{n+1}}\Rightarrow\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n}{n!}e^{-t}u(t)\right)\right\}=\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow\Phi_n(s)=\mathcal{L}\{\phi_n(t)\}=\mathcal{L}\left\{e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n}{n!}e^{-t}u(t)\right)\right\}=\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(s-\frac{1}{2}+1\right)^{n+1}}=\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

ج) برای $\phi_0(t)$ که با توجه به شکل (م62-9) باید پاسخ ضربه سیستم طبقه اول با تابع تبدیل $H_1(s)$ باشد می‌توان نوشت :

$$\phi_0(t)=\delta(t)*h_1(t)\Rightarrow\Phi_0(s)=\mathcal{L}\{\delta(t)\}\mathcal{L}\{h_1(t)\}=H_1(s)\Rightarrow H_1(s)=\Phi_0(s)=\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^0}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^1}=\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

همچنین با توجه به اینکه $\phi_n(t)$ برای $n>0$ پاسخ سیستم‌های دارای تابع تبدیل $H_2(s)$ به $\phi_{n-1}(t)$ می‌باشد، داریم :

$$\phi_n(t)=\phi_{n-1}(t)*h_2(t)\Rightarrow\Phi_n(s)=\mathcal{L}\{\phi_{n-1}(t)\}\mathcal{L}\{h_2(t)\}=\Phi_{n-1}(s)H_2(s)$$

$$\Rightarrow H_2(s)=\frac{\Phi_n(s)}{\Phi_{n-1}(s)}=\frac{\left[\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right]}{\left[\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^n}\right]}=\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

۹-۶۳ در طراحی فیلتر غالباً ممکن و مناسب است که فیلتر پایین‌گذر را به فیلتر بالاگذر تبدیل کرد و

برعکس. اگر $H(s)$ تابع تبدیل فیلتر اصلی و $G(s)$ تابع تبدیل فیلتر تبدیل یافته باشد، یکی از تبدیلات متداول تعویض جای s و $\frac{1}{s}$ است؛ یعنی

$$G(s)=H\left(\frac{1}{s}\right)$$

(الف) $|H(j\omega)|$ و $|G(j\omega)|$ را به ازای $H(s)=\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)}$ رسم کنید.

(ب) معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مربوط $H(s)$ و $G(s)$ را بیابید.

(ج) اکنون حالت کلی‌تر را در نظر بگیرید که $H(s)$ تابع تبدیل مربوط به معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت کلی زیر باشد

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad (\text{م}۹-۶۳-۱)$$

بدون از دست دادن کلیت فرض کرده‌ایم که تعداد مشتقها در هر دو طرف معادله یکسان است، پس در بعضی حالتها ممکن است بعضی ضرایب صفر باشند. $H(s)$ و $G(s)$ را تعیین کنید.

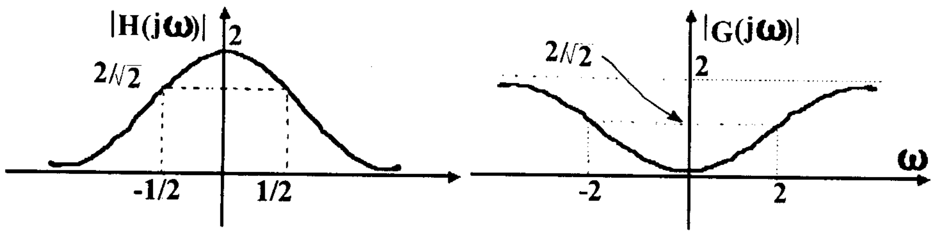
(د) با توجه به نتیجه بند (ج) معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مربوط به $G(s)$ را برحسب ضرایب معادله (م۹-۶۳-۱) تعیین کنید.

حل : (الف) داریم :

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+\frac{1}{2}} \Rightarrow |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \quad , \quad (I)$$

$$G(j\omega)=H\left(\frac{1}{j\omega}\right)=\frac{1}{\frac{1}{j\omega}+\frac{1}{2}}=\frac{2j\omega}{j\omega+2} \Rightarrow |G(j\omega)|=\frac{2\,|\,\omega\,|}{\sqrt{\omega^2+2^2}} \quad , \quad (II)$$

حال با توجه به روابط (I) و (II) می‌توان اندازه تبدیل‌های فوریه $H(j\omega)$ و $G(j\omega)$ را به صورت شکل زیر رسم نمود :



(ب) ابتدا معادله دیفرانسیل مربوط به $H(s)$ را بدست می‌آوریم :

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+\frac{1}{2}} \Rightarrow sY(s)+\frac{1}{2}Y(s)=X(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{2}y(t)=x(t)$$

برای معادله دیفرانسیل مربوط به $G(s)$ نیز داریم :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2s}{s+2} \Rightarrow sY(s)+2Y(s)=2sX(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}$$

(ج) ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل سیستم تبدیل لاپلاس گرفته و می‌نویسیم :

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\}=\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s)=\sum_{k=0}^{N} b_k s^k X(s)$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{k=0}^{N} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

اکنون از رابطه : $G(s)=H\left(\frac{1}{s}\right)$ بدست می‌آوریم :

$$G(s)=H\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{\sum_{k=0}^{N} b_k s^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^{-k}}=\frac{s^{-N}\sum_{k=0}^{N} b_k s^{N-k}}{s^{-N}\sum_{k=0}^{N} a_k s^{N-k}} \Rightarrow G(s)=\frac{\sum_{k=0}^{N} b_k s^{N-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^{N-k}}$$

(د) معادله دیفرانسیل مرتبط با $G(s)$ را به صورت زیر می‌توان بدست آورد :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{k=0}^{N} b_k s^{N-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^{N-k}} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k s^{N-k} Y(s)=\sum_{k=0}^{N} b_k s^{N-k} X(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^{N-k} y(t)}{dt^{N-k}}=\sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^{N-k} x(t)}{dt^{N-k}}$$

۹-۶۴ مدار RLC شکل ۹-۲۷ را با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که اگر R، L و C مثبت باشند، سیستم LTI پایدارست.

(ب) R، L و C باید چه رابطه‌ای با هم داشته باشند تا سیستم حاصل یک فیلتر باترورث مرتبه دوم باشد.

حل : (الف) با مراجعه به مثال $(24\text{-}9)$ کتاب تابع تبدیل مدار را می‌یابیم :

$$H(s)=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{LC}}=\frac{\frac{1}{LC}}{(s-s_{p_1})(s-s_{p_2})} \quad , \quad (I)$$

با توجه به اینکه $C>0$، $R>0$ و $L>0$، خواهیم داشت: $\frac{R}{L}>0, \frac{1}{LC}>0$ و می‌توان نوشت :

$$s_{p_{1,2}}=\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{R}{L}\right)\pm\sqrt{\Delta}\right] \quad , \quad \Delta=\left(\frac{R}{L}\right)^2-\frac{4}{LC}$$

حال دو حالت پیش می‌آید :

حالت اول : $\left(\frac{R}{L}\right)^2 \geq \frac{4}{LC}$ ؛ در این حالت $\left(\frac{R}{L}\right) > \sqrt{\Delta} \geq 0$ بوده و s_{p_1}, s_{p_2} هر دو حقیقی و منفی هستند.

حالت دوم : $\left(\frac{R}{L}\right)^2 < \frac{4}{LC}$ ؛ در این حالت نیز $\Delta < 0$ بوده و هر دو قطب s_{p_1}, s_{p_2} مختلط می‌باشند. بخش حقیقی این قطب‌ها $-\left(\frac{R}{2L}\right) < 0$ است.

دیده می‌شود که در هر دو حالت فوق قطب‌ها در نیمه چپ صفحه s واقع هستند. بنابراین سیستم پایدار است.

(ب) برای فیلتر باتروورث مرتبه دوم با توجه به معادله (۹-۱۵۰) کتاب داریم :

$$B(s)=\frac{\omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\,\omega_c s+\omega_c^2} \quad , \quad (II)$$

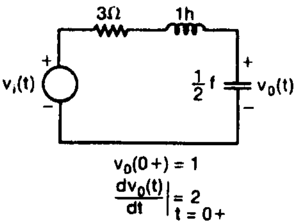
حال اگر بخواهیم پاسخ فرکانسی مدار RLC مورد نظر، دارای مشخصه یک فیلتر باتروورث به صورت بالا باشد، از معادلات (I) و (II) می‌نویسیم :

$$H(s)=B(s) \Rightarrow \begin{cases} \omega_c^2=\dfrac{1}{LC} \\ \sqrt{2}\,\omega_c=\left(\dfrac{R}{L}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{R^2C}{2L}=1 \quad , \quad (III)$$

رابطه (III) همان محدودیتی است که فیلتر باتروورث به مدار تحمیل می‌کند.

۹-۶۵ (الف) معادله دیفرانسیل ارتباط‌دهنده $v_i(t)$ و $v_o(t)$ مدار RLC شکل م۹-۶۵ را بیابید.

(ب) فرض کنید $v_i(t)=e^{-3t}u(t)$. با استفاده از تبدیل لاپلاس یکطرفه v_o در $t>0$ را بیابید.



شکل م ۹-۶۵

حل : (الف) این مدار درست به همان شکل مدار مسئله قبل می‌باشد، بنابراین در اینجا نیز داریم :

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{LC}} \Rightarrow s^2V_o(s)+\left(\frac{R}{L}\right)sV_o(s)+\left(\frac{1}{LC}\right)V_o(s)=\left(\frac{1}{LC}\right)V_i(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \frac{d^2v_o(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{dv_o(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v_o(t)=\frac{1}{LC}v_i(t) \quad , \quad (I)$$

که همان معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده $v_i(t)$ و $v_o(t)$ می‌باشد.

(ب) با گرفتن تبدیل لاپلاس یکطرفه از معادله دیفرانسیل (I) با شرایط اولیه داده شده در لحظه $t=0^+$ خواهیم داشت :

$$[s^2\mathcal{V}_o(s)-sv_o(0^+)-v_o'(0^+)]+\frac{R}{L}[s\mathcal{V}_o(s)-v_o(0^+)]+\frac{1}{LC}\mathcal{V}_o(s)=\frac{1}{LC}\mathcal{V}_i(t)$$

$$\Rightarrow [s^2\mathcal{V}_o(s)-s-2]+3[s\mathcal{V}_o(s)-1]+2\mathcal{V}_o(s)=2\mathcal{V}_i(s) \Rightarrow \mathcal{V}_o(s)=\frac{2\mathcal{V}_i(s)+s+5}{s^2+3s+2} \quad ,(II)$$

از طرفی برای تبدیل لاپلاس یکطرفه $v_i(t)$ داریم : $v_i(t)=e^{-3t}u(t) \Rightarrow \mathcal{V}_i(s)=\frac{1}{s+3} \quad , \quad (III)$

بدین ترتیب از روابط (II) و (III) خواهیم داشت :

$$\mathcal{V}_o(s)=\frac{2+(s+3)(s+5)}{(s^2+3s+2)(s+3)}=\frac{s^2+8s+17}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{5}{s+1}-\frac{5}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow v_o(t)=5e^{-t}u(t)-5e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t) \quad , \quad t>0^+$$

عبارت $t>0^+$ در بالا به اعتبار $v_o(t)$ تنها برای لحظات $t>0^+$ تاکید دارد، چرا که از لحظات پیش از آن اطلاع درستی نمی‌دهد.

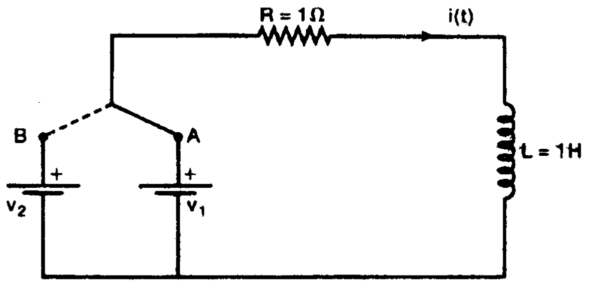
۹-۶۶ مدار RL شکل م۹-۶۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید هنگامی که کلید در وضعیت A قرار دارد، جریان $i(t)$ به حالت ماندگار رسیده است. در $t=0$ کلید از وضعیت A به وضعیت B می‌رود.

(الف) معادله دیفرانسیل ارتباط‌دهنده $i(t)$ و v_2 در $t>0^-$ را بیابید. شرط اولیه [یعنی مقدار $i(0^-)$] را برحسب v_1 تعیین کنید.

(ب) با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس یکطرفه مندرج در جدول ۹-۳، جریان $i(t)$ را به ازای مقادیر زیر بیابید و آن را رسم کنید.

$v_2=2V\ ,\ v_1=4V \quad (iii) \quad v_2=0V\ ,\ v_1=4V \quad (ii) \quad v_2=2V\ ,\ v_1=0V \quad (i)$

با توجه به جواب بندهای (i)، (ii) و (iii) نشان دهید که جریان $i(t)$ را می‌توان به صورت مجموع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر نوشت.



شکل م ۹-۶۶

حل : (الف) با اعمال یک KVL به این مدار RL داریم :

$$v_2=Ri(t)+v_L(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i(t)=\frac{1}{L}v_2 \quad ,t>0 \qquad ,(I)$$

همچنین برای محاسبه شرط اولیه معادله دیفرانسیل فوق، مشاهده می‌کنیم که در لحظات $t<0$ مدار به حالت ماندگار خود رسیده و سلف اتصال کوتاه است، بویژه در لحظه $t=0^-$ می‌توان نوشت :

$$i(0^-)=\frac{v_1}{R}=v_1 \qquad ,(II)$$

(ب) ابتدا تبدیل لاپلاس یکطرفه از طرفین معادله (I) گرفته و داریم :

$$s\mathscr{I}(s)-i(0^-)+\frac{R}{L}\mathscr{I}(s)=\frac{1}{L}.\frac{v_2}{s} \Rightarrow (II) \Rightarrow s\mathscr{I}(s)-v_1+\mathscr{I}(s)=\frac{v_2}{s} \Rightarrow \mathscr{I}(s)=\frac{v_2+sv_1}{s(s+1)} \;,\; (III)$$

حال سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

(ب-i) $v_2=2V\ ,\ v_1=0V$: از رابطه (III) خواهیم داشت :

$$\mathscr{I}(s)=\frac{2}{s(s+1)}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1} \Rightarrow i_1(t)=2u(t)-2e^{-t}u(t) \quad , \quad t>0^-$$

(ب - ii) $v_2=0V\ ,\ v_1=4V$: باز از رابطه (III) خواهیم داشت :

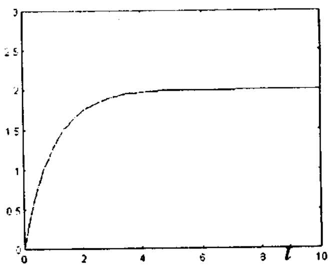
$$\mathscr{I}(s)=\frac{4s}{s(s+1)}=\frac{4}{s+1} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1} \Rightarrow i_2(t)=4e^{-t}u(t) \quad , \quad t>0^-$$

(ب - iii) $v_2=2V\ ,\ v_1=4V$: از رابطه (III) بدست می‌آوریم :

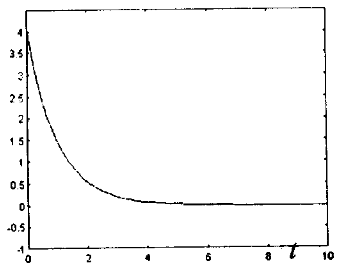
$$\mathscr{I}(s)=\frac{2+4s}{s(s+1)}=\frac{2}{s}+\frac{2}{s+1} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1} \Rightarrow i_3(t)=2u(t)+2e^{-t}u(t) \quad , \quad t>0^-$$

با توجه به نتایج بدست آمده برای $i_1(t)$ ، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ دیده می‌شود که $i_3(t)=i_1(t)+i_2(t)$؛ این مسئله نشان می‌دهد که جریان $i_3(t)$ را می‌توان به صورت مجموع پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر نوشت، چرا که $i_1(t)$ پاسخ حالت صفر مدار بوده و $i_2(t)$ پاسخ ورودی صفر مدار می‌باشد؛ جریان‌های هر سه حالت فوق را در شکل زیر می‌بینید.

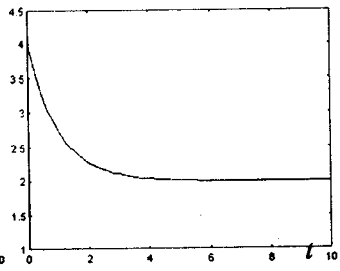
$i_1(t)=2u(t)-2e^{-t}u(t)$



$i_2(t)=4e^{-t}u(t)$



$i_3(t)=2u(t)+2e^{-t}u(t)$



۱۰

تبدیل Z

۱۰-۱ برای همگرا بودن جمعهای زیر $r=|z|$ باید چه شرطی را ارضا کنند:

الف- $\sum_{n=-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{-n}$ ب- $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1}z^{n}$

ج- $\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}z^{-n}$ د- $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)z^{-n}$

حل: (الف)

$$\sum_{n=-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-(n-1)}=z\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}<\infty\Rightarrow\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1\Rightarrow|z|>\frac{1}{2}$$

(ب)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1}z^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-(n+1)+1}z^{n+1}=z\sum_{n=0}^{+\infty}(2z)^{n}<\infty\Rightarrow|2z|<1\Rightarrow|z|<\frac{1}{2}$$

(ج) ابتدا داریم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}z^{-n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(z^{-1}\right)^{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-z^{-1}\right)^{n}<\infty$$

و این در صورتی امکان‌پذیر خواهد بود که هر دو مجموع اخیر، همزمان همگرا شوند، یعنی: $|z^{-1}|<1$ و $|-z^{-1}|<1$، در اینصورت کافی است داشته باشیم: $|z|>1$.

(د)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)z^{-n}+1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)z^{-n}$$

$$=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)z^{-(n+1)}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)z^{n+1}$$

$$=1+\frac{1}{2}z^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)+\frac{1}{2}z\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z\right)^{n}\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)<\infty$$

و بدین ترتیب کافیست دو مجموع فوق تواماًهمگرا شوند؛ با توجه به اینکه همواره داریم : $\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+1)\right)\right|\leq 1$ ، شرایط همگرایی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد :

$$\begin{cases}\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1\\ \left|\frac{1}{2}z\right|<1\end{cases}\Rightarrow\quad \frac{1}{2}<|z|<2$$

۱۰–۲ سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u[n-3]$$

با استفاده از معادله (۱۰–۳) تبدیل zاین سیگنال را بیابید و ناحیه همگرایی آن را مشخص کنید.

حل :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u[n-3]z^{-n}=\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}z^{-1}\right)^{n}=\left(\frac{1}{5}z^{-1}\right)^{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}z^{-1}\right)^{n}$$

$$=\left(\frac{1}{5}z^{-1}\right)^{3}\frac{1}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}\quad;\quad\left|\frac{1}{5}z^{-1}\right|<1\quad=\left(\frac{1}{125}\right)\left(\frac{z^{-3}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}\right)\quad;\quad|z|>\frac{1}{5}$$

۱۰–۳ فرض کنید

$$x[n]=(-1)^{n}u[n]+\alpha^{n}u[-n-n_0]$$

عدد مختلط α و عدد صحیح n_0باید چه شرایطی را ارضا کنند، تا ناحیه همگرایی $X(z)$ به صورت زیر باشد

$$1<|z|<2$$

حل : می‌نویسیم :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{(-1)^{n}u[n]+\alpha^{n}u[-n-n_0]\right\}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-n_0}\alpha^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-z^{-1})^{n}+\left(\alpha^{-1}z\right)^{n_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\alpha^{-1}z\right)^{n}<\infty$$

بدین منظور کافیست هر دو مجموع فوق بطور همزمان همگرا شوند، بطور خلاصه :

$$\begin{cases} |-z^{-1}| < 1 \\ |\alpha^{-1}z| < 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 1 < |z| < |\alpha|$$

با مقایسه این ناحیه همگرایی با ناحیه همگرایی داده شده در مسئله $(2 < |z| < 1)$ به آسانی ملاحظه می‌کنیم $|\alpha| = 2$ ، ضمناً مشاهده می‌کنیم که ناحیه همگرایی داده شده هیچ محدودیتی را به n_0 تحمیل نمی‌کند و بنابراین n_0 اختیاری است .

۴-۱۰ سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & ; \ n \le 0 \\ 0 & ; \ n > 0 \end{cases}$$

قطبها و ناحیه همگرایی $X(z)$ را تعیین کنید.

حل : داریم :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \left[\frac{e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{3}z^{-1}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{3}z^{-1}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(3e^{-j\frac{\pi}{4}}z\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(3e^{j\frac{\pi}{4}}z\right)^n < \infty$$

در اینصورت برای همگرایی تبدیل z سیگنال $x[n]$ کافیست دو مجموع فوق بطور همزمان همگرا شوند، یعنی :

$$\begin{cases} \left|3e^{-j\frac{\pi}{4}}z\right| < 1 \\ \left|3e^{j\frac{\pi}{4}}z\right| < 1 \end{cases} \Rightarrow \quad |z| < \frac{1}{3}$$

در این ناحیه همگرایی خواهیم داشت :

$$X(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(3e^{-j\frac{\pi}{4}}z\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(3e^{j\frac{\pi}{4}}z\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{1-3e^{-j\frac{\pi}{4}}z}\right] + \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{1-3e^{j\frac{\pi}{4}}z}\right]$$

بدین ترتیب مشاهده می‌کنیم $X(z)$ دارای دو قطب زیر است :

$$1-3e^{\mp j\frac{\pi}{4}}z_p=0 \quad \Rightarrow \quad z_p=\frac{1}{3}e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

۱۰–۵ برای هر یک از تبدیل z های داده شده تعداد صفرهای متناهی و تعداد صفرهای واقع در بینهایت آن را تعیین کنید.

(الف) $\dfrac{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$ (ب) $\dfrac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)}$

(ج) $\dfrac{z^{-2}\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$

(الف) می‌نویسیم :

$$X(z)=\frac{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

دیده می‌شود که تبدیل zفوق، دو قطب محدود در $z=\frac{1}{3}$و $z=\frac{1}{4}$و تنها یک صفر محدود در $z=\frac{1}{2}$دارد. از آنجا که تعداد صفرهای محدود یک واحد از تعداد قطب‌های محدود کمتر است، این تبدیل دارای یک صفر نامحدود است. (این مطلب را می‌توان به خوبی و با حدگیری از $X(z)$وقتی که $z\to\infty$،مشاهده کرد).

(ب) در اینجا نیز می‌نویسیم :

$$X(z)=\frac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)}=\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$$

آشکار است که $X(z)$ دارای دو قطب در $z=3$و $z=4$و دو صفر در $z=2$و $z=1$می‌باشد. چون تعداد صفرها وقطب‌های محدود با هم برابرند، هیچ قطب یا صفر نامحدودی نخواهیم داشت.

(ج) داریم :

$$X(z)=\frac{z^{-2}\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{(z-1)}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)}$$

بنابراین این تبدیل دارای سه قطب در $z=0$، $z=\frac{1}{4}$و $z=-\frac{1}{4}$و یک صفر در $z=1$است، از آنجاکه تعداد صفرها دو واحد از تعداد قطب‌ها کمتر است، دو صفر نیز در بینهایت خواهیم داشت.

۱۰–۶ $x[n]$را سیگنالی مطلقاً جمع‌پذیر با تبدیل zگویای $X(z)$فرض کنید. می‌دانیم $X(z)$قطبی در $z=\frac{1}{2}$ دارد. آیا $x[n]$می‌تواند

(الف) سیگنالی با عمر محدود باشد؟ (ب) سیگنالی دست‌چپی باشد؟
(ج) سیگنالی دست‌راستی باشد؟ (د) سیگنالی دوطرفه باشد؟

حل : (الف) خیر؛ زیرا اگر $x[n]$ سیگنالی با عمر محدود باشد، ROCی تبدیل z آن تمام صفحه ، بجز احتمالاً $z=0$ و/یا $z=\infty$ خواهد بود، اما وجود قطبی در $z=\frac{1}{2}$ با این مطلب سازگار نیست، (ROC به قطب‌های $X(z)$ محدود است).

(ب) خیر؛ اگر $x[n]$ سیگنالی دست‌چپی باشد، ROCی تبدیل z آن داخل درونی‌ترین قطب غیرصفر خواهد بود، یعنی درون دایره‌ای که شعاع آن باندازه کوچکترین قطب غیرصفر $X(z)$ برابر است؛ در این مورد ROC می‌تواند حداکثر ناحیه درونی دایره‌ای به شعاع $r=|z|=\frac{1}{2}$ باشد که به وضوح شامل دایره واحد نمی‌باشد و این با مطلقاً جمع‌پذیر بودن دنباله $x[n]$ سازگار نیست.

(ج) بلی؛ با توجه به ویژگی‌های داده شده برای $x[n]$، این دنباله می‌تواند دست راستی باشد و این در صورتی خواهد بود که هیچ قطبی در خارج دایره واحد نداشته باشد، در اینصورت ROC تا بینهایت گسترش یافته و به ROCی یک سیگنال دست راستی (ناحیه بیرون یک دایره با شعاع برابر با اندازه بزرگترین قطب $X(z)$ تبدیل می‌شود.

(د) بلی، با توجه به اینکه $X(z)$ دارای قطب (یا قطب‌هایی) در داخل دایره واحد است، اگر دارای قطب (یا قطب‌هایی) نیز در خارج دایره واحد باشد، از آنجا که دایره واحد جزو ROC است، ROC به حلقه‌ای شامل دایره واحد تبدیل می‌شود که از پائین و بالا به ترتیب به بزرگترین قطب داخل دایره واحد و کوچکترین قطب خارج دایره واحد محدود خواهد بود؛ بوضوح این ROC مشخص کننده یک دنباله دوطرفه است.

۱۰–۷ عبارت زیر تبدیل z سیگنال $x[n]$ است.

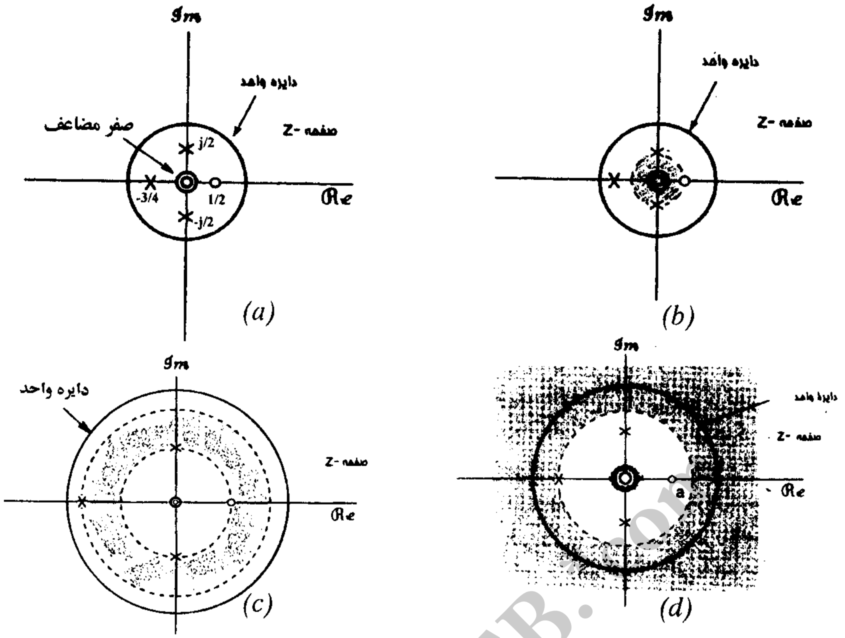
$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

چند ناحیه همگرایی مختلف را می‌توان به $X(z)$ نسبت داد.

حل : ابتدا داریم :

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)}=\frac{z^2\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)\left(z^2+\frac{5}{4}z+\frac{3}{8}\right)}=\frac{z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{3}{4}\right)}$$

در اینصورت می‌توان نمودار قطب-صفر $X(z)$ را رسم نمود؛ این نمودار در شکل (a) نشان داده شده است :



با توجه به اینکه ROC تبدیل $X(z)$ از حلقه‌های محدودبه قطب‌ها تشکیل می‌شود سه ROCی مختلف را می‌توان از نمودار قطب-صفر (a) تشخیص داد، این سه ROC در شکل‌های (b)، (c) و (d) نشان داده شده‌اند.

۱۰-۸ $x[n]$ سیگنالی است که تبدیل z گویای $X(z)$ آن قطبی در $z=\frac{1}{2}$ دارد. می‌دانیم که

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]$$

مطلقاً جمع‌پذیر است و

$$x_2[n]=\left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]$$

مطلقاً جمع‌پذیر نیست. تعیین کنید که $x[n]$ دست‌چپی است، دست‌راستی است، یا دوطرفه.

حل : مطلقاً جمع‌پذیر بودن سیگنال $x_1[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]$ بدین معنی است که تبدیل فوریه $f\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]\right\}$ همگراست، از طرفی $f\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]\right\}$ همان تبدیل z سیگنال $x[n]$ در $z=4$ است، این همگرایی معادل آن است که $z=4$ در ROCی $X(z)$ واقع است. به همین ترتیب مطلقاً جمع‌پذیر نبودن دنباله $x_2[n]=\left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]$ به معنی عدم همگرایی تبدیل فوریه $f\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]\right\}$

بوده و نشان می‌دهد که تبدیل z سیگنال $x[n]$ در $z=8$ همگرا نیست ($z=8$ در ROC نیست)؛ بنابراین ROC حلقه‌ای شامل $z=4$ خواهد بود که از بالا و پائین به ترتیب حداکثر به $z=8$ و $z=\frac{1}{2}$ (قطب $X(z)$) محدود می‌شود.

۱۰–۹ با استفاده از بسط به کسرهای جزیی و این که

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| > |a|$$

عکس تبدیل z تابع زیر را بیابید

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)} \quad , |z| >2$$

حل: ابتدا با بسط $X(z)$ به کسرهای جزئی می‌نویسیم:

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}=\frac{\left(\frac{2}{9}\right)}{1-z^{-1}}+\frac{\left(\frac{7}{9}\right)}{1+2z^{-1}} \quad , |z| >2$$

چون ROC خارج از قطب بزرگتر قرار دارد، ROCی هر کدام از جمله‌های معادله بالا باید خارج قطب متناظرش باشد، پس:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{\left(\frac{2}{9}\right)}{1-z^{-1}} \quad , \quad |z| >1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{\left(\frac{7}{9}\right)}{1+2z^{-1}} \quad , \quad |z| >2$$

با کمی تامل می‌توانیم بنویسیم:

$$x[n]=x_1[n]+x_2[n]=\frac{2}{9}u[n]+\frac{7}{9}(-2)^n u[n]$$

۱۰–۱۰ عبارت جبری زیر تبدیل z سیگنال $x[n]$ است:

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

(الف) با فرض ناحیه همگرایی $|z| > \frac{1}{3}$ و بسط به سری توانی مقادیر $x[0]$، $x[1]$ و $x[2]$ را بیابید.

(ب) با فرض ناحیه همگرایی $|z| < \frac{1}{3}$ و بسط به سری توانی مقادیر $x[0]$، $x[-1]$ و $x[-2]$ را بیابید.

حل: ابتدا توجه می‌کنیم که بسط عبارت $\frac{1}{1-q}$ به صورت سری توانی به شکل:

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+q^3+\ldots \quad ; \quad |q|<1 \quad ; \quad (I)$$

بوده و فقط به ازای $|q|<1$ همگرا می‌شود؛ در حالتی که $|q|>1$ باشد، $|q^{-1}|<1$ بوده و باز می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1-q}=\frac{-q^{-1}}{1-q^{-1}}=-q^{-1}\left(1+q^{-1}+(q^{-1})^2+(q^{-1})^3+\ldots\right)=-q^{-1}-q^{-2}-q^{-3}+\ldots \quad ; \quad |q|>1 \quad ; (II)$$

(الف) چون $|z|>\frac{1}{3}$، داریم: $\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right|<1$؛ بنابراین از رابطه (I) می‌توان نوشت:

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=3-\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}=3-2\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}+\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^3+\ldots\right)$$

$$=1z^0+\frac{2}{3}z^{-1}-\frac{2}{9}z^{-2}+\ldots=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n} \Rightarrow x[0]=1\ ,x[1]=\frac{2}{3},x[1]=-\frac{2}{9}$$

(ب) با توجه به اینکه $|z|<\frac{1}{3}$، داریم: $\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right|>1$؛ بنابراین از رابطه (II) خواهیم داشت:

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=3-\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$=3-2\left(-\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-1}-\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-2}-\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-3}-\ldots\right)$$

$$=3-6z+18z^2-\ldots=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n} \Rightarrow x[0]=3,x[-1]=-6,x[-2]=18$$

۱۰-۱۱ عکس تبدیل z تابع زیر را بیابید.

$$X(z)=\frac{1}{1024}\left[\frac{1024-z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right] \quad , \quad |z|>0$$

حل: از آنجاکه ROCی تابع تبدیل $X(z)$ تمام صفحه به جز مبدا است، $x[n]$ سیگنالی با عمر محدود می‌باشد، این مطلب را می‌توان مستقیماً نشان داد:

$$X(z)=\frac{1}{1024}\left[\frac{1024-z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]=\frac{z^{10}-\frac{1}{1024}}{z^9\left(z-\frac{1}{2}\right)} \quad , \quad (I)$$

حال خارج قسمت تقسیم $z^{10}-\frac{1}{1024}$ را بر $z-\frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم:

$$
\begin{array}{l|l}
z^{10}-\dfrac{1}{1024} & z-\dfrac{1}{2} \\ \hline
z^{10}-\dfrac{1}{2}z^{9} & z^{9}+\left(\dfrac{1}{2}\right)z^{8}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}z^{7}+\dots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{8}z+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{9}z^{0} \\ \hline
\dfrac{1}{2}z^{9}-\dfrac{1}{1024} & \\
\dfrac{1}{2}z^{9}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}z^{8} & \\ \hline
\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ \hline
\left(\dfrac{1}{2}\right)^{9}z^{9}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} & \\
\left(\dfrac{1}{2}\right)^{9}z^{9}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

که با جایگذاری در رابطه (I) خواهیم داشت :

$$X(z)=\frac{1}{z^{9}}\left[z^{9}+\left(\frac{1}{2}\right)z^{8}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}z^{7}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{9}z^{0}\right]$$

$$=z^{0}+\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}z^{-2}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{9}z^{-9}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}\ \Rightarrow\ x[n]=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} & ;\ 0\le n\le 9\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

۱۰–۱۲ با در نظر گرفتن تعبیر هندسی اندازه تبدیل فوریه از نمودار قطب–صفر تعیین کنید هر یک از تبدیل zهای زیر تقریباً سیگنالی پایین‌گذر، میان‌گذر یا بالاگذر را نشان می‌دهند :

(الف) $$X(z)=\frac{z^{-1}}{1+\frac{8}{9}z^{-1}}\qquad |z|>\frac{8}{9}$$

(ب) $$X(z)=\frac{1+\frac{8}{9}z^{-1}}{1-\frac{16}{9}z^{-1}+\frac{64}{81}z^{-2}}\qquad |z|>\frac{8}{9}$$

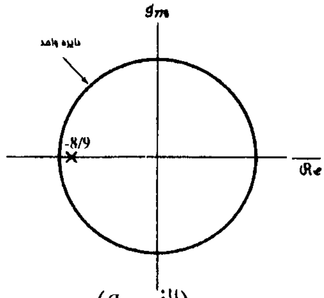
(ج) $$X(z)=\frac{1}{1+\frac{64}{81}z^{-2}}\qquad |z|>\frac{8}{9}$$

حل : (الف) ابتدا قطب و صفرهای $X(z)$ را مشخص می‌کنیم :

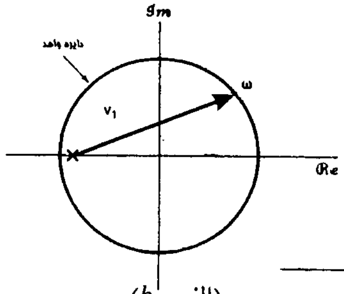
$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1+\frac{8}{9}z^{-1}}=\frac{1}{z+\frac{8}{9}}$$

دیده می‌شود که این تبدیل تنها یک قطب محدود در $z=-\frac{8}{9}$ دارد، نمودار قطب–صفر $X(z)$ را به همراه

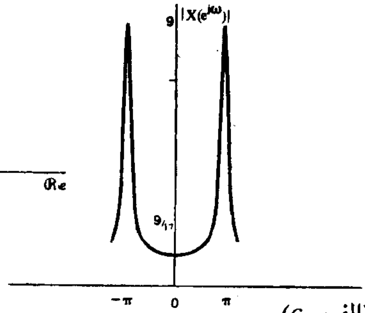
بردار قطب-صفر آن در شکل‌های (الف-a) و (الف-b) مشاهده می‌کنید :



(الف-a)



(الف-b)



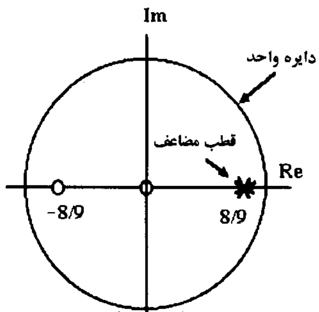
(الف-c)

دیده می‌شود که $X(z)$ هیچ صفر محدودی ندارد، بنابراین پاسخ فرکانسی تنها بر اثر تغییرات بردار قطب نشان داده شده در شکل (الف-ب) تغییر می‌کند؛ با حرکت بر روی دایره واحد از $\omega=0$ تا $\omega=\pi$ طول بردار v_1 بطور یکنوا کاهش می‌یابد. بنابراین در همین زمان دامنه پاسخ فرکانسی بطور یکنوا افزایش خواهد یافت، با توجه به اینکه قطب $z=-\frac{8}{9}$ به دایره واحد بسیار نزدیک است، در مجاورت این قطب $(\omega=\pi)$ قله تیزی در پاسخ فرکانسی مشاهده می‌شود با افزایش بیشتر فرکانس از $\omega=\pi$ تا $\omega=2\pi$ طول بردار قطب v_1 بطور یکنوا افزایش یافته و دامنه پاسخ فرکانسی کاهش می‌یابد. پاسخ فرکانسی حاصل که در دوره‌های 2π تکرار می‌شود در شکل (الف-c) نشان داده شده است. از آنجا که $\omega=\pi$ نشان دهنده تغییرات فرکانس بالاست، پاسخ فرکانسی شکل (الف-c) دارای مشخصه یک سیگنال بالاگذر می‌باشد.

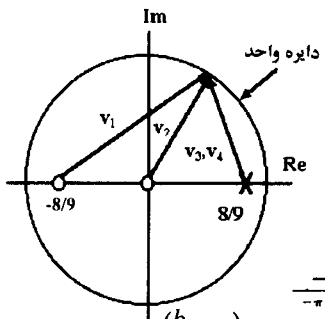
(ب)

$$X(z)=\frac{1+\frac{8}{9}z^{-1}}{1-\frac{16}{9}z^{-1}+\frac{64}{81}z^{-2}}=\frac{z\left(z+\frac{8}{9}\right)}{z^2-\frac{16}{9}z+\frac{64}{81}}=\frac{z\left(z+\frac{8}{9}\right)}{\left(z-\frac{8}{9}\right)^2}$$

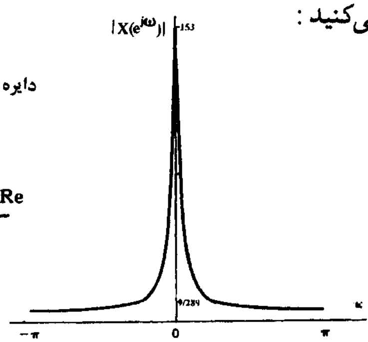
نمودار قطب-صفر $X(z)$ را به همراه بردارهای قطب-صفر آن در شکل‌های (ب-a) و (ب-b) مشاهده می‌کنید :



(ب-a)



(ب-b)



(ب-c)

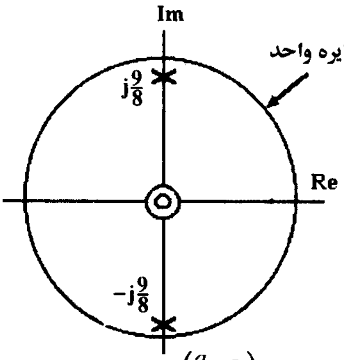
طول بردار رسم شده از صفر $z=0$ به دایره واحد همواره ثابت است و بنابراین نقشی در تغییرات دامنه پاسخ فرکانسی ندارد؛ با حرکت بر روی دایره واحد از $\omega=0$ تا $\omega=\pi$ طول بردارهای قطب v_3 و v_4 بطور یکنوا افزایش یافته و در همین زمان طول بردار صفر v_1 بطور یکنوا کاهش می‌یابد،در اینصورت دامنه

پاسخ فرکانسی $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ بطور یکنوا کاهش خواهد یافت، با افزایش بیشتر فرکانس از $\omega=\pi$ تا $\omega=2\pi$ روند فوق معکوس شده و دامنه پاسخ فرکانسی افزایش می‌یابد، از آنجاکه قطب مضاعف $z=\frac{8}{9}$ به دایره واحد بسیار نزدیک است، در مجاورت این قطب $(\omega=0)$ قله تیزی در پاسخ فرکانسی روی می‌دهد. همچنین با توجه به نزدیکی نسبتاً زیاد صفر $z=-\frac{8}{9}$ به دایره واحد، دامنه پاسخ فرکانسی در مجاورت این صفر $(\omega=\pi)$ افت شدیدی دارد. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که تابع تبدیل مورد نظر دارای مشخصه یک سیگنال پائین‌گذر است.

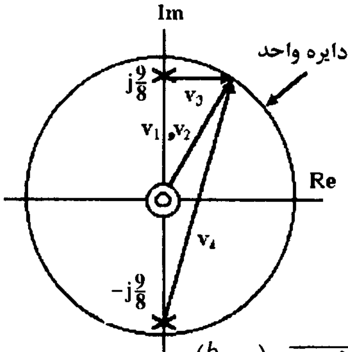
(ج)

$$X(z)\frac{1}{1+\frac{64}{81}z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2+\frac{64}{81}}$$

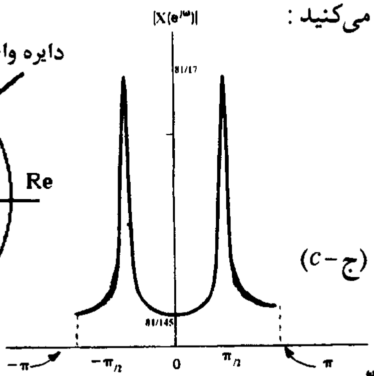
نمودار قطب-صفر $X(z)$ را به همراه بردارهای قطب و صفر آن در شکل‌های (ج-a) و (ج-b) مشاهده می‌کنید:



(ج-a)



(ج-b)



(ج-c)

طول بردارهای صفر رسم شده در شکل (ج-b) همواره ثابت بوده و بنابراین نقشی در تغییرات دامنه پاسخ فرکانسی ندارند؛ با حرکت بر روی دایره واحد از $\omega=0$ تا $\omega=\frac{\pi}{2}$، رفته رفته قطب $z=j\frac{8}{9}$ بر پاسخ فرکانسی غالب شده و دامنه آن را افزایش می‌دهد، همچنین با افزایش فرکانس از $\omega=\frac{\pi}{2}$ تا $\omega=\pi$ روند بالا معکوس می‌شود. بدین ترتیب دامنه پاسخ فرکانسی $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ (نشان داده شده در شکل (ج-c)) دارای مشخصه یک سیگنال میانگذر می‌باشد.

۱۰-۱۳ سیگنال چهارگوش زیر را در نظر بگیرید

$$x[n]=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le n\le 5\\ 0 & ; \quad otherwise\end{cases}$$

فرض کنید

$$g[n]=x[n]-x[n-1]$$

(الف) سیگنال $g[n]$ را بیابید و تبدیل z آن را مستقیماً حساب کنید.

(ب) با توجه به این که

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} g[k]$$

تبدیل $X(z)$ را به کمک جدول ۱۰-۱ تعیین کنید.

حل : (الف) ابتدا توجه کنید که می‌توان $x[n]$ را به صورت زیر نوشت :

$$x[n]=u[n]-u[n-6]$$

در اینصورت :

$$g[n]=x[n]-x[n-1]=(u[n]-u[n-6])-(u[n-1]-u[n-7])=(u[n]-u[n-1])-(u[n-6]-u[n-7])$$

$$=\delta[n]-\delta[n-6] \Rightarrow G(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n]\,z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\delta[n]-\delta[n-6])\,z^{-n}$$

$$=\delta[0]\,z^{0}-\delta[6-6]\,z^{-6}=z^{0}-z^{-6}=1-z^{-6}$$

(ب) با توجه به خاصیت جمع انباره‌ای تبدیل z می‌توان نوشت :

$$X(z)=Z\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} g[k]\right\}=\frac{G(z)}{1-z^{-1}}=\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}$$

تبدیل اخیر تنها یک قطب در $z=1$ دارد که آن هم با صفر از صورت حذف می‌شود، بنابراین ROCی آن تمام صفحه z بجز احتمالاً $z=0$ و یا $z=\infty$ خواهد بود؛ با توجه به اینکه $z=0$ در ROCی $G(z)$ واقع نیست در ROCی $X(z)$ نیز قرار نخواهد داشت و ناحیه همگرایی $X(z)$ بصورت $|z|>0$ خواهد بود.

۱۰-۱۴ سیگنال مثلثی زیر را در نظر بگیرید

$$g[n]=\begin{cases} n-1 & ;\quad 2\le n\le 7 \\ 13-n & ;\quad 8\le n\le 12 \\ 0 & ;\quad otherwise \end{cases}$$

(الف) n_0 را به نحوی تعیین کنید که

$$g[n]=x[n]*x[n-n_0]$$

که $x[n]$ سیگنال چهارگوش مسئله ۱۰-۱۳ است.

(ب) با استفاده از خواص کانولوشن و جابجایی زمانی و $X(z)$ بدست آمده در مسئله ۱۰-۱۳ $G(z)$ را بیابید. نشان دهید که جوابتان قضیه شرط اولیه را ارضا می‌کند.

حل : (الف) ابتدا کانولوشن $y[n]=x[n]*x[n]$ را محاسبه می‌کنیم، در اینصورت خواهیم داشت :

$$y[n]=x[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,x[n-k]=\begin{cases} n+1 & ;\ 0\le n\le 5 \\ 11-n & ;\ 6\le n\le 10 \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases}$$

در اینصورت برای g[n] می‌توان نوشت :

$$g[n]=x[n]*x[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n-k-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[(n-n_0)-k]=y[n-n_0]$$

$$=\begin{cases} n-n_0+1 & ; \ 0\leq n-n_0\leq 5 \\ 11-(n-n_0) & ; \ 6\leq n-n_0\leq 10 \\ 0 & ; \ otherwise \end{cases} = \begin{cases} n-(n_0-1) & ; \ n_0\leq n\leq 5+n_0 \\ (11+n_0)-n & ; \ 6+n_0\leq n\leq 10+n_0 \\ 0 & ; \ otherwise \end{cases}$$

بالاخره با مقایسه رابطه اخیر با رابطه داده شده برای g[n] بدست می‌آوریم : $n_0=2$.

(ب) با استفاده از خاصیت کانولوشن و جابجایی زمانی تبدیل z خواهیم داشت :

$$G(z)=Z\{g[n]\}=Z\{x[n]*x[n-2]\}=Z\{x[n]\}.Z\{x[n-2]\}=Z\{x[n]\}z^{-2}Z\{x[n]\}=z^{-2}X^2(z)$$

و در نهایت با جایگذاری $X(z)$ از مسئله $(13\text{-}10)$ خواهیم داشت :

$$G(z)=z^{-2}\left(\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}\right)^2=\left(\frac{z^{-1}-z^{-7}}{1-z^{-1}}\right)^2$$

۱۰–۱۵ فرض کنید

$$y[n]=\left(\frac{1}{9}\right)^n u[n]$$

دو سیگنال مختلف هر یک با تبدیل z، $X(z)$ بیابید که شرایط زیر را ارضا کنند :

۱. $\frac{[X(z)+X(-z)]}{2}=Y\left(z^2\right)$

۲. $X(z)$ در صفحه z تنها یک قطب و یک صفر داشته باشد.

حل : ابتدا داریم :

$$Y(z)=Z\{y[n]\}=Z\left\{\left(\frac{1}{9}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{9}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \ Y(z^2)=\frac{1}{1-\frac{1}{9}z^{-2}} \quad , \quad |z^2|>\frac{1}{9} \quad \left(or \ \ |z|>\frac{1}{3}\right)$$

این تابع تبدیل دارای دو صفر در مبدا و دو قطب در $z=\pm\frac{1}{3}$ می‌باشد و برای تامین شرط (2) چاره‌ای جز بسط آن به کسرهای جزئی مرتبه اول نداریم :

$$Y(z^2)=\frac{1}{1-\frac{1}{9}z^{-2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \quad , \ |z|>\frac{1}{3} \quad =\frac{1}{2}\left[X(z)+X(-z)\right] \ : \qquad \text{(شرط } 1\text{)}$$

دیده می‌شود که برای $X(z)$ (وبنابراین $x[n]$) دو امکان مختلف می‌توان در نظر گرفت :

$$i)\ X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\ ,\ |z|>\frac{1}{3}\ \xleftarrow{Z^{-1}}\!\!\rightarrow x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$ii)\ X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\ ,\ |z|>\frac{1}{3}\ \xleftarrow{Z^{-1}}\!\!\rightarrow x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

۱۰-۱۶ توابع سیستم زیر به سیستمهای LTI پایدار مربوط‌اند. بدون استفاده از عکس تبدیل z تعیین کنید که کدام با سیستمی علی متناظرند.

(الف) $\dfrac{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$ (ب) $\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{2}z-\frac{3}{16}}$

(ج) $\dfrac{z+1}{z+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{2}{3}z^{-3}}$

حل : (الف) ابتدا داریم :

$$H(z)=\frac{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}=\frac{z\left(z^2-\frac{4}{3}z+\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

دیده می‌شود که این سیستم دارای دو قطب در $z=\frac{1}{2}$ و $z=\frac{1}{3}$ است، با توجه به آنکه سیستم پایداراست باید شامل دایره واحد باشد، به این ترتیب تنها ROCی ممکن $|z|>\frac{1}{2}$ خواهد بود. حال باید دید که این ROC که خارج یک دایره است (شرط اول علی بودن)، آیا شامل $z=\infty$ نیز هست؟ (شرط دوم علی بودن) :

$$\lim_{z\to\infty} H(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z\left(z^2-\frac{4}{3}z+\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\lim_{z\to\infty}\frac{z^3}{z^2}\ \to\infty$$

که دیده می‌شود که چنین نیست. در نتیجه ،$H(z)$ تابع تبدیل یک سیستم علی نیست.

(ب) می‌نویسیم :

$$H(z)=\frac{z-\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{2}z-\frac{3}{16}}=\frac{z-\frac{1}{2}}{\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

این سیستم دارای دو قطب در $z=-\frac{3}{4}$ و $z=\frac{1}{4}$ است، با توجه به پایداری سیستم ، تنها ROCی ممکن

برای $H(z)$، $|z| > \frac{3}{4}$ می‌باشد (شرط اول علی بودن). حال باید دید که آیا این ROC شامل $z=\infty$ هم هست یا نه؟

$$\lim_{z\to\infty} H(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z-\frac{1}{2}}{\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{z^2}=0<\infty$$

یعنی $z=\infty$ نیز درون ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار داشته و شرط دوم علی بودن را برمی‌آورد. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که $H(z)$ تابع تبدیل یک سیستم علیست.

(ج) برای این تابع تبدیل داریم:

$$H(z)=\frac{z+1}{z+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{2}{3}z^{-3}}=\frac{z^3(z+1)}{z^4+\frac{4}{3}z^3-\frac{1}{2}z-\frac{2}{3}}=\frac{z^3(z+1)}{\left(z^3-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{4}{3}\right)}$$

این سیستم دارای قطب‌هایی در $z=-\frac{4}{3}$ ، $z=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ، $z=\frac{e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$ است. آشکارا دیده می‌شود که $H(z)$ هم در خارج و هم در داخل دایره واحد قطب دارد؛ با توجه به اینکه سیستم پایدار است، ROCی آن شامل دایره واحد بوده و بنابراین یک حلقه محدود به قطب‌های $H(z)$ خواهد بود، نه ناحیه خارجی یک دایره. از اینرو بدون بررسی شرط دوم علیت روشن است که $H(z)$ تابع تبدیل یک سیستم علی نیست.

۱۰–۱۷ پنج دانستنی زیر را در مورد یک سیستم LTI خاص S با پاسخ ضربه $h[n]$ و تبدیل z $H(z)$ در نظر بگیرید:

۱. $h[n]$ حقیقی است. ۲. $h[n]$ دست‌راستی است.

۳. $\lim_{z\to\infty} H(z)=1$ ۴. $H(z)$ دو صفر دارد.

۵. یکی از قطبهای غیرحقیقی $H(z)$ روی دایره $|z|=\frac{3}{4}$ قرار دارد.

به دو سوال زیر پاسخ دهید:

(الف) آیا S علی است؟ (ب) آیا S پایدار است؟

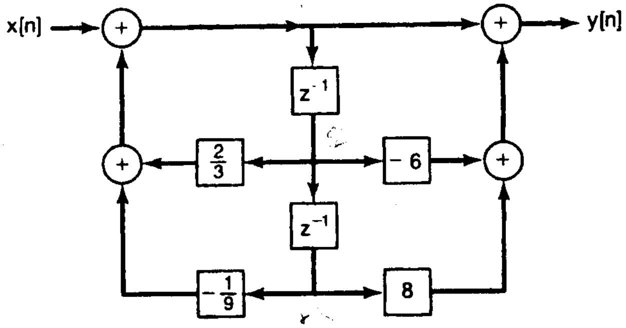
حل: با توجه به اطلاع (1)، $h^*[n]=h[n]$ یا $H^*(z^*)=H(z)$، این بدان معنی است که اگر $H(z)$ در z_0 قطبی داشته باشد در z_0^* نیز قطب خواهد داشت، (البته این در صورتی است که z_0 مختلط باشد وگرنه z_0 حقیقی می‌تواند یگانه باشد)، در اینصورت با توجه به اطلاع (5) که می‌گوید ' $H(z)$ دارای یک قطب "غیر حقیقی" در $|z|=\frac{3}{4}$ است' نتیجه می‌گیریم که $H(z)$ قطب دیگری در $|z^*|=\frac{3}{4}$ دارد. بدین ترتیب می‌بینیم که $H(z)$ لااقل دو قطب درون دایره واحد دارد. از سوی دیگر و از اطلاع (3) در می‌یابیم که مرتبه چندجمله‌ای‌های صورت ومخرج $H(z)$ یکی هستند، که باتوجه به اینکه $H(z)$ دو صفر محدود دارد (اطلاع (4))، نشان می‌دهد که دقیقاً دو قطب محدود داریم. با توجه به مباحث فوق این دو

قطب، همان دو قطب بررسی شده درون دایره واحد بوده و در نتیجه قطب محدود دیگری نداریم. با توجه به دست‌راستی بودن $h[n]$، ROCی $H(z)$ خارج دایره‌ای است که شعاع آن با اندازه بزرگترین قطب $H(z)$ (در اینجا $\frac{3}{4} = |z|$) برابر است، به وضوح این ROC هم دایره واحد و هم $z=\infty$ (با توجه به اطلاع (3)) را دربرمی‌گیرد. بدینصوت نشان داده می‌شود که S: (الف) علی و (ب) پایدار است.

۱۰–۱۸ یک سیستم LTI علی در نظر بگیرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن توسط نمودار جعبه‌ای شکل م۱۰–۱۸ به هم مرتبطاند.

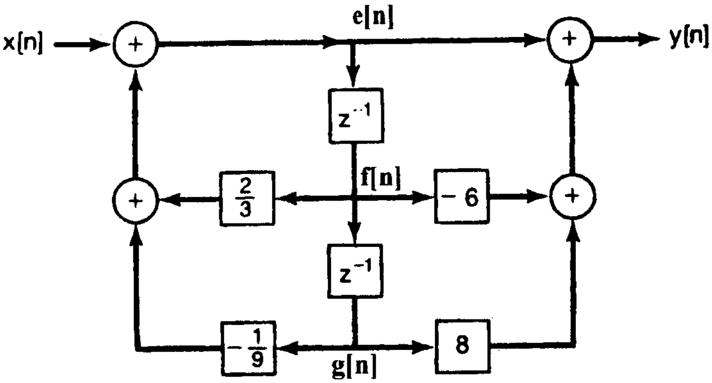
(الف) معادله تفاضلی ارتباط دهنده $y[n]$ و $x[n]$ را بیابید.

(ب) آیا سیستم پایدار است؟



شکل م ۱۰–۱۸

حل : (الف) نمودار جعبه‌ای این سیستم را دوباره در شکل زیر می‌بینید:



با توجه به نمودار فوق می‌توان روابط زیر را در حوزه z بدست آورد :

$$\begin{cases} E(z)=X(z)+\frac{2}{3}F(z)-\frac{1}{9}G(z) \\ Y(z)=E(z)-6F(z)+8G(z) \\ F(z)=z^{-1}E(z) \\ G(z)=z^{-1}F(z) \end{cases}$$

در اینصورت با حذف $E(z)$, $F(z)$ و $G(z)$ میان روابط بالا، بدست می‌آوریم :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-6z^{-1}+8z^{-2}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}} \quad , \quad (I)$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}\right) Y(z)= \left(1-6z^{-1}+8z^{-2}\right) X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)-\frac{2}{3}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{9}z^{-2}Y(z)=X(z)-6z^{-1}X(z)+8z^{-2}X(z)$$

حال با اعمال تبدیل عکس تبدیل z به طرفین رابطه اخیر خواهیم داشت :

$$y[n]-\frac{2}{3}y[n-1]+\frac{1}{9}y[n-2]=x[n]-6x[n-1]+8x[n-2]$$

(ب) از رابطه (I) دیده می‌شود که $H(z)$ تنها دارای یک قطب مضاعف در $z=\frac{1}{3}$ می‌باشد، از علی بودن سیستم نتیجه می‌گیریم که ROCی $H(z)$ ناحیه بیرون دایره‌ای است که شعاع آن با اندازه بزرگترین قطب $H(z)$ (در اینجا $|z|=\frac{1}{3}$) برابر است. بوضوح این ROC، دایره واحد را دربرمی‌گیرد و این بدان معنی است که سیستم پایدار است.

۱۰-۱۹ تبدیل z یکطرفه سیگنالهای زیر را یافته، ناحیه همگرایی هر یک را مشخص کنید.

(الف) $x_1[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+5]$ (ب) $x_2[n]=\delta[n+3]+\delta[n]+2^n u[-n]$

(ج) $x_3[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

حل : (الف)

$$\mathscr{X}_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+5]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n z^{-n}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad , \quad \left|\frac{1}{4}z^{-1}\right|<1 \left(or\ |z|>\frac{1}{4}\right)$$

(ب) با توجه به اینکه $\delta[n+3]$، $\delta[n]$ و $u[-n]$ به ترتیب برای $n\neq-3$، $n\neq0$ و $n>0$ صفر می‌شوند، داریم :

$$\mathscr{X}_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_2[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\delta[n+3]+\delta[n]+2^n u[-n]\right\}z^{-n}=0+\delta[0]z^0+2^0u[0]z^0=1+1=2, All\ z$$

(ج)

$$\mathscr{X}_3(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_3[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad,\quad\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1\quad\left(or\ |z|>\frac{1}{2}\right)$$

۱۰–۲۰ سیستمی با رابطه ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ زیر در نظر بگیرید

$$y[n-1]+2y[n]=x[n]$$

(الف) پاسخ ورودی-صفر این سیستم را به ازای $y[-1]=2$ بیابید.

(ب) پاسخ حالت-صفر این سیستم را به ازای ورودی $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ بیابید.

(ج) خروجی سیستم در $n\geq 0$ را به ازای $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ و $y[-1]=2$ بیابید.

حل: ابتدا از طرفین معادله تفاضلی سیستم تبدیل z یکطرفه گرفته و داریم:

$$Z\{y[n-1]+2y[n]\}=Z\{x[n]\}$$

$$\Rightarrow [z^{-1}\mathcal{Y}(z)+y[-1]]+2\mathcal{Y}(z)=\mathcal{X}(z)\ \Rightarrow \mathcal{Y}(z)=\frac{\mathcal{X}(z)}{2+z^{-1}}-\frac{y[-1]}{2+z^{-1}}\quad,\ (I)$$

(الف) برای پاسخ ورودی صفر $x[n]=0$، $\mathcal{X}(z)=0$ و از رابطه (I) خواهیم داشت، (توجه داشته باشید که برای تبدیل z یکطرفه، ROC خارج یک دایره است):

$$\mathcal{Y}_{zi}(z)=\frac{-y[-1]}{2+z^{-1}}=\frac{-2}{2+z^{-1}}=\frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\quad,\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Z^{-1}\Rightarrow y_{zi}[n]=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]\quad,\quad n\geq -1\quad,\ (II)$$

(ب) برای پاسخ حالت صفر نیز داریم: $y[-1]=0$, $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ و عبارت (I) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathcal{Y}_{zs}(z)=\frac{\mathcal{X}(z)}{2+z^{-1}}=\frac{Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\}}{2+z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(2+z^{-1}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\quad,\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ Z^{-1}\ \Rightarrow\ y_{zs}[n]=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]\quad,(III)$$

(ج) می‌دانیم که جواب یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت و دارای شرایط اولیه غیرصفر، همان جمع پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر می‌باشد، بنابراین به آسانی از روابط (II) و (III) می‌توان نوشت:

$$y[n]=y_{zs}[n]+y_{zi}[n]=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad , \ n\geq 0$$

در معادله اخیر بر این مطلب که $y[n]$ تنها به ازای $n\geq 0$ درست است، تاکید کرده‌ایم.

۱۰-۲۱ تبدیل z رشته‌های زیر را بیابید. نمودار قطب-صفر آن را رسم کرده، ناحیه همگرایی آن را مشخص کنید. تعیین کنید که تبدیل فوریه سیگنال وجود دارد یا نه.

(الف) $\delta[n+5]$ (ب) $\delta[n-5]$

(ج) $(-1)^n u[n]$ (د) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+3]$

(هـ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-2]$ (و) $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[3-n]$

(ز) $2^n u[-n]+\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$ (ح) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2]$

حل: نمودار قطب-صفر و ناحیه‌های همگرایی تمامی این رشته‌ها در انتهای مسئله (شکل‌های (الف) تا (ح)) رسم شده‌اند:

(الف)
$$x[n]=\delta[n+5] \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n+5]z^{-n}=\delta[-5+5]z^{-(-5)}=z^5 \quad , \ All\ z$$

ضمناً با توجه به اینکه ROC این تبدیل دایره واحد را دربرمی‌گیرد، تبدیل فوریه هم دارد.

(ب)
$$x[n]=\delta[n-5] \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-5]z^{-n}=\delta[5-5]z^{-5}=z^{-5} \quad , \ z\neq 0$$

این سیگنال تبدیل فوریه هم دارد.

(ج)
$$x[n]=(-1)^n u[n] \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n u[n]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-z^{-1})^n=\frac{1}{1-(-z^{-1})} \quad , \ |-z^{-1}|<1 \quad =\frac{1}{1+z^{-1}} \quad , \ |z|>1$$

تبدیل فوریه ندارد، چون ROC آن شامل دایره واحد نیست.

(د)
$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+3] \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+3]z^{-n}=\sum_{n=-3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-3)+1}z^{-(n-3)}=4z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n=\frac{4z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \ \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$$

$$= \frac{4z^3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

تبدیل فوریه دارد، چون ROC آن شامل دایره واحد می‌باشد.

(هـ)

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-2] \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-2]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{-n} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-3z)^{n+2} = 9z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-3z)^n = \frac{9z^2}{1-(-3z)} \quad , |-3z| < 1$$

$$= \frac{9z^2}{1+3z} \quad , \quad |z| < \frac{1}{3}$$

همچنین این سیگنال تبدیل فوریه ندارد، چون ROC آن دایره واحد را دربرنمی‌گیرد.

(و)

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[3-n] \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[3-n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{3} (4z)^{-n} = \sum_{n=-3}^{+\infty} (4z)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (4z)^{n-3} = (4z)^{-3} \sum_{n=0}^{+\infty} (4z)^n = \frac{(4z)^{-3}}{1-4z} \quad , \quad |4z| < 1 \quad \left(or \ |z| < \frac{1}{4}\right)$$

این سیگنال تبدیل فوریه ندارد چون دایره واحد در ROCی آن قرار نمی‌گیرد.

(ز)

$$x[n] = 2^n u[-n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1] \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{2^n u[-n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]\right\} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} (2z^{-1})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}z\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{n+1}$$

$$= \left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}, \left|\frac{1}{2}z\right| < 1\right\} + \left\{\frac{\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \left|\frac{1}{4}z^{-1}\right| < 1\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} - \frac{1}{1-4z}, \frac{1}{4} < |z| < 2$$

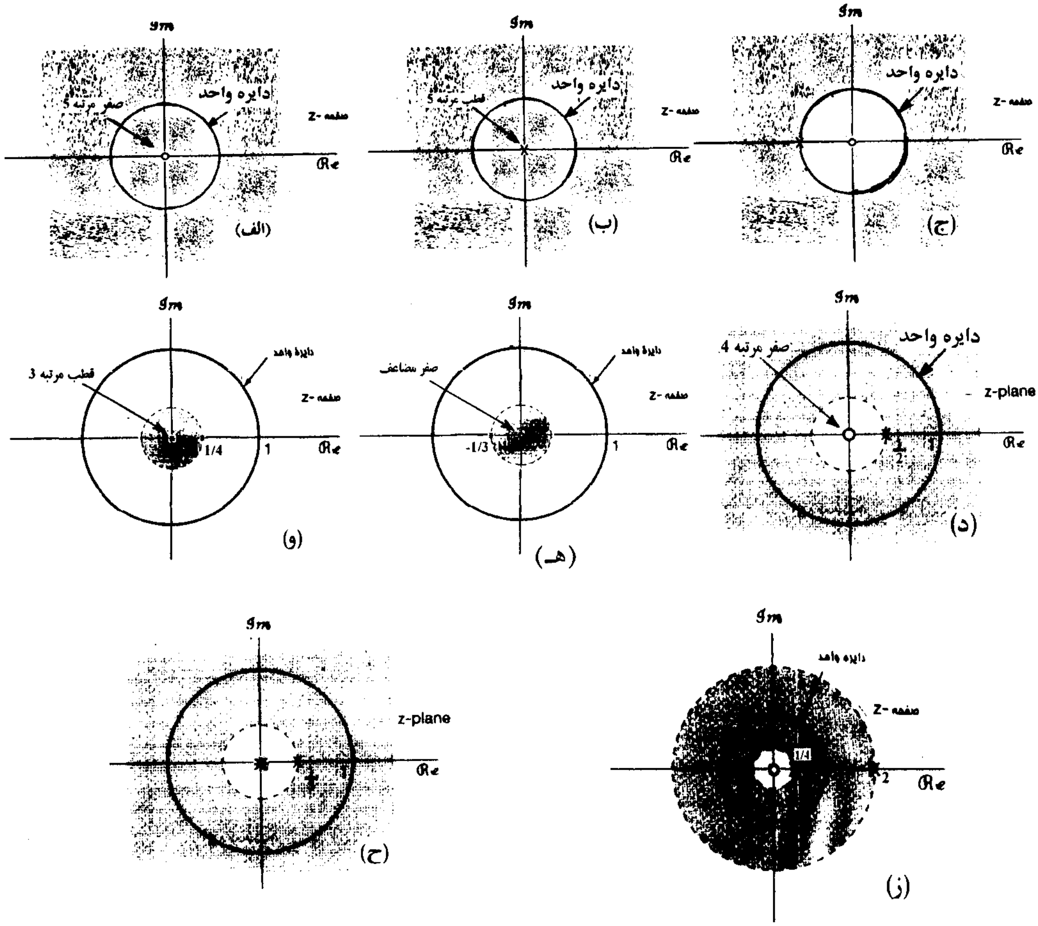
$$= \frac{\left(-\frac{7}{2}\right)z}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)(1-4z)} \quad , \quad \frac{1}{4} < |z| < 2$$

(ح)

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2] \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2]\, z^{-n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-(n+2)} = z^{-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n = \frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad , \quad \left|\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1 \quad \left(or \ |z| > \frac{1}{3}\right)$$

این دنباله نیز تبدیل فوریه دارد.



۱۰–۲۲ تبدیل z دنباله‌های زیر را بیابید. تمام جمعها را به شکل بسته بنویسید. نمودار قطب–صفر را رسم کرده، ناحیه همگرایی را مشخص کنید. مشخص کنید که تبدیل فوریه سیگنال وجود دارد یا نه.

(الف) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n+4]-u[n-5]\}$ (ب) $4^n \cos\left[\frac{2\pi n}{6}+\frac{\pi}{4}\right] u[-n-1]$

(ج) $|n| \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ (د) $n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

حل : نمودار قطب و صفر و نواحی همگرایی تمامی تبدیل‌ها در انتهای مسئله نمایش داده شده‌اند (شکل‌های (الف) تا (د)).

(الف)

$$x[n]= \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n+4]-u[n-5]\} \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n+4]-u[n-5]\}\, z^{-n}= \sum_{n=-4}^{+4} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{8}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n-4} = \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-4}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{8+1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right] = \frac{16\left(z^{9}-\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\right)}{z^{4}\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

از آنجاکه سیگنال $x[n]$ دنباله‌ای با طول عمر محدود است، ROCی آن تمامی صفحه z مگر احتمالاً $z=0$ و یا $z=\infty$ خواهد بود، با توجه به وجود قطب (مرتبه چهارم) در مبداء، $z=0$ از ROC کنار گذاشته می‌شود،ازسوی دیگر داریم: $\lim_{z\to\infty} X(z)\to\infty$ و $z=\infty$ نیز از ROC حذف می‌شود،مشاهده عامل $\left(z-\frac{1}{2}\right)$ در تابع تبدیل $X(z)$ نباید گمراه کننده باشد، چراکه با صفری از صورت در همان محل حذف می‌شود و تاثیری بر ROC ندارد. آشکار است که این سیگنال تبدیل فوریه دارد.

(ب)

$$x[n]=n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0} n\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n}+\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}$$

$$=-\frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n}-\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}=-\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z\right)^{n}-\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n+1}$$

$$=-\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}\ ,\ \left|\frac{1}{2}z\right|<1\right\}-\frac{d}{dz}\left\{\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1\right\}$$

$$=-\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}-\frac{1}{1-2z}\right\}\ ,\frac{1}{2}<|z|<2\ =\frac{d}{dz}\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)z}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)(1-2z)}\right\}\ ,\ \frac{1}{2}<|z|<2$$

$$=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(z^{2}-1\right)}{(1-2z)^{2}\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{2}}\ ,\ \frac{1}{2}<|z|<2$$

با توجه به اینکه دایره واحد $(|z|=1)$ در ROC قرار دارد، سیگنال $x[n]$ تبدیل فوریه دارد.

(ج)

$$x[n]=|n|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{0} n\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n}+\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}$$

$$=\ldots=\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z}+\frac{1}{1-2z}\right\}\ ,\ \frac{1}{2}<|z|<2\ =\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(5z^{2}-8z+5\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{2}(1-2z)^{2}}\ ,\ \frac{1}{2}<|z|<2$$

روشن از که این دنباله تبدیل فوریه نیز دارد.

(د)

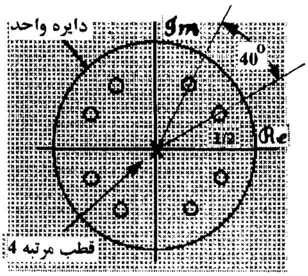
$$x[n]=4^n\cos\left[\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right]u[-n-1]\Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}4^n\cos\left[\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right]u[-n-1]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(4z^{-1}\right)^n\left\{\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-j\left(\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}\right\}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(4e^{j\frac{2\pi}{6}}z^{-1}\right)^{-(n+1)}$$

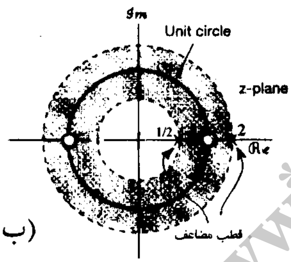
$$+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{6}}z\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{8}e^{j\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}z\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{6}}z\right)^n$$

$$+\left(\frac{1}{8}e^{-j\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}z\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{6}}z\right)^n=\left(\frac{1}{8}\right)z\left[\frac{e^{j\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{6}}z}+\frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{6}}z}\right],\quad\left|\frac{1}{4}e^{\pm j\frac{2\pi}{6}}z\right|<1$$

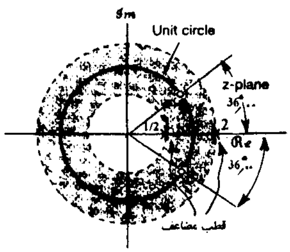
$$=\left(\frac{1}{8}\right)z\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2}z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{6}}z\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{6}}z\right)}\right],\quad |z|<4$$



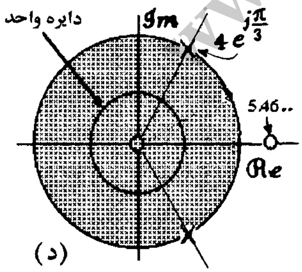
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۱۰–۲۳ در زیر چند تبدیل z داده شده است. برای هر یک عکس تبدیل z را به هر دو روش بسط به کسرهای جزیی و سری تیلور حاصل از تقسیم صورت بر مخرج بدست آورید.

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}},\quad |z|<\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \ |z| > \frac{1}{2} \qquad\qquad X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \ |z| < \frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad , \ |z| > \frac{1}{2} \qquad\qquad X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad , \ |z| < \frac{1}{2}$$

حل : (الف)

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad , \ |z| > \frac{1}{2}$$

(i) از روش سری تیلور : با توجه به اینکه $|z| > \frac{1}{2}$ ، داریم : $\left|\frac{1}{4}z^{-2}\right| < 1$ ، در اینصورت با توجه به رابطه (I) بیان شده در مسئله (10-10) می‌توان نوشت :

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\left(1-z^{-1}\right)\left[1+\left(\frac{1}{4}z^{-2}\right)^1+\left(\frac{1}{4}z^{-2}\right)^2+\ldots\right]$$

$$=1-z^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2z^{-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^2z^{-3}+\ldots+\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]z^{-n}+\ldots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n} \Rightarrow x[n]=\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

(ii) از روش بسط به کسرهای جزیی :

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \ |z| > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \ , \ |z| > \frac{1}{2}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \ , \ |z| > \frac{1}{2}\right\}+Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \ , \ |z| > \frac{1}{2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]=\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

(ب)

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad , \ |z| < \frac{1}{2}$$

(i) از روش سری تیلور :با توجه به اینکه $|z| < \frac{1}{2}$ ، داریم :$\left|\frac{1}{4}z^{-2}\right| > 1$ ، در اینصورت با مراجعه به

رابطه *(II)* مسئله *(10-10)* خواهیم داشت :

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\left(1-z^{-1}\right)\left[-\left(\frac{1}{4}z^{-2}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{4}z^{-2}\right)^{-2}-\dots\right]$$

$$=\left(z^{-1}-1\right)\left[(2z)^2+(2z)^4+(2z)^6+\dots\right]$$

$$=2^2z-2^2z^2+2^4z^3-2^4z^4+\dots+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}\right]z^n+\dots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}\Rightarrow x[n]=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[-n-1]$$

(ii) از روش بسط به کسرهای جزیی :

$$x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}+Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[-n-1]$$

(ج)

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad ,\ |z|>\frac{1}{2}$$

(i) از روش سری تیلور : با توجه به اینکه $|z|>\frac{1}{2}$، داریم : $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$، در اینصورت بنابه رابطه *(I)* مسئله *(10-10)* می‌توان نوشت :

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left[1+\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^1+\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2+\dots\right]$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2z^{-2}+\dots+\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}+\dots=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\Rightarrow x[n]=-2\delta[n]+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(ii) از روش بسط به کسرهای جزیی :

$$x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,|z|>\frac{1}{2}\right\}=Z^{-1}\left\{-2+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,|z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$Z^{-1}\{-2\ ,\ All\ z\}+Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,|z|>\frac{1}{2}\right\}=-2\delta[n]+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

(د)

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad ,|z|<\frac{1}{2}$$

(i) از روش سری تیلور : از آنجا که $|z|<\frac{1}{2}$، داریم : $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|>1$ و می‌توان از رابطه *(II)* مسئله *(10-10)* نوشت :

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left(-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-2}+\dots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-z^{-1}\right)\left(2z+(2z)^{2}+(2z)^{3}+\dots\right)=-2-3z-6z^{2}+\dots-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}z^{n}+\dots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\,z^{-n}\Rightarrow x[n]=-2\delta[n]-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n-1]$$

(ii) از روش بسط به کسرهای جزیی :

$$x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,|z|<\frac{1}{2}\right\}=Z^{-1}\left\{-2+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,|z|<\frac{1}{2}\right\}$$

$$=Z^{-1}\{-2\ ,\ All\ z\}+Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,|z|<\frac{1}{2}\right\}=-2\delta[n]-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n-1]$$

(هـ)

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{2}}\quad ,|z|>\frac{1}{2}$$

(i) از روش سری تیلور : با توجه به اینکه $|z|>\frac{1}{2}$، داریم : $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$ و با مراجعه به رابطه *(I)*

مسئله *(10-10)* بدست می‌آوریم :

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}=\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^1+\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2+\dots\right)^2$$

$$=\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left(1+2\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^1+3\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2+\dots+(n+1)\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n+\dots\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1}+\left(1-\frac{3}{8}\right)z^{-2}+\dots+\left[n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]z^{-n}+\dots$$

$$=\dots=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1}+\left(1-\frac{3}{8}\right)z^{-2}+\dots+\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+3(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]z^{-n}+\dots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}\Rightarrow x[n]=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+3(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n]$$

(ii) از روش بسط کسرهای جزیی :

$$x[n]=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\;,\;|z|>\frac{1}{2}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{(-2)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\;,\;|z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{(-2)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\;,\;|z|>\frac{1}{2}\right\}+Z^{-1}\left\{3z\frac{\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\;,\;|z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+3(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]$$

در بدست آوردن رابطه اخیر از زوج‌های تبدیل z پنجم و هفتم جدول *(2-10)* به همراه خاصیت جابجایی زمانی جدول *(1-10)* بهره برده‌ایم.

(و)

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\;,\;|z|<\frac{1}{2}$$

(i) از روش سری تیلور : با توجه به اینکه $|z|<\frac{1}{2}$ داریم : $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|>1$ که با مراجعه به رابطه *(II)* مسئله *(10-10)* بدست می‌دهد :

$$X(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}=\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left(-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-2}-\dots\right)^2$$

$$= \left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)\left[(2z)^1+(2z)^2+(2z)^3+\dots\right]^2=(4z-2z^2)\left[1+(2z)^2+(2z)^3+\dots\right]^2$$

$$=(4z-2z^2)\left[1+2(2z)+3(2z)^2+\dots+(n+1)(2z)^n+\dots\right]$$

$$=4z+14z^2+\dots+\left[4n(2)^{n-1}-2(n-1)(2)^{n-2}\right]z^n+\dots=\dots$$

$$=4z+14z^2+\dots+\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}-3(-n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1}\right]z^n+\dots=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\Rightarrow\ x[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]-3(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[-n-2]$$

(ii) از روش بسط به کسرهای جزیی :

$$x[n]=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{(-2)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{(-2)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}+Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{(-2)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}+Z^{-1}\left\{3z\frac{\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]-3(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[-(n+1)-1]$$

در بدست آوردن رابطه اخیر از زوج‌های تبدیل z ششم و هشتم جدول *(2-10)* به همراه خاصیت جابجایی زمانی جدول *(1-10)* استفاده کرده‌ایم.

۱۰-۲۴ دنباله متناظر با تبدیل zهای زیر را به روش مشخص شده بیابید.

(الف) بسط به کسرهای جزیی:

x[n] مطلقاً جمع‌پذیر است
$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

(ب) تقسیم :

x[n] دست‌راستی است
$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

(ج) بسط به کسرهای جزیی :

$x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر است $\qquad X(z)=\dfrac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$

حل : (الف) داریم :

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}=\frac{1-2z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

دیده می‌شود که $X(z)$ تنها قطبی در $z=\frac{1}{2}$ دارد، در اینصورت با توجه به اینکه $x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر است، ROCی تبدیل z آن باید شامل دایره واحد باشد، یعنی $|z|>\frac{1}{2}$ و داریم :

$$x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|>\frac{1}{2}\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

(ب) $X(z)$ تنها یک قطب در $z=-\frac{1}{2}$ دارد، در اینصورت و با توجه به اینکه $x[n]$ دنباله‌ای دست‌راستی است (ROCی تبدیل z آن خارج یک دایره است)، باید داشته باشیم : $|z|>\frac{1}{2}$ یا $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$. از اینرو با مراجعه به رابطه (I) مسئله $(10\text{-}10)$ خواهیم داشت :

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{1}+\left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{2}+\dots\right)$$

$$=1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}+\dots+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]z^{-n}+\dots=1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}+\dots-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}z^{-n}+\dots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}\ \Rightarrow\ x[n]=\delta[n]-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n]$$

(ج) ابتدا می‌نویسیم :

$$X(z)=\frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}=\frac{3z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{3z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

با توجه به مطلقاً جمع‌پذیر بودن $x[n]$ و اینکه هر دو قطب $X(z)$ درون دایره واحد قرار دارند، ناحیه همگرایی $|z|>\frac{1}{2}$ می‌باشد، پس داریم :

$$x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{3z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\ ,\ |z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{4}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\ ,\ |z|>\frac{1}{2}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$-Z^{-1}\left\{\frac{4}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, |z|>\frac{1}{4}\right\}=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-4\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]u[n]$$

۱۰–۲۵ دنباله دست‌راستی $x[n]$ را با تبدیل z زیر را در نظر بگیرید

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} \qquad \text{(م۱۰–۲۵–۱)}$$

(الف) معادله (م۱۰–۲۵–۱) را به کسرهای جزیی که نسبت چندجمله‌ایهایی برحسب z^{-1} باشند، بسط دهید و از آن $x[n]$ را بدست آورید.

(ب) معادله (م۱۰–۲۵–۱) را به صورت نسبت چندجمله‌ایهای برحسب z بنویسید. $X(z)$ را به کسرهای جزیی که نسبت چندجمله‌ایهایی برحسب z باشند بسط دهید و از آن $x[n]$ را بیابید و نشان دهید که با نتیجه بدست آمده در بالا یکی است.

حل : (الف) دیده می‌شود که $X(z)$ دو قطب در $z=1, z=\frac{1}{2}$ دارد. از اینرو ناحیه همگرایی $X(z)$ با توجه به دست راستی بودن $x[n]$، $|z|>1$ است، بنابراین می‌توان نوشت :

$$x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}, |z|>1\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>1\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{2}{1-z^{-1}}, |z|>1\right\}-Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=2u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u[n] \quad ,(I)$$

(ب)

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}=\frac{z^{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}=z^{2}\left[\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}\right]=z^{2}\left[\frac{2}{z-1}-\frac{2}{z-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=z\left[\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-\frac{1}{2}}\right] \qquad , \quad |z|>1 \quad , \quad (III)$$

از طرفی داریم :

$$\left\{\frac{z}{z-\frac{1}{2}}, |z|>\frac{1}{2}\right\}\xleftrightarrow{Z^{-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] \qquad ; \qquad \left\{\frac{z}{z-1}, |z|>1\right\}\xleftrightarrow{Z^{-1}}u[n]$$

حال با استفاده از خاصیت جابجایی زمانی جدول *(10-1)* داریم :

$$\left\{\frac{z^2}{z-\frac{1}{2}}\ ,\ |z| > \frac{1}{2}\right\} \xleftrightarrow{Z^{-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \quad ; \quad \left\{\frac{z^2}{z-1}\ ,\ |z| > 1\right\} \xleftrightarrow{Z^{-1}} u[n+1]$$

که با جایگذاری در رابطه *(II)* خواهیم داشت :

$$X(z) \xleftrightarrow{Z^{-1}} x[n] = 2u[n+1] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \Rightarrow x[n] = 2u[n+1] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n+1]$$

$$= 2(\delta[n+1]+u[n]) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}(\delta[n+1]+u[n]) = \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]\delta[n+1] + \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u[n]$$

$$= \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u[n] \qquad , \quad (III)$$

همچنانکه مشاهده می‌شود دو نتیجه بدست آمده در روابط *(I)* و *(III)* یکی هستند، این به آن معنیست که هر دو روش بکار گرفته شده برای محاسبه *x[n]*، معتبر می‌باشند.

۱۰-۲۶ دنباله دست‌چپی *x[n]* را با تبدیل *z* زیر در نظر بگیرید

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

(الف) *X(z)* را به صورت نسبت چندجمله‌ایهایی برحسب *z* بنویسید.

(ب) با بسط به کسرهای جزیی *X(z)* را به صورت مجموع دو جمله بنویسید، که هر کدام یکی از قطبهای بدست آمده در بند (الف) را دربرداشته باشد.

(ج) *x[n]* را بدست آورید.

حل : ابتدا توجه می‌کنیم که *x[n]* دنباله‌ای دست‌چپی است، بنابراین *ROC*ی آن در صفحه *z* ناحیه داخلی دایره‌ای خواهد بود که شعاع آن با اندازه کوچکترین قطب *X(z)* (در اینجا $z=\frac{1}{2}$) برابر است، یعنی : $|z| < \frac{1}{2}$

(الف، ب و ج)

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)} = z^2\left[\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}\right] = z^2\left[\frac{2}{z-1} - \frac{2}{z-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= z\left[\frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-\frac{1}{2}}\right] \qquad , \quad |z| < \frac{1}{2} \qquad , \quad (I)$$

از طرفی داریم :

$$\left\{\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \;,\; |z| < \frac{1}{2}\right\} \xleftrightarrow{Z^{-1}} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[-n-1]$$

$$\left\{\frac{z}{z-1} \;,\; |z| < 1\right\} \xleftrightarrow{Z^{-1}} -u[-n-1]$$

حال با استفاده از خاصیت جابجایی زمانی جدول *(1-10)* می‌توان نوشت :

$$\left\{\frac{z^2}{z-\frac{1}{2}} \;,\; |z| < \frac{1}{2}\right\} \xleftrightarrow{Z^{-1}} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[-(n+1)-1]$$

$$\left\{\frac{z^2}{z-1} \;,\; |z| < 1\right\} \xleftrightarrow{Z^{-1}} -u[-(n+1)-1]$$

که با جایگذاری در رابطه *(I)* خواهیم داشت :

$$X(z) \xleftrightarrow{Z^{-1}} x[n] = -2u[-n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[-n-2] \Rightarrow x[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 2\right] u[-n-2]$$

۱۰–۲۷ دنباله دست‌راستی $x[n]$ با تبدیل z زیر داده شده است

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

$x[n]$ در ازای $n<0$ را بیابید.

حل : ابتدا برای سادگی می‌نویسیم :

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}} = \frac{z^{10} + 4z^{9} - 5z^{8} + z^{3} + 3}{z^{7} - 5z^{3} + 1}$$

حال با توجه به اینکه $x[n]$ دنباله‌ای دست‌راستی است، حاصل تقسیم زیرا همگرا بوده و داریم :

$$\begin{array}{l|l}
z^{10} + 4z^{9} - 5z^{8} + z^{3} + 3 & z^{7} - 5z^{3} + 1 \\ \cline{2-2}
z^{10} - 5z^{6} + z^{3} & z^{3} + 4z^{2} - 5z + \ldots \\ \cline{1-1}
4z^{9} - 5z^{8} + 5z^{6} + 3 & \\
4z^{9} - 20z^{5} + 4z^{2} & \\ \cline{1-1}
-5z^{8} + 5z^{6} + 20z^{5} - 4z^{2} + 3 & \\
-5z^{8} + 25z^{4} - 5z & \\ \cline{1-1}
5z^{6} + 20z^{5} - 25z^{4} - 4z^{2} + 5z + 3 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

در اینصورت :

$$X(z)=z^3+4z^2-5z+\ldots=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\Rightarrow \ldots=x[-6]=x[-5]=x[-4]=0, x[-3]=1, x[-2]=4\ , x[-1]=-5\ , \ldots$$

۱۰–۲۸ (الف) تبدیل z دنباله زیر را بیابید.

$$x[n]=\delta[n]-0.95\delta[n-6]$$

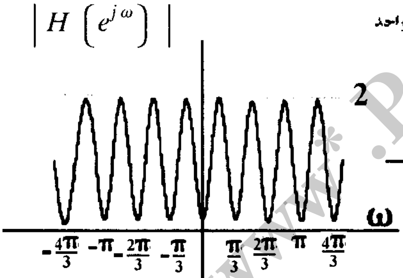
(ب) نمودار صفر و قطب دنباله (الف) را رسم کنید.

(ج) با بررسی رفتار بردارهای صفر و قطب در پیمودن دایره واحد نمودار دامنه تبدیل فوریه $x[n]$ را به طور تقریبی رسم کنید.

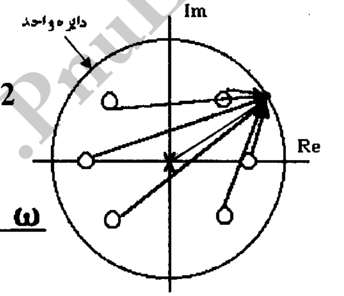
حل : (الف)

$$X(z)=Z\{\delta[n]-0.95\delta[n-6]\}=Z\{\delta[n]\}-0.95Z\{\delta[n-6]\}=1-0.95z^{-6}=\frac{z^6-0.95}{z^6}\ ,\ |z|>0$$

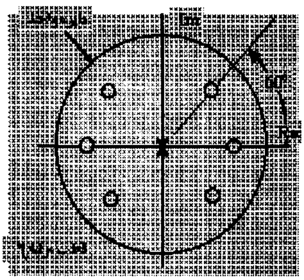
(ب، ج) این تبدیل دارای یک قطب مرتبه شش در $z=0$ و شش صفر در نقاط $z=\sqrt{0.95}\,e^{j\left(\frac{2\pi}{6}\right)k}$ از صفحه z می‌باشد. نمودار قطب و صفر این دنباله به همراه بردارهای قطب-صفر آن در شکل زیر رسم شده است (نمودارهای الف و ب) :



(ج)



(ب)



(الف)

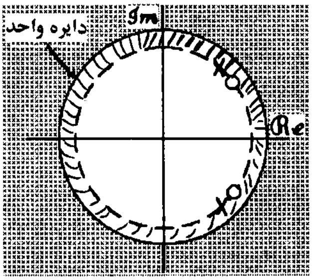
شکل تغییرات دامنه تبدیل فوریه $x[n]$ را می‌توان به سهولت بدست آورد. توجه کنید که صفرها به اندازه بسیار زیادی به دایره واحد نزدیک هستند $\left(\sqrt[6]{0.95}\approx 0.99\right)$، همچنین طول بردارهای قطب همواره ثابت بوده و بنابراین هیچ نقشی در تغییرات دامنه پاسخ فرکانسی ندارند. با حرکت بر روی دایره واحد هر جا که به مجاورت یک صفر می‌رسیم، این صفر بر پاسخ فرکانسی غلبه کرده و دامنه آن را شدیداً کاهش می‌دهد، با دور شدن از یک صفر تاثیر آن رفته رفته کمتر می‌شود، بدین ترتیب تا زمانی که صفر دیگری بر پاسخ فرکانسی غالب نشود، دامنه پاسخ فرکانسی افزایش می‌یابد، با توجه به تقارن موجود در نمودار قطب و صفر، قله‌های پاسخ فرکانسی در بین هر دو صفر متوالی روی می‌دهند. منحنی دامنه تبدیل فوریه $x[n]$ را در شکل (ج) مشاهده می‌کنید.

۱۰–۲۹ با استفاده از روش هندسی تعیین پاسخ فرکانسی بخش ۱۰–۴، دامنه تبدیل فوریه متناظر با هر

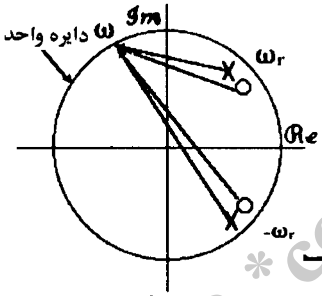
یک از نمودارهای قطب-صفر شکل م ۱۰-۲۹ را رسم کنید.

حل : طریقه بدست آوردن شکل تغییرات دامنه تبدیل فوریه ، در مسائل گذشته مکرراً ذکر شده است. بنابراین در این مسئله زیاد به این روش نمی‌پردازیم. تنها به عنوان نمونه، پاسخ فرکانسی مرتبط با نمودار قطب-صفر شکل (ج) را استخراج کرده و پاسخ‌های فرکانسی مربوط به شکل‌های (الف)، (ب)، (د) و (هـ) را در انتهای مسئله نمایش خواهیم داد.

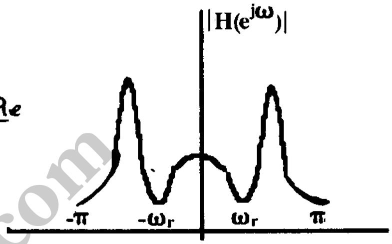
نمودار قطب-صفر شکل (ج) را به همراه بردارهای قطب و صفر آن در شکل زیر می‌بینید :



$(a-ج)$

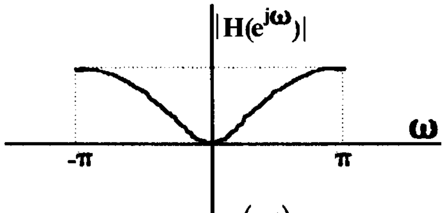


$(b-ج)$

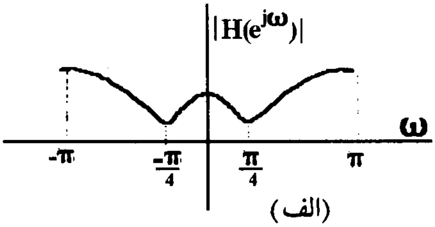


$(c-ج)$

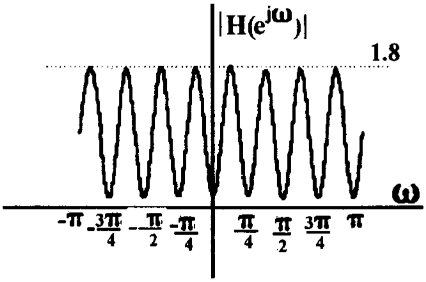
با توجه به بردارهای قطب ترسیم شده در شکل $(b-ج)$ دیده می‌شود که با حرکت روی دایره واحد از $\omega=0$ تا $\omega=\omega_r$ دامنه پاسخ فرکانسی رفته رفته تحت تاثیر صفر واقع در ω_r قرار می‌گیرد (طول بردار صفر به شدت کوچک می‌شود.)، بنابراین در طی این مدت دامنه پاسخ فرکانسی کاهش می‌یابد، با حرکت بیشتر روی دایره، از این صفر دور شده و به قطب واقع در ω_r نزدیک می‌شویم، در این حالت نیز با توجه به نزدیکی زیاد قطب به دایره واحد، این قطب بر دامنه پاسخ فرکانسی غالب شده و آن را به سرعت افزایش خواهد داد، حال اگر باز روی دایره پیش رویم، از تاثیر صفر و قطب رفته رفته کاسته می‌شود، در $\omega=\pi$ طول بردارهای قطب و صفر تقریباً یکی شده و دامنه پاسخ فرکانسی به مقدار ثابتی می‌رسد، تغییرات تقریبی دامنه این پاسخ فرکانسی را در شکل $(c-ج)$ مشاهده می‌کنید.



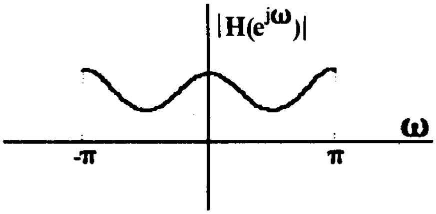
(ب)



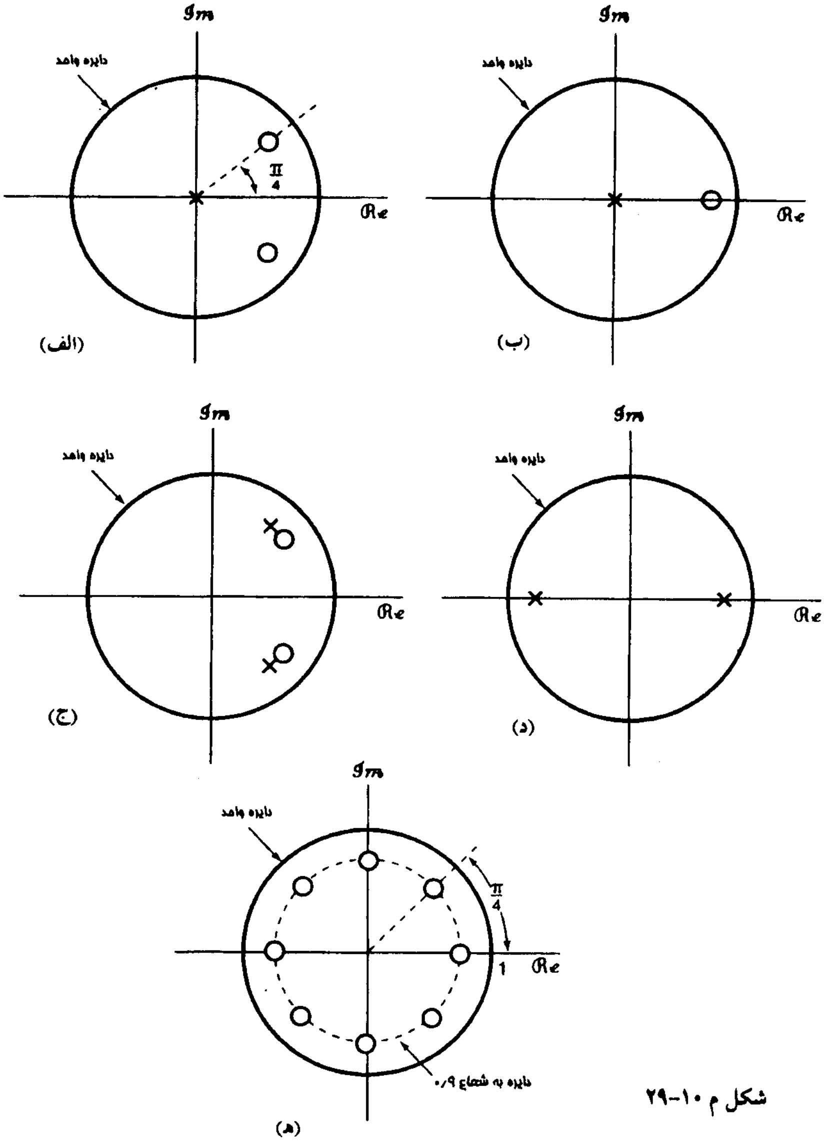
(الف)



(هـ)



(د)



شکل م ۱۰-۲۹

۱۰-۳۰ سیگنال $y[n]$ به صورت زیر با دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ مرتبط است.

$$y[n]=x_1[n+3]*x_2[-n+1]$$

که در آن

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad , \quad x_2[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

با استفاده از

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z|>|a|$$

و خواص تبدیل z، تبدیل z سیگنال $y[n]$ را بیابید.

حل : برای $x_1[n]$ داریم :

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{2}$$

حال با استفاده از خاصیت جابجایی زمانی تبدیل z می‌توان نوشت :

$$x_1[n+3]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} u[n+3] \xleftrightarrow{Z} \frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{2} \quad , (I)$$

همینطور برای $x_2[n]$ داریم :

$$x_2[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{3}$$

در اینصورت با استفاده از خاصیت وارونگی زمانی بدست می‌آوریم :

$$x_2[-n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z} \quad , \quad |z^{-1}|>\frac{1}{3} \quad (or \ |z|<3)$$

اکنون با توجه به خاصیت جابجایی زمانی تبدیل z، می‌توان نوشت :

$$x_2[-(n-1)]=\left(\frac{1}{3}\right)^{-(n-1)} u[-(n-1)] \xleftrightarrow{Z} \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z} \quad , \quad |z|<3 \quad , (II)$$

در نهایت با استفاده از خاصیت کانولوشن زمانی تبدیل z و روابط (I) و (II) خواهیم داشت :

$$Y(z)=Z\{y[n]\}=z\{x_1[n+3]*x_2[-n+1]\}=Z\{x_1[n+3]\}.Z\{x_2[-n+1]\}$$

$$=\left\{\frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{2}\right\}.\left\{\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z} \quad , \quad |z|<3\right\}=\frac{z^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)} \ , \ \frac{1}{2}<|z|<3$$

۱۰-۳۱ پنج دانستنی زیر در مورد سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ با تبدیل z $X(z)$ می‌دانیم

۱. $x[n]$ حقیقی و دست‌راستی است.

۲. $X(z)$ دقیقاً دو قطب دارد.

۳. $X(z)$ دو صفر در مبدا دارد.

۴. $X(z)$ در $z=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ یک قطب دارد.

۵. $X(1)=\frac{8}{3}$.

$X(z)$ را یافته، ناحیه همگرایی آن را تعیین کنید.

حل : از اطلاع (1) می‌دانیم که $x[n]$ حقیقی است، این بدان معنی است که $X^*(z^*)=X(z)$ یعنی اگر z_0 قطب یا صفری از $X(z)$ باشد، z_0^* نیز قطب یا صفر $X(z)$ خواهد بود، بنابراین با توجه به اطلاع (4) که می‌گوید $z_1=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ قطب $X(z)$ است، $z_2=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$ نیز قطب $X(z)$ می‌باشد. با مراجعه بـه اطـلاع (2) درمی‌یابیم که این دو قطب تنها قطب‌های $X(z)$ هستند. از اطلاع (3) روشن می‌شود که صورت $X(z)$ دارای عامل z^2 است. اطلاع (1) همچنین می‌گوید که $x[n]$ دست‌راستی است، بنابراین ROCی آن خارج دایره‌ای است که شعاع آن برابر اندازه بزرگترین قطب $X(z)$ می‌باشد، (یعنی $\frac{1}{2}= |z|$)؛ با توجه به تمامی گفته‌های فوق تابع تبدیل $X(z)$ را بصورت زیر پیشنهاد می‌کنیم :

$$X(z)=k\frac{z^2\left[\prod_{i=1}^{N_1}(z-\xi_i)(z-\xi_i^*)\right]\left[\prod_{i=1}^{N_2}(z-\eta_i)\right]}{\left(z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}$$

که در آن ξ_i و η_i به ترتیب، دیگر صفرهای مختلط و ساده $X(z)$ بوده و k مقدار ثابتی است که باید تعیین شود؛ از اطلاع (5) داریم :

$$X(1)=k\frac{\left[\prod_{i=1}^{N_1}(1-\xi_i)(1-\xi_i^*)\right]\left[\prod_{i=1}^{N_2}(1-\eta_i)\right]}{\left(1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}=\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \quad k=\frac{2}{\left[\prod_{i=1}^{N_1}(1-\xi_i)(1-\xi_i^*)\right]\left[\prod_{i=1}^{N_2}(1-\eta_i)\right]}$$

توجه شود که اگر در صورت مسئله قید علی بودن $x[n]$ ذکر شده بود (یعنی : $x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)<\infty$)، درجه چندجمله ای صورت $X(z)$ حداکثر می‌توانست با درجه چندجمله‌ای مخرج آن برابر شود و در اینصورت صفرهای $X(z)$، تنها همان دو صفر واقع در مبداء بودند و داشتیم :

$$X(z)=\frac{kz^2}{\left(z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}\quad,\quad |z|>\frac{1}{2}$$

در این مورد :

$$X(1)=\frac{k}{\left(1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}=\frac{8}{3}\quad\Rightarrow\quad k=2$$

۱۰-۳۲ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر در نظر بگیرید

$$h[n]=\begin{cases}a^n & ; \ n\geq 0\\ 0 & ; \ n<0\end{cases}$$

که ورودی زیر به آن اعمال شود

$$h[n]=\begin{cases}1 & ; \ 0\leq n\leq N-1\\ 0 & ; \ otherwise\end{cases}$$

(الف) خروجی $y[n]$ را با محاسبه صریح کانولوشن $x[n]$ و $h[n]$ بدست آورید.

(ب) خروجی $y[n]$ را با محاسبه عکس تبدیل z حاصلضرب تبدیل z های ورودی و پاسخ ضربه بیابید.

حل : (الف) برای $x[n]$ و $h[n]$ می‌توان نوشت :

$$x[n]=u[n]-u[n-N] \ , \ h[n]=a^n u[n]$$

در اینصورت :

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\,h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(u[k]-u[k-N]\right)a^{n-k}u[n-k]=\sum_{k=0}^{N-1}a^{n-k}u[n-k]$$

$$=\begin{cases}0 & ; \ n<0\\ \sum_{k=0}^{n}a^{n-k} & ; \ 0\leq n\leq N-1\\ \sum_{k=0}^{N-1}a^{n-k} & ; \ n>N-1\end{cases}=\begin{cases}0 & ; \ n<0\\ a^n\sum_{k=0}^{n}\left(a^{-1}\right)^k & ; \ 0\leq n\leq N-1\\ a^n\sum_{k=0}^{N-1}\left(a^{-1}\right)^k & ; \ n>N-1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & ; \ n<0\\ a^n\left[\dfrac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}\right] & ; \ 0\leq n\leq N-1\\ a^n\left[\dfrac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}\right] & ; \ n>N-1\end{cases}=\begin{cases}0 & ; \ n<0\\ \dfrac{a^n-a^{-1}}{1-a^{-1}} & ; \ 0\leq n\leq N-1\\ \dfrac{a^n-a^{n-N}}{1-a^{-1}} & ; \ n>N-1\end{cases} \quad , \ (I)$$

(ب)

$$H(z)=Z\{h[n]\}=Z\left\{a^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \ |z|>|a|$$

$$X(z)=Z\{x[n]\}=Z\{u[n]-u[n-N]\}=Z\{u[n]\}-Z\{u[n-N]\}=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad , All\, z$$

$$\Rightarrow Y(z)=Z\{y[n]\}=Z\{x[n]*h[n]\}=X(z)H(z)=\left(\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) \quad , |z|>|a|$$

$$=\left(1-z^{-N}\right)\left[\frac{\left(\frac{1}{1-a}\right)}{1-z^{-1}}+\frac{\left(\frac{1}{1-a^{-1}}\right)}{1-az^{-1}}\right]=\left(\frac{1}{1-a}\right)\left[\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}\right]$$

$$+\left(\frac{1}{1-a^{-1}}\right)\left[\frac{1}{1-az^{-1}}-\frac{z^{-N}}{1-az^{-1}}\right] \quad , \ |z|>|a| \quad \Rightarrow y[n]=Z^{-1}\{Y(z)\}$$

$$=\left(\frac{1}{1-a}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad , \ All\ z\right\}$$

$$+\left(\frac{1}{1-a^{-1}}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-az^{-1}}-\frac{z^{-N}}{1-az^{-1}} \quad , \ |z|>|a|\right\}=\left(\frac{1}{1-a}\right)[u[n]-u[n-N]]$$

$$+\left(\frac{1}{1-a^{-1}}\right)\left[a^n u[n]-a^{n-N}u[n-N]\right]=\begin{cases}0 & ; \ n<0\\ \dfrac{1}{1-a} & ; \ 0\le n\le N-1\\ 0 & ; \ n>N-1\end{cases}+\begin{cases}0 & ; \ n<0\\ \dfrac{a^n}{1-a^{-1}} & ; \ 0\le n\le N-1\\ \dfrac{a^n-a^{n-N}}{1-a^{-1}} & ; \ n>N-1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & ; \ n<0\\ \dfrac{a^n-a^{-1}}{1-a^{-1}} & ; \ 0\le n\le N-1\\ \dfrac{a^n-a^{n-N}}{1-a^{-1}} & ; \ n>N-1\end{cases} \quad , \ (II)$$

با توجه به روابط (I) و (II) می توان دید که هر دو روش به یک نتیجه منجر می‌شوند.

۱۰-۳۳ (الف) تابع تبدیل سیستم LTI علی توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را بیابید.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$$

(ب) اگر

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$y[n]$ را با استفاده از تبدیل z بدست آورید.

حل : (الف) با اعمال تبدیل z به طرفین معادله تفاضلی دیفرانسیل می‌نویسیم :

$$Z\left\{y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]\right\}=Z\{x[n]\} \Rightarrow Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{4}z^{-2}Y(z)=X(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

این تابع تبدیل دارای یک صفر مضاعف در مبدا و دو قطب در $z_p=\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{3}}{4}$ می‌باشد؛ دیده می‌شود که

هر دو قطب تابع تبدیل ، درون دایره واحد هستند $\left(|z_p| = \frac{1}{2} < 1\right)$ ، در اینصورت با توجه به علی بودن سیستم، ROCی آن خارج دایره‌ای خواهد بود که شعاع آن به اندازه بزرگترین قطب $H(z)$ برابر است $\left(|z| > \frac{1}{2}\right)$ ، بنابراین داریم :

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right)}\quad ,\quad |z|>\frac{1}{2}$$

(ب) ابتدا برای $X(z)$ داریم :

$$X(z)=Z\{x[n]\}=Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad ,\quad |z|>\frac{1}{2}$$

حال $Y(z)$ را بدست می‌آوریم :

$$Y(z)=Z\{y[n]\}=Z\{x[n]*h[n]\}=X(z)H(z)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right)}=\frac{+j\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right)}$$

$$+\frac{-j\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right)}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Rightarrow y[n]=Z^{-1}\{Y(z)\}=Z^{-1}\left\{+\left(\frac{j}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}}\right]\right.$$

$$\left.-\left(\frac{j}{\sqrt{3}}\right)\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}}\right]+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad ,\quad |z|>\frac{1}{2}\right\}=+\left(\frac{j}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n u[n]$$

$$-\left(\frac{j}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]=+\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{j}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n u[n]$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{j}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{e^{j\frac{\pi n}{3}}-e^{-j\frac{\pi n}{3}}}{2j}\right)+1\right]u[n]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)+1\right]u[n]$$

۱۰-۳۴ یک سیستم LTI علی با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است

$$y[n]=y[n-1]+y[n-2]+x[n-1]$$

(الف) تابع سیستم $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$ این سیستم را بیابید. صفرها و قطبهای $H(z)$ را رسم کرده، ناحیه همگرایی را مشخص کنید.

(ب) پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

(ج) می‌بینید که این سیستم ناپایدار است. یک پاسخ ضربه پایدار (غیرعلی) بیابید که معادله تفاضلی فوق را ارضا کند.

حل : (الف) با اعمال تبدیل z به طرفین معادله تفاضلی سیستم خواهیم داشت :

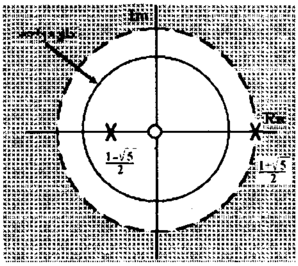
$$Z\{y[n]\}=Z\{y[n-1]+y[n-2]+x[n-1]\}$$

$$\Rightarrow Y(z)=z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)+z^{-1}X(z) \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}$$

این تابع تبدیل دارای یک صفر در مبدا و دو قطب در $z_p=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ است، با توجه به علی بودن سیستم، ROCی آن خارج دایره‌ای خواهد بود که شعاع آن به اندازه بزرگترین قطب $H(z)$ برابر است (یعنی : $|z|>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$)، بنابراین داریم :

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{\left[1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}\right]\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}\right]} \quad , \quad |z|>\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

به سادگی دیده می‌شود که ROC شامل دایره واحد نیست، از اینرو $H(z)$ تابع تبدیل یک سیستم پایدار نمی‌باشد. نمودار صفر-قطب $H(z)$ را در شکل زیر مشاهده می‌کنید، ناحیه همگرایی بصورت خاکستری نشان داده شده است.



(ب)

$$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{\left[1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}\right]\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}\right]} \quad , \quad |z|>\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}+\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}\quad,\ |z|>\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}\ ,|z|>\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}\ ,|z|>\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\right\}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u[n]$$

(ج) همانطورکه می‌دانیم پاسخ ضربه‌ای معادله تفاضلی این سیستم را ارضا می‌کند که نمودار قطب-صفر آن دقیقاً با نمودار قطب-صفر نشان داده شده در بند (الف) یکی باشد، بنابراین تنها آزادی عمل ما در تعیین ROC است؛ برای داشتن پاسخ ضربه پایدار، این ROC باید دایره واحد را دربرگیرد که با توجه به نمودار قطب-صفر داده شده ، $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<|z|<\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|$ خواهد بود، روشن است که این ROC مشخص کننده یک سیگنال دوطرفه و بنابراین غیرعلی می‌باشد؛ در این مورد داریم :

$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{\left[1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}\right]\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}\right]}\ ,\ \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<|z|<\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}+\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}\ ,\ \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<|z|<\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}, |z| < \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\right\}$$

$$- \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z^{-1}}, |z| > \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|\right\}$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n u[-n-1] - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n u[n]$$

۱۰-۳۵ یک سیستم LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید که برای آن

$$y[n-1]-\frac{5}{2}y[n]+y[n+1]=x[n]$$

این سیستم می‌تواند پایدار و علی باشد یا نباشد.

با در نظر گرفتن نمودار قطب-صفر این معادله تفاضلی، سه پاسخ ضربه ممکن سیستم را بدست آورید. نشان دهید که هر سه پاسخ معادله تفاضلی را ارضا می‌کنند.

حل : ابتدا از طرفین معادله تفاضلی سیستم برای بدست آوردن تابع تبدیل آن، تبدیل z می‌گیریم :

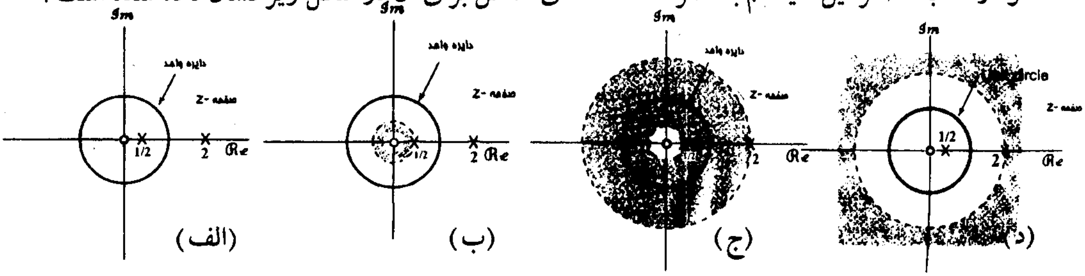
$$Z\{y[n-1]-\frac{5}{2}y[n]+y[n+1]\}=Z\{x[n]\} \Rightarrow z^{-1}Y(z)-\frac{5}{2}Y(z)+zY(z)=X(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

این تابع تبدیل دارای یک صفر در مبدا و دو قطب در $z=\frac{1}{2}, z=2$ می‌باشد، در اینصورت داریم :

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}=\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{1-2z^{-1}}$$

نمودار قطب-صفر این سیستم به همراه سه ROCی ممکن برای آن در شکل زیر نشان داده شده است :



با توجه به اینکه هر سه شکل (ب)، (ج) و (د) دارای توزیع قطب-صفر یکسانی هستند، هر سه پاسخ ضربه بدست آمده از این شکل‌ها بدون توجه به ROCی در نظر گرفته شده، معادله تفاضلی سیستم را برمی‌آورند. این پاسخ ضربه‌ها را در زیر محاسبه کرده‌ایم :

(i) پاسخ ضربه مربوط به شکل (ب) :

$$h_1[n]=Z^{-1}\{H_1(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}},\ |z|<\frac{1}{2}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{1-2z^{-1}},\ |z|<\frac{1}{2}\right\}$$

$$=-\left(\frac{2}{3}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\ |z|<\frac{1}{2}\right\}+\left(\frac{2}{3}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}},\ |z|<2\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]-\left(\frac{2}{3}\right)(2)^n u[-n-1]$$

(ii) پاسخ ضربه مربوط به شکل (ج) :

$$h_2[n]=Z^{-1}\{H_2(z)\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}},\ \frac{1}{2}<|z|<2\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{1-2z^{-1}},\ \frac{1}{2}<|z|<2\right\}$$

$$=-\left(\frac{2}{3}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\ |z|>\frac{1}{2}\right\}+\left(\frac{2}{3}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}},\ |z|<2\right\}$$

$$=-\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(\frac{2}{3}\right)(2)^n u[-n-1]$$

(iii) پاسخ ضربه مربوط به شکل (د) :

$$h_3[n]=Z^{-1}\{H_3(z)\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}},\ |z|>2\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{1-2z^{-1}},\ |z|>2\right\}$$

$$=-\left(\frac{2}{3}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\ |z|>\frac{1}{2}\right\}+\left(\frac{2}{3}\right)Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}},\ |z|>2\right\}$$

$$=-\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{2}{3}\right)(2)^n u[n]$$

حال ثابت می‌کنیم که $h_1[n]$ معادله تفاضلی سیستم را ارضا می‌کند، به این منظور باید نشان دهیم که اگر $y[n]=h_1[n]$، آنگاه $x[n]=\delta[n]$؛ داریم :

$$h_1[n-1]-\frac{5}{2}h[n]+h[n+1]=\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[-(n-1)-1]-\left(\frac{2}{3}\right)(2)^{n-1}u[-(n-1)-1]\right]$$

$$-\frac{5}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n-1]-\left(\frac{2}{3}\right)(2)^{n}u[-n-1]\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[-(n+1)-1]\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2}{3}\right)(2)^{n+1}u[-(n+1)-1]\right]=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[4u[-n]-5u[-n-1]+u[-n-2]\right]$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)(2)^{n-1}\left[u[-n]-5u[-n-1]+4u[-n-2]\right]=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}[-\delta[-n-1]+4\delta[n]]$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)(2)^{n-1}[-4\delta[-n-1]+\delta[n]]=-\frac{2}{3}\delta[-n-1]+\frac{4}{3}\delta[n]+\frac{2}{3}\delta[-n-1]-\frac{1}{3}\delta[n]=\delta[n]$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که $h_2[n]$ و $h_3[n]$ نیز معادله تفاضلی سیستم را ارضا می‌کنند.

۱۰-۳۶ یک سیستم خطی گسسته در زمان تغییرناپذیربا جابجایی، با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید که برای آن

$$y[n-1]-\frac{10}{3}y[n]+y[n+1]=x[n]$$

سیستم پایدار است. پاسخ ضربه سیستم را پیدا کنید.

حل : ابتدا برای بدست آوردن تابع تبدیل سیستم، از معادله تفاضلی آن تبدیل z می‌گیریم :

$$Z\left\{y[n-1]-\frac{10}{3}y[n]+y[n+1]\right\}=Z\{x[n]\}\Rightarrow z^{-1}Y(z)-\frac{10}{3}Y(z)+zY(z)=X(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z-\frac{10}{3}+z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{10}{3}z^{-1}+z^{-2}}$$

دیده می‌شود که این تابع تبدیل، دارای یک صفر در مبدا و دو قطب در $z=3$ و $z=\frac{1}{3}$ است، با توجه به اینکه سیستم پایدار است، ROCی آن باید شامل دایره واحد باشد، یعنی $\frac{1}{3}<|z|<3$، در اینصورت خواهیم داشت :

$$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-\frac{10}{3}z^{-1}+z^{-2}},\frac{1}{3}<|z|<3\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}\right)},\frac{1}{3}<|z|<3\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{1-3z^{-1}}-\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},\frac{1}{3}<|z|<3\right\}$$

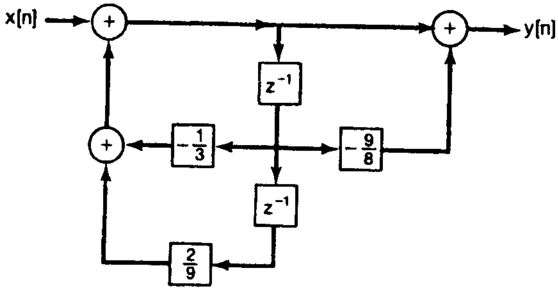
$$= \left(\frac{3}{8}\right) Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-3z^{-1}}, |z| <3\right\} - \left(\frac{3}{8}\right) Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| >\frac{1}{3}\right\}$$

$$=-\left(\frac{3}{8}\right)(3)^n u[-n-1]-\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

۱۰–۳۷ شکل م ۱۰–۳۷ نمایش جعبه‌ای یک سیستم LTI را نشان می‌دهد.

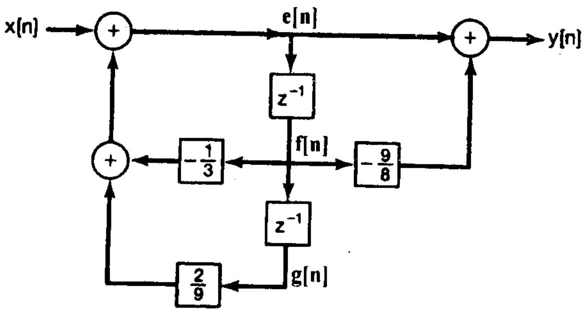
(الف) معادله تفاضلی ارتباط‌دهنده $x[n]$ و $y[n]$ را بیابید.

(ب) آیا سیستم پایدارست؟



شکل م ۱۰–۳۷

حل : (الف) نمایش جعبه‌ای این سیستم را دوباره در شکل زیر مشاهده می‌کنید :



با توجه به این شکل می‌توان در حوزه z روابط زیر را بدست آورد :

$$E(z)=X(z)-\frac{1}{3}F(z)+\frac{2}{9}G(z)$$
$$F(z)=z^{-1}E(z)$$
$$G(z)=z^{-1}F(z)$$
$$Y(z)=E(z)-\frac{9}{8}F(z)$$

با حذف $E(z)$, $F(z)$ و $G(z)$ میان روابط بالا خواهیم داشت :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{9}{8}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{2}{9}z^{-2}} \quad ,(I)\Rightarrow \left(1+\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{2}{9}z^{-2}\right)Y(z)=\left(1-\frac{9}{8}z^{-1}\right)X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)+\frac{1}{3}z^{-1}Y(z)-\frac{2}{9}z^{-2}Y(z)=X(z)-\frac{9}{8}z^{-1}X(z) \Rightarrow Z^{-1}$$

$$\Rightarrow y[n]+\frac{1}{3}y[n-1]-\frac{2}{9}y[n-2]=x[n]-\frac{9}{8}x[n-1]$$

(ب) با توجه به تابع تبدیل سیستم (رابطه I) دیده می‌شود که این تابع دارای دو صفر در $z=0$ و $z=\frac{9}{8}$ و دو قطب در $z=\frac{1}{3}$ و $z=-\frac{2}{3}$ می‌باشد؛ با توجه به اینکه سیستم علی است، ROCی آن باید خارج دایره‌ای باشد که شعاع آن برابر با اندازه بزرگترین قطب $H(z)$ است (یعنی : $|z|>\frac{2}{3}$)، روشن است که این ROC دایره واحد را دربرمی‌گیرد، بنابراین سیستم پایدار است.

۱۰-۳۸ سیستم LTI علی S با ورودی $x[n]$ و تابع سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)$$

که در آن

$$H_1(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

و

$$H_2(z)=1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}$$

نمایش جعبه‌ای $H(z)$ به صورت اتصال سری نمایشهای جعبه‌ای $H_1(z)$ و $H_2(z)$ را در نظر بگیرید. نمایش حاصل در شکل م ۱۰-۳۸ نشان داده شده است، در این شکل سیگنالهای فرعی $e_1[n]$، $e_2[n]$، $f_1[n]$ و $f_2[n]$ نیز مشخص شده‌اند.

(الف) رابطه $e_1[n]$ و $f_1[n]$ چیست؟

(ب) رابطه $e_2[n]$ و $f_2[n]$ چیست؟

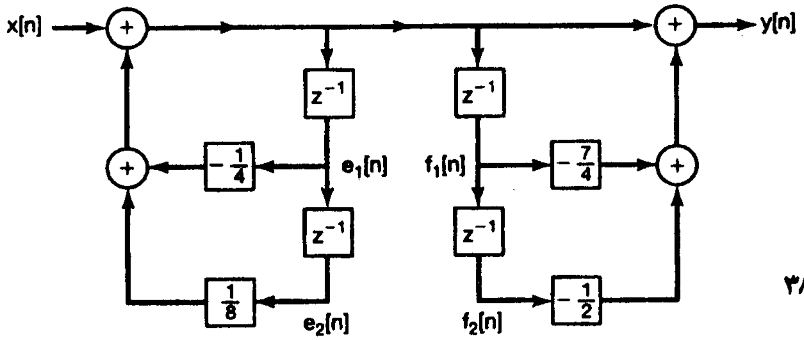
(ج) با توجه به پاسخهای بندهای (الف) و (ب) نمایش جعبه‌ای مستقیم سیستم S را با تنها دو تاخیر دهنده رسم کنید.

(د) یک نمایش جعبه‌ای سری برای S، براساس رابطه زیر رسم کنید :

$$H(z)=\left(\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)$$

(هـ) یک نمایش جعبه‌ای موازی برای S، براساس رابطه زیر رسم کنید.

$$H(z)=4+\frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{14}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$



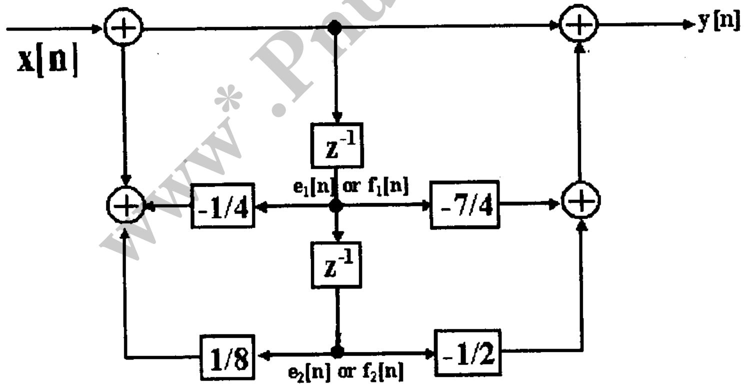
شکل م ۱۰-۳۸

حل : (الف) $e_1[n]$ و $f_1[n]$ هر دو تاخیر یافته یک سیگنال مشترک هستند ، بنابراین خود با هم برابرند:

$e_1[n]=f_1[n]$

(ب) $e_2[n]$ و $f_2[n]$ به ترتیب تاخیر یافته‌های $e_1[n]$ و $f_1[n]$ می‌باشند، با توجه به اینکه $e_1[n]=f_1[n]$، خواهیم داشت : $e_2[n]=f_2[n]$

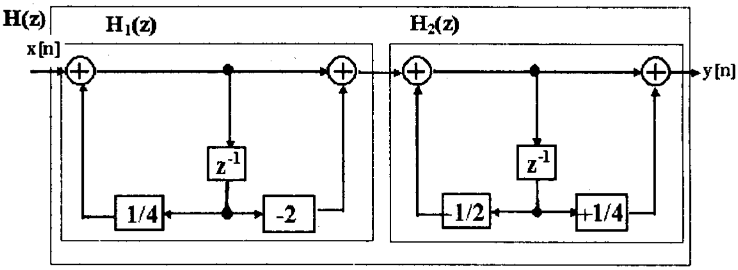
(ج) به سادگی روشن می‌شود که نیازی به استفاده از دو تاخیردهنده اضافی برای تولید $e_1[n]$ و $e_2[n]$ نداریم. چرا که این سیگنال‌ها در واقع همان سیگنالهای $f_1[n]$ و $f_2[n]$ می‌باشند. به این ترتیب نمایش جعبه‌ای $H(z)$ را می‌توان با حذف این دو تاخیردهنده اضافی به صورت زیر در نظر گرفت :



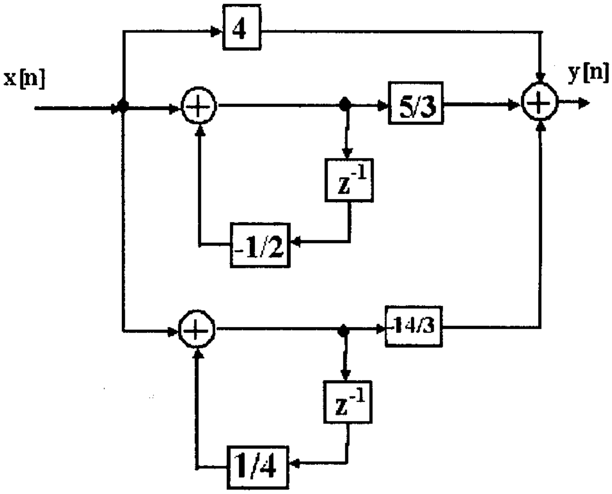
(د) $H(z)$ را می‌توان بصورت حاصلضرب دو تابع تبدیل کوچکتر، یعنی :

$$H_1(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad , \quad H_2(z)=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

در نظر گرفت؛ طریقه بدست آوردن یک نمایش جعبه‌ای برای $H_1(z)$ در مثال (۱۰-۲۹) کتاب شرح داده شده است، برای $H_2(z)$ نیز می‌توان این روش را اعمال نمود؛ در اینصورت نمایش جعبه‌ای زیر را برای $H(z)$ بدست خواهیم آورد:



(هـ) نمایش جعبه‌ای موازی :



۱۰–۳۹ سه تابع سیستم زیر به سیستمهای LTI علی مربوط می‌شوند.

$$H_1(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\ \left(1-\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}\right)}$$

$$H_2(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\ \left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}\right)}$$

$$H_3(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\ \left(1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}$$

(الف) نمایش جعبه‌ای مستقیم هر یک از این سیستمها را رسم کنید.

(ب) برای هر سیستم یک نمایش جعبه‌ای به صورت ترکیب متوالی دو نمایش جعبه‌ای رسم کنید. هر نمایش جعبه‌ای مرتبه دوم باید به شکل مستقیم ساخته شده باشد.

(ج) برای هر سیستم تعیین کنید که آیا می‌توان یک نمایش جعبه‌ای یافت که اتصال چهار سیستم مرتبه اول باشد، با این قید که تمام ضرایب حقیقی باشند.

حل : (الف) طریقه بدست آوردن نمایش مستقیم را برای تابع تبدیل $H_1(z)$ شرح می‌دهیم، برای $H_2(z)$ و $H_3(z)$ نیز از این روش استفاده خواهیم کرد، برای $H_1(z)$ می‌توان نوشت :

$$H_1(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}\right)}\Rightarrow\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{5}{3}z^{-1}+\frac{37}{36}z^{-2}-\frac{5}{18}z^{-3}+\frac{1}{36}z^{-4}}\ ,(I)$$

روشن است که برای نمایش $H_1(z)$ حداقل به چهار عنصر تاخیر نیاز داریم، فرض کنیم :

$$E_1(z)=z^{-1}Y(z)\qquad ;(II.1)$$

$$F_1(z)=z^{-1}E_1(z)=z^{-2}Y(z)\qquad ;(II.2)$$

$$G_1(z)=z^{-1}F_1(z)=z^{-3}Y(z)\qquad ;(II.3)$$

$$I_1(z)=z^{-1}G_1(z)=z^{-4}Y(z)\qquad ;(II.4)$$

در اینصورت با جایگذاری روابط (II) در رابطه (I) خواهیم داشت :

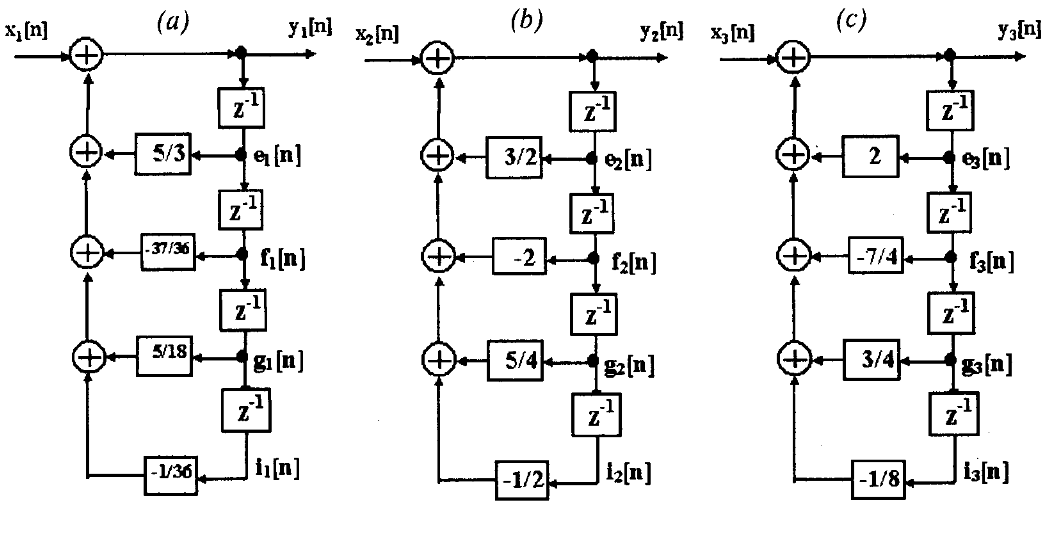
$$Y(z)=\left(\frac{5}{3}\right)E_1(z)-\left(\frac{37}{36}\right)F_1(z)+\left(\frac{5}{18}\right)G_1(z)-\left(\frac{1}{36}\right)I_1(z)+X_1(z)$$

با استفاده از رابطه اخیر، نمایش جعبه‌ای شکل (a) را می‌توان پیشنهاد نمود، با توجه به این شکل روشن می‌شود که ضرایب معادله (I) دقیقاً در نمایش جعبه‌ای موردنظر ظاهر شده‌اند، به این دلیل نمایش جعبه‌ای بدست آمده در این شکل، نمایش جعبه‌ای 'مستقیم' $H_1(z)$ می‌باشد. برای $H_2(z)$ و $H_3(z)$ نیز خواهیم داشت :

$$H_2(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}\right)}=\frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+2z^{-2}-\frac{5}{4}z^{-3}+\frac{1}{2}z^{-4}}$$

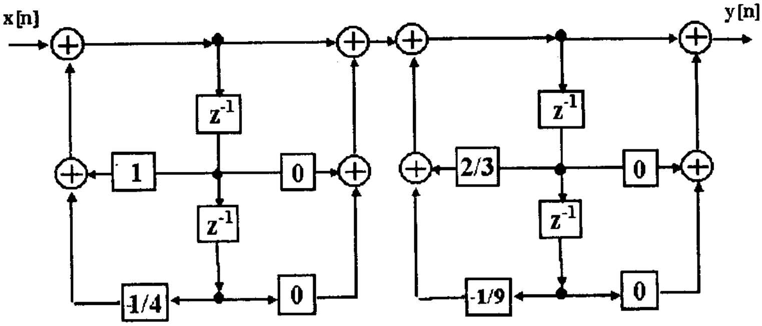
$$H_3(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}=\frac{1}{1-2z^{-1}+\frac{7}{4}z^{-2}-\frac{3}{4}z^{-3}+\frac{1}{8}z^{-4}}$$

نمایش‌های جعبه‌ای مستقیم $H_2(z)$ و $H_3(z)$ را به ترتیب در شکل‌های (b) و (c) مشاهده می‌کنید.

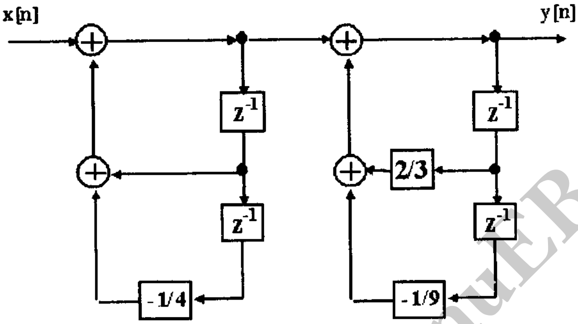


(ب) در این قسمت از نمایش جعبه‌ای مستقیم بدست آمده در بند (ج) مسئله قبل استفاده می‌کنیم :

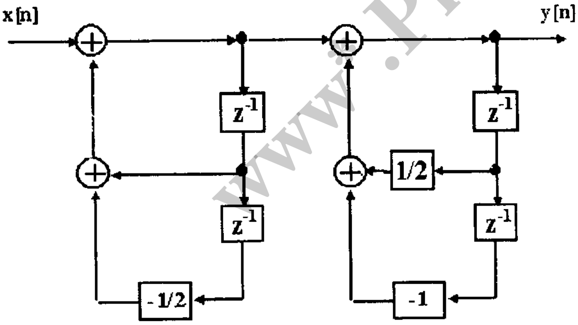
(i) نمایش جعبه‌ای $H_1(z)$: ابتدا داریم :



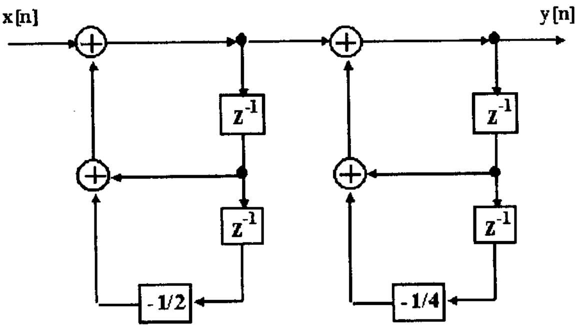
که بصورت ساده‌تر به شکل زیر خواهد بود:



(ii) نمایش جعبه‌ای $H_2(z)$:



(iii) نمایش جعبه ای $H_3(z)$:



(ج) تنها می‌توان نمایش جعبه‌ای $H_1(z)$ را به صورت اتصال چهار سیستم مرتبه اول با ضرایب حقیقی نشان داد. زیرا داریم :

$$H_1(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

دیده می‌شود که در تجزیه عبارت‌های مرتبه دوم $H_1(z)$ به عبارت‌های مرتبه‌اول فقط ضرایب حقیقی ظاهر شده‌اند که به نوبه خود منجر به نمایش‌های جعبه‌ای دارای ضرایب حقیقی می‌شوند. این در حالی است که از تجزیه عبارت‌های مرتبه دوم $H_2(z)$ و $H_3(z)$ به عبارت‌های مرتبه اول ضرایب موهومی ظاهر خواهند شد.

۱۰-۴۰ تبدیل z یکطرفه هر یک از دنباله‌های مسئله ۱۰-۲۱ را بیابید.

حل : (الف)

$$\mathscr{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\delta[n+5]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}0\times z^{-n}=0\quad,\quad All\ z$$

(ب)

$$\mathscr{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\delta[n-5]z^{-n}=\delta[5-5]z^{-5}=z^{-5}\quad,\quad z\neq 0$$

(ج)

$$\mathscr{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u[n]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-z^{-1})^n=\frac{1}{1-(-z^{-1})}\ ,\qquad |-z^{-1}|<1\quad=\frac{1}{1-z^{-1}}\ ,\qquad |z|>1$$

(د)

$$\mathscr{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+3]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\qquad \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1\quad=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

(هـ)

$$\mathscr{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-2]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}0\times z^{-n}=0\quad,\ All\ z$$

(و)

$$\mathscr{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[3-n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{3}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)} \quad , z\neq 0 \quad =\frac{1-\frac{1}{256}z^{-4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad , \quad z\neq 0$$

(ز)

$$\mathscr{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{2^n u[-n]+\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]\right\}z^{-n}=2^0z^0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^n$$

$$=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{n+1}=1+\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^n$$

$$=1+\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad , \quad \left|\frac{1}{4}z^{-1}\right|<1 \quad =\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{4}$$

(ح)

$$\mathscr{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}u[n-2]z^{-n}=9\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=9\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n+2}$$

$$=z^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{3}$$

۱۰-۴۱ دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]$$

$$x_2[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$\mathscr{X}_1(z)$ و $X_1(z)$ به ترتیب تبدیل z یکطرفه و دوطرفه $x_1[n]$ و $\mathscr{X}_2(z)$ و $X_2(z)$ به ترتیب تبدیل z یکطرفه و دوطرفه $x_2[n]$ هستند.

(الف) با گرفتن عکس تبدیل z دوطرفه $X_1(z)X_2(z)$ سیگنال $g[n]=x_1[n]*x_2[n]$ را بیابید.

(ب) با گرفتن عکس تبدیل z یکطرفه $\mathscr{X}_1(z)\mathscr{X}_2(z)$ سیگنال $q[n]$ در $n\geq 0$ را بیابید. توجه کنید که $q[n]$ و $g[n]$ در $n\geq 0$ یکسان نیستند.

حل: (الف) ابتدا تبدیل‌های دوطرفه $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را بدست می‌آوریم:

$$X_1(z)=Z\left\{x_1[n]\right\}=Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]\right\}=z.Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}=\frac{z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$X_2(z)=Z\left\{x_2[n]\right\}=Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{4}$$

در اینصورت خواهیم داشت :

$$G(z)=Z\{g[n]\}=Z\left\{x_1[n]*x_2[n]\right\}=X_1(z).X_2(z)=\frac{z}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\quad,\ |z|>\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g[n]=Z^{-1}\{G(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{z}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\ ,\ |z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{2z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{z}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\ ,|z|>\frac{1}{2}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{2z}{1-\frac{1}{2}z^{-2}}\ ,|z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$-Z^{-1}\left\{\frac{z}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\ ,|z|>\frac{1}{4}\right\}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}u[n+1]\quad ;\quad (I)$$

ب) ابتدا تبدیل‌های یکطرفه $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را بدست می‌آوریم :

$$\mathcal{X}_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x_1[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{-n}=\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{n}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad,\quad\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1\quad\left(or\ |z|>\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathcal{X}_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x_2[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\quad,\quad\left|\frac{1}{4}z^{-1}\right|<1\quad\left(or\ |z|>\frac{1}{4}\right)$$

در اینصورت خواهیم داشت :

$$Q(z)=\mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\quad,\ |z|>\frac{1}{2}\ \Rightarrow q[n]=Z^{-1}\{Q(z)\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)},\ |z|>\frac{1}{2}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\ ,\ |z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|>\frac{1}{2}\right\}-Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\ ,|z|>\frac{1}{4}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]- \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad , \quad n\geq 0 \quad , (II)$$

با مقایسه روابط (I) و (II) به سادگی روشن می‌شود که خاصیت کانولوشن تبدیل z یکطرفه در این حالت، حتی برای $n\geq 0$ برقرار نیست، این مطلب پیشاپیش معلوم بود، چراکه برای $n<0$ داریم : $x_1[n]\neq 0$

۱۰-۴۲ در هربند یک معادله تفاضلی، یک ورودی و شرط اولیه داده شده است، پاسخهای ورودی-صفر و حالت-صفر را به کمک تبدیل z یکطرفه بدست آورید.

(الف) $y[n]+3y[n-1]=x[n] \quad , \quad x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad , \quad y[-1]=1$

(ب) $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1] \quad , \quad x[n]=u[n] \quad , \quad y[-1]=0$

(ج) $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1] \quad , \quad x[n]=u[n] \quad , \quad y[-1]=1$

حل : (الف) با اعمال تبدیل z یکطرفه به طرفین معادله تفاضلی داریم :

$$\mathcal{Y}(z)+3(z^{-1}\mathcal{Y}(z)+y[-1])=\mathcal{X}(z)$$

$$\Rightarrow (1+3z^{-1})\mathcal{Y}(z)+3=\mathcal{X}(z) \Rightarrow \mathcal{Y}(z)=\frac{\mathcal{X}(z)}{1+3z^{-1}}-\frac{3}{1+3z^{-1}} \quad , \quad (I)$$

از طرفی برای $\mathcal{X}(z)$ داریم :

$$\mathcal{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{2}$$

که با جایگذاری در رابطه (I)، بدست می‌دهد :

$$\mathcal{Y}(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+3z^{-1}\right)}-\frac{3}{1+3z^{-1}}=\frac{\left(\frac{6}{7}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\left(\frac{20}{7}\right)}{1+3z^{-1}} \quad , \quad |z|>3$$

$$\Rightarrow y[n]=Z^{-1}\{\mathcal{Y}(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{6}{7}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>\frac{1}{2}\right\}-Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{20}{7}\right)}{1+3z^{-1}}, |z|>3\right\}$$

$$=\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(\frac{20}{7}\right)(-3)^n u[n] \quad , \quad n\geq 0$$

(ب) با اعمال تبدیل z یکطرفه به طرفین معادله تفاضلی داریم :

$$\mathcal{Y}(z)-\frac{1}{2}(z^{-1}\mathcal{Y}(z)+y[-1])=\mathcal{X}(z)-\frac{1}{2}(z^{-1}\mathcal{X}(z)+x[-1])$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\mathscr{Y}(z)=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\mathscr{X}(z)\Rightarrow \mathscr{Y}(z)=\mathscr{X}(z) \Rightarrow y[n]=x[n]=u[n]\ ,\ n\geq 0$$

(ج) در این مورد نیز خواهیم داشت :

$$\mathscr{Y}(z)-\frac{1}{2}(z^{-1}\mathscr{Y}(z)+y[-1])=\mathscr{X}(z)-\frac{1}{2}(z^{-1}\mathscr{X}(z)+x[-1])$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\mathscr{Y}(z)-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\mathscr{X}(z)\Rightarrow \mathscr{Y}(z)=\mathscr{X}(z)+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad ,\ (II)$$

از طرفی برای $\mathscr{X}(z)$ داریم :

$$\mathscr{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}u[n]z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}\quad ,\ |z|>1$$

که با جایگذاری در رابطه (II) بدست می‌آوریم :

$$\mathscr{Y}(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad ,\ |z|>1\ \Rightarrow y[n]=Z^{-1}\{\mathscr{Y}(z)\}$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}\ ,\ |z|>1\right\}+Z^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|>\frac{1}{2}\right\}=u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\ ,\ n\geq 0$$

توجه شود که تمامی عبارت‌های $y[n]$ بدست آمده در بالا به این نکته که $y[n]$ تنها برای $n\geq 0$ معتبر است تاکید کرده‌ایم .

۱۰–۴۳ یک دنباله زوج $x[n]$ (یعنی $x[n]=x[-n]$) با تبدیل z گویا در نظر بگیرید.

(الف) با استفاده از تعریف تبدیل z نشان دهید که

$$X(z)=X\left(\frac{1}{z}\right)$$

(ب) با توجه به نتیجه بند (الف) نشان دهید که اگر $X(z)$ در $z=z_0$ یک قطب (صفر) داشته باشد، $X(z)$ باید در $z=\frac{1}{z_0}$ هم قطب (صفر) داشته باشد.

(ج) نتیجه بند (ب) را در مورد دنباله‌های زیر امتحان کنید

(۱) $\delta[n+1]+\delta[n-1]$ (۲) $\delta[n+1]-\frac{5}{2}\delta[n]+\delta[n-1]$

حل : (الف) از تعریف تبدیل z داریم :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}\quad ,(I)\quad \Rightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\left(\frac{1}{z}\right)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{n}$$

حال با تغییر متغیر $n=-m$ و توجه به اینکه $x[n]$ دنباله‌ای زوج است ($x[-n]=x[n]$) خواهیم داشت :

$$X\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[-m]z^{-m}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]z^{-m} \quad , \quad (II)$$

بالاخره با مقایسه روابط (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$X(z)=X\left(\frac{1}{z}\right)$$

ب) اگر z_0 صفری از $X(z)$ باشد،خواهیم داشت: $X(z_0)=0$ ، از طرفی برای دنباله‌های زوج $X(z)=X\left(\frac{1}{z}\right)$ و داریم : $X(z_0)=X\left(\frac{1}{z_0}\right)=0$، یعنی $\frac{1}{z_0}$ هم صفر $X(z)$ می‌باشد. همین گفته برای قطب‌ها نیز صادق است.

ج-1) ابتدا می‌بینیم که $x[n]$ زوج است:

$$x[n]=\delta[n+1]+\delta[n-1] \Rightarrow x[-n]=\delta[-n+1]+\delta[-n-1]$$
$$=\delta[-(n-1)]+\delta[-(n+1)]=\delta[n-1]+\delta[n+1]=x[n]$$

حال $X(z)$ را بدست می‌آوریم:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta[n+1]+\delta[n-1]\right\}z^{-n}=z+z^{-1}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{(z+i)(z-i)}{z}$$

دیده می‌شود که $X(z)$ دارای دو صفر در $z_1=i$ و $z_2=\frac{1}{z_1}=-i$ بوده و دو قطب نیز در $z_3=0$ و $z_4=\frac{1}{z_3}=\infty$ دارد.

ج-2) ابتدا توجه می‌کنیم که $x[n]$ زوج است:

$$x[n]=\delta[n+1]-\frac{5}{2}\delta[n]+\delta[n-1] \Rightarrow x[-n]=\delta[-n+1]-\frac{5}{2}\delta[-n]+\delta[-n-1]$$
$$=\delta[-(n-1)]-\frac{5}{2}\delta[-n]+\delta[-(n+1)]=\delta[n-1]-\frac{5}{2}\delta[n]+\delta[n+1]=x[n]$$

حال $X(z)$ را بدست می‌آوریم:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\delta[n-1]-\frac{5}{2}\delta[n]+\delta[n+1]\right\}z^{-n}$$

$$=z^1-\frac{5}{2}z^0+z^{-1}=\frac{z^2-\frac{5}{2}z+1}{z}=\frac{(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}{z}$$

بدین ترتیب می‌بینیم که $X(z)$ دارای دو صفر در $z_1=2$ و $z_2=\frac{1}{z_1}=\frac{1}{2}$ و دو قطب نیز در $z_3=0$ و $z_4=\frac{1}{z_3}=\infty$ می‌باشد.

۱۰-۴۴ $x[n]$ یک سیگنال گسسته در زمان با تبدیل z $X(z)$ است. تبدیل z سیگنالهای زیر را برحسب $X(z)$ بیان کنید:

(الف) $\Delta x[n]$ که Δ عملگر تفاضل اول تعریف شده به صورت زیرست

$$\Delta x[n]=x[n]-x[n-1]$$

ب) $x_1[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & ;\ n\ even \\ 0 & ;\ n\ odd \end{cases}$ ج) $x_1[n]=x[2n]$

حل :(الف) $Z\{\Delta x[n]\}=Z\{x[n]-x[n-1]\}=X(z)-z^{-1}X(z)=\left(1-z^{-1}\right)X(z)$

(ب) با تفکیک nها به دو بخش زوج و فرد خواهیم داشت :

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[2m+1]z^{-(2m+1)}+\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[2m]z^{-(2m)}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 0\times z^{-(2m+1)}+\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-2m}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m](z^2)^{-m}=X(z^2)$$

ج) $$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[2n]z^{-n}=\sum_{\substack{n=-\infty \\ n,even}}^{+\infty} x[n]z^{-\frac{n}{2}}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right]x[n]z^{-\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-\frac{n}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](-1)^n z^{-\frac{n}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{-n}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)^{-n}=\frac{1}{2}X\left(z^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)$$

۱۰-۴۵ تعیین کنید کدام یک از تبدیلهای داده شده می‌تواند تابع تبدیل یک سیستم گسسته در زمان علی، ولی نه لزوماً پایدار، با پاسخ ضربه صفر در $n<0$ باشد. دلایل خود را به روشنی بیان کنید.

(الف) $\dfrac{\left(1-z^{-1}\right)^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ (ب) $\dfrac{(z-1)^2}{z-\frac{1}{2}}$

(ج) $\dfrac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6}$ (د) $\dfrac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^6}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^5}$

حل : می‌دانیم برای علی بودن یک سیستم، ROCی آن باید خارج بیرونی‌ترین قطب بوده و بینهایت را شامل شود. به عبارت دیگر حد $H(z)$ در $z\to\infty$ باید متناهی باشد. از اینرو :

(الف) علی است :

$$\lim_{z\to\infty} H(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{\left(1-z^{-1}\right)^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\lim_{z\to\infty}\frac{(z-1)^2}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)}=1<\infty$$

(ب) غیرعلی است :

$$\lim_{z\to\infty} H(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{(z-1)^2}{z-\frac{1}{2}}\to\infty$$

(ج) علی است :

$$\lim_{z\to\infty} H(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6}=0<\infty$$

(د) غیرعلی است :

$$\lim_{z\to\infty} H(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^6}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^5}\to\infty$$

۱۰–۴۶ دنباله $x[n]$ خروجی یک سیستم LTI به ازای ورودی $s[n]$ است. این سیستم با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است.

$$x[n]=s[n]-e^{8\alpha}s[n-8] \quad , \quad 0<\alpha<1$$

(الف) تابع سیستم را بیابید

$$H_1(z)=\frac{X(z)}{S(z)}$$

قطبها و صفرهای آن را روی صفحه z رسم کرده، ناحیه همگرایی آن را مشخص کنید.

(ب) می‌خواهیم با یک سیستم LTI، $x[n]$ را از $s[n]$ بازیابی کنیم. تابع تبدیل

$$H_2(z)=\frac{Y(z)}{X(Z)}$$

را برای داشتن $y[n]=s[n]$ رسم کنید. تمام نواحی همگرایی ممکن $H_2(z)$ را تعیین کرده در هر مورد علی بودن و پایداری سیستم را مشخص کنید.

(ج) تمام پاسخ ضربه‌های واحد $h_2[n]$ ممکن ارضاکننده رابطه زیر را بیابید

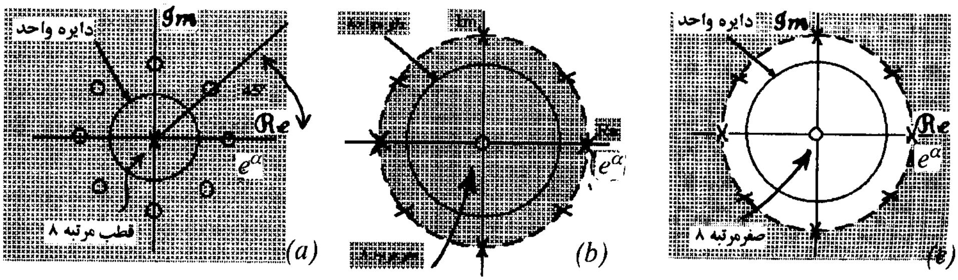
$$y[n]=h_2[n]*x[n]=s[n]$$

حل : (الف) با اعمال تبدیل z به طرفین معادله تفاضلی سیستم می‌نویسیم :

$$Z\{x[n]\}=Z\{s[n]-e^{8\alpha}s[n-8]\}\Rightarrow X(z)=S(z)-e^{8\alpha}.\,z^{-8}S(z)$$

$$\Rightarrow H_1(z)=\frac{X(z)}{S(z)}=1-e^{8\alpha}z^{-8}=\frac{z^8-e^{8\alpha}}{z^8} \quad , \quad z\neq0$$

نمودار قطب-صفر $H_1(z)$ را در شکل (a) مشاهده می‌کنید :



(ب) می‌خواهیم $H_2(z)$ به گونه‌ای باشد که خروجی $y[n]$ آن در پاسخ به ورودی $x[n]$ همان ورودی داده شده به سیستم دارای تابع تبدیل $H_1(z)$ باشد، یعنی :

$$H_2(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{S(z)}{X(z)}=\frac{1}{H_1(z)}=\frac{z^8}{z^8-e^{8\alpha}}$$

دو ناحیه همگرایی ممکن برای $H_2(z)$ را در شکل‌های (b) و (c) می‌توانید ببینید. ROCی نشان داده شده در شکل (b) خارج یک دایره بوده و بینهایت را شامل می‌شود ($|z|>e^{\alpha}$)، بنابراین متناظر با یک سیستم علی است، همچنین این ناحیه همگرایی، دایره واحد را دربرنمی‌گیرد، از اینرو سیستم مرتبط باآن ناپایدار است. در عوض ROCی رسم شده در شکل (c) درون یک دایره بوده و شامل دایره واحد است، بنابراین نشان دهنده یک سیستم غیرعلی و پایدار است.

(ج) این پاسخ ضربه همانطورکه دیده می‌شود، پاسخ ضربه سیستم دارای تابع تبدیل $H_2(z)$ می‌باشد، با توجه به اینکه دو ROCی متمایز برای $H_2(z)$ مشخص کردیم،دو پاسخ ضربه مختلف نیز خواهیم داشت :

(i-ج) پاسخ ضربه متناظر با شکل (b) :

$$h_2[n]=z^{-1}\{H_2(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{z^8}{z^8-e^{8\alpha}}\ ,\ |z|>e^{\alpha}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-e^{8\alpha}z^{-8}},\ |z|>e^{\alpha}\right\}\quad ,\ (I)$$

از طرفی داریم :

$$w[n]=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-e^{8\alpha}z^{-1}}\ ,\ |z|>e^{8\alpha}\right\}=\left(e^{8\alpha}\right)^n u[n]=e^{8\alpha n}u[n]\qquad ,\quad (II)$$

در اینصورت با مقایسه روابط (I) و (II) و دقت در خاصیت تغییر مقیاس زمانی جدول $(10\text{-}1)$ خواهیم داشت :

$$h_2[n]=\begin{cases}w[r] & ;\ n=8r\\ 0 & ;\ n\neq 8r\end{cases}=\begin{cases}e^{8\alpha r}u[r] & ;\ n=8r\\ 0 & ;\ n\neq 8r\end{cases}$$

(ii-ج)

$$h_2[n]=Z^{-1}\{H_2(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{z^8}{z^8-e^{8\alpha}}\ ,\ |z|<e^{\alpha}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-e^{8\alpha}z^{-8}}\ ,\ |z|<e^{\alpha}\right\}\ ,\ (III)$$

از طرفی داریم :

$$w[n]=Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-e^{8\alpha}z^{-1}}\ ,\ |z|<e^{8\alpha}\right\}=-\left(e^{8\alpha}\right)^n u[-n-1]=-e^{8\alpha n}u[-n-1]\ ,\ (IV)$$

حال با مقایسه روابط (III) و (IV) و در نظر داشتن خاصیت تغییر مقیاس زمانی جدول $(10\text{-}1)$ می‌توان نوشت :

$$h_2[n]=\begin{cases}w[r] & ;\ n=8r\\ 0 & ;\ n\neq 8r\end{cases}=\begin{cases}-e^{8\alpha r}u[-r-1] & ;\ n=8r\\ 0 & ;\ n\neq 8r\end{cases}$$

۱۰-۴۷ در مورد یک سیستم LTI با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ مطالب زیر را می‌دانیم

۱- اگر به ازای تمام مقادیر n، $x[n]=(-2)^n$، آنگاه به ازای تمام مقادیر n داریم $y[n]=0$

۲- اگر به ازای تمام مقادیر n، $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$، آنگاه به ازای تمام مقادیر n، $y[n]$ به صورت زیر است

$$y[n]=\delta[n]+a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

که a ثابت است.

(الف) مقدار ثابت a را بیابید.

(ب) پاسخ $y[n]$ این سیستم به ورودی زیر را بیابید

به ازای تمام مقادیر n، $x[n]=1$

حل: (الف) از اطلاع (1) می‌دانیم که $x[n]=(-2)^n$ تابع ویژه سیستم بوده و دارای مقدارویژه $H(-2)=0$ می‌باشد:

$$x[n]=(-2)^n=z^n\big|_{z=-2} \Rightarrow y[n]=H(z)z^n\big|_{z=-2}=0 \Rightarrow H(z)\big|_{z=-2}=H(-2)=0 \quad , \quad (I)$$

از طرفی از اطلاع (2) می‌دانیم که پاسخ این سیستم به سیگنال $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ برابر $y[n]=\delta[n]+a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ است، در اینصورت خواهیم داشت:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{Z\left\{\delta[n]+a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\}}{Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}}=\frac{\left[1+\frac{a}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad , \ |z|>\frac{1}{4}\right]}{\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \ |z|>\frac{1}{2}\right]}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left[1+\frac{a}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right] \quad , \ |z|>\frac{1}{2} \quad , \quad (II)$$

حال با اعمال نتیجه (I) در رابطه اخیر می‌توان ثابت a را بدست آورد:

$$H(-2)=\left(1-\frac{1}{2}(-2)^{-1}\right)\left[1+\frac{a}{1-\frac{1}{4}(-2)^{-1}}\right]=0 \Rightarrow a=-\frac{9}{8}$$

که با جایگذاری در رابطه (II) بدست می‌دهد:

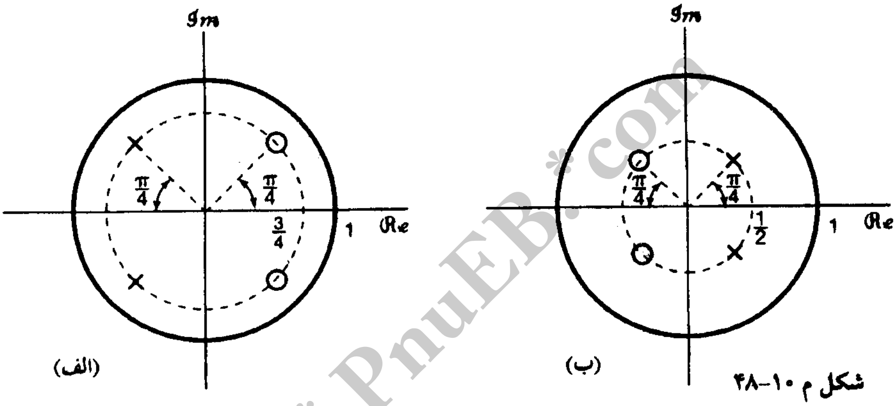
$$H(z)=-\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}{8\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

ب) از آنجا که نمایی‌های مختلط به شکل z^n، توابع ویژه سیستم‌های LTI هستند، داریم:

$$x[n]=1=z^n\Big|_{z=1} \Rightarrow y[n]=H(z)z^n\Big|_{z=1}=H(1)(1)^n=H(1)=\frac{1}{4}$$

۱۰-۴۸ یک سیستم مرتبه دوم LTI علی با پاسخ ضربه $h_1[n]$ حقیقی و تابع سیستم گویای $H_1(z)$ ساخته شده است. شکل م۱۰-۴۸(الف) نمودار قطب-صفر $H_1(z)$ را نشان می‌دهد. حال سیستم مرتبه دوم علی دیگری با پاسخ ضربه $h_2[n]$ و تابع سیستم گویای $H_2(z)$ در نظر بگیرید. نمودار قطب-صفر $H_2(z)$ در شکل م۱۰-۴۸(ب) نشان داده شده است. یک رشته $g[n]$ تعیین کنید که سه شرط زیر را داشته باشند:

(۱) $h_2[n]=g[n]h_1[n]$ (۲) $g[n]=0$ برای $n<0$ (۳) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left|g[k]\right|=3$



شکل م۱۰-۴۸

حل: با توجه به نمودارهای قطب-صفر داده شده می‌توانیم بنویسیم:

$$k_1H_1\left(\frac{3}{4}z\right)=k_2H_2\left(-\frac{1}{2}z\right) \qquad ,(I)$$

حال با اعمال تبدیل عکس تبدیل z و استفاده از خاصیت " تغییر مقیاس در حوزه z " جدول $(1\text{-}10)$ داریم:

$$k_1\left(\frac{4}{3}\right)^n h_1[n]=k_2(-2)^n h_2[n]$$

با مقایسه این رابطه با اطلاع (1) داده شده در مسئله بدست می‌آوریم:

$$g[n]=\frac{h_2[n]}{h_1[n]}=\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad , \quad n\geq 0 \quad , (II)$$

که با جایگذاری در اطلاع (3)، نتیجه خواهد داد:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|g[k]\right|=\left|\frac{k_1}{k_2}\right|\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right|=3$$

$$\Rightarrow \left|\frac{k_1}{k_2}\right|\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left|\frac{k_1}{k_2}\right|\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}=3 \quad \Rightarrow |k_1|=|k_2|$$

یعنی اگر $H_1(z)$ و $H_2(z)$ به‌گونه‌ای باشند که در رابطه (I) داشته باشیم : $|k_1| = |k_2|$ ، در اینصورت g[n] خواهد بود :

$$g[n]=\left(-\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

در غیر اینصورت چنین دنباله‌ای وجود ندارد.

۱۰-۴۹ در خاصیت ۴ بخش ۱۰-۲ گفته شد که اگر $x[n]$ یک دنباله دست‌راستی و دایره $|z|=r_0$ جزء ROC باشد، تمام z های متناهی با $|z|>r_0$ نیز داخل ROC هستند. در آنجا استدلالی شهودی ارائه کردیم. استدلال دقیقتر، دقیقاً شبیه استدلال خاصیت ۴ بخش ۹-۲، در مورد تبدیل لاپلاس است. دنباله دست‌راستی $x[n]$ را در نظر بگیرید

$$x[n]=0\ ,\ n<N_1$$

که برای آن

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|\, r_0^{-n}=\sum_{k=N_1}^{+\infty} |x[n]|\, r_0^{-n}<\infty$$

پس اگر $r_0\le r_1$ آنگاه

$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} |x[n]|\, r_1^{-n}\le A\sum_{n=N_1}^{+\infty} |x[n]|\, r_0^{-n} \qquad (\text{م}۱۰-۴۹-۱)$$

که در آن A یک عدد ثابت مثبت است.

(الف) درستی رابطه (م۱۰-۴۹-۱) را نشان دهید و A را برحسب r_1 و N_1 بدست آورید.

(ب) با توجه به نتیجه بند (الف) نشان دهید که خاصیت ۴ بخش ۱۰-۲ درست است.

(ج) با استدلالی مشابه نشان دهید که خاصیت ۵ بخش ۱۰-۲ درست است.

حل : (الف) فرض می‌کنیم دنباله دست‌راستی $x[n]\,r_0^{-n}$ مطلقاً جمع‌پذیر باشد، یعنی :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\,r_0^{-n}\right| = \sum_{n=N_1}^{+\infty} |x[n]|\, r_0^{-n}<\infty \quad , \quad (I)$$

باید نشان دهیم که دنباله $x[n]\,r_1^{-n}$ نیز به ازای $r_1\ge r_0$ مطلقاً جمع‌پذیر است؛ داریم :

$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} \left|x[n]\,r_1^{-n}\right| = \sum_{n=N_1}^{+\infty} |x[n]|\, r_1^{-n}=\sum_{n=N_1}^{+\infty}\left[|x[n]|\, r_0^{-n}\right]\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$$

روشن است که برای $n>N_1$ همواره داریم : $\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n\le\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1}$ و می‌توان نوشت :

$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} |x[n]|\, r_1^{-n}=\sum_{n=N_1}^{+\infty}\left[|x[n]|\, r_0^{-n}\right]\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n\le\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1}\sum_{n=N_1}^{+\infty}|x[n]|\, r_0^{-n}<\infty \quad , \quad (II)$$

صحت نتیجه‌گیری اخیر با مراجعه به رابطه (I) و با توجه به محدود بودن N_1 معلوم می‌شود. با مقایسه رابطه (II) با رابطه داده شده در مسئله داریم :

$$A=\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1}$$

(ب) نتیجه (II) همچنانکه ذکر شد، مطلقاً جمع‌پذیر بودن دنباله $x[n]\,r_1^{-n}$ را برای $r_1 \geq r_0$ نشان می‌دهد که این همان خاصیت 4 بخش $(10\text{-}2)$ می‌باشد.

(ج) فرض مکنیم $x[n]$ سیگنال دست‌چپی باشد بطوری که در $n>N_2$ داشته باشیم: $x[n]=0$، همچنین فرض کنیم دنباله $x[n]\,r_0^{-n}$ مطلقاً جمع‌پذیر باشد (یعنی دایره $|z|=r_0$ درون ROCی تبدیل z دنباله $x[n]$ باشد):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\,r_0^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{N_2}\left|x[n]\right|r_0^{-n}<\infty \qquad ,(III)$$

باید نشان دهیم که دنباله $x[n]\,r_1^{-n}$ نیز به ازای $0<r_1\leq r_0$ مطلقاً جمع‌پذیر است (یعنی دایره $0<|z|=r_1\leq r_0$ درون ROCی تبدیل z دنباله $x[n]$ می‌باشد)؛ داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{N_2}\left|x[n]\,r_1^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{N_2}\left|x[n]\right|r_1^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{N_2}\left[\left|x[n]\right|r_0^{-n}\right]\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n}$$

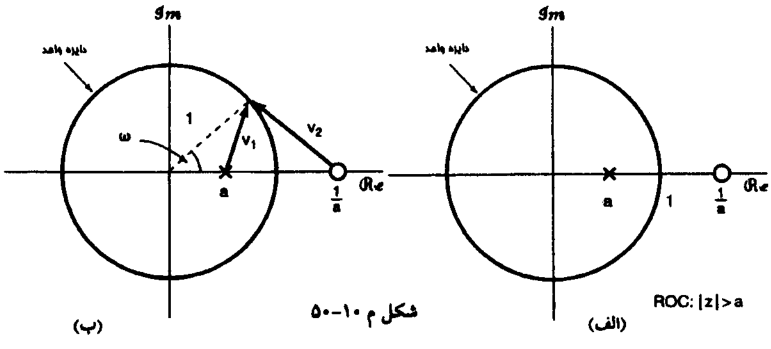
از آنجاکه $r_1\leq r_0$ همواره برای $n<N_2$ خواهیم داشت: $\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n}\leq\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_2}$ و می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=-\infty}^{N_2}\left|x[n]\right|r_1^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{N_2}\left[\left|x[n]\right|r_0^{-n}\right]\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n}\leq\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_2}\sum_{n=-\infty}^{N_2}\left|x[n]\right|r_0^{-n}<\infty \quad ,(IV)$$

درستی نتیجه‌گیری فوق را می‌توان با مراجعه به رابطه (III) و توجه به محدود بودن N_2 پذیرفت. در اینجا نیز داریم: $A=\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_2}$. توجه شود که رابطه (IV) برای تمامی مقادیر $0<r_1\leq r_0$ صادق است؛ همانگونه که می‌دانیم $r_1=0$ زمانی درون ROC واقع خواهد بود که سیستم ضدعلی باشد، یعنی برای $n>0$ داشته باشیم: $x[n]=0$.

۱۰-۵۰ سیستم گسسته در زمانی که نمودار قطب-صفر آن مطابق شکل م۱۰-۵۰(الف) باشد، سیستم مرتبه اول تمام‌گذر خوانده می‌شود، زیرا دامنه پاسخ فرکانسی آن به ازای تمام فرکانسها ثابت است.

(الف) به صورت جبری نشان دهید که $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ ثابت است.



شکل م ۱۰-۵۰

برای اثبات خاصیت فوق به طریق هندسی، نمودار برداری شکل م۱۰-۵۰(ب) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم که طول v_2 با طول v_1، مستقل از مقدار ω، متناسب است.

(ب) با اعمال قانون کسینوسها به مثلثی که اضلاع آن v_1، بردار واحد و برداری به طول aاست، طول v_1 را بیابید.

(ج) طول v_2 را به روش بند (ب) بیابید و نشان دهید که ω هرچه باشد، با طول v_1 متناسب است.

حل : (الف) می‌دانیم اندازه پاسخ فرکانسی $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ برابر است با حاصلضرب اندازه بردارهای صفر $H(z)$بخش بر حاصلضرب اندازه بردارهای قطب آن؛ در اینصورت با در نظر گرفتن این نکته که در روی دایره واحد : $z_u=e^{j\omega}=\cos\omega+j\sin\omega$ ، خواهیم داشت :

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \propto \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|}=\frac{\left|z_u-\frac{1}{a}\right|}{|z_u-a|}=\frac{\left|\cos\omega+j\sin\omega-\frac{1}{a}\right|}{|\cos\omega+j\sin\omega-a|}=\frac{\left[\left(\cos\omega-\frac{1}{a}\right)^2+\sin^2\omega\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(\cos\omega-a)^2+\sin^2\omega\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\left[\frac{1+a^{-2}-2a^{-1}\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[a^{-2}\left(\frac{1+a^2-2a\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{|a|}=cte$$

بدین ترتیب می‌بینیم که دامنه پاسخ فرکانسی این سیستم متناسب با یک مقدار ثابت بوده و بنابراین خود ثابت است .

(ب)

$$|v_1|^2=1^2+a^2-2a\cos\omega \Rightarrow |v_1|=\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}$$

(ج)

$$|v_2|^2=1^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2-2\left(\frac{1}{a}\right)\cos\omega \Rightarrow |v_2|=\sqrt{1+a^{-2}-2a^{-1}\cos\omega}=|a^{-1}|\,|v_1|$$

۱۰-۵۱ دنباله حقیقی $x[n]$با تبدیل zگویای $X(z)$را در نظر بگیرید.

(الف) با توجه به تعریف تبدیل zنشان دهید که

$$X(z)=X^*(z^*)$$

(ب) با توجه به نتیجه بند (الف) نشان دهید که اگر $X(z)$در $z=z_0$قطب(صفر) داشته باشد، حتماً در $z=z_0^*$ نیز قطب (صفر) دارد.

(ج) نتیجه بند (ب) را برای هر یک از رشته‌های زیر امتحان کنید

(۱) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ (۲) $x[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]+\frac{1}{4}\delta[n-2]$

(د) با ترکیب نتایج بند (ب) و مسئله ۱۰-۴۳(ب) نشان دهید که برای یک رشته حقیقی و زوج، اگر $H(z)$ در $z=\rho e^{j\theta}$ قطب(صفر) داشته باشد، آنگاه $H(z)$ در $z=\left(\frac{1}{\rho}\right)e^{j\theta}$ و $z=\left(\frac{1}{\rho}\right)e^{-j\theta}$ نیز

قطب (صفر) دارد.

حل : (الف) با توجه به حقیقی بودن $x[n]$ داریم : $x^*[n]=x[n]$ در اینصورت با استفاده از تعریف تبدیل z می‌نویسیم :

$$X(z^*)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n](z^*)^{-n}\Rightarrow X^*(z^*)=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n](z^*)^{-n}\right)^*$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=X(z)$$

(ب) اگر $X(z)$ دارای صفری در z_0 باشد، خواهیم داشت : $X(z_0)=0$ ، از طرفی با توجه به حقیقی بودن $x[n]$ و از بند (الف) باید داشته باشیم : $X(z_0)=X^*(z_0^*)=0$ یا $X(z_0^*)=0$ ، این بدان معنی است که $X(z)$ در z_0^* نیز صفری دارد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگر z_1 قطبی از $X(z)$ باشد، z_1^* نیز قطب $X(z)$ خواهد بود.

(ج-1) ابتدا نشان می‌دهیم که $x[n]$ زوج است :

$$x^*[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right]^*=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^*\right]^n u^*[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]=x[n]$$

حال برای $X(z)$ داریم :

$$X(z)=Z\{x[n]\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad ,\ |z|>\frac{1}{2}$$

دیده می‌شود که $X(z)$ دارای یک قطب در $z_0=\frac{1}{2}$ و یک صفر در $z_1=\infty$ می‌باشد؛ روشن است که $z_0^*=\left(\frac{1}{2}\right)^*=\frac{1}{2}$ و $z_1^*=\infty^*=\infty$ نیز به ترتیب قطب و صفرهای $X(z)$ هستند.

(ج-2) ابتدا نشان می‌دهیم که $x[n]$ زوج است :

$$x^*[n]=\left[\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]+\frac{1}{4}\delta[n-2]\right]^*$$

$$=\delta^*[n]-\frac{1}{2}\delta^*[n-1]+\frac{1}{4}\delta^*[n-2]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]+\frac{1}{4}\delta[n-2]=x[n]$$

اکنون برای $X(z)$ داریم :

$$X(z)=Z\{x[n]\}=1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}=\frac{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}{z^2}=\frac{\left[z-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]\left[z-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]}{z^2}\quad ,z\neq 0$$

بوضوح ، تابع تبدیل $X(z)$ دارای دو قطب در $z_0=\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{3}}{4}$ و یک صفر مضاعف در $z_1=0$ است.

همینطور معلوم می‌شود که $z_0^*=\frac{1}{4}\mp j\frac{\sqrt{3}}{4}$ و $z_1^*=0$ نیز به ترتیب قطب و صفرهای $X(z)$ هستند.

(د) با توجه به زوج بودن $x[n]$ و نتیجه بند (ب) مسئله (10-43)، $X(z)$ در صورت داشتن قطب (صفر) در $z_0=\rho e^{j\theta}$، در $z_1=\frac{1}{z_0}=\left(\frac{1}{\rho}\right)e^{-j\theta}$ نیز دارای قطب (صفر) خواهد بود. در اینصورت، با توجه به حقیقی بودن $x[n]$ و مراجعه به نتیجه بند (ب) همین مسئله، $X(z)$ باید در $z=z_1^*=\left(\frac{1}{\rho}\right)e^{j\theta}$ نیز قطب (صفر) داشته باشد.

۱۰-۵۲ رشته $x_1[n]$ با تبدیل z $X_1(z)$ و رشته $x_2[n]$ با تبدیل z $X_2(z)$ را در نظر بگیرید، که برای آنها

$$x_2[n]=x_1[-n]$$

نشان دهید که $X_2(z)=X_1\left(\frac{1}{z}\right)$، و به کمک آن نشان دهید که اگر $X_1(z)$ در $z=z_0$ قطب (صفر) داشته باشد، قطب (صفر) $X_2(z)$ در $z=\frac{1}{z_0}$ است.

حل : داریم :

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[-n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1[n](z^{-1})^{-n}=X_1(z^{-1})\Rightarrow X_2(z)=X_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

حال اگر $X_1(z)$ دارای صفری در z_0 باشد، خواهیم داشت: $X_1(z_0)=X_2\left(\frac{1}{z_0}\right)=0$، این بدان معنی است که $X_2(z)$ دارای صفری در $z=\frac{1}{z_0}$ است. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که اگر $X_1(z)$ دارای قطبی در $z=z_0$ باشد، $X_2(z)$ نیز قطبی در $z=\frac{1}{z_0}$ خواهد داشت.

۱۰-۵۳ (الف) این خواص مندرج در جدول ۱۰-۱ را ثابت کنید :

(۱) خاصیت بخش ۱۰-۵-۲ (۲) خاصیت بخش ۱۰-۵-۳

(۳) خاصیت بخش ۱۰-۵-۴

(ب) اگر $X(z)$ تبدیل z $x[n]$ و R_x ناحیه همگرایی آن باشد، تبدیل z و ناحیه همگرایی دنباله‌های زیر را بر حسب $X(z)$ و R_x بدست آورید.

(۱) $x^*[n]$ (۲) $z_0^n x[n]$، که در آن z_0 یک عدد مختلط است.

حل : (الف-1) فرض کنیم تبدیل z دنباله $x[n]$ در ناحیه $\alpha<|z|<\beta$ همگرا باشد، یعنی :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}\quad,\quad \alpha<|z|<\beta$$

در اینصورت خواهیم داشت :

$$Z\left\{x[n-n_0]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n-n_0]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-(n+n_0)}=z^{-n_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=z^{-n_0}X(z)$$

عبارت فوق عموماً زمانی همگرا می‌شود که $X(z)$ همگرا شود، مگر در حالات خاصی که عبارت z^{-n_0}، موجب حذف یا افزودن $z=0$ و یا $z=\infty$ به ROC شود.

(الف-2) دوباره فرض می‌کنیم :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad , \ \alpha<|z|<\beta$$

در اینصورت :

$$Z\left\{a^n x[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x[n]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(a^{-1}z\right)^{-n}=X\left(a^{-1}z\right) \quad \alpha<\left|a^{-1}z\right|<\beta \ (or \ \alpha|a|<|z|<\beta|a|)$$

(الف-3) با فرض همگرایی $X(z)$ در بازه $\alpha<|z|<\beta$ خواهیم داشت :

$$Z\{x[-n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](z^{-1})^{-n}=X(z^{-1}) \quad , \quad \alpha<\left|z^{-1}\right|<\beta \ \left(or \ \frac{1}{\beta}<|z|<\frac{1}{\alpha}\right)$$

(ب-1) با فرض همگرایی $X(Z)$ در فاصله $\alpha<|z|<\beta$، داریم :

$$Z\left\{x^*[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]z^{-n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(z^*\right)^{-n}\right]^*$$

$$=X^*(z^*) \quad , \quad \alpha<\left|z^*\right|<\beta \quad (or \ \alpha<|z|<\beta)$$

(ب-۲) با فرض همگرایی $X(z)$ در فاصله $\alpha<|z|<\beta$، داریم :

$$Z\left\{z_0^n x[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(z_0^n x[n]\right)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(z_0^{-1}z\right)^{-n}$$

$$=X\left(z_0^{-1}z\right) \quad , \quad \alpha<\left|z_0^{-1}z\right|<\beta \quad (or \ \alpha\left|z_0\right|<|z|<\beta\left|z_0\right|)$$

۱۰-۵۴ در بخش ۱۰-۵-۹ قضیه مقدار اولیه را برای دنباله‌های علی بیان و ثابت کردیم.

(الف) قضیه متناظری برای $x[n]$های ضدعلی (یعنی رشته‌ای که به ازای $n>0$، $x[n]=0$) بیان و ثابت کنید.

(ب) نشان دهید اگر به ازای $n<0$، $x[n]=0$، آنگاه

$$x[1]=\lim_{z\to\infty} z\left(X(z)-x[0]\right)$$

حل : (الف) برای دنباله‌های ضدعلی داریم :

$$\left\{n>0 \ : \ x[n]=0\right\} \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0} x[n]z^{-n}=x[0]z^0+x[-1]z^1+\ldots$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} X(z)=\lim_{z\to 0}\left\{x[0]+x[-1]z+x[-2]z^2+\dots\right\}=x[0]$$

(ب) برای دنباله‌های علی داریم :

$$\left\{n<0\ :\ x[n]=0\right\}\Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}=x[0]z^0+x[1]z^{-1}+\dots$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to\infty} z(X(z)-x[0])=\lim_{z\to\infty} z\left[\left(x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\dots\right)-x[0]\right]$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left(x[1]+x[2]z^{-1}+x[3]z^{-2}+\dots\right)=x[1]$$

۱۰-۵۵ فرض کنید $x[n]$ یک رشته علی است (یعنی در $n<0$، $x[n]=0$) و $x[0]$ غیرصفر و متناهی است.

(الف) به کمک قضیه مقدار اولیه نشان دهید که $X(z)$ در $z=\infty$ صفر یا قطب ندارد.

(ب) به کمک نتیجه بند (الف) نشان دهید که تعداد قطبهای متناهی $X(z)$ با تعداد صفرهای متناهی آن مساوی است.

حل : (الف) با توجه به قضیه مقدار اولیه داریم: $\lim_{z\to\infty} X(z)=x[0]$، از طرفی می‌دانیم $x[0]$ مقداری غیرصفر و متناهی است، بنابراین $X(z)$ در $z=\infty$ قطب یا صفری ندارد.

(ب) می‌دانیم تعداد کل صفرهای $X(z)$ (متناهی و نامتناهی) با تعداد کل قطب‌های آن (متناهی و نامتناهی) برابر است، در اینصورت با توجه به نتیجه بند (الف) که می‌گوید $X(z)$ هیچ قطب و صفر نامتناهی ندارد، درمی‌یابیم که تعداد قطب و صفرهای متناهی $X(z)$ مساوی‌اند.

۱۰-۵۶ در بخش ۱۰-۵-۷ خاصیت کانولوشن تبدیل z را بیان کردیم. برای اثبات این خاصیت از جمع کانولوشن زیر شروع می‌کنیم

$$x_3[n]=x_1[n]*x_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]x_2[n-k] \qquad \text{(م۱۰-۵۶-۱)}$$

(الف) با گرفتن تبدیل z از دو طرف معادله (م۱۰-۵۶-۱) واستفاده از معادله (۱۰-۳) نشان دهید که

$$X_3(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]\hat{X}_2(z)$$

که در آن $\hat{X}_2(z)$ تبدیل $x_2[n-k]$ است.

(ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) و خاصیت ۱۰-۵-۲ جدول ۱۰-۱ نشان دهید که

$$X_3(z)=X_2(z)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]z^{-k}$$

(ج) با توجه به نتیجه بند (ب) نشان دهید که

$$X_3(z)=X_1(z)X_2(z)$$

که همان معادله (۱۰-۸۱) است.

حل : (الف)

$$X_3(z)=Z\left\{x_3[n]\right\}=Z\left\{x_1[n]*x_2[n]\right\}=Z\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]x_2[n-k]\right\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k].Z\left\{x_2[n-k]\right\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]\hat{X}_2(z) \qquad ,\ (I)$$

که در آن :

$$\hat{X}_2(z)=Z\left\{x_2[n-k]\right\} \qquad ,\ (II)$$

(ب) با مراجعه به خاصیت انتقال زمانی تبدیل z رابطه (II) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود :

$$\hat{X}_2(z)=Z\left\{x_2[n-k]\right\}=z^{-k}Z\left\{x_2[n]\right\}=z^{-k}X_2(z)$$

که با جایگذاری در رابطه (I) بدست می‌دهد :

$$X_3(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]\left(z^{-k}X_2(z)\right)=X_2(z)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]z^{-k} \qquad ,\ (III)$$

(ج) اما مجموع موجود در عبارت (III)، بوضوح تبدیل z دنباله $x_1[n]$ است. بنابراین :

$$X_3(z)=X_2(z)X_1(z)=X_1(z)X_2(z)$$

۱۰-۵۷ فرض کنید

$$X_1(z)=x_1[0]+x_1[1]z^{-1}+\ldots+x_1[N_1]\ z^{-N_1}$$

$$X_2(z)=x_2[0]+x_2[1]z^{-1}+\ldots+x_2[N_2]\ z^{-N_2}$$

تعریف می‌کنیم

$$Y(z)=X_1(z)X_2(z)$$

و

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{M}y[k]z^{-k}$$

(الف) M را برحسب N_1 و N_2 تعیین کنید.

(ب) با ضرب چندجمله‌ایها $y[0]$، $y[1]$ و $y[2]$ را بیابید.

(ج) با ضرب چندجمله‌ایها نشان دهید که در $0\le k\le M$

$$y[k]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_1[m]x_2[k-m]$$

حل : (الف،ب وج)

$$Y(z)=X_1(z)X_2(z)=\left(x_1[0]+x_1[1]z^{-1}+\ldots+x_1[N_1]z^{-N_1}\right)\times\left(x_2[0]+x_2[1]z^{-1}+\ldots+x_2[N_2]z^{-N_2}\right)$$

$$=\left(x_1[0]x_2[0]\right)+\left(x_1[1]x_2[0]+x_1[0]x_2[1]\right)z^{-1}+\ldots+\left(x_1[k]x_2[0]+x_1[k-1]x_2[1]\right.$$

$$+\ldots+x_1[0]x_2[k]\Big)z^{-k}+\ldots+\Big(x_1[N_1]x_2[N_2]\Big)z^{-(N_1+N_2)}=\sum_{k=0}^{M}y[k]z^{-k} \quad , \quad (I)$$

از رابطه (I)، می توان دید :

$$M=N_1+N_2$$
$$y[0]=x_1[0]x_2[0]$$
$$y[1]=x_1[1]x_2[0]+x_1[0]x_2[1]$$
$$y[2]=x_1[2]x_2[0]+x_1[1]x_2[1]+x_1[0]x_2[2]$$

همینطور از رابطه (I) داریم :

$$y[k]=x_1[k]x_2[0]+x_1[k-1]x_2[1]+\ldots+x_1[0]x_2[k]=\sum_{m=0}^{k}x_1[m]x_2[k-m] \quad , \quad (II)$$

حال با توجه به اینکه به ازای $m<0$ و $m>k$، به ترتیب داریم : $x_1[m]=0$ و $x_2[k-m]=0$ می توان بدون از دست دادن اعتبار مجموع (II) نوشت :

$$y[k]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_1[m]x_2[k-m]$$

۱۰–۵۸ سیستم مینیمم فاز سیستمی است که علی و پایدار بوده، سیستم وارون آن نیز علی و پایدار باشد. قیدهای لازم بر روی محل قطبها و صفرهای تابع سیستم یک سیستم مینیمم فاز را در صفحه z تعیین کنید.

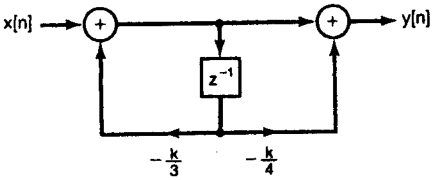
حل : می‌دانیم برای آنکه سیستم مرتبط با تابع تبدیل $H(z)$ علی باشد، ROCی آن باید خارج یک دایره بوده و شامل بینهایت باشد، بنابراین درجه چندجمله‌ای صورت نباید از درجه چندجمله‌ای مخرج بیشتر شود. به عبارت دیگر تعداد قطب‌های محدود $H(z)$ نباید از تعداد صفرهای محدودش کمتر باشد. همچنین می‌دانیم یک سیستم علی وقتی پایدار است که تمام قطب‌هایش درون دایره واحد قرار گیرند(تا دایره واحد درون ROC واقع شود.) بدین ترتیب از علی و پایدار بودن $H(z)$ نتیجه می‌گیریم که تمام قطبهایش درون دایره واحد بوده و تعداد قطب‌های محدود آن از تعداد صفرهای محدودش کمتر نمی‌باشد. از طرفی می‌دانیم سیستم معکوس سیستم مرتبط با $H(z)$، سیستمی است که قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل آن به ترتیب در محل صفرها و قطب‌های $H(z)$ واقع می‌باشند، این سیستم هم، وقتی پایدار خواهد بود که تمام قطب‌هایش (که متناظر با صفرهای $H(z)$ هستند) درون دایره واحد بوده و تعداد قطب‌های محدود آن از تعداد صفرهای محدودش کمتر نباشد. این گفته معادل این است که بگوئیم تمامی صفرهای $H(z)$ درون دایره واحد بوده و تعداد صفرهای محدود $H(z)$ از تعداد قطب‌های محدودش کمتر نباشد؛ نتیجه کلی از گفته‌های فوق اینکه، $H(z)$ وقتی تابع تبدیل یک سیستم مینیمم فاز خواهد بود که تمام صفر و قطب‌های آن درون دایره واحد بوده و بعلاوه تعداد این قطب و صفرها با هم برابر باشند.

۱۰-۵۹ فیلتر دیجیتال شکل م ۱۰-۵۹ را در نظر بگیرید.

(الف) $H(z)$ این فیلتر علی را بیابید. نمودار قطب-صفر آن را رسم کرده، ناحیه همگرایی‌اش را تعیین کنید.

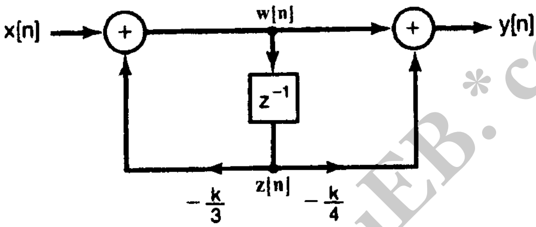
(ب) به ازای چه مقادیری از k سیستم پایدار است؟

(ج) اگر $k=1$ و به ازای تمام مقادیر n داشته باشیم $x[n]=\left(\frac{2}{3}\right)^n$، $y[n]$ را بیابید.



شکل م ۱۰-۵۹

حل : (الف) این فیلتر را دوباره در شکل زیر می‌بینید :



با توجه به این شکل می‌توان در حوزه z نوشت :

$$Y(z)=W(z)-\frac{k}{4}Z(z)$$

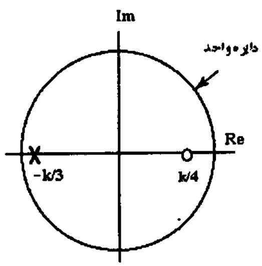
$$Z(z)=z^{-1}W(z)$$

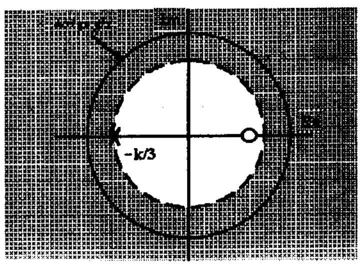
$$W(z)=X(z)-\frac{k}{3}Z(z)$$

حال می‌توان با حذف $W(z)$ و $Z(z)$ میان روابط بالا، تابع تبدیل این فیلتر را بدست آورد :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{k}{4}z^{-1}}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}$$

نمودار قطب-صفر و ناحیه همگرایی این سیستم را در شکل‌های (a) و (b) نشان داده‌ایم، توجه شود که ناحیه همگرایی این فیلتر به دلیل علی بودنش خارج دایره‌ای است که شعاع آن با اندازه بزرگترین قطب $H(z)$ برابر است (یعنی : $|z| > \left|\frac{k}{3}\right|$)





(ب) با توجه به شکل (b) روشن می‌شود که برای پایداری سیستم (قرارگرفتن دایره واحد در ROC) کافیست داشته باشیم :

$$\left|\frac{k}{3}\right| < 1 \rightarrow |k| < 3$$

(ج) با توجه به اینکه نمایی‌های مختلط به شکل z_0^n توابع ویژه سیستم‌های LTI بوده و دارای مقدار ویژه $H(z_0)$ هستند، داریم :

$$x[n]=\left(\frac{2}{3}\right)^n = z_0^n \Big|_{z_0=\frac{2}{3}} \Rightarrow y[n]=H(z_0)z_0^n \Big|_{z_0=\frac{2}{3}}$$

$$=H\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left[\frac{1-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

۱۰-۶۰ سیگنال $x[n]$ با تبدیل z یکطرفه $\mathscr{X}(z)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تبدیل z یکطرفه $y[n]=x[n+1]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\mathscr{Y}(z)=z\mathscr{X}(z)-zx[0]$$

حل :

$$\mathscr{Y}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} y[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty} x[n+1]z^{-n}=\sum_{n=1}^{+\infty} x[n]z^{-(n-1)}=z\sum_{n=1}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$=z\left[x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]z^{-3}+\dots\right]=z\left[\left(x[0]z^0+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]z^{-3}+\dots\right)\right.$$

$$\left.-x[0]z^0\right]=z\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}-x[0]\right]=z[\mathscr{X}(z)-x[0]]=z\mathscr{X}(z)-zx[0]$$

۱۰-۶۱ $\mathscr{X}(z)$ تبدیل z یکطرفه $x[n]$ است. تبدیل z یکطرفه سیگنالهای زیر را برحسب $\mathscr{X}(z)$ بنویسید :

(الف) $x[n+3]$ (ب) $x[n-3]$ (ج) $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

حل : (الف)

$$y[n]=x[n+3] \Rightarrow \mathscr{Y}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} x[n+3]z^{-n}=x[3]z^0+x[4]z^{-1}+x[5]z^{-2}+\dots$$

$$=\left(x[0]z^3+x[1]z^2+x[2]z^1+x[3]z^0+\dots\right)-x[0]z^3-x[1]z^2-x[2]z^1$$

$$=z^3\left[x[0]z^0+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\dots\right]-x[0]z^3-x[1]z^2-x[2]z$$

$$=z^3\sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}-x[0]z^3-x[1]z^2-x[2]z=z^3\mathscr{X}(z)-x[0]z^3-x[1]z^2-x[2]z$$

(ب)

$$y[n]=x[n-3]\Rightarrow \mathscr{Y}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} x[n-3]z^{-n}=x[-3]z^{0}+x[-2]z^{-1}+x[-1]z^{-2}+x[0]z^{-3}+x[1]z^{-4}+\dots$$

$$=x[-3]+x[-2]z^{-1}+x[-1]z^{-2}+z^{-3}\left[x[0]z^{0}+x[1]z^{-1}+\dots\right]=x[-3]+x[-2]z^{-1}+x[-1]z^{-2}+z^{-3}\mathscr{X}(z)$$

(ج) ابتدا داریم :

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]=x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]\ \Rightarrow\ y[n]=x[n]+y[n-1]$$

در اینصورت با اعمال تبدیل z یکطرفه به طرفین رابطه اخیر و با در نظر داشتن جدول $(3\text{-}10)$ خواهیم داشت :

$$\mathscr{Y}(z)=\mathscr{X}(z)+\{z^{-1}\mathscr{Y}(z)+y[-1]\}\ \Rightarrow\ \mathscr{Y}(z)=\frac{\mathscr{X}(z)}{1-z^{-1}}+\frac{y[-1]}{1-z^{-1}}$$

که در آن :

$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]=\sum_{k=1}^{+\infty} x[-k]$$

۱۰–۶۲ دنباله خودهمبستگی $x[n]$، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi_{xx}[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,x[n+k]$$

تبدیل z $\phi_{xx}[n]$ را برحسب تبدیل z دنباله $x[n]$ بیان کنید.

حل :

$$\Phi_{xx}(z)=Z\left\{\phi_{xx}[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\phi_{xx}[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]x[n+k]\right\}z^{-n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[x[k]\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[n+k]z^{-n}\right)\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[x[k]\,Z\{x[n+k]\}\right]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[x[k]\left(z^{k}X(z)\right)\right]=X(z)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]z^{k}=X(z)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k](z^{-1})^{-k}=X(z)X(z^{-1})$$

۱۰–۶۳ با استفاده از بسط سری توانی زیر

$$\log(1-w)=-\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{w^{i}}{i}\quad,\quad |w|<1$$

عکس تبدیل z دو تابع زیر را بیابید :

(الف) $X(z)=\log(1-2z)\ ,\ |z|<\frac{1}{2}$ (ب) $X(z)=\log\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\ ,\ |z|>\frac{1}{2}$

حل : (الف) از آنجا که ناحیه همگرایی $X(z)$ درون یک دایره است $\left(|z|<\frac{1}{2}\right)$، سیگنال $x[n]$

باید یک سیگنال دست‌چپی باشد، با توجه به بسط سری توانی داده شده می‌نویسیم :

$$X(z)=\log(1-2z)=-\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(2z)^i}{i}=-\left(2z+\frac{2^2z^2}{2}+\frac{2^3z^3}{3}+\dots\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}\quad\Rightarrow\quad x[n]=\frac{2^{-n}}{n}u[-n-1]$$

(ب) با توجه به اینکه ناحیه همگرایی $X(z)$ خارج یک دایره است $\left(|z|>\frac{1}{2}\right)$، دنباله $x[n]$ باید دست‌راستی باشد؛ با استفاده از سری توانی داده شده می‌نویسیم :

$$X(z)=\log\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=-\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^i}{i}=-\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1z^{-1}}{1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2z^{-2}}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3z^{-3}}{3}+\dots\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}\quad\Rightarrow\quad x[n]=-\frac{2^{-n}}{n}u[n-1]$$

۱۰-۶۴ با مشتقگیری از $X(z)$ و استفاده از خواص مناسب تبدیل z، عکس تبدیل z هر یک از توابع زیر را بیابید

(الف) $X(z)=\log(1-2z)\ ,\ |z|<\frac{1}{2}$ (ب) $X(z)=\log\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\ ,\ |z|>\frac{1}{2}$

نتایج بدست آمده را با نتایج مسئله ۱۰-۶۳ که از روش بسط به سری توانی بدست آوردیم، مقایسه کنید.

حل : (الف) ابتدا داریم :

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\left(\log(1-2z)\right)=\frac{-2}{1-2z}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad,\quad |z|<\frac{1}{2}$$

اکنون با توجه به خاصیت مشتق‌گیری در حوزه z جدول (1-10) می‌توان نوشت :

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=Z\{nx[n]\}\ \Rightarrow\ nx[n]=Z^{-1}\left\{-z\frac{dX(z)}{dz}\right\}$$

$$\Rightarrow x[n]=\frac{1}{n}Z^{-1}\left\{-z\left[\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{n}Z^{-1}\left\{\frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\ |z|<\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]=\frac{2^{-n}}{n}u[-n-1]$$

(ب) ابتدا می‌نویسیم :

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\left(\log\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\right)=\frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z|>\frac{1}{2}$$

در اینصورت با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری در حوزه z خواهیم داشت :

$$x[n]=\frac{1}{n}Z^{-1}\left\{-z\frac{dX(z)}{dz}\right\}=\frac{1}{n}Z^{-1}\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} , |z|>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left[-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]\right]=-\frac{2^{-n}}{n}u[n-1]$$

۱۰-۶۵ تبدیل دو خطی نگاشتی برای یافتن تبدیل z گویای $H_d(z)$ از تبدیل لاپلاس گویای $H_c(s)$ است. این نگاشت دو خاصیت مهم دارد :

۱. اگر $H_c(s)$ تبدیل لاپلاس یک سیستم LTI علی و پایدار باشد، $H_d(z)$ تبدیل z یک سیستم LTI علی و پایدارست.

۲. بعضی مشخصات مهم $|H_c(j\omega)|$ در $|H_d(e^{j\omega})|$ حفظ می‌شود.

در این مسئله خاصیت دوم را برای فیلترهای تمام‌گذر نشان می‌دهیم.

(الف) فرض کنید

$$H_c(s)=\frac{a-s}{s+a}$$

که در آن a عددی حقیقی و مثبت است. نشان دهید که

$$|H_c(j\omega)|=1$$

(ب) حال تبدیل دو خطی را به $H_c(s)$ اعمال کرده، $H_d(z)$ را می‌یابیم.

$$H_d(z)=H_c(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

نشان دهید که $H_d(z)$ یک قطب (داخل دایره واحد) و یک صفر (خارج دایره واحد) دارد.

(ج) نشان دهید که برای $H_d(z)$ بدست آمده در بند (ج) داریم $|H_d(e^{j\omega})|=1$

حل : (الف)

$$H_c(j\omega)=H_c(s)\Big|_{s=j\omega}=\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\Rightarrow|H_c(j\omega)|=\left|\frac{a-j\omega}{a+j\omega}\right|=\frac{\sqrt{a^2+\omega^2}}{\sqrt{a^2+\omega^2}}=1$$

(ب)

$$H_d(z)=H_c(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{a-\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}{a+\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}=\frac{(a-1)+(a+1)z^{-1}}{(a+1)+(a-1)z^{-1}}=\left[\frac{a-1}{a+1}\right]\left[\frac{1+\left(\frac{a+1}{a-1}\right)z^{-1}}{1+\left(\frac{a-1}{a+1}\right)z^{-1}}\right]$$

این تابع تبدیل دارای صفری در $z=-\frac{a+1}{a-1}$ و قطبی در $z=-\frac{a-1}{a+1}$ است. با توجه به اینکه a عددی حقیقی و مثبت فرض شده است، خواهیم داشت: $\left|\frac{a+1}{a-1}\right|>1$ ؛ بنابراین این صفر وقطب به ترتیب در برون و درون دایره واحد قرار دارند.

(ج) نمودار قطب-صفر این سیستم، مشابه نمودار قطب-صفر مسئله (50-10) می‌باشد، در آنجا نشان دادیم که چنین سیستمی یک سیستم تمام‌گذر است ،یعنی :

$$\left|H_d\left(e^{j\omega}\right)\right|=1$$

۱۰-۶۶ تبدیل دو خطی معرفی شده در مسئله قبل را می‌توان برای ساختن فیلتر گسسته در زمانی به کار برد که اندازه پاسخ فرکانسی آن با اندازه پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین‌گذر مشابه باشد. در این مسئله این تشابه را با یک مثال نشان می‌دهیم، تابع سیستم $H_c(s)$ فیلتر را از نوع باتروث مرتبه دوم برمی‌گزینیم

(الف) فرض کنید

$$H_d(z)=H_c(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

نشان دهید که

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=H_c\left(j\tan\frac{\omega}{2}\right)$$

(ب) داریم

$$H_c(s)=\frac{1}{\left(s+e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s+e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

و فیلتر متناظر با آن علی است. نشان دهید که $H_c(0)=1$ ، $\left|H_c(j\omega)\right|$ با افزایش ω به طور یکنوا کاهش می‌یابد، $\left|H_c(j)\right|^2=\frac{1}{2}$ (یعنی فرکانس نصف توان $\omega_c=1$ است و $H_c(\infty)=0$).

(ج) نشان دهید که اگر $H_d(z)$ با اعمال تبدیل دو خطی به $H_c(s)$ بند (ب) بدست آید می‌توان مطالب زیر را در مورد $H_d(z)$ و $H_d\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کرد.

۱. $H_d(z)$ تنها دو قطب دارد که هر دو داخل دایره واحدند.

۲. $H_d\left(e^{j0}\right)=1$

۳. با افزایش ω از 0 به π، $\left|H_d\left(e^{j\omega}\right)\right|$ به طور یکنوا کم می‌شود.

۴. فرکانس نصف توان $H_d\left(e^{j\omega}\right)$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

حل : (الف) در روی دایره واحد داریم :

$$s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\bigg|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}=\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}+e^{-j\frac{\omega}{2}}}=\frac{2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}=j\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

در اینصورت می‌توان دید :

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=H_d(z)\bigg|_{z=e^{j\omega}}=H_c(s)\bigg|_{s=\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}}=H_c\left(j\tan\frac{\omega}{2}\right)$$

(ب-i)

$$H_c(0)=\frac{1}{\left(s+e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(s+e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}\bigg|_{s=0}=\frac{1}{e^{j\frac{\pi}{4}}\times e^{-j\frac{\pi}{4}}}=1$$

(ب-ii) برای اینکه نشان دهیم $|H_c(j\omega)|$ بطور یکنوا با افزایش ω کاهش می‌یابد، می‌نویسیم:

$$H_c(j\omega)=\frac{1}{\left(j\omega+e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(j\omega+e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}=\frac{1}{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+j\left(\omega+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+j\left(\omega-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}$$

$$\Rightarrow\ |H_c(j\omega)|^2=\frac{1}{\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\omega+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\omega-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{\left[\omega^2+1+\omega\sqrt{2}\right]\left[\omega^2+1-\omega\sqrt{2}\right]}\qquad,\qquad (I)$$

$$\Rightarrow\frac{d\,|H_c(j\omega)|^2}{d\omega}=\frac{-4\omega^3}{\left[\omega^2+1+\sqrt{2}\omega\right]^2\left[\omega^2+1-\sqrt{2}\omega\right]^2}$$

به سادگی دیده می‌شود که برای $\omega>0$، رابطه اخیر همواره مقداری منفی است. بنابراین مجذور و در نتیجه خود $|H(j\omega)|$ برای $\omega>0$ بطور یکنوا نزولی خواهند بود.

(ب-iii) از رابطه (I) داریم :

$$|H_c(j)|^2=|H_c(j\omega)|^2\big|_{\omega=1}=\frac{1}{\left[1^2+1+\sqrt{2}\right]\left[1^2+1-\sqrt{2}\right]}=\frac{1}{2}$$

(ب-iv) دوباره از رابطه (I) می‌توان نوشت :

$$|H_c(j\infty)|^2=\lim_{\omega\to\infty}|H_c(j\omega)|^2=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\omega^4}=0$$

(ج-1) بهتر است ابتدا قطب‌های $H_c(s)$ را بدست آورده و سپس با استفاده از رابطه تبدیل دوخطی، قطب‌های $H_d(z)$ را محاسبه کنیم؛ بوضوح می‌بینیم که $H_c(s)$ دارای دو قطب در $s_1=-e^{j\frac{\pi}{4}}$ و $s_2=-e^{-j\frac{\pi}{4}}$ می‌باشد. در اینصورت :

$$s_1=\frac{1-z_1^{-1}}{1+z_1^{-1}}=-e^{j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_1=\frac{1-e^{j\frac{\pi}{4}}}{1+e^{j\frac{\pi}{4}}}=-j\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

همینطور :

$$s_2=\frac{1-z_2^{-1}}{1+z_2^{-1}}=-e^{-j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_2=\frac{1-e^{-j\frac{\pi}{4}}}{1+e^{-j\frac{\pi}{4}}}=j\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

بنابراین روشن است که تبدیل $H_d(z)$ تنها دو قطب داردو هر دو قطب درون دایره واحد هستند $\left(|z_1|=|z_2|=\left|\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|<1\right)$.

(ج-2) با توجه به نتیجه بند (ب-i) خواهیم داشت :

$$H_d\left(e^{j0}\right)=H_d\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=0}=H_c\left(j\tan\frac{\omega}{2}\right)\Big|_{\omega=0}=H_c(j0)=1$$

(ج-3) ابتدا مشاهده می‌کنیم که با افزایش ω از 0 تا π تابع $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$ به طور یکنوا افزایش می‌یابد :

$$\frac{d\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)}{d\omega}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)>0$$

از طرفی با توجه به بند (ب-ii) می‌دانیم که $|H_c(j\omega)|$ با افزایش ω به طور یکنوا کاهش می‌یابد، بدین ترتیب درمی‌یابیم که با افزایش ω از 0 تا π، $\left|H_d\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|H_c\left(j\tan\frac{\omega}{2}\right)\right|$ بطور یکنوا کاهش می‌یابد.

(ج-4) در بند (ب-iii) دیدیم که فرکانس نصف توان برای تبدیل $H_c(j\omega)$، $\omega_c=1$ است. این فرکانس متناظر است با :

$$s=j\omega_c=j=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow z=\frac{1+j}{1-j}=+j=e^{j\omega_0} \Rightarrow \omega_0=\frac{\pi}{2}$$